Investigación e Innovación en Matemática Educativa

https://doi.org/10.46618/iime.120 ISSN: 2594-1046

DESARROLLO DE UNA APLICACIÓN PARA SU USO EN LA ENSEÑANZA DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

DEVELOPMENT OF AN APPLICATION FOR USE IN TEACHING THE LAPLACE TRANSFORM

Jesús Antonio Moreno Márquez
Tecnológico Nacional de México, Campus Chihuahua II. México
m13550234@chihuahua2.tecnm.mx

Alberto Camacho Ríos
Tecnológico Nacional de México, Campus Chihuahua II. México
alberto.cr@chihuahua2.tecnm.mx

Marisela Ivette Caldera Franco
Tecnológico Nacional de México, Campus Chihuahua II. México
marisela.cf@chihuahua2.tecnm.mx

Jesús Arturo Alvarado Granadino
Tecnológico Nacional de México, Campus Chihuahua II. México
jesus.ag@chihuahua2.tecnm.mx

RESUMEN

Se muestra y analiza la creación de un desarrollo tecnológico diseñado en lenguaje de programación Python que resuelve ejercicios relacionados con la Transformada de Laplace. Para su elaboración, y desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico, fue construida una organización matemática devenida de las técnicas utilizadas en actividades escolares, conveniente para la transposición informática de los elementos colocados en su interfaz. Se privilegió como técnica el propio teorema que determina el concepto de transformada. El proceso informático causa un fenómeno didáctico inverso mediante el cual se naturaliza la definición de transformada, por encima de las técnicas que de ella se desprenden. La aplicación resuelve todos los ejercicios relacionados con el tema contenidos en los textos de uso.

Palabras clave: Efecto transpositivo, Fidelidad, TAD,Transformada de Laplace, Ostensivo.

Recibido: Octubre 5, 2021. Aceptado: Marzo 8, 2022. Publicado: Marzo 25, 2022.

Esta obra está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-No Comercial 4.0 Internacional

ABSTRACT

In this paper, a technological development written in the Python programming language is analyzed and discussed. The application solves problems in the realm of the Laplace Transform. A novel mathematical construct was devised employing the Anthropological Theory of the Didactic (ATD) and considering the techniques often employed in the classroom, which are convenient for the computer transposition of the input data. The main applied technique was the original theorem that gives birth to the concept of Transform. It was observed that the computer process induces an inverse didactic phenomenon by which the definition of Transform is naturalized, beyond the well-known didactic techniques. The application was able to solve all the problems available in the used textbooks.

Keywords: Transpositive effect, Fidelity, ATD Laplace transform, Ostensive.

1. INTRODUCCIÓN

Actualmente el uso de tecnologías de la información y comunicación en el salón de clase, en las asignaturas de matemáticas, permite que alumnos y profesores de las carreras de Ingeniería en Sistemas Computacionales (ISC) del Tecnológico Nacional de México (TecNM) cuenten con herramientas que les ayuden a mejorar la enseñanza y aprendizaje de esta disciplina. En la asignatura de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO), del sistema educativo mencionado, hace falta un software gratuito, sin publicidad y sin la necesidad de que el usuario esté conectado a internet; además, que facilite la resolución de ejercicios y problemas de aplicación que se resuelven con transformada de Laplace.

Las aplicaciones existentes que resuelven ejercicios de este tema no muestran los pasos seguidos para llegar a la solución. La mayoría expone solo el resultado, lo que ocasiona dudas y confusión en los alumnos sobre cómo se llegó a este último.

Ese tipo de aplicaciones, por lo general, tiene costo debido al pago de una licencia para utilizarlos. En los casos de software gratuito, las aplicaciones incluyen publicidad, lo cual provoca que el usuario pueda perder de vista la información o se distraiga. Incluso, la mayoría del software se encuentra en páginas web, por lo que solo se accede a ellos con conexión a internet. Además, algunos tienen programado sólo una cantidad limitada de ejercicios.

1.1 La Transformada en el aula

La transformada de Laplace, definida comúnmente como la integral impropia

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} t^n dt\, , t \geq 0$$

forma parte del cálculo operacional que ayuda a resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes al transformarlas del modelo diferencial en ecuaciones algebraicas, actividad cotidiana para un ingeniero electrónico incluso para estudiantes de otras carreras como ISC. En los sistemas educativos la transformada se aprecia como herramienta potente que ayuda en la resolución de la ecuación diferencial y se aborda como una asignatura cuyos conocimientos son utilizados en diferentes ramas de la ingeniería, como la teoría de control, señales y sistemas, mecánica de sólidos, entre otras. En los cursos de EDO que modelan circuitos eléctricos, o bien sistemas masa-resorte, los coeficientes de la ecuación homogénea representan los valores constantes del circuito o sistema que modelan, mientras que el término independiente de la ecuación no homogénea representa la señal de entrada del circuito, fuerza que impulsa a la masa m en el sistema masa-resorte, por ejemplo:

$$mX''(t) + kX(t) = f(t)$$

La función incógnita $X(t)$ representa la señal de salida del circuito en un modelo de oscilaciones en el sistema masa-resorte, la cual se desea determinar (Camarena, 2001).

Tanto los circuitos eléctricos como los sistemas masa-resorte, forman parte de los que se reconocen en los cursos de EDO del TecNM como “problemas de aplicación”. Estos últimos son la razón de ser de la enseñanza de la matemática, partiéndose del supuesto que esta disciplina es un apoyo para su resolución. A pesar de ese interés, los tiempos didácticos para enseñar completos los temas del curso, obligan a desdeñar la resolución de ese tipo de problemas. Adicionalmente, la transformada de Laplace se considera un tema difícil de dominar para los estudiantes (Holmberg y Bernhard, 2017), principalmente por la cantidad de actividades que involucra la resolución de la EDO que modela algún sistema variacional.

Según González (2006) una de las razones de esa dificultad se encuentra en que a los estudiantes "les resulta difícil conceptualizar y comprender lo que están haciendo cuando usan la transformada de Laplace" (p. 61).

Con estas dificultades de enseñanza, en el artículo nos preocupamos porque la resolución de EDO, a través del método operacional, cuente con herramientas tecnológicas que lo agilicen; con ello se priorizaría la resolución de problemas de aplicación, y se evitaría el uso de tablas que contienen la transformación y antitransformación de funciones, útiles en los cursos tradicionales de EDO. El uso de software educativo en forma de aplicaciones *app* ayuda a llevar un control de la resolución del problema, a la vez que reduce el trabajo operativo de las ecuaciones al transferir a la interfaz de la herramienta las técnicas matemáticas que los estudiantes y profesores utilizan, a mano, en los cursos. Por lo tanto, nuestro problema no son en lo inmediato los problemas cognitivos y didácticos que la transformada de Laplace causa a los estudiantes, sino que nos planteamos como objetivo crear un desarrollo tecnológico en forma de aplicación *app* que agilice la resolución de EDO. Este interés involucra dos principios fundamentales, el primero es el constructo reconocido como *fidelidad*, así como el concepto de Organización Matemática que pertenece a la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD).

2. MARCO TEÓRICO

2.1 Fidelidad

El constructo *fidelidad* fue elaborado por Camacho et al., (2019) y Camacho et al., (2021) quienes lo consideran una norma con la cual es posible verificar y revisar las perturbaciones epistémicas resultado de asociar conocimiento matemático a los desarrollos de aplicaciones del tipo *app*. El interés es minimizar dichas perturbaciones de modo que las expresiones del saber matemático enseñado en el aula sean las mismas que deben aparecer en la interfaz de las aplicaciones.

Durante la creación de una aplicación tecnológica se pretende que el desarrollador extienda las formas del saber enseñado en el aula a la interfaz de la *app*, de modo que esta devuelva al usuario dichas expresiones con suficiente similitud y, en ese sentido, sea ventajosa para el usuario. El traslado de las expresiones involucra un cambio en el conocimiento que se puede mirar desde la Teoría de la Transposición Didáctica de Chevallard (1985), quien definió el traslado del saber como un efecto transpositivo. Sin embargo, el paso del conocimiento de una entidad didáctica a otra informática, lleva a que este se convierta en un saber informatizado, fenómeno estudiado por Balacheff (1994) en el marco definido como Transposición Informática (TI), así como en proyectos relacionados con la geometría dinámica; es el caso de Acosta (2007).

El fenómeno de fidelidad que tratamos atañe a varias de las características del conocimiento, las cuales tienen que ver con la solución de problemas que se resuelven en los cursos de matemáticas para ingeniería, entre otras:

1. La notación y cálculo simbólico que se debe trasladar a la interfaz durante la creación de la aplicación.
2. La similitud de la solución que devuelve la interfaz respecto de la resuelta por los estudiantes en su cuaderno.
3. La pulcritud de la gráfica de la solución de problemas.

Según Camacho et al., (2019) un "software matemático de Alta Fidelidad (AF) se distingue por las características funcionales y semióticas de su interfaz de usuario, que conforman el dominio de validez de sus representaciones" (p. 81). Desde el punto de vista de la notación y lenguaje simbólico, se puede afirmar que la aplicación WolframAlpha, por ejemplo, corresponde a un software de AF puesto que la salida de información que devuelve cumple con la notación empleada por los estudiantes, el profesor en el salón de clase y la simbología adoptada en los textos de matemática escolar.

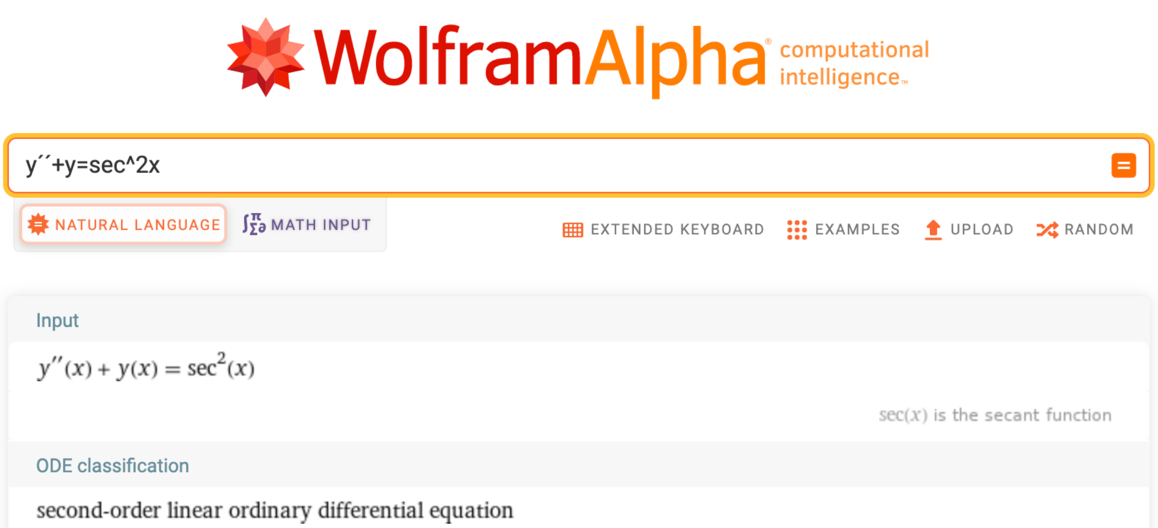
WolframAlpha es una herramienta informática de lenguaje natural desarrollada por la Wolfram Research. Analiza datos de una amplia variedad de disciplinas, principalmente matemáticas, estadística, análisis de datos, física, química, ciencia de los materiales, entre otras, como la ingeniería. Su servicio precisa de internet y responde directamente a cuestiones prácticas de la matemática realizando las operaciones sobre una base de datos con respuestas generalmente comprensibles para un estudiante universitario. En los últimos años su utilidad alcanzó el salón de clase para la resolución de problemas vinculados con la matemática escolar, sin que estudiantes y profesores adviertan sus fortalezas y debilidades de uso.

En la figura 1 se puede observar que la notación simbólica relacionada con la ecuación diferencial $y'' + y = \sec^2 x$ que WolframAlpha devuelve en su interfaz, guarda casi la totalidad de las particularidades que se aprecian en los cuadernos de los estudiantes, libros de texto en uso y el lenguaje matemático utilizado por el profesor en el salón de clase. No obstante, la AF del software se desvanece con la pérdida de similitud en la solución de la ecuación: $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x - 1 + \operatorname{sen} x \cdot \ln(\sec x + \tan x)$. La que devuelve el software en su interfaz (parte baja de la figura 1) es :

$$y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \operatorname{sen}(x) + 2\operatorname{sen}(x)\tanh^{-1}\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) - 1$$

La diferencia funcional en las soluciones se encuentra en la siguiente igualdad:

$$\ln(\sec x + \tan x) = 2\operatorname{sen}(x)\tanh^{-1}\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$



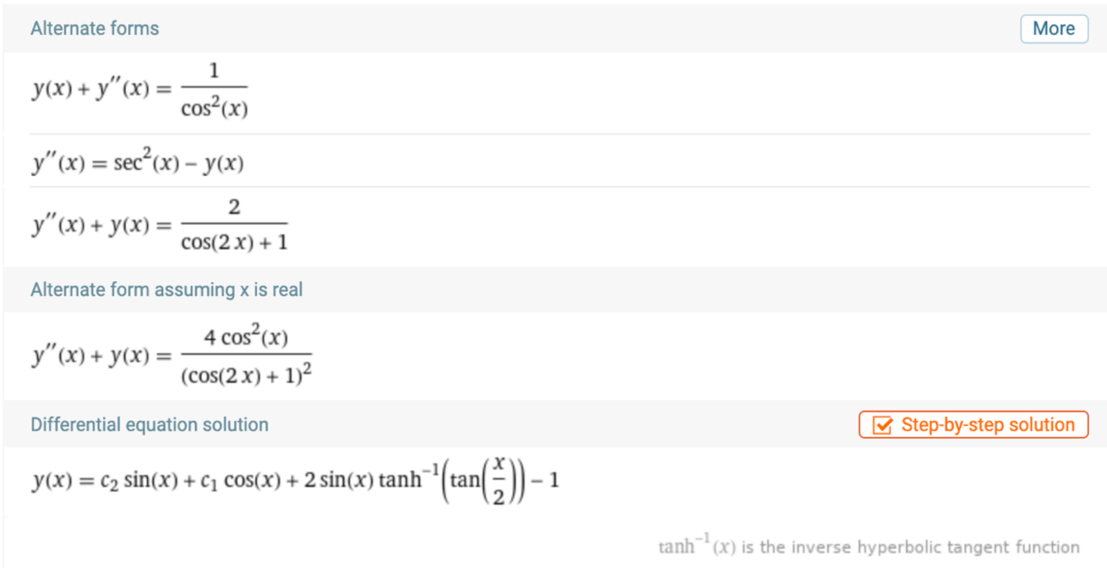


Figura 1. La notación que devuelve WolframAlpha en la solución de la ecuación diferencial guarda casi completa similitud con la empleada por los estudiantes y profesores en el salón de clase.
Fuente: WolframAlpha

La solución particular, $2\operatorname{sen}(x)\tanh^{-1}\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) - 1$, devuelta por el software, solo toma sentido en el dominio de validez informático donde se representa, en este caso en la propia interfaz del software, más no en el dominio del aula por las características de la expresión $\tanh^{-1}\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$. Es resultado del código de programación elaborado por los desarrolladores para la creación de WolframAlpha que generaliza la resolución de este tipo de ecuaciones minimizando el método de solución utilizado en el aula, con métodos altamente estables para ecuaciones semirígidas, como por ejemplo Runge-Kutta, que desafortunadamente, no empatan con algunas soluciones de ecuaciones como la citada.

La pérdida de similitud entre ambas soluciones deviene en un efecto transpositivo informático sobre la interfaz del software, el cual determina una perturbación epistémica que puede conducir a una confusión de los usuarios durante el aprendizaje y resolución de ese tipo de ecuaciones. El fenómeno didáctico se provoca al poner la solución, arrojada por la interfaz, en interacción con el conocimiento matemático escolar. En el fondo del fenómeno se encuentra la diferencia en las técnicas matemáticas enseñadas en el aula para la resolución de la ecuación diferencial, respecto de aquellas que subyacen en el código de programación.

En ese sentido, los pasos son encapsulados en el software producto de una transposición informática: "Como resultado de ese encapsulamiento las técnicas (...) se presentan como *cajas negras*, en las que solo son visibles las entradas y los resultados" (Acosta, 2007). En consecuencia, se entiende qué es lo que hace WolframAlpha, pero no se comprende cómo lo hace.

La detección de técnicas diferentes en los dominios aula-interfaz es una cuestión delicada que poco se ha cuestionado. Para un profesor de matemáticas en ingeniería, o bien un ingeniero ya formado, ello es irrelevante si lo que interesa es únicamente la solución del problema que trata de resolver. Pero, para un estudiante de cuarto semestre de ingeniería, ese resultado provoca estados de confusión que a su vez le crean obstáculos de aprendizaje.

En el presente artículo la fidelidad nos ha permitido evidenciar la ambivalencia de técnicas matemáticas en los dominios del aula y la interfaz de WolframAlpha. Con ello, se realiza una organización adecuada de técnicas que atraviesen ambos dominios, en tanto salvan las ambigüedades hasta aquí presentadas.

2.2 Teoría Antropológica de lo Didáctico

Las técnicas matemáticas son elementos tecnológicos contenidos en las organizaciones matemáticas definidas por Chevallard (2007) en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). La Organización Matemática (OM) $[T, \tau, \theta, \Theta]$ contiene los elementos tecnológicos siguientes: T representa una tarea u proyecto por resolver en el aula, τ es la técnica matemática con la cual es posible resolver la tarea T, θ se reconoce como tecnología y es asociada a conceptos de la matemática como son teoremas, definiciones, axiomas, entre otros; en tanto Θ se mira como el marco teórico que cobija la OM. En la TAD, las OM también se reconocen como "praxeologías". En estas se identifican dos niveles: la *praxis,* constituída por la actividad T y la técnica τ que lleva a su resolución, así como un *logos* o conocimiento reconocido por las tecnologías θ y Θ que describen y explican las técnicas.

Las OM modelizan los argumentos de la matemática escolar utilizados en el aula. Por ejemplo, OM_1 es la organización donde se establece la tarea T_1 en la resolución de la transformada de la función $L\{t^3 + 5t + 2\}$. Esta se dispone en forma ordenada, según la unidad de análisis, como:

> $\boldsymbol{T}_1$: Resolver $L\{t^3 + 5t + 2\}$.
>
> $\boldsymbol{\tau}_1$: $L\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-st} t^n dt = \frac{n!}{s^{n+1}}$
>
> $\boldsymbol{\theta}_1$: Sea f una función definida para $t \geq 0$. Entonces se dice que la integral $L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$, donde $K(s,t) = e^{-st}$, es la transformada de Laplace de *f*, siempre y cuando la integral converja, cuyo resultado es una función de *s*.
>
> $\boldsymbol{\Theta}_1$: Algebra Lineal. Definición básica: Si $f(x)$ está definida para $t \geq 0$, entonces la integral impropia $\int_0^\infty K(s,t) f(t) dt = \lim_{t\to\infty} \int_0^b K(s,t) f(t) dt$, en la cual la función $K(s,t)$ se llama kernel o núcleo de la transformada. Si existe el límite se dice que la integral es convergente, si no hay límite se afirma que es divergente (Zill, 2018, p. 279).

Observe que para resolver la tarea T_1 es preciso contar con una técnica τ_1 que la realice. En este caso la técnica en cuestión es: τ_1: $L\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-st} t^n dt = \frac{n!}{s^{n+1}}$. No obstante, la técnica τ_1 se "desprende" del teorema θ_1, que se advierte en la OM_1. Así descrita la OM_1 es arropada por un marco teórico Θ_1 que se encuentra en el dominio del Álgebra Lineal, como se menciona líneas arriba.

Bien estructuradas, las OM permiten a los profesores un control de los conocimientos de la matemática que se llevan al aula. Además, los elementos tecnológicos contenidos en estas últimas llevan al establecimiento de Organizaciones Didácticas (OD) con las que es posible enfrentar algunos fenómenos de enseñanza, que hacen que las OM y OD funcionen de forma solidaria.

Sin embargo, la OM_1 descrita solo es válida en el dominio del aula. Para la creación de un desarrollo tecnológico con esta última, los efectos transpositivos informáticos que debe tomar en consideración el desarrollador son fundamentales, los cuales determinan la construcción de OM_2 y justifican la creación de las aplicaciones.

3. REVISIÓN DE ALGUNOS DESARROLLOS TECNOLÓGICOS

Para la creación de la aplicación fue necesario un análisis de los desarrollos tecnológicos que resuelven ejercicios de matemáticas, y se encuentran en el mercado, con la finalidad de conocer sus características y, con base a ello, tener elementos didácticos para la creación de la aplicación comentada. Las aplicaciones revisadas fueron: Ecuaciones Diferenciales (García et al., 2020; Ecuaciones Diferenciales, 2020), Series de Fourier (Duarte, 2020; Series de Fourier, 2020), Transformadas de Laplace (2021) y, la ya analizada, WolframAlpha. Todas estas se encuentran libres en páginas web, como Google Play Store, de modo que cualquier usuario interesado las puede bajar y utilizar. Dos de las mencionadas resuelven problemas relacionados con transformada de Laplace, estas son: Transformadas de La Place, y WolframAlpha.

Para contar con elementos de comparación se privilegiaron las características siguientes, contenidas en la tabla 1:

P_1: Resuelve ejercicios de la Transformada de Laplace.
P_2: Es una aplicación móvil.
P_3: Es software gratis.
P_4: Muestra los pasos seguidos hasta llegar a la solución, de las que se desprenden las técnicas matemáticas de uso.
P_5: Requiere de Internet.
P_6: Es fácil de utilizar.
P_7: Contiene publicidad.

Las *app* Ecuaciones Diferenciales y Series de Fourier son resultado de dos tesis de Maestría en Sistemas Computacionales de egresados del TecNM enfocadas a la enseñanza de esos temas en los cursos de EDO. Ambas se bajan fácilmente a teléfonos inteligentes con sistema operativo Android. Para su uso no es necesario conectarse a internet y tampoco tienen costo alguno. La primera resuelve ecuaciones diferenciales de primero y segundo orden, mostrando los pasos seguidos para la resolución con detalle, además, incluye la solución y su gráfica. Para la entrada de datos se utilizan los ostensivos simbólicos del móvil; por ejemplo un asterisco * refiere la operación de multiplicar, f(t) corresponde a la función $f(t)$, etc.

Series de Fourier (2020) es una aplicación inédita que desarrolla funciones del cálculo diferencial en series de Fourier; al igual que la anterior funciona sin internet, establece los pasos seguidos para la resolución, determina la solución del desarrollo en serie y la gráfica de la función periódica; se utilizan los ostensivos simbólicos del teclado del móvil para la entrada de datos. Para su creación se utilizó lenguaje de programación Python (Pyhton, 2021) así como lenguaje simbólico LaTeX (LaTeX, 2021), que determinan buena similitud con los ejercicios que se muestran en los libros de texto. Las técnicas se aprecian en los pasos de resolución que devuelve y guardan semejanza con aquellas utilizadas para resolver los mismos problemas en el salón de clase.

Transformadas de Laplace (2021) es una *app* que realiza transformación de funciones elementales; es posible utilizarla tanto en el móvil como en escritorio de computadora. Tiene la limitación de solo resolver transformadas de una sola función o suma de funciones, no responde si se asocian funciones en forma de producto. En algunas transformaciones, como en el caso de funciones trigonométricas, no devuelve los pasos seguidos en las operaciones, incluso, no hay acceso para la transformación de funciones exponenciales. La notación simbólica es limitada, por ejemplo, a la expresión $\mathcal{L}\{t^2\}$ se le da entrada con los ostensivos del teclado de computadora, devolviendo la antitransformada en la forma: L = 2/s^3.

Desarrollo tecnológico	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
Ecuaciones Diferenciales	No	Si	Si	Si	No	Si	No
Serie de Fourier	No	Si	Si	Si	No	Si	No
Transformadas de La Place	Si	Si	Si	Si	No	Si	No
Wolfram Alpha	Si	Si	No	No	Si	No	Si

Tabla 1. Características de los softwares investigados.
Fuente: Elaboración de los autores.

Podemos resumir el análisis anterior de la siguiente manera: en las tesis correspondientes a las dos primeras aplicaciones, no se encuentra un análisis de las técnicas que se privilegiaron para la elaboración del desarrollo de las *app*, no obstante que en los resultados de los pasos que devuelven, destacan técnicas similares a las que se utilizan en el salón de clase. En cuanto a WolframAlpha, vimos que en casos particulares de funciones, las soluciones son diferentes de aquellas que sobresalen en los problemas que resuelven los estudiantes en el salón de clase. Esto último da para reflexionar que las técnicas y métodos incorporados en la aplicación son diferentes de los que están en el juego didáctico. En cuanto a la *app* Transformadas de La Place, consideramos que es un desarrollo prematuro al que le falta trabajo de programación.

4. METODOLOGÍA

Para la elaboración de la aplicación fue necesario justificar, primero, la elección de técnicas desde el punto de vista de la TAD. Es evidente que el proceso de elección de técnicas τ_i que resuelven diferentes ejercicios de transformada de Laplace propuestos en los libros de texto difiere de la elección de aquellas otras por las que se debe optar para construir el desarrollo. Esto último obliga a construir una OM_2 que utilice los objetos ostensivos computarizados en sus tareas, técnicas y tecnologías, lo cual se logra analizando el potencial de uso del lenguaje de programación que se utilice para el diseño. El lenguaje elegido es Python, el cual corresponde a un lenguaje de programación interprete, multiparadigma y multiplataforma, que favorece la programación imperativa estructurada, funcional y orientada a objetos (Pyhton, 2021).

La ventaja de Python es que,en sus librerías, adopta potencialmente el uso de la tecnología, $\theta_1: \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\, f(t)\, dt$, la cual corresponde al teorema del cual se desprenden todas las técnicas τ_i que llevan a resolver ejercicios T_i de transformada de Laplace. Desde el punto de vista de la programación y la T I, la tecnología θ_1 se adopta en ese dominio como una técnica t_2 que determina y atraviesa el código de programación. En este sentido, se provoca un fenómeno de inversión en los dominios aula-interfaz, que convierte la tecnología θ_1 descrita en OM_1, en una técnica informatizada que jerarquiza y forma parte de la construcción de OM_2, evitando en el proceso de programación el uso de las técnicas τ_i que se utilizan en el aula. De esta forma, OM_1 ha servido de referencia para la construcción de OM_2.

Es posible describir OM_2 en la unidad de análisis como $[T_1, \tau_2 = \theta_1, \theta_1, \Theta_1]$, la cual se mira con más detalle enseguida.

$\boldsymbol{T}_1$: Resolver $L\{t^3 + 5t + 2\}$.
$\boldsymbol{\tau}_2 = \boldsymbol{\theta}_1$: $L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$
$\boldsymbol{\theta}_1$: Sea *f* una función definida para $t \geq 0$. Entonces se dice que la integral $L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$, donde $K(s,t) = e^{-st}$, es la transformada de Laplace de *f*, siempre y cuando la integral converja, cuyo resultado es una función de *s*.
$\boldsymbol{\Theta}_1$: Algebra Lineal. Definición básica: Si $f(x)$ está definida para $t \geq 0$, entonces la integral impropia $\int_0^\infty K(s,t)f(t)dt = \lim_{t\to\infty} \int_0^b K(s,t)f(t)dt$, en la cual la función $K(s,t)$ se llama kernel o núcleo de la transformada. Si existe el límite se dice que la integral es convergente, si no hay límite se afirma que es divergente (Zill, 2018, p. 279).

No obstante, si OM_2 se observa con más detalle, se advierte que, con el uso de la aplicación, todos los elementos tecnológicos devenidos de OM_1 se trastocan y cambian sin perder su significado resolutivo.

Con la determinación de OM_2 el desarrollo del software se apoyó en un proceso de iteración de varios ciclos que incluyó la descripción de los requisitos, análisis y diseño, desarrollo, así como prueba, integración y ejecución. Al final de cada iteración el desarrollo se consideró para su uso ante estudiantes del curso de EDO del TecNM quienes la utilizaron. De esa experiencia respetamos sus apreciaciones y dudas, corrigiendo el diseño. Un grupo de expertos atendió algunas de las etapas, principalmente la última, quienes probaron y validaron la aplicación proponiendo mejoras y correcciones. El proceso se repitió hasta que se obtuvo un producto satisfactorio para los estudiantes.

5. DESARROLLO DE SOFTWARE

Para iniciar con el diseño del software se seleccionaron inicialmente dos lenguajes de programación, uno de ellos es Python. Con este lenguaje fueron programadas las operaciones que se realizan para resolver ejercicios de transformada de Laplace. Se usó, además, un entorno de desarrollo integrado: Integrated Development Environment (IDE) de PyCharm (PyCharm, 2021), es decir, un ambiente de programación para utilizar Python (Python, 2021), así como la librería SymPy (SymPy, 2021) ya que es útil para la realización de operaciones matemáticas y las matemáticas simbólicas. También se utilizó LaTeX (LaTeX, 2021) para convertir las expresiones en cadenas de texto. Las actividades que se mencionan a continuación son un intento de resumen que llevó al desarrollo.

En Python se programaron diferentes posibilidades para la aplicación como, por ejemplo, ejercicios que se resuelven utilizando la definición de transformada, es decir:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\, f(t)\, dt$$

Además, se programaron ejercicios con dos funciones escalonadas, otros que se resuelven utilizando escalón unitario, incluyendo transformada y antitransformada de

Laplace, usando métodos directos y mostrando las fórmulas que se pueden utilizar para llegar a la solución (figura 2).

```
La formula es la siguiente:

∞
⌠
⎮    -s⋅t
⎮ t⋅ℯ     dt
⌡
0

Luego tenemos que integrar la función que ingresamos con la formula del teorem
a 4.1 y el resultado de la integral es:

     -s⋅t    -s⋅t
  t⋅ℯ       ℯ
- ─────── - ─────
     s        2
             s
La expresión simplificada es:
            -s⋅t
(-s⋅t - 1)⋅ℯ
────────────────
        2
       s
Con el resultado de la integral tendremos que calcular los limites en la funci
ón
Primero evaluamos con el limite superior, que es cuando la función tiende a in
finito
    ⎛            -s⋅t⎞
    ⎜(-s⋅t - 1)⋅ℯ    ⎟
lim ⎜────────────────⎟
t─→∞⎜       2        ⎟
    ⎝      s         ⎠
Para cuando nuestra variable t → oo , entonces nuestro resultado sera 0
Despúes evaluamos con el limite inferior, que es cuando la función tiende a  0
     ⎛            -s⋅t⎞
     ⎜(-s⋅t - 1)⋅ℯ    ⎟
 lim ⎜────────────────⎟
t─→0⁺⎜       2        ⎟
     ⎝      s         ⎠
Al final al resultado de la función evaluada con el limite superior, le restam
os el resultado de la función evaluada con el limite inferior,como la función
evaluada con el limite superior es 0 no hace falta ponerla
1
──
 2
s
El resultado de la transformada de Laplace es el siguiente:
1
──
 2
s
```

Figura 2. Pasos y solución de ejercicios en el programa Python

Posteriormente se utilizó Android Studio con el lenguaje de programación Java. En esta etapa, se desarrollaron las interfaces de la aplicación con instrucciones sobre su uso, los campos donde se introducen los datos, las ventanas donde se muestran los pasos calculados y los resultados de los ejercicios.

Además, se utilizó una licencia llamada Chaquopy, que permite comunicar los lenguajes de programación utilizados, para que en Java se introduzcan los datos que ingresa el usuario y estos se envíen a Python para que se realicen los cálculos necesarios. Al final, estos últimos se transfieren a Java para ser mostrados al usuario en la interfaz de la aplicación (figura 3).

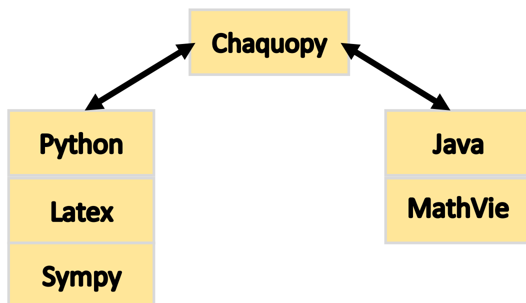


Figura 3. Funcionamiento de la librería Chaquopy

Por último, se programó un teclado personalizado (figura 4) para que apareciera al momento de que el usuario presione los campos donde se ingresan los datos de entrada ya que es necesario reducir el número de teclas que están disponibles para que se introduzcan expresiones. Este se creó con la finalidad de minimizar los errores de sintaxis en las expresiones que el usuario puede ingresar en la aplicación.

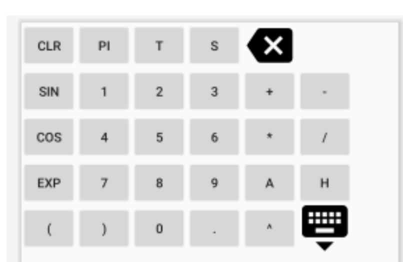


Figura 4. Diseño del teclado personalizado

El teclado solo contiene las operaciones necesarias para ser usadas en la aplicación, como son la suma, resta, división, multiplicación, potencia, funciones trigonométricas (senos, cosenos, senos y cosenos hiperbólicos), función exponencial, paréntesis, punto decimal, símbolo pi, algunas variables necesarias para la resolución de transformada de Laplace, así como teclas para borrar, las cuales se introdujeron por si se cometieran errores al pulsar los datos de entrada. Se incluyó, también, una opción para ocultar el teclado.

5. FUNCIONAMIENTO DE LA APLICACIÓN

En la figura 5 se muestran tres imágenes en las que se describe la determinación de la transformada de la función sen$h(5t)$, utilizando la aplicación, la cual fue llamada Transformadas de Laplace (Transformadas de Laplace, 2021). Observe que para la entrada de datos se aceptan los ostensivos del móvil en la forma sinh(5*t).

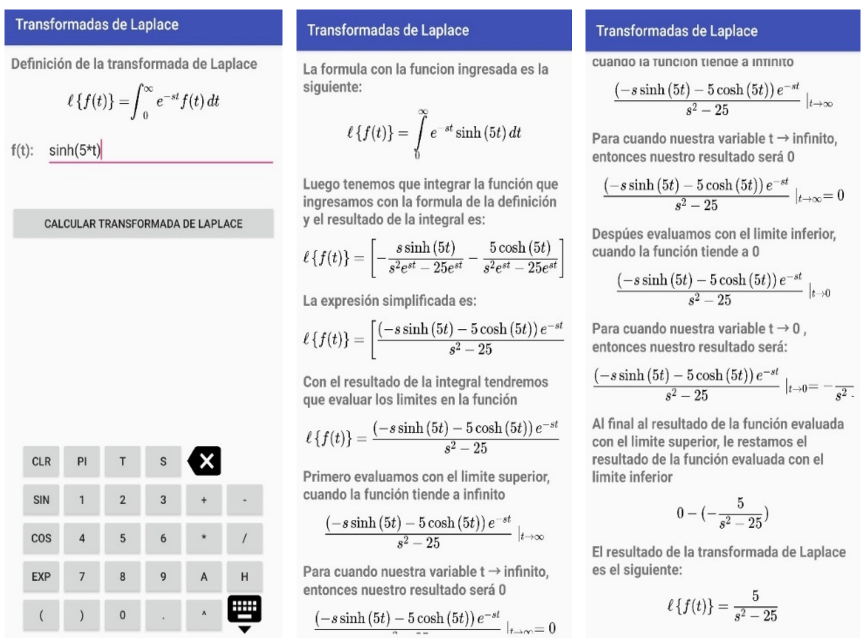


Figura 5. Ejercicio resuelto en la aplicación móvil usando la definición de la transformada de Laplace

Al solicitar el cálculo de la transformada en la barra "Calcular Transformada de Laplace", primera imagen de izquierda a derecha, en pocos segundos se despliega la integral que la determina, parte superior de la segunda imagen. El resultado de la integral impropia se muestra en una serie de pasos (ocho en total) que se despliegan entre las imágenes segunda y tercera. En la resolución se privilegia la evaluación de la integral entre los límites $t = 0$ y $t = \infty$. Al final del proceso se observa la transformada de la función, factorizada, en la forma $\frac{1}{s^2-25}$, la cual, efectivamente, corresponde a la solución. No es difícil apreciar que los pasos coinciden con aquellos que desarrollan los estudiantes en su cuaderno, a mano.

La aplicación resuelve en pocos segundos expresiones más complejas en forma de producto, como por ejemplo: $\mathcal{L}\{t^3e^t \cos \mathrm{h}(2t)\} = \frac{6 \cos \mathrm{h}(2t)}{s^4-4s^3+6s^2-4s+1}$. El proceso de cálculo se aprecia en las imágenes que se muestran en la figura 6.

Figura 6. Ejercicio con un producto de tres funciones, resuelto en la aplicación móvil usando la definición de la transformada de Laplace.

En un examen de regularización del tema transformada de Laplace, aplicado a estudiantes del curso de EDO del TecNM, se dieron instrucciones a cinco estudiantes para resolver la ecuación de primer orden de condición inicial: $y' + y = te^t, y(0) = 0$, utilizando la aplicación para la transformación, primero, de la función te^t, la cual en el aula se transforma con el que se conoce como Primer Teorema de Traslación. Después de la transformación los estudiantes deben despejar la $\mathcal{L}\{y(t)\}$ para enseguida antitransformar, en este caso $Y(s) = \frac{1}{(s-1)^3}$, y así llegar a la solución. En una segunda etapa se les pidió utilizar la aplicación para resolver la antitransformada.

En la figura 7 se muestra la solución de la ecuación diferencial realizada por una de las alumnas en su cuaderno, habiendo utilizado la aplicación para transformar la función te^t. En tanto, en las imágenes dispuestas en la figura 8 se pueden ver las carátulas de la aplicación en las que se aprecian la transformada de esa función, primera de izquierda a derecha, así como la antitransformada de $Y(s) = \frac{1}{(s-1)^3}$.

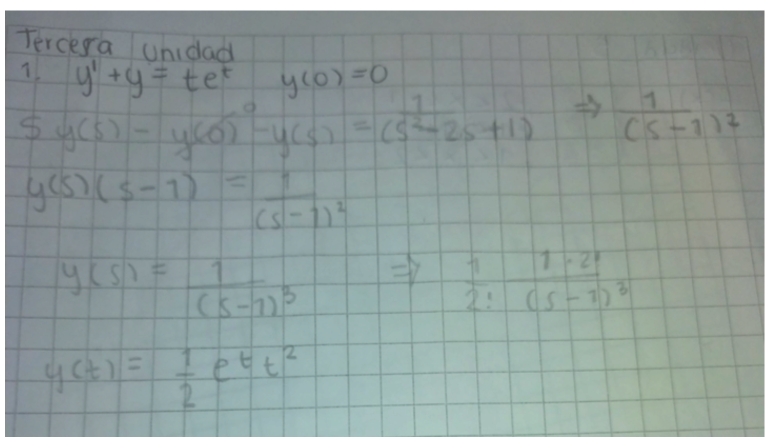


Figura 7. Resolución de la ecuación diferencial en un examen utilizando la aplicación

Figura 8. Uso de la aplicación en la transformación y antitransformación de funciones durante la resolución de una ecuación diferencial de primer orden.

6. RESULTADOS

Se destacan los siguientes resultados desde la informática y la TAD:

1. La transposición informática en la *app* beneficia con su uso la rapidez y eficacia en la determinación de la transformación de las funciones involucradas. Expresiones en forma de producto que resultan complicadas al intentar resolverlas a mano, se solucionan en pocos segundos en la *app*, mostrando además el procedimiento seguido.

2. El proceso causa un fenómeno didáctico inverso mediante el cual se naturaliza en la interfaz la definición θ_1 de transformada, por encima de las técnicas τ_i que de ella se desprenden.
3. El fenómeno es favorable a la programación actual, debido a que la elaboración de código se facilita y reduce por la cantidad de librerías contenidas en Python.
4. La legitimación de $\tau_2 = \theta_1$ ocurre no por una demostración basada en algunas definiciones o teoremas, como es común en el aula, sino por dos criterios de validación de la herramienta: uno de ellos es la revisión de su funcionamiento que hacen expertos para modificar el código hasta que la *app* quede útil y, el otro, es el uso repetido en el aula que realiza una buena cantidad de usuarios de la app, lo cual garantiza la eficacia y usabilidad de la técnica τ_2.

Desde el funcionamiento de la herramienta, se presentan los resultados:

1. La aplicación resuelve todos los ejercicios 7.1 y 7.2 del texto de Zill (2018), relacionados con los temas de transformada que, además, se obtienen en el aula, toda vez que se sugiere curricularmente para los cursos de EDO.
2. La EDO resuelta por la estudiante en el examen comentado en la sección anterior, utilizando la aplicación, muestra que es factible agilizar la resolución de problemas de aplicación que ese tipo de ecuaciones modelan.
3. En lo que se refiere a problemas de funcionamiento de la aplicación, no se resuelven ejercicios como la convolución de funciones, transformación de derivadas y resolución de ecuaciones diferenciales usando transformada, que también se enseñan en el aula.

7. CONCLUSIONES

En los últimos veinte años la TAD ha evolucionado en un marco teórico fundamental para el establecimiento de OM y OD solidarias para enfrentar los fenómenos didácticos cotidianos en la enseñanza de la matemática escolar. A pesar de ello, poco se ha avanzado en su utilidad para justificar la creación de herramientas informáticas como la descrita en el artículo. Creemos que este caso arroja una nueva luz en la tendencia de desarrollar estos dispositivos desde una perspectiva didáctica, que garantice conocer las implicaciones de su utilidad en las OM construidas para el aula.

No ha sido sencillo fincar OM_2 para la justificación de la creación de la herramienta, debido a que los objetos ostensivos que se utilizan se caracterizan porque su empleo involucra actividades que no resultan de los usuarios, sino del código de programación que los engendra.

Finalmente, es por demás innegable que en su alcance, la aplicación no se puede comparar con aquellas que se venden en el mercado, puesto que estas últimas fueron elaboradas con una finalidad comercial, cuya visión deja de lado los fenómenos de enseñanza que como profesores enfrentamos diariamente.

8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acosta, M. (2007). La teoría antropológica de lo didáctico y las nuevas tecnologías. En L. Ruíz-Higueras., Estepa A., García F. J. (Eds): *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD)* (pp. 85-100). Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Balacheff, N. (1994). Didactique et intelligence artificielle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, (14), 9-42. Recuperado de: https://telearn.archives-ouvertes.fr/hal-00190648/

Camacho, A., Caldera, M. y Valenzuela, V. (2019). Fidelidad en el uso de app para la resolución de ecuaciones diferenciales. *Apertura, 11*(1), 74-89. http://dx.doi.org/10.32870/Ap.v11n1.1463

Camacho, A., Sánchez, B. y Caldera, M. (2021). Fidelidad y praxeologías en aplicaciones didácticas desarrolladas para la resolución de expresiones matemáticas. Texto Livre Linguagem e Tecnologia, 1-11. https://doi.org/10.35699/1983-3652.2021.35052

Camarena, P. (2001). *Las Funciones Generalizadas en Ingeniería. Construcción de una alternativa didáctica*. México: Editorial Anuies, Colección Biblioteca de la Educación Superior, Serie Investigación.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique*. Grenoble, Francia: Editions La Pensée Sauvage. Recuperado de: https://www.persee.fr/docAsPDF/rfp_0556_7807_1986_num_76_1_2401_t1_0089_0000_1.pdf

Chevallard, Y. (2007). La teoría antropológica de lo didáctico y las nuevas tecnologías. En L. Ruíz-Higueras.; Estepa A.; García F. J. (Eds): *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD)* (pp. 705-746). Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Duarte, J. (2020). Aplicación móvil para desarrollar y graficar series de Fourier. (Tesis de maestría inédita) Tecnológico Nacional de México.

García, D., Camacho, A., Caldera, M. y Cuevas, J. (2019). Desarrollo de una aplicación móvil para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). *ECORFAN-México*, 48-54.

González, M. (2006). Engineering Problem Solving: The Case of the Laplace Transform as a Difficulty in Learning Electric Circuits and as a Tool to Solve Real World Problems. Linköping: Linköping Studies in Science and Technology Dissertation No. 1038.

Holmberg, M., y Bernhard, J. (2017). University teachers' perspectives on the role of the Laplace transform in engineering education. European Journal of Engineering Education 42 (4). 413-428. https://doi.org/10.1080/03043797.2016.1190957

Zill, D. (2018). Ecuaciones Diferenciales con problemas de valores en la frontera. México: Editorial CENGAGE.

SOFTWARE

Ecuaciones Diferenciales (2020). Disponible en la página Web: https://play.google.com/store/apps/details?id=tnm.itchii.ecuacionesdiferenciales.diga&hl=es_MX

LaTeX. (2021). Obtenido de https://www.latex-project.org/

PyCharm. (2021). Obtenido de https://www.jetbrains.com/es-es/pycharm/features/

Python. (2021). Obtenido de https://www.python.org/

SymPy. (2021). Obtenido de https://www.sympy.org/en/index.html

Series de Fourier (2020). Disponible en la página Web: https://play.google.com/store/apps/details?id=com.fduarte.fourier&hl=es_MX

Transformadas de Laplace (2021). Disponible en la página Web: https://play.google.com/store/apps/details?id=mx.tecnm.chihuahua2.transformadaDeLaplace&hl=es_MX

Wolfram Alpha. Disponible en la página Web: https://www.wolframalpha.com/