Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO COVARIACIONAL EN ESTUDIANTES DE NIVEL MEDIO SUPERIOR. EL CASO DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

DEVELOPMENT OF COVARIATIONAL REASONING IN HIGH SCHOOL STUDENTS. THE CASE OF THE EXPONENTIAL FUNCTION

Manuel Trejo Martínez
Universidad Autónoma de Guerrero. mmartinez@uagro.mx

Marcela Ferrari Escolá
Universidad Autónoma de Guerrero. mferrari@uagro.mx

Resumen

En el presente escrito se discuten las ideas sobre la covariación logarítmica-exponencial (la yuxtaposición de una progresión aritmética y otra geométrica) para realizar un acercamiento al concepto de función exponencial, presentada a través de una construcción de puntos en GeoGebra. Dicho trabajo se realizó con estudiantes del nivel medio superior de la Universidad Autónoma de Guerrero. Se utilizó la metodología basada en diseño para la recolección y análisis de datos. Los estudiantes logran identificar dos variaciones distintas, una para los valores de x y otra para los valores de y, no obstante, percibir la coexistencia y la codependencia no fue trivial.

Palabras clave: Covariación, Logaritmo-exponencial, Construcción geométrica, Progresión.

Abstract

Covariation logarithmic-exponential ideas are discussed in this paper (the juxtaposition of an arithmetic progression and a geometric) to make an approach to the concept of exponential function through a construction of points in GeoGebra. This study was carried out with high school students at the Universidad Autónoma de Guerrero. We used the design-based methodology for data collection and analysis. Students identify two different variations for the values of x and y, however, it was not trivial to perceive the coexistence and co-dependency.

Key words: Covariation, Logarithm-exponential, Geometric construction, Progression.

1. INTRODUCCIÓN

Uno de los conceptos fundamentales dentro de las matemáticas es, sin lugar a duda, el concepto de función, el cual se presenta de manera formal en la educación básica mexicana del nivel secundaria. La Secretaria de Educación Pública (SEP, 2017) plantea que el estudiante analice y compare situaciones de variación lineal mediante las representaciones

Recibido: Junio 29, 2018. Aceptado: Septiembre 4, 2018.

tabular, gráfica y algebraica; más aún, se espera que el estudiante pueda interpretar y resolver problemas que se modelan con este tipo de variación. Para el segundo año de secundaria se espera que el estudiante analice, situaciones de variación lineal, situaciones de proporcionalidad inversa incluyendo los modelos de fenómenos físicos. Finalmente, en el tercer grado, analizar situaciones de diversos tipos de variación y modelar situaciones de física y otros contextos. En los planes de estudio del Nivel Medio Superior (NMS) señalan que las funciones, como modelos del cambio, resultan de la mayor importancia en el currículo del bachillerato tanto por su potencialidad para las matemáticas y las ciencias, como por su flexibilidad para la representación en un sin número de situaciones.

Hitt y González-Martín (2016) presentan un análisis sobre las investigaciones que han sido reportadas en el PME (*Psychology of Mathematics Education*) respecto a funciones y cálculo, en él evidencían que el tema de función como objeto de investigación sigue vigente, afirmando:

> De primera vista, parecería ser un área de investigación condensada, sin embargo, pero la realidad es muy diferente a lo que imaginamos. La investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de las funciones se está extendiendo hacia los primeros años de educación, y los investigadores de álgebra temprana abogan por fomentar el pensamiento algebraico comenzando en la escuela primaria, utilizando un enfoque funcional (p. 3).

En lo que respecta al nivel superior, en la última década, las investigaciones universitarias en matemática y física tenían una clara orientación cognitiva, cuyo objetivo giraba en comprender las concepciones, las dificultades y los procesos de los estudiantes sobre cierta noción (Artigue, 2016). Debido a las críticas recibidas estas investigaciones fueron evolucionando: de lo cognitivo a procesos socioculturales, y estas últimas originan investigaciones sobre diseño de tareas. En la Tabla 1 mostramos la clasificación de las investigaciones presentadas por Hitt et al. (2016) sobre el tema de funciones.

Clasificación de investigaciones	Objetivo	Investigaciones citadas en Hitt et al. (2016)
Uso de representaciones, patrones y variaciones.	Encontrar una regla general para un patrón dado y producir una representación semiótica para explicar su razonamiento.	Dooley (2009); Warren (2006); Wilkie (2015); Radford (2010, 2011); Trigueros y Ursini (2008).

Uso de covariación entre variables, modelación y diseño de tareas.	Mostrar la importancia del subconcepto de covariación entre variables como antecedente al concepto de función.	Carlson (2002); Thompson (2008); Musgrave y Thompson (2014); Johnson (2015); Blum, Galbraith, Henn y Niss (2007).
Transición de imágenes mentales a un enfoque en representaciones semióticas y visualización como un proceso semiótico relacionado con funciones y cálculo.	Las representaciones externas de los objetos matemáticos son fundamentales, ya que permiten la comprensión de los conceptos matemáticos.	Duval (1995, 1999, 2006); Presmeg (2006a, 2006b, 2008); Aspinwall, Haciomeroglu y Presmeg (2008); Hähkiöniemi (2008).
Enfoques socioculturales para enseñar y aprender covariación entre variables y funciones.	La semiótica una forma de comprensión práctica y acción social.	Sáenz-Ludlow y Presmeg (2006); González-Martín et al. (2008); Mariotti (2012); Radford, Schubring y Seeger (2008).
Semiótica y tecnología, el concepto de función y procesos de modelado	La evolución de la investigación sobre los problemas de las funciones de aprendizaje y el cálculo en un entorno tecnológico.	Campos, Guisti y Nogueira de Lima (2008); Arzarello y Paola (2008); Hegedus y Moreno-Armella (2008); Mariotti (2012); Rojano y Perrusquía (2007); Naftaliev y Yerushalmy (2009); Arzarello, Robutti y Carante (2015);

Tabla 1. Clasificación de investigaciones realizada por Hitt et al. (2016)

Hemos encontrado algunas investigaciones que dan evidencia de la importancia de las funciones dentro del nivel medio superior y que a su vez proponen formas de trabajo que van más allá de la elaboración de tablas, gráficas y manipulación algebraica. Carrión y Pluvinage (2014), por ejemplo, realizan un trabajo sobre el tema de funciones reales de variable real con profesores del nivel medio superior en Tlanchinol, Hidalgo. Parten de la hipótesis de que saber álgebra no es suficiente para el tratamiento que ponen en juego las funciones; sino que es necesario tener un pensamiento que ellos llaman funcional. Proponen una serie de actividades en las que los participantes, a partir de una ecuación, hacen inferencias sobre los parámetros que la conforman utilizando diversas herramientas como lápiz-papel, hoja de cálculo, calculadora, software de cálculo formal y software de geometría dinámica.

Martínez-Sierra (2012) por su parte, presenta un estudio sobre la unidad de medida que contiene el argumento de las funciones trigonométricas, situándolo en el nivel medio superior mexicano. El objetivo que se plantea es conocer la estructura matemática escolar de las unidades de medida de las funciones trigonométricas y conocer las concepciones que tienen tanto profesores y alumnos sobre esa matemática escolar. Considera que el radián puede ser interpretado como un concepto articulador, porque proporciona una articulación entre la Trigonometría, que utiliza el grado como unidad de medida angular y al ángulo como argumento funcional de las razones y de las funciones trigonométricas, y el cálculo diferencial.

Landa (2010) afirma que la aproximación estática a las gráficas o superficie de funciones de dos variables pareciera suponer que las superficies en tres dimensiones, los planos con las que se intersectan y las curvas de contorno, son objetos matemáticos u objetos geométricos bien conocidos por los estudiantes. Señala que un acercamiento estático, partiendo de expresiones algebraicas inertes, puede no ayudar a hacer sentido de algunas ideas que incluye la noción de función con dos variables, como la covariación entre las variables involucradas, o la consideración que las superficies son una manera de representar la relación funcional de una variable que depende de dos variables independientes. En su estudio presenta el propósito de ayudar a los estudiantes en un primer contacto con la noción de funciones con dos variables, elaborando una secuencia de actividades para ser trabajada en el entorno Derive. Se pide a alumnos de bachillerato producir en Derive movimientos diferentes para un punto en el espacio, con la idea de detectar las dificultades.

Enfocándonos en la segunda clasificación de la Tabla 1, referente a la función mediante cantidades covariantes, encontramos la investigación de Moore, Silverman, Paoletti y LaForest (2014), quienes consideran que la función juega un papel central en las matemáticas de la escuela, a tal grado que proponen adoptar un enfoque basado en funciones para la enseñanza y aprendizaje, señalan que en el *Common Core State Standards for Mathematics* (CCSSM) en los Estados Unidos visualizan el tema de funciones como un unificador de los niveles medios y secundarios.

Confrey y Smith (1991, 1994, 1995) describen un enfoque covariacional de la función afirmando que el concepto de función en general se entendería mejor desde esa perspectiva. Investigaciones recientes han respaldo dicha afirmación y han demostrado que estudiantes de primaria, secundaria y preparatoria pueden desarrollar una comprensión sofisticada de las funciones mediante el razonamiento covariacional. Thompson, Hatfield, Yoon, Joshua y Byerley (2017) realizan un listado de las investigaciones que tratan el tema de función y realiza una clasificación de ellas como lo mostramos en la Tabla 2.

Funciones lineales y proporción	*Trigonométricas*	*Funciones de 1 y 2 variables*	*Exponencial*
Karplus, Pulos y Stage (1979).	Moore (2012, 2014).	Boyer (1946).	Castillo-Garsow (2013).
Lobato y Siebert (2002).	Thompson, Carlson y Silverman (2007).	Bridger (1996).	Confrey y Smith (1994, 1995).
		Carlson (1998).	Ellis, Ozgur, Kulow, Williams y Amidon (2012, 2015).
		Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu (2002).	Ellis, Ozgur, Kulow, Dogan y Amidon (2016).
		Confrey (1992).	
		Hamley (1934).	
		Hitt y Gonzaez-Martin (2005).	
		Kaput (1994).	
		Keene (2007).	
		Martinez-Planell y Gaisman (2013).	
		Nemirovsky (1996).	
		Thompson (1994a, 1994b).	
		Thompson y Carlson (2017).	
		Weber y Thompson (2014).	
		Yerushalmy (1997).	

Tabla 2. Investigaciones sobre funciones desde el enfoque covariacional, Thompson et al. (2017, p. 95)

En lo referente a la función exponencial podemos encontrar en Ferrari, Martínez-Sierra y Méndez (2016) dos formas de aproximar a la exponencial; la primera en relación al trabajo de Confrey y Smith (1995), quienes explican que se puede aproximar covariacionalmente a una función mediante la yuxtaposición de dos progresiones, las cuales se generan de manera independiente apartir del análisis numérico identificando patrones en los datos. Para el caso especial de la covariación exponencial se tiene la coexistencia de variación de una progresión aritmética y una progresión geométrica. La segunda forma de aproximar a la función exponencial devine de las ideas de razón de cambio de Carlson de las cuales se derivan investigaciones como las de Castillo-Garsow (2010); Ellis, Ozgur, Kulow, Williams y Amidon (2012); Thompson (2008). En está línea de ideas Thompson (2008), considera que una característica que define a una exponencial es la razón proporcional a la cual una función cambia con respecto al valor de la función en un argumento específico. En ese sentido las investigaciones de Johnson (2012, 2015) generalmente consideran una razón constante de cambio, el cuál es el cambio constante en una variable en relación a otra. Si existe un cambio pequeño en una variable la otra debe cambiar en la misma proporción.

Concebir que dos variaciones se dan de manera simultánea y que los cambios tienen afectaciones en ambas nos lleva al razonamiento covariacional, si una de esas variaciones se puede regir por razones constantes y la otra por diferencias constantes estamos en el caso específico de lo que Ferrari y sus colegas llaman covariación logarítmica-exponencial. “La complejidad cognitiva reside en percibir la coexistencia y la codependencia, generando una función logarítmica o exponencial según la variación que desempeña el rol dependiente y cuál el independiente” (Ferrari et al., 2016, p. 95).

Como antecedente de nuestra investigación consideramos el trabajo de Ferrari et al. (2016) cuyo objetivo fue explorar el desarrollo del razonamiento covariacional logarítmico-exponencial en estudiantes del NMS mediante un experimento de enseñanza: "multiplicar sumando"; esta frase la usan para referirse al hecho de yuxtaponer una progresión aritmética y una geométrica, en este caso la suma en la aritmética corresponde a la multiplicación en la geométrica. Estos investigadores utilizan la conceptualización de "logaritmos" trabajada por Napier y Briggs a principios del siglo XVII y las "curvas logarítmicas" de Newton, Huygens y Agnesi a fines del mismo siglo. Una revisión histórica se reporta en Ferrari (2008) y Ferrari y Farfán (2010). Por otro lado, consideran la perspectiva estática de la covariación exponencial de Confrey y Smith (1994, 1995), también los conceptos de la perspectiva dinámica de covariación por Carlson et al. (2002) para construir un marco conceptual para explorar el desarrollo del razonamiento covariacional logarítmico-exponencial. Para el desarrollo de su investigación hace uso de tarjetas hechas de fomi utilizadas durante las tres tareas diseñadas, cada tarea contenía actividades diseñadas para fomentar el desarrollo del razonamiento covariacional logarítmico-exponencial, en la Figura 1 presentamos las tarjetas utilizadas.

16	4	64	8
4	2	6	3

Figura 1. Tarjetas usadas por Ferrari et al., 2016, p. 98.

De esta manera trabajamos con estudiantes del NMS del estado de Guerrero (México) un diseño derivado del estudio socioepistemológico reportado por Ferrari (2008) respecto a logaritmos y la idea de covariación logarítmico-exponencial de Ferrari et al. (2016). El diseño estuvo constituido por 4 actividades que se encaminan hacia la caracterización de la función exponencial desde el enfoque covariacional mediante el análisis de tarjetas y la construcción de puntos de manera geométrica, el uso de tablas y hojas de cálculo, graficación y ajustes de puntos con el uso de software GeoGebra.

El objetivo de la investigación fue realizar un acercamiento al concepto de función considerando la covariación logarítmica-exponencial como la yuxtaposición de una progresión aritmética y geométrica. Para lograrlo nos preguntamos:

¿Cómo los estudiantes de nivel medio, caracterizan la función exponencial mediante tareas específicas que involucran covariación logarítmica-exponencial?

2. MARCO TEÓRICO

El razonamiento covariacional es entendido como actividades cognitivas donde se involucra la coordinación de la variación de dos cantidades atendiendo la forma en que cada una cambia en relación a la otra (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu, 2002). En la literatura existen dos perspectivas de covariación, una estática y una dinámica, de manera general podemos decir que desde la perspectiva estática existen dos cantidades asociadas y desde la perspectiva dinámica, la asociación se refleja en los cambios de dos cantidades, como lo señala Johnson (2012):

> La perspectiva estática de covariación, implica la coordinación del movimiento entre valores sucesivos de una cantidad con el movimiento entre los valores asociados a otra cantidad; [mientras que] una perspectiva dinámica de covariación [puede ser discreta o continua], involucra la coordinación de cantidades particulares de cambio en una cantidad con cantidades particulares de cambio en otra cantidad (p. 315).

Thompson y Saldanha derivado de sus investigaciones (Saldanha y Thompson, 1998; Thompson, 2011) definen a la covariación como la coordinación de cambios en dos magnitudes continuas, para ellos es "mantener en la mente, de manera simultánea, una imagen sostenida de dos valores de cantidades (magnitudes)" (Saldanha y Thompson, 1998, p. 298). Es decir, el entendimiento implica un acoplamiento cognitivo de dos cantidades para formar un objeto multiplicativo.

Por su parte Ferrari, Martínez y Méndez (2016), reflexionan en cómo los estudiantes pueden razonar de manera abstracta a la hora de construir las funciones exponencial y logaritmo, lo que significa que el alumno debe estar obligado a manejar sus propias ideas y reconstruir su conocimiento como consecuencia de la reflexión sobre las condiciones de la situación en juego. Por ello, reconocer la covariación logarítmica-exponencial como la coexistencia de una variación regida por razones constantes (progresión geométrica) y otra regida por diferencias constantes (progresión aritmética) y, que precisamente lo complejo radica en percibir una coexistencia y una codependencia de dichas progresiones. Comparando la situación propuesta por Ferrari y sus colegas con la idea de Carlson podemos decir que mientras Carlson parte del análisis de gráficos que provocan el estudio variacional de global a local, Ferrari parte de un trabajo discreto para llegar hacia lo continuo retomando ideas de Confrey y Smith (1995) sobre la covariación discreta y adaptando el modelo del razonamiento covariacional de Carlson et al. (2002) para su investigación.

En nuestro trabajo tomamos la caracterización sobre covariación logarítmica-exponencial expuesta por Ferrari et al. (2016) para acercar a jóvenes preparato rianos al concepto de función exponencial desde la yuxtaposición de dos progresiones aritmética y geométrica.

3. METODOLOGÍA

Dada la complejidad de los contextos de enseñanza/aprendizaje y la necesidad de una metodología sensible a ellos hemos adoptado el paradigma de la investigación basada en diseño. Se caracteriza por ser una metodología de forma cualitativa que se desarrolló dentro de las ciencias del aprendizaje (Learning Sciencie) y tiene como objetivo analizar el aprendizaje en contexto mediante el diseño y el estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011).

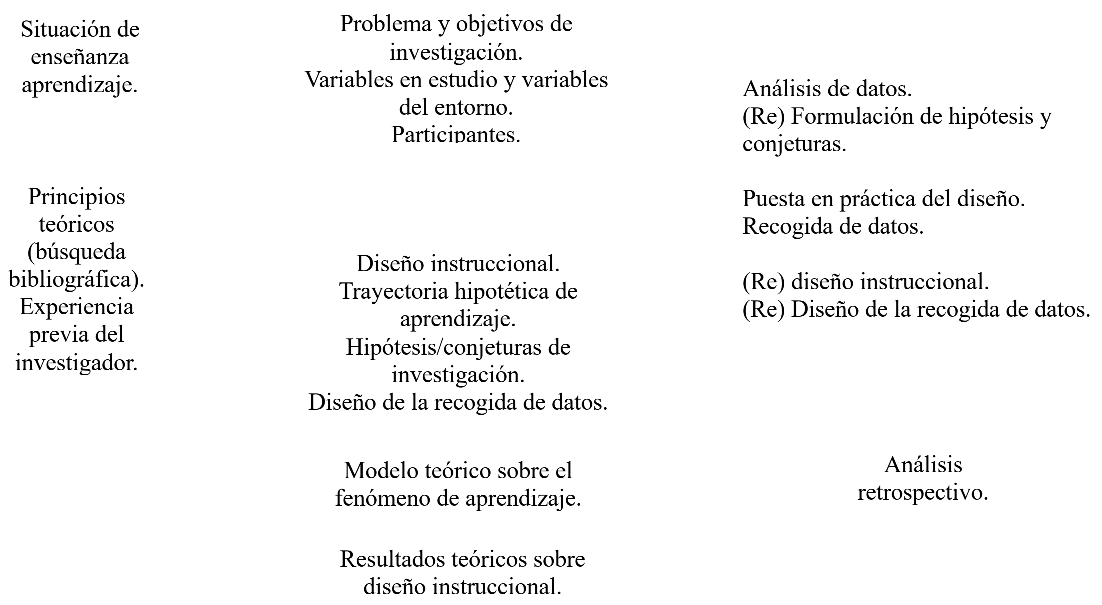


Figura 2. Estructura general Investigación Basada en Diseño, tomada de Molina, Castro, Molina y Castro, (2011)

Consideramos esta metodología pues crea el ambiente adecuado donde más allá de ver la efectividad del diseño se pretende evidenciar la evolución de los argumentos que sobresalen en cada reactivo de la actividad.

3.1.Participantes

Para el presente estudio se trabajó con seis estudiantes de nivel medio superior de los cuales cinco provienen de distintas preparatorias pertenecientes a la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro) de la Región Costa Chica, Región Costa Grande y Región Montaña, quienes se inscribieron al Programa Verano de Investigación Científica “Asómate a la Ciencia este Verano UAGro”. El sexto participante pertenece al Colegio de Bachilleres Plantel 2 en Acapulco.

La organización del trabajo fue la siguiente:

- Se formaron 2 equipos de 3 integrantes.

- Se contó con un equipo de investigación que estuvo formado por estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas y el Doctorado en Matemática Educativa, quienes desarrollaron actividades de coordinación académica y recolección de datos. En cada sesión hubo dos investigadores, dos camarógrafos encargados de grabar a detalle el desarrollo de las actividades y dos coordinadores encargados del diseño y gestión de la actividad matemática.

- Para la recolección de datos se emplearon dos cámaras móviles y una cámara de video fija para tener un panorama general. Se tomaron grabación del audio y de pantalla del trabajo en GeoGebra.

- Las sesiones de trabajo diario fueron de aproximadamente 4 horas, incluyendo un receso para la comida de 30 o 45 minutos.

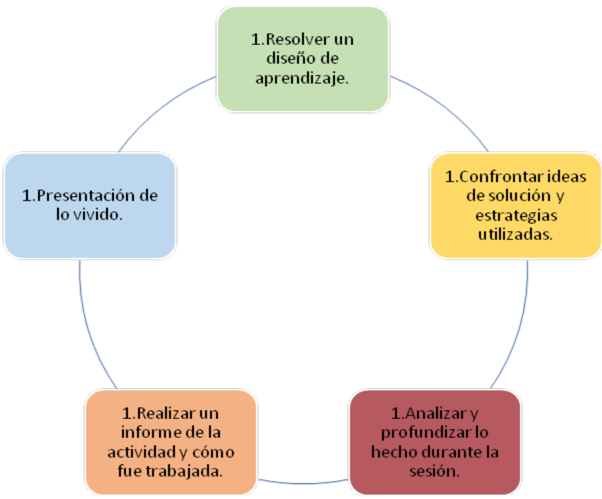


Figura 3. Dinámica de trabajo

La Figura 3 muestra las diferentes etapas de la investigación respecto a las sesiones de trabajo:

Etapa 1: los estudiantes se enfrentaron al diseño, donde realizaban la construcción de puntos, hacían análisis numérico, contestaban las preguntas sobre la variación de puntos;

Etapa 2: al terminar la sesión se solicitaba, a cada equipo, explicar la forma en que realizaron la actividad, haciendo énfasis en las herramientas usadas, en los problemas que tuvieron durante la actividad y la forma de solución que propusieron;

Etapa 3: los estudiantes se llevaban la tarea de analizar lo que habían realizado en la sesión para un mejor fortalecimiento en mira de la etapa 4;

Etapa 4: los estudiantes realizaban un informe de la actividad exponiendo todo lo sucedido y lo reforzado en la etapa 1 y 3;

Etapa 5: los estudiantes preparaban una exposición de la actividad, donde mostraban la manera de trabajar de su equipo, esto incluía fragmentos de videos, fotos.

3.2. El diseño

El diseño de aprendizaje trabajado está apoyado en el estudio socioepistemológico reportado por Ferrari (2008) respecto a logaritmos. Ferrari y Farfán (2008, 2010, 2017) destacan la importancia que en siglos pasados se otorgaban a las construcciones geométricas dentro del estudio de las variaciones y el cambio, resaltando el papel de la covariación como unificador de modelos antecediendo a la idea de función. De la misma manera, se toman los trabajos de Martínez Sierra (2005, 2010) sobre exponentes y la importancia de reconocer convenciones matemáticas y de Lezama (2005) sobre función exponencial al realizar un estudio sobre la reproducibilidad de un diseño por profesores. Dennis y Confrey (1997) rescatan de la obra de Descartes la construcción geométrica como disparadora de argumentos covariacionales que se van generando mediante la construcción de puntos. Involucran la geometría dinámica en la construcción de una curva logarítmica con el uso del círculo unitario; de ciertas rectas tangentes y secantes; así como, de semejanza de triángulos.

De esta manera, el diseño estuvo constituido por 4 actividades que se encaminan hacia la caracterización de la función exponencial mediante el estudio y análisis de la covariación logarítmica-exponencial. Las actividades se pensaron para trabajarlas utilizando el software GeoGebra, alternando con el trabajo en fichas o tarjetas hechas de fomi y las hojas en papel donde se presentaban las actividades y preguntas. Para fines de este escrito sólo se discutirán las primeras dos actividades, las cuales consistían en construir puntos en GeoGebra, llevarlos hacia las fichas o tarjetas, realizar el análisis numérico y volver a GeoGebra para explorar propiedades cualitativas y características cuantitativas. En la Figura 4 mostramos el esquema de trabajo de estas dos actividades.

Construcción de puntos

Creación de fichas

Exploración en GeoGebra

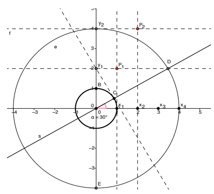
Análisis

Figura 4. Esquema de trabajo

En la siguiente tabla describimos cada una de las actividades:

<table>
<tr><th>Actividad</th><th>Descripción</th></tr>
<tr><td> Actividad 1: El objetivo de esta actividad fue encontrar la regla general para construir el siguiente punto, para ello se solicitó:
a) Colocar los puntos determinados en GeoGebra en las fichas. Construir tres puntos de la curva a la derecha de los que ya tienen.
b) Comprueba tu respuesta con GeoGebra.
c) ¿Cuál es la regla general para construir los puntos que siguen a un punto de la curva?
d) Construir tres puntos de la curva a la izquierda del punto (1,2).
e) ¿cuál es la regla general para construir los puntos anteriores a un punto de la curva? </td>
<td> En esta parte los participantes construyen de manera geométrica mediante GeoGebra y con apoyo del coordinador los primeros 4 puntos. Luego de colocarlos en unas fichas deben buscar la manera de generar más puntos, usando sólo las fichas. Finalmente hay que generar una regla para construir puntos hacia la derecha y otra para generar puntos hacia la izquierda del punto de referencia dado (1,2).
Se espera que logren conjeturar que para encontrar puntos hacia la derecha se debe ir multiplicando por dos el número anterior correspondiente a los valores de “y” y sumar uno a los valores de “x”.
<table><tr><td>x</td><td>1</td></tr><tr><td>y</td><td>2</td></tr></table></td></tr>
</table>

Actividad 2: El objetivo de esta actividad fue encontrar la regla general para construir cualquier punto, para ello se preguntó: a) ¿Cuál es la regla de multiplicar? Escríbanla, b) ¿Cuál es la regla de dividir? Escríbanla c) ¿Cuál es la regla general para construir cualquier punto de la curva? d) Construyan los siguientes puntos de la curva rellenando las fichas ¿cómo comprobar que las fichas son puntos de la curva? 0 1/2 1 1.5 2 1 2 4	Los participantes multiplican dos fichas para poder generar otra, de igual manera deben dividir dos fichas y el resultado debe ser una nueva ficha o alguna de las que ya tienen. Se espera que descubran que multiplicar dos fichas cualquieras implica multiplicar los valores en "*y*" y sumar los valores en "*x*". Dividir implica restar valores en "*x*" y dividir valores en "*y*". También se esperaba la aparición de las primeras progresiones (aritmética y geométrica) y con ello consolidar la regla general para determinar cualquier punto solicitado mediante 2^n para después llegar a la función exponencial 2^x.

Actividad 3: El objetivo de la actividad fue el reconocer la familia de curvas de la forma a^x para ello se plantearon dos actividades. Actividad 3a. Utiliza el recetario de construcción para construir puntos de una curva. Esta vez, en lugar de trazar una recta a 30º, colocar directamente el punto C sobre la circunferencia y trazar la recta. Actividad 3b. Moviendo el punto C observar lo que sucede con los puntos construidos. Hacer un informe sobre todo lo que observan. Pueden pensar en responder entre otras cosas: a) ¿Algo cambia? ¿Por qué? b) ¿Qué pasa con la forma de la curva? c) ¿Qué puntos de la curva son importantes observar? d) ¿Cómo ajustar los puntos? Es decir, unirlos con una expresión algebraica	Los participantes deben construir nuevos puntos en GeoGebra, con una variante de la construcción anterior (actividad 1) para después mediante las propiedades del software mover un punto de la construcción y analizar qué sucede con los puntos pertenecientes a la curva.  Se espera que logren observar características de las curvas exponenciales, que logren una expresión para los nuevos puntos y para cada uno de los puntos que se generan al mover a "C". Reconociendo la invariabilidad del punto (0,1) entre otros aspectos.

Actividad 4: El objetivo de la actividad fue trabajar con la razón de cambio de curvas exponenciales. Par ello se plantearon las siguientes actividades.	
Actividad 4a. Construir puntos de una nueva curva usando los puntos de una función exponencial y siguiendo las instrucciones del profesor. Anotar los pasos. Actividad 4b. Construir una tabla con los valores de las abscisas y ordenadas de ambas curvas utilizando la hoja de cálculo. Hacer un informe sobre todo lo que observan, Pueden pensar en responder entre otras cosas: a) ¿Algo cambia? ¿Por qué? b) ¿Qué pasa con la forma de la curva? c) ¿Qué puntos de la curva son importantes observar? d) ¿Cómo ajustar los puntos? Es decir, unirlos con una expresión algebraica	Los participantes a partir de la construcción de la actividad 3, realizan una nueva construcción de puntos utilizando rectas tangentes a los puntos de su curva, analizan los nuevos puntos y determinan la curva que se ajusta a dichos puntos. Se espera que logren encontrar la similitud entre esta nueva curva y las exponenciales trabajadas, y reconocer la existencia de una constante que afecta a la expresión que ellos habían trabajado anteriormente, es decir, que de la forma a^x cambió a la forma ka^x.

Tabla 3. Actividades del diseño

4. RESULTADOS

Para fines de este escrito, solo se mencionará lo realizado por un equipo de tres estudiantes que denotamos como: **E1**, **E2**, **E3** a los estudiantes 1, 2, 3 y al coordinador con la letra **C**.

En la primera sesión se construyó, en GeoGebra, varios puntos de la curva y se incitó al análisis numérico en busca de los patrones de crecimiento de las abscisas y ordenadas. Para ello se solicitó colocar los puntos construidos (puntos "P" Figura 5) en fichas. Una vez reconocido dicho patrón la discusión se dirigió hacia la búsqueda de leyes que permitieran multiplicar y dividir con las fichas, la abstracción de progresiones hasta lograr el ajuste de los puntos y la expresión algebraica general del comportamiento que para nuestro caso particular fue 2^x. En lo siguiente describiremos a manera de episodios lo sucedido.

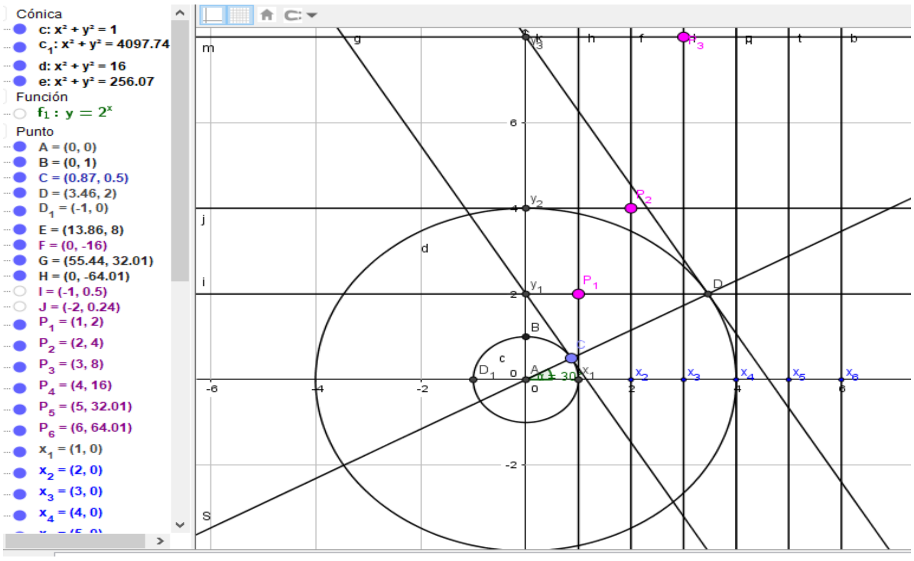


Figura 5. Puntos construidos

Episodio 1. Fichas vs construcción geométrica

Al construir más fichas surge la primera idea de sucesión numérica, los participantes deducen que los valores de "*y*" van avanzando de dos en dos, el nuevo punto tendría que ser (3,6) y el siguiente el (4,8) y el (5,10), Figura 6.

E1: Serían 1 y 2 abajo ¿cuál sería la otra?	231
E3: 2, 4	232
E1: La otra sería (3, 6) y (4, 8) ¿pero sólo vamos hacer tres no?	233
E2: sí	234
E1: y 5, 10 y ya ¿nada más son tres?	235

Figura 6. Van aumentando de dos en dos

Cuando compararon los puntos de las fichas con la construcción en GeoGebra observaron que no coincidían, por ejemplo, tenían (3,6) y (3,8). Debido a ello cambiaron su argumento "si estos números (los *x*) fueran *n* sería *n* por 2" (Figura 7, línea 262) esbozándose razonamiento covariacional lineal, vinculan el crecimiento de las ordenadas con la "*x*".

Figura 7. No concuerdan los puntos

Finalmente, los estudiantes logran identificar la forma de crecimiento de los puntos auxiliándose de GeoGebra, para ellos la coordenada en "*y*" de los puntos siguen un comportamiento similar a la tabla del dos, 2*2=4; 4*2=8; 8*2=16; 16*2=32 (Figura 8).

Figura 8. Es la tabla del 2.

Ahora el reto que se plantearon los estudiantes fue deducir desde los números por qué dicho comportamiento, para ello buscan en su repertorio alguna herramienta que les pueda servir.

Episodio 2. "La forma primitiva"

Derivado del análisis de las variaciones de los puntos identificaron que las "*x*" aumentaban de 1 en 1, y las "*y*" multiplicando por 2 (Figura 9, línea 358), pero no lograban representar de forma algebraica.

E2: ¿seguimos con la siguiente actividad o esperamos?
E1: dice… 'cuál es la regla general para construir los puntos que siguen a un punto de la curva? ¿ya lo hiciste? ¿qué hiciste?… "x" sigue una sucesión normal de n+1 y por aparte "y" sigue una sucesión de n… n que sería 5? Pero no puede ser por dos.

Figura 9. ¿La regla general?

La idea de lograr una regla general se apoderó del equipo y empezaron a dar ideas; "es el doble", "el doble producto", "el doble de 2 de *n*", "la suma de los productos anteriores", "al cuadrado". Buscaron una herramienta o método, una idea imprecisa surgió en los participantes **E3** y **E2** empezaron a calcular diferencias entre los valores, sentía que podía lograr algo así pero no sabía que. El método fue denominado *"la forma primitiva"* ya que argumentan que fue aprendido en la escuela secundaria y básicamente sirve para encontrar el patrón de sucesiones numéricas. Esta forma de trabajo los conduce a encontrar un “2” utilizando diferencias, esto lo podemos ver en la Figura 10.

E3: ya sé cómo... hay que sacar, hay que hacerlo de la forma primitiva. 2, 4, 8, 16, 32 su diferencia es...
E2: 2, 4, 8, 16
E3: aquí es...
E2: 2, 4, 8
E3: 2, 4
E2: 2
E1: tenía que ser el número dos
E2: ¿y ahora qué?
E3: ¿cuántas veces lo utilizamos? 1, 2, 3, 4 ¿no se acuerdan de eso?
E1: sí, me acuerdo más o menos
E3: Yo también recuerdo pero no me acuerdo qué
C: a ver platíquenmelo a lo mejor yo me acuerdo
E1: es que en la secundaria nos podían hacer ese tipo de números para poder decretar una fórmula que siguiera esa sucesión es la forma primitiva
E3: ajá
E1: sacar lo intervalos de estos, hasta llegar a un sólo número eso te va a dar parte fundamental de la fórmula
C: ok

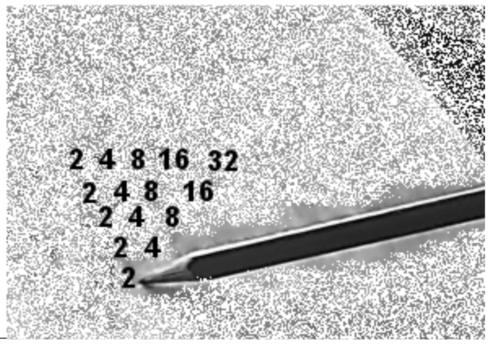


Figura 10. La forma Primitiva

El análisis que realizaron los estudiantes los llevo a reconocer que los valores en “x” siguen una sucesión “normal” en la forma “n+1” y que en “y” podían determinarse multiplicando por dos el número anterior. Al momento de buscar la regla general por medio de diferencias sucesivas, método muy utilizado en el nivel básico para encontrar patrones de crecimiento en sucesiones numéricas, no podían encontrar la razón de la progresión ya que esta era geométrica y no aritmética. Lo cual produjo no lograr una expresión algebraica.

Episodio 3. Reglas de multiplicar y dividir. “Multiplico y Sumo; Divido y Resto” ¿y cómo escribir eso entonces?”

En la actividad 2 debían encontrar una regla que permitiera multiplicar dos fichas del juego para obtener una nueva ficha, E1 señala que si toma dos fichas su multiplicación se realiza sumando y multiplicando “estoy observando que si multiplico esto (0.25) por esto (0.5) te va a dar eso (0.125) y si sumamos esto (-2) con esto (-1) te va a dar esto (-3)” como lo ejemplificamos en la Figura 11.

E1: Es que yo veo que aquí sumando uno más dos sería 3 y multiplicando 2 por 4 sería 8 inclusive aquí 3 más 4 y 6 por 8 da la ficha del 7
C: ah muy bien, a ver entonces comprueben y esa podría ser tu regla de multiplicar
E1: pues sí es lo que estoy viendo
C: compártenla, revisen si funciona y entonces esa sería una regla que ya te puede servir para las fichas ¿no?
E1: sí
E2: ¿cómo?
E1: estoy observando que si multiplicamos esto (señala 0.25) por esto (señala 0.5) te va a dar eso (señala 0.125) y si sumamos esto (señala -2) más esto (señala -1) te va a dar esto (señala -3), igual aquí si multiplicamos digamos 2 y 3, 2+3=5 y si multiplicamos 4x8 te da 32, así le puedes hacer con este (junta las fichas 3,8 y 4, 16), incluso aquí 1+3 te da 4, y 2x8 te da 16 y ya, según yo
E2: Aquí sería -1 -2 es -3 y 0.5 x 0.25 es 0.125
E1: Ajá, ahora no tengo una calculadora voy a hacerlo en la forma primitiva
E2: sí calcúlalo
E1: isí! 0.125 , ya está. Aquí sería 6 y 64, 64x2 sería 128, entonces sería 7, 128. Ahora 8x16 tiene que dar 128.. ahí está
E2: ya estuvo

Figura 11. Sumando los de arriba y multiplicando los de abajo

Para lograr una regla general, se preguntaban, cómo poder representar la multiplicación y la suma de los elementos de las fichas, **E1** argumentaba "*y1 por y2, es que no sé, hay que ponerle un puntito, así sería la regla es que significaría que x1 es cualquier número ya sea 1 más el siguiente número que puede ser 2 o puede ser tres*". Pero no está seguro debido a los ejemplos concretos que tienen, por ello replantea *"No, no, es la multiplicación, o sea, si es x1+x2 y luego y1* y2, pero tiene que salir 3 luego tiene que salir 8, entonces sería n1 y n2 entonces tendrían que ser dos fórmulas para poder sacar."*

E2 dice la suma de los dos valores de "*x*" debe dar un consecutivo, lo mismo ocurre con los valores de "*y*", propone *"x1+x2=x3"* para la suma *y* "*y4*y5=y6*" para la multiplicación. Generalizando sería "*(yn) (yn+1) = yn+2"*. La idea de generalizar utilizando *n*, *n*+1 y *n*+2 no fue entendida y **E1** evoca un ejemplo para refutar esa idea, "*por ejemplo 32 por 64 que es el número que sigue es igual a… quien sabe cuánto, y ese es el resultado que te va a dar. Aquí sería x1… xn+xn es que tiene que ser n y no n+1 o n+2 porque puede ser cualquier número no tiene que ser consecutivo*" (Figura 12, línea 855-859). Esta refutación parece estar fundamentada en el hecho de que 32*64 no es el valor de "*y*" correspondiente al valor 7 de "*x*". Lo cual lleva a **E1** a declinar su propuesta.

E2: ajá y quizás para no poner el 3, 4, 5, 6 sería (yn)(yn+1)=yn+2, quizás
E1: ¿qué hiciste?
E2: Hay para no utilizar un solo valor
E1: pero Y es el de abajo no es el de arriba
E2: por eso es abajo
E1: pero al decir que n, aquí podemos poner que n puede ser 1
E2: no, n yo digo el número de abajo, por ejemplo, suposición va a ser 1, 2, 3, 4 y 5, y eso va a ser n. al poner n estamos diciendo simplemente que podría ser la posición que sea, por ejemplo 6, y al poner n+1 estoy diciendo que será el siguiente valor que le sigue a este, que es este número más otro
E1: pero Y es éste, no es éste
E2: no, a lo que me refiero es a esto
E1: pero a ver por ejemplo aquí y, y tiene que estar abajo puede ser, por ejemplo 32, más... no es más es por, por 64 que es el número que sigue igual a... quién sabe cuánto, y ese es el resultado que te va a dar. Ahora aquí sería x1... xn+xn es que tiene que ser n no n+1 o n+2 porque puede ser cualquiera número no tiene que ser sucesivo

Figura 12. ¿Quién es *n*?

Para el caso de dividir las fichas no tuvieron problema en describir que ahora se debería restar en "*x*" y dividir en "*y*". Hasta ese momento tenían tres formas de encontrar fichas, usando las anteriores inmediatas, las reglas de multiplicar y dividir. Ahora se tenían que centrar en cómo obtener una fórmula para encontrar cualquier ficha.

Episodio 4. "Las progresiones"

La noción de covariación se encontraba latente en los estudiantes, ya se preguntaban si era posible obtener con un "*n*" dos números, **E1** decía que "*al obtener n sólo obtengo un número ¿verdad? No tengo dos. Porque aquí en las fichas tenemos que obtener dos números, no nada más una*". La primera idea de expresión es lineal, **E1** propone escribir "*y=x por… o más…"* Tomando la ficha (5, 32) el coordinador pregunta eso sería "*32=5 por…* **E1** dice "*no, es que falta algo. (Figura 13)*" La linealidad no termina por convencer, pero tiene claro que es "*y*" a quien deben calcular.

Figura 13. Hay que calcular a "y"

El equipo tiene frases como *"el doble de un número cualquiera"* "*el doble del resultante anterior"* después de un rato de trabajo logran determinar la forma de representar dichas frases, para x=n+1 y para y= 2n (Figura 14) ahora la discusión es como lograr una sola expresión.

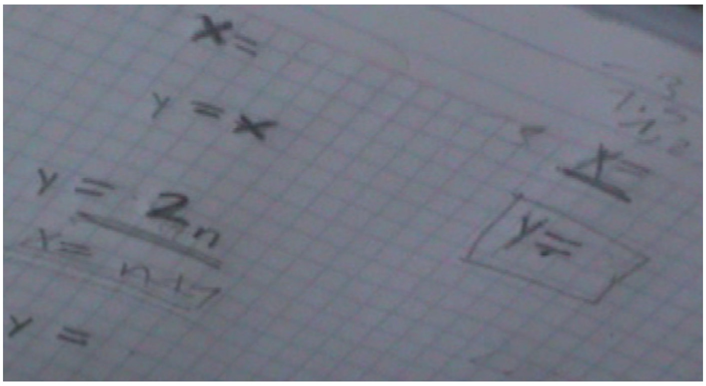
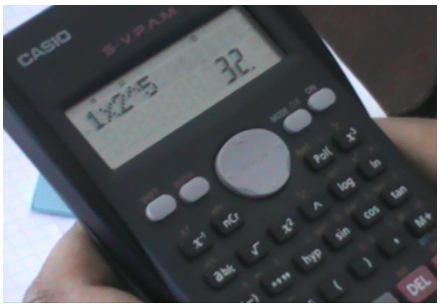


Figura 14. y=2n y x= n+1

E3 mediante su calculadora encuentra que los valores de "*y*" pueden calcularse mediante potencias de 2 por ejemplo, la ficha (5,32) se obtiene "1*2^5 =32" sin embargo no sabe cómo representarlo de manera escrita.



E3: No sé cómo representarlo
E1: pues escríbelo no te quedes callado
E3: pues es lo que no sé, no sé representarlo básicamente en lo que es fórmula n
E1: ¿quién es X ahí?
E3: X es n, n es un número cualquiera determinado por la posición que queremos tener de X, donde la Y es lo que tenemos que encontrar que sería básicamente n por 2 a la n, porque n es un número cualquiera, bueno no sería n (hace referencia a la n que está multiplicando al 2) sería otro. Es que de manera exponencial sale
E1: Pero al n en lugar de ponerlo acá (escribe al n que multiplica al 2) lo pusiste acá (escribe al n como potencia del 2) ¿y de dónde sacaste al 2?
E3: n viene de acá (busca la hoja donde anotaron las diferencias que hicieron al principio donde al final llegaron

Figura 15. Es n por 2 a la n. exponencial

La forma de escribir los productos era algo peculiar, debido a que en cada operación realizaba una multiplicación por 1, por ejemplo (Figura 15), la ficha (9, 512) la encontraba como $1x2^9$. Sin embargo, no se logró entender el papel del 1 en dicho proceso, cuando el equipo cuestionó a E3, dijo que se podía quitar de ahí sin el mayor problema, por lo que se optó por escribir su fórmula como 2^n.

Podemos ver que los estudiantes logran reconocer dos progresiones, incluso pueden identificar el tipo de comportamiento que tienen. Después de cierto tiempo de análisis y discusión pudieron lograr representar el comportamiento mediante progresiones (n+1 y 2n) también logran identificar que tener dichas progresiones por separado no resuelve del todo lo que se pide en la actividad, se ven en la necesidad de buscar una única expresión, es decir buscan la covariación.

5. CONCLUSIONES

La dinámica presentada a los jóvenes resultó motivadora, ello contribuyó de manera favorable a la hora de resolver las actividades. Por ejemplo, el trabajo con GeoGebra permitió crear objetos matemáticos interactivos y explorar sus propiedades cualitativas y características cuantitativas (Semenikhina, Drushlyak, 2015). Para los estudiantes resultó una herramienta interesante al permitir manipular puntos, rectas y toda la construcción en general.

Derivado del trabajo realizado podemos observar cómo los estudiantes logran identificar dos variaciones distintas una para los valores de "*x*" y otra para los valores de "*y*". Como se mencionó anteriormente, los estudiantes no contaban con el conocimiento sobre el tema de función exponencial a la hora de trabajar las actividades propuestas; sin embargo, durante el manejo de fichas logran identificar el patrón de crecimiento de los puntos (cómo generar más fichas). De manera casi inmediata logran observar cómo los valores de "*x*" van cambiando de 1 en 1, mientras que los valores de "*y*" van doblando el valor del número anterior. Expresar la progresión $x = n+1$ y la progresión $y = 2n$ fue algo muy significativo ya que veían recompensado su esfuerzo. No obstante, la necesidad de poder expresar de una sola manera el comportamiento de ambos valores los llevó a decidir si "*y*" se escribía en términos de "*x*", es decir, asignar la dependencia a los valores de "*y*" lo cual no resultó nada fácil, reafirmando que "La complejidad cognitiva reside en percibir la coexistencia y la codependencia, porque podemos generar una función logarítmica o una función exponencial preguntándonos qué variación desempeña el rol dependiente y cuál independiente" (Ferrari et al., 2016). También los estudiantes sintieron la necesidad de migrar de dos variaciones ($n+1$ y $2n$) hacia la covariación (x y 2^x).

Dado los conocimientos previos de los participantes y el tiempo que se tuvo para trabajar, no se tocó la idea de continuidad. Sin embargo, algo que podemos observar es que el cambio de la progresión $y= 2^n$ a la función $y= 2^x$ fue realizada de manera natural, inducida por el mismo GeoGebra a la hora de graficar, sin razonar sobre la implicación de cambiar una "*n*" por una "*x*", ello nos conduce a repensar cómo podríamos abordar dicho aspecto desde el propio diseño.

En nuestro caso podemos concluir que los estudiantes logran reconocer las dos progresiones que están inmersas tanto en la construcción como en las fichas, al igual que reconocen la necesidad de “unir” de cierta manera las mismas para poder llegar a una función llamada “exponencial de base 2”.

6. REFERENCIAS

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 352–378.

Carrión, V. y Pluvinage, F. (2014). Registros y estratos en ETM al servicio del pensamiento funcional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(4), 267-286.

Castillo-Garsow, C. (2010). *Teaching the Verhulst model: a teaching experiment in covariational reasoning and exponential growth*. Tesis doctoral no publicada. Tempe, AZ: Arizona State University.

Confrey, J. (1991). The concept of exponential functions: A student’s perspective. En L. P. Steffe (Ed.), *Epistemological foundations of mathematical experience* (pp. 124–159). New York: Springer.

Confrey, J. y Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Educatio*n, 26(1), 66–86.

Confrey, J. y Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics*, 26(2-3), 135–164.

Dennis, E. y Confrey, J. (1997). Drawing Logarithmic Curves with Geometer's Sketchpad: A Method Inspired by Historical Sources. En J. King y D. Schattschneider (Eds.), Geometry Turned On: *Dynamic Software in Learning, Teaching and Research*. Washington D.C., USA: Mathematical Association of America.

Ellis, A. B., Ozgur, Z., Kulow, T., Williams, C. y Amidon, J. (2012). Quantifying exponential growth: The case of the jactus. En R. Mayes y L. Hatfield (Eds.), *Quantitative reasoning and mathematical modeling: A driver for STEM integrated education and teaching in context* (pp. 93–112). Laramie, WY: University of Wyoming.

Ferrari, M. (2008). *Un estudio socioepistemológico de la función logarítmica. De facilitar cálculo a una primitiva* (tesis doctoral no publicada). Centro de Investigación y Estudios Avanzados-IPN. México.

Ferrari, M, Martínez-Sierra, G. y Méndez, M. (2016). "Multiply by Adding": Development of the Logarithmic-Exponential Covariational Reasoning in High School Students. *Journal of Mathematical Behavior* (42), 92–108.

Ferrari, M. y Farfán, R. M. (2017). Multiplicar Sumando: Una Experiencia Con Estudiantes De Bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativ*a, 20(2), 137-166.

Ferrari, M. y Farfán, R. M. (2010). Una socioepistemología de lo logarítmico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(4), 59-68.

Ferrari, M. y Farfán, R. M. (2008). Un estudio socioepistemológico de lo logarítmico: La construcción de una red de modelos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 11(3), 309-354.

Johnson, H. L. (2015). Secondary students' quantification of ratio and rate: a framework for reasoning about change in covarying quantities. Mathematical Thinking and Learning, 17(1), 37–41. http://dx.doi.org/10.1080/10986065.2015.981946

Johnson, H. L. (2012). Reasoning about variation in the intensity of change in covarying quantities involved in rate of change. J*ournal of Mathematical Behavior*, 31(3), 313–330. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.01.001

Landa J. (2010). Acercamiento a funciones con dos variables. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(4-1), 129-145.

Lezama, J. (2005). Una mirada socioepistemológica al fenómeno de reproducibilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8(3), 339-362.

Martínez Sierra, G. (2012). Concepciones y matemática escolar: unidades de medida de las funciones trigonométricas en el nivel medio superior. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 15(1), 35-62.

Martínez Sierra, G. (2010). Los estudios sobre los procesos de convención matemática; una síntesis metódica sobre la naturaleza de sus resultados. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(4), 269-282.

Martínez Sierra, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8(2), 195-218.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), 75–88.

Moore, C., Silverman, J., Paoletti, T. y LaForest, K. (2014). Breaking Conventions to Support Quantitative Reasoning. *Mathematics Teacher Educator*, 2(2), 141-157.

Saldanha, L., y Thompson, P. W. (1998). Re-thinking covariation from a quantitative perspective: simultaneous continuous variation. En S. B. Berensah, y W. N. Coulombe (Eds.). *Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education—North America*. Raleigh, NC: North Carolina State University.

Secretaría de Educación Pública (SEP) (2017). *Aprendizajes clave para la educación integral. Plan y programas de estudio para la educación básica*. Ciudad de México, México. Recuperado de: <https://www.aprendizajesclave.sep.gob.mx/descargables/APRENDIZAJES_CLAVE_PARA_LA_EDUCACION_INTEGRAL.pdf>

Semenikhina, O. y Drushlyak, M. (2015). The Necessity to Reform Mathematics Education in Ukraine. *Journal of Research in Innovative Teaching*, 8(1), 51-62.

Thompson, P. W. (2011). Quantitative reasoning and mathematical modeling. En L. L. Hatfield, S. Chamberlain, y S. Belbase (Eds.), *New perspectives and directions for collaborative research in mathematics education* (Vol. 1) (pp. 33–57). Laramie, WY: University of Wyoming.

Thompson, P. W. (2008). Conceptual analysis of mathematical ideas: some spadework at the foundations of mathematics education. En O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sépulveda (Eds.), *Plenary paper delivered at the 32nd annual meeting of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 1) (pp. 31–49). México: Morelia.

Thompson, P., Hatfield, N., Yoon, H., Joshua, S. y Byerley, C. (2017). Covariational reasoning among U.S. and South Korean secondary mathematics teachers. *Journal of Mathematical Behavior*, 48, 95–111.