Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

TRANSICIÓN DEL CONTEXTO GEOMÉTRICO AL VARIACIONAL, EL CASO DE LA TRIGONOMETRÍA

TRANSITION FROM A GEOMETRICAL CONTEXT TO A VARIATIONAL ONE, THE CASE OF TRIGONOMETRY

Olivia Alexandra Scholz Marbán
Cinvestav-IPN. olivia.scholz@cinvestav.mx

Gisela Montiel Espinosa
Cinvestav-IPN. gmontiele@cinvestav.mx

RESUMEN

En el marco del desarrollo de una investigación de posgrado se plantea el estudio de la transición de la razón trigonométrica (contexto geométrico) a la función trigonométrica (contexto variacional). Reportamos la revisión bibliográfica realizada, para situar nuestro planteamiento de investigación, que se realiza bajo la Teoría Socioepistemológica, considerando elementos teóricos del razonamiento visoespacial y Pensamiento y Lenguaje variacional. Se revisaron investigaciones que abordan los temas de Trigonometría desde el aprendizaje, y/o la didáctica. La metodología que se utilizará para estudiar la transición es la de Investigación basada en el diseño (IBD), dado que el siguiente paso en la investigación es realizar una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, para desarrollar un diseño de intervención en el aula fundamentado en los antecedentes consultados en la revisión bibliográfica, que permita el estudio del desarrollo del pensamiento trigonométrico en la transición de lo geométrico a lo variacional.

Palabras clave: Transición, Trigonometría, Socioepistemología, Bachillerato.

In the framework of the development of a postgraduate research, the study of the transition of the trigonometric reason (geometric context) to the trigonometric function (variational context) is considered. We report the bibliographic review carried out, to situate our research approach, which is carried out under the Socio-Epistemological Theory, considering theoretical elements of the visuospatial reasoning and Thought and Variational Language. We reviewed research that addresses trigonometric topics from the learning aspect and / or didactics. The methodology that will be used to study the transition is the Research based on the design (IBD), given that the next step in the research is to realize a Hypothetical Trajectory of Learning, to develop an intervention design in the classroom based on the background consulted in the bibliographical review, which allows the study of the development of trigonometric thinking in the transition from the geometric to the variational.

Keywords: Transition, Trigonometry, Socioepistemology, High School.

Recibido: Abril 22, 2018. Aceptado: Septiembre 13, 2018

1. INTRODUCCIÓN

El estudio de la Trigonometría desde las razones a las funciones trigonométricas, transitando por las identidades y leyes trigonométricas se ubica en el Nivel Medio Superior (NMS) del Sistema Educativo Mexicano, en el que se atienden, regularmente, estudiantes entre 15 y 18 años.

Desde una perspectiva del desarrollo del pensamiento matemático asociado a estos contenidos escolares, se puede identificar el reto de ir desde un pensamiento geométrico (para trabajar con la razón trigonométrica, en el triángulo rectángulo) a un pensamiento variacional (para trabajar con la función trigonométrica, en el círculo unitario), con la complejidad que implica cada uno y la transición de uno a otro. Sin embargo, las investigaciones de Montiel (Montiel y Jácome, 2014; Beltrán y Montiel, 2016; Buendía y Montiel, 2011) han dado evidencia sobre la falta de significados geométrico y variacional que provoca el discurso trigonométrico escolar, aun en los estudiantes y profesores que dominan los conceptos de razón y función trigonométricas; en tanto el significado lo asocian a la actividad matemática y ésta favorece algoritmos aritméticos y dibujos de referencia (en contraste con la construcción geométrica y el análisis de datos y relaciones). Con el objetivo de devolver a la actividad trigonométrica sus componentes geométricos se iniciaron investigaciones de rediseño del discurso matemático escolar con IBD (Investigación Basada en el Diseño) (Montiel y Jácome, 2014; Scholz, 2014) para estudiar el desarrollo del pensamiento trigonométrico en un sentido amplio, es decir, más allá del dominio de técnicas y algoritmos.

Sobre el pensamiento trigonométrico en un contexto geométrico, se llevó a cabo una IBD en Scholz (2014) que nos permitió identificar, en un proceso de resignificación de la razón trigonométrica, las herramientas, los razonamientos y el lenguaje que emergen en el contexto geométrico; ahora servirán de base para centrar la atención en la transición a lo variacional.

Presentamos, en este documento, una síntesis de la revisión bibliográfica que nos permita situar nuestro proyecto de investigación y dirigir su aportación en la Matemática Educativa, desde la Teoría Socioepistemológica que atiende al estudio del desarrollo del pensamiento matemático, así como la fundamentación que dará sustento a la propuesta de la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje.

2. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

Hemos localizado diversos estudios que detectan y reportan las dificultades que presentan estudiantes y profesores respecto a los temas de Trigonometría que se estudian en el NMS. Los estudios se enfocan en alguno de los dos grandes temas: razones trigonométricas o funciones trigonométricas, y algunas investigaciones (Altman y Kidron, 2016) que estudian la transición y aportan elementos al planteamiento de nuestro problema de investigación.

Organizamos la revisión en dos grandes bloques, asociados a uno de los temas (razón o función), y en cada uno se desarrolla la revisión en orden cronológico, haciendo notar una cierta evolución de la disciplina y sus objetos de estudio: énfasis en la cognición (dificultades de aprendizaje y comprensión alcanzada), énfasis en la didáctica (estrategias de enseñanza), énfasis en el razonamiento y pensamiento matemático.

3. INVESTIGACIONES RELATIVAS A LA RAZÓN TRIGONOMÉTRICA. DIFICULTADES Y COMPRENSIÓN

Encontramos en Blackett y Tall (1991) un estudio donde se reconocen las dificultades que encuentra el estudiante al conceptualizar las relaciones y propiedades en el triángulo rectángulo cuando éste cambia de tamaño en dos formas diferentes: cuando un ángulo agudo en el triángulo se incrementa y se mantiene fija la hipotenusa, y cuando los ángulos se mantienen constantes, pero se amplía la hipotenusa en un factor dado. En este estudio se destaca el rol de la visualización y manipulación a través de una herramienta de geometría dinámica.

De Kee, Mura y Dionne (1996) estudian los niveles de comprensión que han alcanzado los estudiantes, posterior a la instrucción mediante dos métodos: triángulo rectángulo y círculo trigonométrico. Comparando el desempeño de los estudiantes en ambos contextos era mejor en el del triángulo rectángulo. Observaron poca comprensión de la función circular y su papel en la definición de las funciones trigonométricas. Dentro de sus resultados, reportaron algunas formas en las que los estudiantes usan y caracterizan las herramientas trigonométricas, por ejemplo: no hacen distinción clara entre razón y función; la razón trigonométrica la consideran como un procedimiento que consiste en dividir una entre otra las longitudes de dos lados del triángulo rectángulo, que incluso algunos lo aplican a triángulos que no son rectángulos o ángulos que no son agudos; para algunos estudiantes el lado más largo de cualquier triángulo es la hipotenusa; en el círculo trigonométrico, aplican el seno y el coseno a sus coordenadas y no establecen relación con el ángulo central; describen las gráficas de las funciones seno y coseno como curvas o de aspecto ondulado.

También en un estudio sobre la comprensión Araya Chacón, Monge Sánchez y Morales Quirós (2007), ubican a su población en niveles bajo o básico y reportan dificultades en la interpretación de los enunciados cuando se le plantea un problema escrito para hacer su dibujo y colocar los datos de la situación presentada, en el empleo erróneo de ciertas fórmulas y en el uso de algunos procedimientos algebraicos (despeje de la incógnita cuando ésta se encuentra en el denominador de uno de los miembros de la ecuación), ciertos conceptos geométricos como la semejanza y las relaciones entre los lados del triángulo rectángulo.

3.1 Estrategias de enseñanza

El estudio de Kendal y Stacey (1998), compara los métodos de enseñanza del triángulo rectángulo y círculo unitario para ver cuál promueve una mejor comprensión de los conceptos subyacentes y dominio de las habilidades. Sus resultados se basaron en: la capacidad para formular y trasponer la ecuación, mejoras en la actitud y mejora en la resolución de ecuaciones algebraicas. Los autores concluyen que el método del triángulo rectángulo es mejor para iniciar el estudio de la Trigonometría, aunque reflexionan que la definición de razones trigonométricas en el círculo unitario tiene ciertas ventajas, por ejemplo, es ideal para la extensión más allá del primer cuadrante.

En un análisis del proceso de construcción del conocimiento en el proceso de transición del triángulo trigonométrico al círculo trigonométrico, realizado por Altman y Kidron (2016), usaron el modelo de la abstracción en contexto (model of abstraction in context AIC) para analizar las diferentes fases de construcción del conocimiento acerca de las razones trigonométricas y su significado geométrico en el círculo unitario. El AIC permite al investigador describir y analizar a nivel micro-analítico el proceso de abstracción matemática como ocurre en su aprendizaje matemático, histórico, social y contextual.

En su investigación los autores reportan cómo un estudiante construye conocimiento. La experiencia de aprendizaje consta de dos partes; la primera son tareas encaminadas a la noción de triángulo rectángulo y las definiciones de las razones trigonométricas en el contexto del triángulo. Las siguientes tareas promueven en el estudiante iniciar el proceso de construcción del modelo geométrico del círculo unitario por medio de los triángulos que dibujó en las primeras tareas. Aunque las acciones que constituyen esta experiencia de aprendizaje no involucran construcciones geométricas realizadas con instrumentos de construcción geométrica, como son la regla y el compás, sí promueve la vinculación del círculo con el triángulo en un contexto geométrico.

La experiencia muestra dos grupos distintos de acciones que se construyen y que según concluyen los autores, son característicos del dominio de la Trigonometría: identificar la relación entre los lados y ángulos del triángulo rectángulo e identificar que en el círculo unitario el eje x representa el coseno del ángulo y el eje y, al seno del ángulo. En su propuesta plantean la transición gradual de una situación específica a un modelo general; el estudiante logra cambiar su referente inicial que es un objeto en el mundo real 'el reloj' a mostrar un razonamiento geométrico identificando el círculo, sus elementos y sus propiedades para dar respuesta a las actividades.

Una propuesta que utiliza el círculo para trabajar las identidades trigonométricas es la de Gutmann (2003). Su interés proviene de observar que en los libros de texto sólo se enuncian las identidades y están desvinculadas de los segmentos dentro del círculo unitario, menciona que los diagramas que se usan para explicar $cos(\beta - \alpha)$ no muestran el segmento del círculo que se va a calcular. El autor manifiesta que prefiere introducir seno y coseno en el círculo unitario, así la hipotenusa se percibe desde un inicio como el radio y las longitudes del triángulo rectángulo coinciden con el seno y coseno del ángulo.

3.2 Razonamiento y pensamiento matemático

La investigación reportada por Montiel y Jácome (2014) pone en evidencia que el dominio de la razón trigonométrica no implica un pensamiento trigonométrico, cuando se resuelve una tarea tradicional de cálculo de distancias inaccesibles. Los autores llevan a cabo un análisis del discurso matemático escolar, relativo a la razón trigonométrica, en los libros de texto; para documentar el fenómeno de aritmetización trigonométrica, y explicar el significado lineal que muestran los profesores sobre la relación ángulo - longitud de lado, y donde ubican lo trigonométrico del estudio del triángulo. En este estudio, los autores encuentran que:

> …para el discurso trigonométrico escolar la semejanza resulta ser una condición inicial sobre la que se sitúa el tema y en consecuencia todo lo que sigue a ella la cumple, no hay necesidad de corroborarla. Es decir, la construcción geométrica es innecesaria y se concentra la actividad matemática en la operación aritmética para la obtención del valor faltante, lo que aunado a la falta de atención y/o reconocimiento de lo que es trigonométrico en la relación ángulo-lado del triángulo es lo que identificamos como el fenómeno de la aritmetización trigonométrica (p. 1213).

Dado esto, los autores reconocen que carece de sentido decir que "el profesor no domina los conceptos o tiene concepciones erróneas, sino que hay significados de lo trigonométrico que subyacen a su quehacer: significado lineal, significado como división de longitudes, significado como técnica para obtener un valor; porque subyacen también a la Trigonometría escolar y en consecuencia a todo aquello que la transmite con intencionalidad didáctica" (p. 1214).

En un contexto histórico, Bressoud (2010) reporta una revisión del desarrollo de la Trigonometría, los trabajos de Hiparco, Euclides y Ptolomeo que son la base del argumento que expone el autor, para sugerir que se inicie el estudio de la Trigonometría desde el contexto del círculo.

El autor resalta que en la época de los griegos se buscaba conocer las distancias inaccesibles, por ejemplo, la distancia del Sol a la Tierra, de la Tierra a la Luna, o de la Tierra al centro del universo. Los modelos geométricos que utilizaron para conocer estas distancias se basan en el círculo, donde relacionaban el ángulo central con la cuerda que lo subyace.

Bressoud menciona que la Trigonometría surgió para entender y explicar fenómenos astronómicos, así como para apoyar la navegación; explica cómo se desarrollaron las medidas de los ángulos en la circunferencia y el surgimiento del triángulo rectángulo para determinar longitudes, usando la proyección de la sombra de un objeto y el ángulo del Sol. El autor destaca que la Trigonometría tuvo su origen con la observación del cielo, en la Grecia antigua, y nace a partir de construcciones geométricas, de ahí el surgimiento del círculo trigonométrico.

3.3 Investigaciones relativas a la función trigonométrica, dificultades, razonamientos y estrategias para su comprensión

Weber (2005) desarrolla un estudio acerca de la comprensión de los estudiantes de las funciones trigonométricas, usando el concepto teórico de procepto que es la conjunción de proceso y concepto, la instrucción experimental se basó en la trayectoria de aprendizaje "procedimiento, proceso y procepto"; abarcando los siguientes cinco conceptos y procedimientos:

• calcular seno y coseno utilizando el modelo de círculo unitario;

• calcular tangentes utilizando un gráfico cartesiano;

• calcular senos, cosenos y tangentes empleando triángulos rectángulos;

• calcular senos, cosenos y tangentes utilizando ángulos de referencia (basados en el círculo unitario);

• representación gráfica de las funciones seno, coseno y tangente.

Los estudiantes construyeron una figura geométrica (círculo unitario y los ejes x e y) en hojas milimétricas usando transportador y regla, se les pidió que midieran las partes de la figura que construyeron. Repetían el proceso varias veces y por último se les hicieron preguntas que los obligaban a razonar sobre el resultado del procedimiento sin ejecutarlo. Por ejemplo, al aprender el procedimiento para calcular el seno mediante el círculo unitario, se hizo a los estudiantes la pregunta: "Sin pasar por los cálculos, ¿cuál número es más grande seno 23° o seno 37°?", "¿El seno de 145° es positivo y por qué?"; el objetivo de estas actividades era que los estudiantes comprendieran que el procedimiento se puede razonar sin aplicar rigurosamente cada uno de sus pasos.

Tras la implementación de un diseño didáctico no tradicional que incorpora algunas tareas de construcción geométrica, medición e identificación de relaciones, los estudiantes participantes logran establecer propiedades y justificarlas para trabajar con la función trigonométrica lo que el autor reconoce como comprensión, a nivel procepto, de la función. Weber concluye que brindar a los estudiantes la oportunidad de aplicar y reflexionar los procesos geométricos utilizados en la evaluación de las operaciones trigonométricas, permite que entiendan estas operaciones mejor, a su enseñanza como meras razones que pueden aplicarse a triángulos rectángulos dados.

Un modelo de comprensión trigonométrica integrado por tres contextos trigonométricos: la trigonometría triangular, la trigonometría circular y los gráficos de funciones trigonométricas; y basado en un análisis conceptual de las ideas matemáticas y entre los tres contextos de trigonometría; sirve a Demir (2013) como base para el diseño de un nuevo enfoque de instrucción de las funciones seno y coseno. La estrategia del nuevo enfoque es evitar una introducción temprana de los radianes como unidad de medida para el ángulo, a través del círculo unitario, y en su lugar utilizar el concepto de arco y longitud de arco para introducir el seno y el coseno como funciones reales.

El diseño propuesto aprovecha las habilidades dinámicas de los applets para promover discusiones que se centran en la cuantificación y covariación de cantidades. Los estudiantes tuvieron la oportunidad de reflexionar sobre sus conjeturas en relación con los valores y el movimiento de los applets. Esta reflexión, supone el autor, podría dar lugar a que los estudiantes modifiquen su imagen de cantidades covariantes, medida de ángulos y su concepción de funciones trigonométricas.

Por otra parte, Moore y LaForest (2014) reportan una introducción de la función seno asociada a la medida del ángulo que, implica el razonamiento cuantitativo. Por lo que asigna a los estudiantes tareas que involucran medir longitudes de arco y las distancias verticales en un círculo, utilizando el radio como unidad de medida para después representarlas en una gráfica y de esta manera construir la función seno. Con medidas angulares conectadas a longitudes de arcos medidos en radios, los estudiantes pueden relacionar la entrada de funciones trigonométricas a la medida de ángulos en radianes. Construyendo el círculo unitario a partir de mediciones en radios, los estudiantes pueden comenzar a entender las funciones trigonométricas como relaciones covariacionales aplicables a todos los círculos.

Con una idea parecida, Moore (2014) propone integrar el razonamiento cuantitativo y covariacional para apoyar el desarrollo de significados en los contextos del círculo y triángulo, estudia cómo los significados de medida de ángulos, incluyendo el radio como unidad de medida desde el razonamiento cuantitativo, influyen en la construcción y significado de la función seno. El autor caracteriza las acciones mentales del razonamiento covariacional en términos de la función seno.

Por su parte y con base en el marco histórico en torno al trabajo de Euler con la función trigonométrica, Buendía y Montiel (2011) proponen una epistemología de prácticas para la función trigonométrica que se basa en dotarla de significado a partir de: un análisis variacional del movimiento oscilatorio, identificar una unidad mínima de análisis para caracterizar el comportamiento periódico, reconocer la característica acotada del comportamiento (para el caso del seno y el coseno) en relación a las condiciones de la situación donde emerge la relación trigonométrica, y hacer uso de una unidad de medida congruente, en términos situacionales. Esta epistemología se utilizó en otra investigación para fundamentar y analizar una experiencia con estudiantes del nivel medio superior, donde se reportó lograr la modelación del movimiento de un péndulo a partir de la significación gráfica y experimental de los elementos expuestos (Beltrán y Montiel, 2016).

4. PLANTEAMIENTO DE INVESTIGACIÓN

La enseñanza de la Trigonometría en el NMS en México, por tradición escolar, aborda la razón y función trigonométrica desde el contexto del triángulo rectángulo y del círculo trigonométrico, respectivamente. Se ha evidenciado en la revisión bibliográfica la complejidad tanto del dominio como de la comprensión de las nociones trigonométricas en cada uno; en respuesta ha habido propuestas para trabajar en cada uno de los contextos o integrarlos. Las dificultades reportadas cambian el enfoque del dominio de técnicas y algoritmos a la construcción de significados; y en esa dirección reconocen lo que es propio del pensamiento matemático relativo a cada herramienta.

En este sentido, el NMS es donde se presenta la transición de lo geométrico (razón trigonométrica) a lo variacional (función trigonométrica), por lo que resulta ser el escenario idóneo para estudiar la transición de uno a otro. En este nivel se asume que la razón trigonométrica ya está aprendida, sin embargo, la investigación ha dado evidencia de que esto no es así (Montiel y Jácome, 2014; Scholz 2014), pues han dado cuenta de cómo a pesar de utilizar apropiadamente las fórmulas y los procedimientos, no se han construido aún los significados asociados a ellos.

A propósito de esta carencia de significados, nos proponemos provocar la construcción de éstos, mediante una intervención en el aula, a través de plantear situaciones que permitan al estudiante construir conocimiento, y esto nos permita estudiar el desarrollo del pensamiento matemático al transitar desde el contexto geométrico hasta el variacional, a partir de lo que el estudiante hace, produce y dice.

Nuestro estudio se ubica, entonces, en el tránsito de la razón y función trigonométrica, para estudiar el desarrollo del pensamiento matemático que se da al transitar de un momento de construcción de significados a otro. Buscamos responder la pregunta: ¿qué condiciones instruccionales, didácticas y de socialización en el aula, hacen emerger las herramientas, los razonamientos y el lenguaje trigonométrico, en la transición de la razón a la función?

El objetivo del estudio es caracterizar el desarrollo del pensamiento trigonométrico, en su transición de lo geométrico a lo variacional, a través de un diseño instruccional fundamentado teóricamente en una perspectiva que atienda al desarrollo del pensamiento matemático.

5. FUNDAMENTACIÓN

La investigación se enmarca en la Teoría Socioepistemológica, que busca en sus investigaciones explicar la construcción, producción, apropiación y difusión del saber matemático, concebido como el conocimiento puesto en uso.

La Socioepistemología declara como su objeto de estudio la construcción social y la difusión institucional del conocimiento matemático, considerando la diversidad de instituciones (formales, no formales e informales) donde se construye conocimiento. De ahí que reconozca a los saberes culto, técnico y popular como constitutivos de la sabiduría humana (Cantoral, 2013).

La Socioepistemología propone la descentración del objeto, esto implica cambiar el objeto de estudio de la investigación: del aprendizaje (dominio, comprensión, entendimiento, …) del objeto matemático, a las prácticas donde dicho objeto emerge. El objeto matemático se construye a partir de que emergen significados dada la interacción del individuo con la actividad, su contexto y su entorno (Reyes-Gasperini, 2015). Es decir, se asume que los objetos matemáticos son creados a partir de prácticas normadas y ello implica que sus estructuraciones no son siempre iguales (entre prácticas), ni las mismas (en el tiempo); por lo anterior se concibe al saber como conocimiento puesto en uso (Cantoral, 2013), y que dedicamos en el siguiente subtítulo.

5.1 Conocimiento puesto en uso

El cambio de centración "de los objetos a las prácticas" se logra atendiendo al conocimiento puesto en uso, sea cual sea el tipo de investigación que se lleve a cabo, pues se reconoce que la matemática se significa mediante su uso, sea éste explícito o implícito.

Los usos se caracterizan como "las formas en que es empleada o adoptada determinada noción en un contexto específico" (Cabañas, 2011, p. 98). Por ejemplo, los trabajos de investigación de Buendía (2006; 2012), y Cordero y Flores (2007) han evidenciado y documentado diversidad de usos de las gráficas en la construcción de conocimiento matemático. Cabe señalar que dichos usos son relativos a la situación-problema y el contexto donde se plantean y abordan, así como a las personas (sujetos sociales) involucradas.

Con esta premisa, sobre el conocimiento puesto en uso, la Socioepistemología basa sus explicaciones teóricas en cuatro principios: principio de la Racionalidad Contextualizada (pRC), principio del Relativismo Episteológico (pRE), principio de la Significación Progresiva (pSP) o Resignificación y principio de la Normativa de la Práctica Social (pNPS). Estos cuatro principios caracterizan y fundamentan a la Socioepistemología formando una red que articula sus fundamentos teóricos y sustentan que el conocimiento es construido en la actividad humana desarrollando así, un pensamiento matemático.

5.2 Desarrollo del Pensamiento Trigonométrico

El pensamiento matemático se entiende como todas las formas posibles de construir ideas matemáticas, incluyendo procesos avanzados del pensamiento como la abstracción, justificación, visualización, estimación y razonamiento bajo hipótesis (Cantoral, 2000). En tanto centramos nuestro estudio en las prácticas asociadas a estas formas de construir ideas, pondremos atención en las explicaciones y producciones (lo que dice y lo que hace), los procedimientos (cómo lo hace) y las argumentaciones (por qué lo hace) de los estudiantes para que, guiados por el modelo de anidación de prácticas, caractericemos la evolución de las acciones a su organización en prácticas socialmente compartidas y el desarrollo de su pensamiento matemático.

5.3 Consideraciones teóricas para el contexto geométrico

Desde el estudio histórico-epistemológico que realizó Montiel (2011) se reconoció que la razón trigonométrica, en la matemática escolar, se ha desprovisto de su naturaleza geométrica. A partir de ello, Montiel y Jácome (2014) estudian la relación del significado lineal, asociado a la relación trigonométrica, con el discurso Matemático Escolar (dME), asociado a la razón trigonométrica. En este estudio, los autores encuentran que:

> …para el discurso trigonométrico escolar la semejanza resulta ser una condición inicial sobre la que se sitúa el tema y en consecuencia todo lo que sigue a ella la cumple, no hay necesidad de corroborarla. Es decir, la construcción geométrica es innecesaria y se concentra la actividad matemática en la operación aritmética para la obtención del valor faltante, lo que aunado a la falta de atención y/o reconocimiento de lo que es trigonométrico en la relación ángulo-lado del triángulo es lo que identificamos como el fenómeno de la aritmetización trigonométrica. (p. 1213)

Dado esto, los autores reconocen que carece de sentido decir que "el profesor no domina los conceptos o tiene concepciones erróneas, sino que hay significados de lo trigonométrico que subyacen a su quehacer: significado lineal, significado como división de longitudes, significado como técnica para obtener un valor; porque subyacen también a la Trigonometría escolar y en consecuencia a todo aquello que la transmite con intencionalidad didáctica" (p. 1214).

Con los trabajos de Torres-Corrales (2014) y Scholz (2014) se iniciaron los estudios de experimentos de enseñanza, orientados al rediseño del dME, buscando integrar la geometría con la trigonometría. Ambos retomaron la situación y los resultados de Vohns (2006) como punto de partida, en tanto daba la oportunidad de estudiar la relación entre un ángulo central y la cuerda que subtiende en el círculo:

> "Chris y Ángela están recostados en la playa. Chris está a 30 metros de la heladería y Ángela a 40 metros de distancia. ¿Cuál es la distancia entre Ángela y Chris?. Comenta las diferentes posiciones (en equipos de 3 a 4 estudiantes) ¿Qué posiciones permiten una solución de cálculo sencillo?" (pág. 498).

Vohns (2006) identifica en su análisis tres ideas centrales que subyacen a la actividad trigonométrica: la estructura geométrica, la medición y el razonamiento funcional. A partir de éstas propone las aproximaciones e ideas básicas inherentes a la actividad, que son: el punto de vista geométrico, el punto de vista aritmético/algebraico, la aproximación empírica – numérica y la aproximación trigonométrica; con base en éstas clasifica y analiza los diferentes enfoques adoptados por estudiantes (futuros profesores) al resolver un problema geométrico. Los resultados de su análisis los utiliza para enmarcar un enfoque genético para la ley de los cosenos y categorizar los enfoques geométrico, empírico-numérico, aritmético/algebraico y trigonométrico en base a las ideas básicas subyacentes.

Cuando los estudiantes realizan construcciones geométricas para representar y resolver un problema se identifica un pensamiento geométrico y la idea básica que subyace es la de estructuración geométrica, si utiliza construcciones geométricas como triángulos y círculos para estructurar y modelar la situación descrita en la situación problema. Para la situación problema realizaron un esquema de círculos que representan la distancia máxima y mínima entre Chris y Ángela que sería de 70 y 10 metros respectivamente, mientras que si se modela la situación usando triángulos isósceles las distancias entre ellos serían de 30 o 40 metros.

En cambio si los estudiantes recurren al Teorema de Pitágoras identificando que la distancia la puede calcular al emplear el ángulo recto o si calcula la distancia máxima usando el ángulo llano, en este caso la idea subyacente es la idea de medición: las leyes y teoremas geométricos pueden ser leídos como fórmulas para calcular partes específicas de una figura geométrica. Vohns identifica como punto de vista aritmético/algebraico cuando el sujeto calcula aritméticamente con una suma o una resta la distancia máxima o mínima o emplea el Teorema de Pitágoras para calcular la distancia solicitada.

Si el sujeto utiliza un programa de geometría dinámica para resolver el problema, la solución es de tipo empírico-numérico, ya que el programa utiliza una aproximación numérica para calcular la distancia, lo que permite una solución inmediata para cada manipulación de la posición de los objetos. Para este tipo de razonamiento se debe realizar una construcción geométrica, aún en un programa de geometría dinámica por lo que pone en funcionamiento también un pensamiento geométrico, a menos que manipule una construcción ya dada, lo que representaría una aproximación puramente empírica numérica (Vohns, 2006).

Finalmente, una solución exacta para todos los casos posibles sólo se puede lograr por medio del uso de Trigonometría, en el caso de la investigación de Vohns (2006), usando la ley de los cosenos.

Las aproximaciones e ideas básicas inherentes en el aprendizaje de la Trigonometría no se dan de forma aislada, ni de forma seriada sino de manera interconectada para lograr el aprendizaje de lo trigonométrico a partir de construcciones geométricas. La relevancia del trabajo de Vohns (2006) consiste en dar evidencia de que a partir de un problema se pueden desarrollar o hacer transitar al estudiante por diversos enfoques como el aritmético, geométrico, algebraico y empírico hasta llegar al conocimiento trigonométrico porque las herramientas aritmética, geométrica y algebraica no son suficientes para resolver completamente el problema, sino sólo algunos casos.

En nuestra investigación antecedente (Scholz, 2014) se hizo una modificación del problema, para introducir las razones trigonométricas, al trabajar en el contexto geométrico del círculo. Se dio evidencia de que se logra:

- Resignificar lo trigonométrico y la noción escolar de razón trigonométrica, al no presentarla sólo como una división de longitudes del triángulo rectángulo sino como una herramienta para cuantificar la relación que guarda la longitud de cuerda con el ángulo central que la subtiende, teniendo como datos la medida del ángulo y del radio del círculo.
- Romper con la tradición escolar de iniciar el estudio de lo trigonométrico desde el contexto del triángulo rectángulo y en su lugar comenzar con una situación problema de cálculo de distancias que se modela en el proceso de diversas construcciones geométricas.
- Asociar la distancia que se va a calcular con el ángulo central y observar la relación que existe entre ellos. Reconocer que el crecimiento constante del ángulo no produce un crecimiento constante en la longitud de la cuerda.
- Al trabajar en el círculo, los estudiantes obtienen una herramienta para calcular distancias de cuerdas que subtiendan ángulos mayores a 90°.

Esta investigación mostró que se puede establecer una secuencia de actividades para que los estudiantes logren vincular lo trigonométrico con lo geométrico favoreciendo tanto el desarrollo de su lenguaje geométrico como la comprensión de lo trigonométrico y promover que la razón trigonométrica no es sólo la división de las longitudes de un triángulo, dotando de sentido al estudio de la Trigonometría al devolverle la parte de la construcción geométrica.

Tanto en los resultados de Scholz (2014), con estudiantes del nivel medio superior, como de Torres-Corrales (2014), con estudiantes de ingeniería, se logró provocar la resignificación de las nociones trigonométricas en juego. Sin embargo, se detectaron dificultades en la interacción con nociones geométricas que, según la trayectoria escolar del estudiante, habían sido atendidas previamente.

5.4 Consideraciones teóricas para el contexto variacional

El contexto variacional se refiere al desarrollo del pensamiento analítico-funcional. Dentro de la Socioepistemología se ha estudiado el pensamiento y lenguaje variacional (PyLVar) que "estudia fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación" (Cantoral, 2004, p.8).

El estudio de los fenómenos variacionales, desde la línea de investigación del PyLVar identifica aquello que cambia, cuantifica el cambio y analiza la forma de los cambios. Caballero y Cantoral (2013) caracterizan el PyLVar, concluyendo con un modelo de interacción de los elementos del PyLVar:

- En las Estrategias Variacionales, podemos encontrar cuatro estrategias que son las llamadas estructuras variacionales específicas:

  Comparación: Se refiere a la acción de establecer diferencias entre estados.

  Seriación: Analiza estados sucesivos y se establecen relaciones entre ellos.

  Estimación: A partir de estados previos, se proponen nuevos estados o comportamientos a corto plazo.

  Predicción: Anticipar un comportamiento, estado o valor, después del análisis de estados previos.

- Los Argumentos Variacionales: son argumentos utilizados por las personas cuando hacen uso de "maniobras, ideas, técnicas, o explicaciones que de alguna manera reflejan y expresan el reconocimiento cuantitativo y cualitativo del cambio en el sistema u objeto que se está estudiando" (Cantoral, 2000, pp. 54). Son cuando se da una explicación de un fenómeno de variación, identificando los elementos que varían y cómo varían.

- Los Códigos Variacionales: son la expresión oral o escrita del cambio y la variación, que pueden ser frases, dibujos, esquemas, tablas o gestos, que muestran el análisis variacional realizado y en su conjunto establecen los argumentos variacionales.

- La Situación Variacional: Se refiere al conjunto de situaciones que involucran estrategias variacionales, donde se realiza el análisis entre diversos estados del cambio. "No basta saber que algo está cambiando, es necesario conocer el crecimiento relativo del fenómeno en cuestión, analizando cuánto y cómo cambian sus variables" Caballero y Cantoral (2013, p.1199).

- Las Tareas Variacionales: Son las intervenciones y actuaciones dentro de una Situación variacional. "Se caracterizan por el empleo de una o más Estrategias variacionales dentro de un mismo contexto de análisis, que puede ser numérico, grafico o analítico" (Caballero y Cantoral, 2013, p.1201). Ejemplos de tareas variacionales son: tabulación como variación numérica, construcción de gráficas con la variación como punto de referencia, análisis gráfico con la variación como punto de referencia.

Dentro de la TSME también se ha estudiado la construcción social del conocimiento trigonométrico en la parte referente a la función trigonométrica. En la investigación de Montiel (2011) se proponen algunos principios básicos de esta construcción y destaca el contexto, lenguaje, racionalidad, herramienta y variables a considerar en la construcción de la funcionalidad trigonométrica.

En un estudio realizado por Montiel y Buendía (2013) se identifican y describen los elementos que conforman la funcionalidad de lo trigonométrico: lo variacional, lo periódico, lo acotado y la unidad de medida.

Para reconocer la naturaleza de las funciones trigonométricas de inicio se requiere de un contexto dinámico para estudiar el movimiento y el cambio; lo variacional se refiere a distinguir el comportamiento de la función trigonométrica de los comportamientos de otras funciones, a partir de analizar sus variaciones y reconocer cómo cambia y cómo cambian sus cambios. Lo periódico señala que a partir de la predicción se debe identificar qué se repite y cómo se repite, para que con esa información se logre continuar el comportamiento de la función. Lo acotado, se presenta al analizar el tipo de movimiento en un contexto dinámico; este movimiento debe estar ligado a condiciones iniciales particulares que origine el uso de lo acotado. La unidad de medida, mediante el contexto, se debe reconocer y hacer uso de ella adecuadamente y distinguirla en la representación de los datos.

Basadas en los elementos de la funcionalidad trigonométrica que enuncian Montiel y Buendía (2013), Beltrán y Montiel (2016) realizan un experimento de enseñanza, en busca de que los estudiantes construyan los significados propios de las funciones trigonométricas en un contexto de modelación del movimiento de un péndulo. Con esta experiencia logran que los estudiantes: observen, midan, recolecten datos, identifiquen variables, realicen lectura de gráficas y usen diversas representaciones matemáticas al modelar la situación planteada; la investigación consigue que los estudiantes construyan lo que le da uso y sentido a la función trigonométrica.

6. METODOLOGÍA

La metodología propuesta para esta investigación es la Metodología de Investigación Basada en el Diseño (IBD), dado que se pretende realizar un diseño de intervención didáctica, de donde se obtendrán los datos para el estudio.

La Metodología de IBD surge como una propuesta de investigadores que en el campo educativo están interesados en generar conocimiento que ayude a la mejora de prácticas instructivas en diferentes niveles, contextos y áreas disciplinarias. Son estudios en los que un equipo de investigación (investigadores y docentes) intervienen en un contexto de aprendizaje particular, mediante un diseño instruccional, con un propósito definido. El término diseño se refiere específicamente al diseño instruccional que se elabora fundamentado en investigaciones antecedentes, se implementa y se somete a una reiterada observación por parte del equipo de investigación, estos diseños se desarrollan para introducir nuevos temas, nuevas herramientas para el aprendizaje o nuevos modos de organizar el contexto de aprendizaje (Confrey, 2006).

La IBD no es solo la elaboración, implementación y prueba de un diseño o intervención particular, sino que al estar basados en teorías son también objeto de investigación; la IBD también tiene como propósito contribuir a la teoría, generando teorías locales. Dado que la IBD es un diseño fundamentado en teorías, su estudio nos permite entender las relaciones entre la teoría, el diseño y la práctica. Los diseños dan información de cómo piensan, actúan y construyen conocimiento los sujetos. (Steffe, Thompson y von Glasersfeld, 2000).

Los estudios realizados con la IBD pretenden conectar las intervenciones didácticas con la teoría existente; los diseños propuestos deben estar sólidamente fundados tanto en el conocimiento del campo disciplinario en el que se lleva a cabo la intervención, como en el conocimiento de una teoría del aprendizaje que dé cuenta de los procesos de aprendizaje. Además, es recomendable que los investigadores conozcan el contexto del aula en el que van a intervenir, para considerar al planear el diseño: las características de las interacciones, las normas sociales, los conceptos que se manejan, los obstáculos en el desarrollo de las tareas, y los aspectos que se consideren necesarios tanto para planear el diseño como para adaptar el desarrollo en su implementación. (Steffe et al, 2000).

El enfoque de la IBD es estudiar los problemas de aprendizaje en sus contextos naturales con el propósito de realizar cambios que guíen a mejores aprendizajes. Esto genera el desafío de estudiar los problemas de aprendizaje en el contexto de la clase con el propósito de incidir en ellos, lo que sitúa la investigación en un marco sociocultural (Confrey,2006).

Dado que la IBD es de carácter intervencionista, los estudios de diseño deben considerar el tipo de variables que se estudiará y los resultados que se pueden esperar de una investigación de diseño. Quienes investigan utilizando IBD enfrentan el desafío de modificar muchos aspectos de la clase. Si bien es cierto que en las clases hay muchas variables que no pueden ser controladas lo importante es identificar todas las variables o situaciones que afectan a la implementación del diseño, por lo anterior es importante conocer tanto la disciplina en torno de la cual se elabora el diseño como la naturaleza de los procesos de aprendizaje que se espera favorecer. Cobb, Confrey, Lehrer y Schauble, (2003) hablan de una ecología del aprendizaje, para referir el hecho de que los contextos de aprendizaje se conceptualizan como sistemas en interacción.

Tomando en cuenta la gran cantidad de variables que intervienen en la IBD la recolección y análisis de los datos deben incluir video y audio grabaciones, registros escritos del desarrollo de la clase, de las reuniones del equipo de investigación, los trabajos escritos de los estudiantes, las evaluaciones formativas y sumativas implementadas durante la intervención (Cobb, 2000).

Los productos que se pueden obtener de las investigaciones realizadas con esta metodología atienden a la elaboración de currículos, materiales para la enseñanza, establecimiento de normas sociales para la clase, propuestas para introducir temas escolares específicos, tareas de aprendizaje, diseño de sistemas de evaluación de los aprendizajes y validación de teoría.

Las fases de la IBD son: la preparación del diseño, implementación y el análisis retrospectivo (Figura 1). La preparación del diseño implica definir las metas de aprendizaje; describir las condiciones iniciales; definir las intenciones teóricas del experimento, y desarrollar el diseño (Cobb, et al., 2003). La implementación consiste no sólo en probar el diseño y demostrar que funciona, sino también mejorar la teoría que fue planteada en la primera fase. Para lograrlo se realiza una secuencia iterativa de microciclos de diseño y análisis.

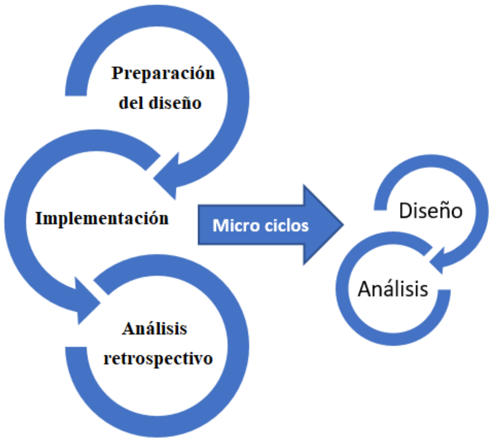

Figura 1. El ciclo de la IBD

El microciclo de diseño son las conjeturas que se hacen acerca del modo en que las actividades propuestas se podrían desarrollar en una clase y los aprendizajes que pueden lograr los estudiantes. El microciclo de análisis se realiza durante la implementación de las actividades y al terminar la clase. Se analiza el proceso de participación y aprendizaje de los estudiantes, para tomar decisiones acerca de la validez de la teoría que sostiene las actividades y plantear las modificaciones necesarias para ajustar el diseño.

El análisis retrospectivo se lleva a cabo una vez concluida la implementación y consiste en un análisis de los datos recabados y un análisis de la teoría dados los cambios del diseño realizados durante la implementación. La secuencia que resulta es diferente de la que se generó en la etapa de preparación del diseño, los ajustes constituyen la base para un nuevo ensayo del diseño que puede iniciar otro macrociclo de preparación, implementación y análisis retrospectivo.

La IBD permite estudiar un tema particular y desarrolla teorías locales mediante el estudio sistemático de las formas de aprendizaje y los medios que se relacionan con éstas (Cobb et al, 2003). Se utilizan tareas instruccionales en un contexto definido que sirven de respaldo para estudiar las formas de aprendizaje, el contexto diseñado es sujeto a pruebas, revisiones e iteraciones que trabajan de manera similar a la variación sistemática de un experimento; es un proceso cíclico.

6.1 Preparación del diseño

La propuesta de la intervención en el aula se realizará mediante una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) (Simon, 1995) como herramienta de planeación del diseño instruccional. Una THA se compone de: los objetivos para el aprendizaje de los estudiantes, las tareas matemáticas que promoverán el aprendizaje de los estudiantes, y las hipótesis acerca del proceso de aprendizaje de los estudiantes (Simon, 1995).

El objetivo para el aprendizaje de los estudiantes proporciona la ruta a seguir para las otras componentes. Las tareas matemáticas y la hipótesis acerca del proceso de aprendizaje son interdependientes, puesto que las tareas se seleccionan a partir de las hipótesis y las hipótesis están basadas en las tareas a realizar.

La construcción de una THA toma en cuenta la comprensión del conocimiento actual de los estudiantes que recibirán la instrucción; las tareas matemáticas proporcionan herramientas para promover el aprendizaje de conceptos matemáticos concretos, dada la naturaleza hipotética acerca del proceso de aprendizaje la THA tiende a precisar modificaciones en cada aspecto.

Para elaborar la THA consideraremos los elementos de nuestra fundamentación teórica y los antecedentes reportados en la revisión bibliográfica. En este sentido, orientarán la elaboración del proceso hipotético de aprendizaje y de las actividades didácticas vinculadas a dicho proceso, para observar el desarrollo de pensamiento trigonométrico en la transición.

6.2 Objetivo de aprendizaje

Para caracterizar el desarrollo del pensamiento trigonométrico, en su transición de lo geométrico a lo variacional, es necesario que el diseño logre la significación de lo trigonométrico, primero, en un contexto geométrico y, posteriormente, en un contexto variacional. Este constituye el objetivo de aprendizaje de la THA, que en términos de la construcción social de la trigonometría se establece como:

El uso de la razón trigonométrica para estudiar y cuantificar la relación (no proporcional) entre un ángulo central, en el círculo, y la cuerda que subtiende; y el uso de la función trigonométrica como herramienta predictiva de comportamientos periódicos y acotados, cuyas variaciones son de la misma naturaleza que dicho comportamiento.

Para lograr este objetivo, se plantean el proceso hipotético de aprendizaje y las tareas asociadas con él, en paralelo; primero, en un marco general y, posteriormente, desglosado en tareas.

6.3 Trayectoria Hipotética de Aprendizaje

La propuesta de la intervención en el aula se realizará mediante una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA), (Simon, 1995) como herramienta de planeación del diseño instruccional; basada en la fundamentación teórica y los antecedentes reportados en la revisión bibliográfica, que orientarán la elaboración del proceso hipotético de aprendizaje y bosquejarán las actividades vinculadas al proceso (Tabla 1), para observar el desarrollo de pensamiento trigonométrico en la transición.

Proceso hipotético de aprendizaje	Actividades (Intencionalidad)
Construir modelos geométricos a escala Para provocar el contexto en el que surge el estudio de la razón trigonométrica, es decir, el Estático-Proporcional reportado en la fundamentación, se proponen actividades para que los estudiantes realicen la representación geométrica a escala de una situación problema que involucre al círculo y triángulos isósceles.	Plantear una situación problema que provoque la construcción de un modelo geométrico a escala de un círculo. La rueda de la fortuna de un parque de diversiones tiene un radio de 20 metros y 36 canastas para pasajeros. Se proponen distintas medidas de radio y número de canastas para que trabajen en equipos y observen las diferencias y similitudes.
Identificar el ángulo central en el círculo Dado que en la fundamentación del trabajo y los antecedentes se planteó que el estudio de la Trigonometría tiene sus orígenes en el círculo al tener la necesidad de medir las cuerdas que subtienden a un ángulo central. En este sentido se propone que el estudiante identifique en el círculo el ángulo central, para asociarlo con la cuerda que lo subtiende	Identificar el ángulo central de la ubicación de cada par de canastas en la rueda de la fortuna. Identificar distintos tipos de ángulos, agudo, recto, llano, obtuso, perigonal.
Cálculo de distancias por métodos: aritméticos, algebraicos, geométricos Dadas las aproximaciones e ideas básicas inherentes que menciona Vohns (2006) y que el Lenguaje utilizado en el momento de Anticipación es el Geométrico-Numérico, se pretende observar si los estudiantes emplean el punto de vista aritmético/algebraico para resolver las distancias de los ángulos llano, recto y perigonal. Se plantearán actividades para observar si los estudiantes usan la aproximación empírica-numérica o el punto de vista geométrico para resolver las distancias de los ángulos agudos u obtusos	Calcular las distancias entre las canastas de la rueda de la fortuna. Hacer emerger el punto de vista aritmético/algebraico, la aproximación empírica-numérica o el punto de vista geométrico para resolver las distancias de los ángulos agudos, rectos u obtusos.

Relacionar el ángulo central con la cuerda que lo subtiende En los antecedentes se mostró que los primeros trabajos de Trigonometría iniciaron al relacionar el ángulo central con la cuerda que lo subtiende. En este proceso se pretende que el estudiante observe que existe una relación de dependencia entre el ángulo central y la cuerda que lo subtiende.	Llenado de una tabla con los datos de las medidas de las cuerdas cuando el ángulo central crece de 10° en 10° Medir las distancias entre las canastas y que al recolectar los datos, noten que existe una relación entre el ángulo central y la longitud de la cuerda que lo subtiende.
Observar el crecimiento no lineal de la longitud de cuerda respecto al ángulo central Dado que en la revisión bibliográfica se mostró que no es clara la relación de no linealidad entre la longitud de la cuerda respecto al ángulo central, se propone en esta parte del proceso hacer notar que cuando se incrementa el ángulo central, la longitud de la cuerda que lo subtiende no crece de forma lineal ni proporcional.	Tomar datos de distintas longitudes de cuerda y su respectivo ángulo central. Hacer notar al estudiante la relación no lineal de la longitud de cuerda con respecto al ángulo central, a través de preguntas relacionadas con la tabla anterior.
Insertar la bisectriz para obtener triángulos rectángulos Dado que se pretende trabajar las razones desde el contexto geométrico del círculo, una vez que se ha insertado el triángulo isósceles formado por los radios que forman el ángulo central y la cuerda que lo subtiende, se propone insertar la bisectriz del ángulo central para obtener dos triángulos rectángulos dentro del círculo e identificar los datos del triángulo rectángulo, es decir la medida de los ángulos y de la hipotenusa que es el radio del círculo.	Trazar la bisectriz del ángulo central y colocar los datos de las medidas de los ángulos resultantes, del radio del círculo, notar que al trazar la bisectriz del triángulo isósceles se forman dos triángulos rectángulos. Retomar el concepto de bisectriz, triángulo rectángulo y sus partes, catetos e hipotenusa.
Introducir la razón trigonométrica Dado que se tienen identificados los datos del triángulo rectángulo inserto en el círculo, se propone calcular el lado faltante, en este caso la mitad de la longitud de la cuerda del círculo usando razones trigonométricas.	Calcular la media cuerda del triángulo rectángulo obtenido mediante el trazo de la bisectriz. Resignificar las razones trigonométricas en el contexto del círculo, usándolas para calcular distancias de cuerdas que subtienden el ángulo central.

Identificar y medir la longitud de arco Medir en la circunferencia la longitud de arco de distintos ángulos centrales, para promover la estrategia de seriación del PyLVar	Medir la distancia recorrida de una canasta en la rueda de la fortuna, desde el contorno del círculo, en distintas partes de vuelta, por ejemplo, media vuelta, un cuarto de vuelta, un octavo de vuelta.
Relacionar la longitud de arco con el ángulo central Transitar de la medida del ángulo visto en grados a la medida del ángulo vista en radianes.	Obtener un método de relacionar la medida de la longitud de arco con la medida del ángulo central. (Convertir grados a radianes)
Relacionar la longitud de arco con la medida del radio Integrar el contexto del triángulo rectángulo con el del círculo unitario y establecer la relación entre radio e hipotenusa	Obtener la longitud de arco del mismo ángulo central para círculos de distintos radios e identificar la relación del radio con la medida de la longitud de arco; observar la proporcionalidad de los triángulos.
Medir y comparar las distancias verticales Establecer la estrategia variacional de la comparación; provocar el verbalizar que el valor de la longitud vertical (seno θ) varía conforme la medida de ángulo θ, varía.	Medir las distancias verticales desde un punto final en una longitud de arco hasta la recta tangente horizontal en el punto inferior del círculo y comparar las distancias para observar los incrementos y las repeticiones
Graficar las distancias verticales que corresponden a las longitudes de arco Provocar la estrategia variacional de la estimación, verbalizar que para incrementos sucesivos en la medida de ángulos de 0 a $\pi/2$ radianes, el valor de salida [seno(θ)] incrementa y la cantidad de incremento decrece	Realizar la gráfica en el plano cartesiano de las distancias verticales y las longitudes de arco que le corresponden, observar la propiedad de lo acotado.
Identificar qué y cómo varía Identificar las variables, relacionar la longitud de arco con las distancias verticales, usar la estrategia variacional de la predicción para anticipar un comportamiento después del análisis de estados previos.	Identificar las variaciones de la longitud de arco y las distancias verticales. Notar los crecimientos y decrecimientos en los intervalos de 0 a $\pi/2$, de $\pi/2$ a π y de π a 2π, observar la propiedad de lo periódico.

Tabla 1: Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para la transición del contexto geométrico al variacional

El desarrollo del pensamiento matemático lo observaremos en la evolución del lenguaje de los estudiantes, la construcción de significados o resignificación en el proceso del trabajo que realice mediante las herramientas que le proporcione la actividad en el aula, y en la corporización de los estudiantes (gestos, oralidad).

7. REFLEXIONES

En la revisión de lo geométrico, hemos encontrado que algunas investigaciones clasifican por niveles de comprensión a los estudiantes y plantean las dificultades que se presentan en el estudio de la Trigonometría, (De kee, et al, Araya Chacón, et al). Algunos autores proponen secuencias didácticas, aunque no todos reportan resultados porque no las aplican con estudiantes si no que se quedan a nivel de propuesta. Hay investigaciones que manifiestan una postura a favor de iniciar el estudio de la Trigonometría desde el contexto del círculo (Kendal y Stacey, Bressoud, De Kee, et al, Montiel) aunque algunos no presentan resultados sino sólo reflexiones con base al estudio realizado.

Las investigaciones antecedentes muestran que es recomendable integrar los dos métodos de enseñanza para iniciar el estudio de la razón trigonométrica y que el estudiante debería desarrollar un pensamiento geométrico para dar significado al estudio de la Trigonometría. Basándonos en la estructuración geométrica que señala Vohns (2006) entenderemos por pensamiento geométrico, representar una situación mediante una construcción geométrica, así como la habilidad de reconocer los elementos y propiedades geométricas involucradas para poder resolver con ellas un problema, es decir, ser capaz de poner el conocimiento geométrico en uso en el sentido que lo refiere la Teoría Socioepistemológica.

Los estudios histórico-epistemológicos nos dan un panorama del surgimiento histórico de la Trigonometría. Al señalar el escenario en el que ésta se desarrolla, marcan la importancia de vincular la Geometría en el estudio de la Trigonometría lo cual ha sido retomado por diversos autores en sus propuestas didácticas (Altman y Kidron, Gutmann, Vohns); se revisaron porque se pretende diseñar una secuencia didáctica con fundamentos teóricos para estudiar el desarrollo del pensamiento trigonométrico que ocurre en la transición de la razón a la función trigonométrica.

En la revisión de lo variacional, hemos encontrado que algunas investigaciones plantean las dificultades que se presentan en el estudio de la Trigonometría.Algunos autores proponen secuencias didácticas, involucrando situaciones de movimiento; resaltan la medición de la longitud de arco, trabajan con el radio de la circunferencia como unidad de medida, ilustran la relación entre la longitud de arco y la distancia vertical para obtener la gráfica de la función seno y estudian sus propiedades.

Los antecedentes hacen énfasis en la relación entre las variables (números reales y longitud de arco) y sus variaciones; el estudio de la parte variacional se realizará desde la perspectiva socioepistemológica con el pensamiento y lenguaje variacional, que estudia fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación (Cantoral, 2004).

Las experiencias didácticas para el tema de la función trigonométrica proponen en repetidas ocasiones y con cierta base lógica incorporar experimentos de física para que los estudiantes observen el movimiento periódico y construyan las funciones seno y coseno.

Con base en la revisión bibliográfica se ha detectado que se consideran elementos importantes de la transición de las razones trigonométricas a las funciones trigonométricas, el cambio en la medida del ángulo de grados a radianes y el trabajar con los cuatro cuadrantes del plano cartesiano o expresado de otra forma estudiar los ángulos mayores a 90° y ángulos negativos, así como el paso de lo estático a lo dinámico.

8. REFERENCIAS

Altman, R. y Kidron, I. (2016). Constructing knowledge about the trigonometric functions and their geometric meaning on the unit circle. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-13.

Araya Chacón, A.M., Monge Sánchez A., y Morales Quirós, C. (2007). Comprensión de las razones trigonométricas: niveles de comprensión, indicadores y tareas para su análisis. *Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación, 7*(2), 1-31.

Beltrán, P. y Montiel, G. (2016). La modelación en el desarrollo del pensamiento funcional - trigonométrico en estudiantes mexicanas de nivel medio superior. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 19*(3), 255-286. doi: 10.12802/relime.13.1931.

Blackett, N. y Tall, D. (1991). Gender and the versatile learning of trigonometry using computer software. *Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* XV, Vol. 1, 144-152.

Bressoud, D. (2010). Historical reflections on teaching trigonometry. *Mathematics Teacher, 104*(2), 106-112.

Buendía, G. (2006). Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 9*(2), 227-252.

Buendía, G. (2012). El uso de las gráficas cartesianas: Un estudio con profesores. *Educación matemática, 24*(2), 9-36.

Buendía, G. y Montiel, G. (2011). From history to research in mathematics education: Socio-epistemological elements for trigonometric functions. Capítulo aceptado en V. Katz & C. Tzanakis (Eds.), *Recent developments on introducing a historical dimension in Mathematics Education*. Mathematical Association of America.

Caballero, M. y Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elementos del pensamiento y el lenguaje variacional. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana deMatemática Educativa, vol. 26*, pp. 1195-1203. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Cabañas, G. (2011). *El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. Un estudio socioepistemológico*. (Tesis inédita de doctorado). Cinvestav-IPN, México, D.F.

Cantoral, R. (2000). Situaciones de cambio, pensamiento y lenguaje variacional. En R. Cantoral (Ed.), *Desarrollo del Pensamiento Matemático* (pp. 185-203). México: Trillas.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. Una mirada socioepistemológica. *Acta Latinoamerica de Matemática Educativa. 17*, pp. 1-9. México D.F.: Clame.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Cobb, P. (2000). The importance of situated view of Learning to the Design of Research and Instruction. En Boaler, J. (Ed.). *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp 45-82). Greenwood Publishing Group.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher, 32* (1), 9-13.

Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology. En R. Keith Sawyer (Ed.) *The Cambridge handbook of the learning sciences* (135-152). Nueva York: Cambridge University Press.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar: Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa, 10*(1), 07–38.

De Kee, S., Mura, R., y Dionne, J. (1996). La compréhension des notions de sinus et de cosinus chez des élèves du secondaire. *For the Learning of Mathematics, 16*(2), 19-27.

Demir, O. y Heck, A. (2013). A new learning trajectory for trigonometric functions. *Proceedings of the eleventh International Conference on Technology in Mathemathics Teaching*, 119-124. Bari, Italy.

Gutmann, T. (2003). A direct approach to computing the sine or cosine of the sum of two angles. *The Mathematics Teacher, 96*(5), 314-318.

Kendal, M. y Stacey, K. (1998). Teaching Trigonometry. *Australian Mathematics Teacher, 54*(1), 34-39.

Montiel, G. (2011). Construcción de conocimiento trigonométrico. *Un estudio socioepistemológico*. México: Ediciones Díaz de Santos.

Montiel, G. y Buendía, G. (2013). Desarrollo del pensamiento funcional trigonométrico. En G. Buendía, M. Ferrari y G. Martínez (Eds), *Resignificación de funciones para profesores de matemáticas*, 169-205. D.F., México: Ediciones Díaz de Santos.

Montiel, G. y Jácome, G. (2014). Significados trigonométricos en el profesor. *Boletim de Educação Matemática Bolema 28*(50), 1193-1216.

Moore, K. (2014). Quantitative Reasoning and the Sine Function: The Case of Zac. *Journal for Research in Mathematics Education, 45*(1), 102-138.

Moore, K. y LaForest, k. (2014). The circle aproach to trigonometry. *Mathematics Teacher 107*(8): 616-623.

Reyes-Gasperini, D. (2015). *Empoderamiento docente y socioepistemologia. Un estudio sobre la transformacion educativa en matematicas*. Barcelona Gedisa.

Scholz, O. (2014). *Construcción de significados para lo trigonométrico en el contexto geométrico del círculo.* Tesis de maestría no publicada, Instituto Politécnico Nacional, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada Unidad Legaria. México.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26,* 114-145.

Steffe, L., Thompson, P. y von Glasersfeld (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.) *Handbook of research design in Mathematics and Science Education* (256-306). Mahwah: Erlbaum.

Torres-Corrales, D. (2014). *Un entorno geométrico para la resignificación de las razones trigonométricas en estudiantes de Ingeniería.* Tesis de maestría no publicada, Instituto Tecnológico de Sonora. México.

Vohns, A. (2006). Reconstructing basic ideas in geometry an empirical approach. *ZDM, 38*(6), 498-504.

Weber, K. (2005). Students' understanding of trigonometric functions. Mathematics Education Research Journal, 17(3), 91-112.Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(2), 132-144.