

**CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO SOBRE LA
MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN: UN ESTUDIO DE DOS CASOS**
**PEDAGOGICAL CONTENT KNOWLEDGE ABOUT MULTIPLICATION AND
DIVISION: A TWO CASES STUDY**

Lina Tascón-Cardona
lina.tascon.cardona@gmail.com
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. México

Estela Juárez-Ruiz
estela.juarez2000@gmail.com
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. México

Resumen

En esta investigación se analiza el Conocimiento Didáctico del Contenido que dos profesores de matemáticas de educación primaria de Colombia movilizan en el diseño de una planeación de clase para la enseñanza de las operaciones de multiplicación y división a través de la resolución de problemas. La metodología es de tipo cualitativa con un estudio de caso de tipo instrumental. Se utilizó la planeación de clase como instrumento para recolectar la información y la entrevista semiestructurada como técnica para profundizar en los conocimientos que surgen de las planeaciones. Como instrumento de análisis se utilizó el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK), con descriptores de conocimiento elaborados para los subdominios del modelo, que permitieron fundamentar los conocimientos movilizados por los profesores. También se utilizó la triada Evidencia-Indicio-Oportunidad. Los resultados indican diferencias y similitudes en el Conocimiento Didáctico del Contenido de los dos profesores. Ambos movilizaron conocimientos sobre estrategias didácticas, el uso de recursos virtuales en la enseñanza y aspectos emocionales involucrados en el aprendizaje.

Palabras clave: Conocimiento Didáctico del Contenido, División, MTSK, Multiplicación, Resolución de Problemas.

Abstract

This research analyzes the Didactic Content Knowledge mobilized by two elementary school mathematics teachers in Colombia when designing a lesson plan for teaching multiplication and division operations through problem solving. This article focuses on the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge Model – MTSK. The methodology is qualitative and based on an instrumental case study. Lesson planning was used as an instrument to collect information and semi-structured interviews were used as a technique to deepen the knowledge that emerges from lesson plans. The



Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) model was used as an analytical tool with knowledge descriptors elaborated for the subdomains of the model which allowed evidence of the knowledge mobilized by the teachers. We also used the Evidence-Indication-Opportunity triad. The results show differences and similarities in the teachers' didactic content knowledge. Both teachers mobilized knowledge about didactic strategies, the use of virtual resources in teaching, and emotional aspects of learning.

Keywords: Pedagogical Content Knowledge, Division MTSK, Multiplication, Problem Solving.

1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años se han realizado investigaciones en distintos países con el propósito de avanzar en la organización y definición del conocimiento especializado de los profesores de matemáticas (Aguilar-González et al., 2018; Espinoza-Vásquez et al., 2018; Ekawati et al., 2023; Reyes y Sosa, 2017; Zakaryan y Ribeiro, 2016), partiendo de la premisa de que el conocimiento que tiene el profesor sobre los temas que enseña es una condición necesaria pero no suficiente (Pascual et al., 2021). Para Carrillo-Yáñez et al. (2019) el conocimiento debe ser mucho más amplio y profundo, por lo que el profesor de matemáticas debe poseer un extenso conocimiento didáctico considerando que este es el que le permite organizar y gestionar su práctica en el aula. De acuerdo con Mazibe et al. (2020), el maestro es el recurso educativo más importante en la escuela y el éxito de los estudiantes depende de lo que sabe sobre un tema y de cómo puede enseñar lo que conoce.

Por otra parte, investigar sobre el conocimiento profesional que los profesores de matemáticas tienen sobre la multiplicación y división, su enseñanza y aprendizaje, es fundamental considerando que hacen parte de los conceptos más importantes de la matemática escolar y son relevantes en el desarrollo del pensamiento matemático posterior (Orrantia, 2006). A pesar de su importancia, en la educación primaria se ha privilegiado su enseñanza a través de reglas y algoritmos que en la mayoría de los casos los estudiantes llevan a cabo de una forma mecánica sin realizar un proceso adecuado de reflexión (Ministerio de Educación Nacional de Colombia [MEN], 1998). La mayoría de las tareas matemáticas utilizadas por los profesores son meramente rutinarias, con el fin de practicar procedimientos previamente aprendidos (Pehkonen, 2019).

Al respecto, Ribeiro (2009) manifiesta que los profesores han dejado de lado estrategias importantes de enseñanza como la resolución de problemas para promover el aprendizaje, llevando a cabo una enseñanza con contenidos exclusivamente matemáticos, sin considerarla como una herramienta pedagógica (Gourdeau, 2019). Esta idea es respaldada por Taylor (2019), indicando

que los profesores deben dejar de lado la tecnicidad de la disciplina y seleccionar actividades que brinden a los estudiantes una verdadera experiencia matemática.

Se ha reconocido ampliamente que la actividad de resolución de problemas es crucial para el desarrollo y el aprendizaje de las matemáticas (Santos-Trigo et al., 2019). Al respecto, Rojas (2014) expone que los profesores expertos la usan para mejorar los procesos de enseñanza, centrando la instrucción en los estudiantes, además que es fuente y soporte principal del aprendizaje matemático en la educación básica. Del mismo modo, Pehkonen (2019) manifiesta que la resolución de problemas es de fundamental importancia y debería ser una actividad principal en las aulas. En este sentido y reconociendo que la actuación del profesor está dirigida por su conocimiento profesional que le permite planificar y actuar frente a las necesidades de sus estudiantes (Rojas et al., 2015), profundizar en el conocimiento especializado del profesor para enseñar matemáticas cuando considera la resolución de problemas es un campo interesante de investigación.

En la presente investigación tal como se expresa en Pehkonen (2019), se asume que cuando el profesor enseña basado en la resolución de problemas ofrece a los estudiantes una experiencia natural que les permite recurrir a diferentes caminos y estrategias de solución, articulando los conocimientos previos con los nuevos conocimientos. Las situaciones que se proponen permiten la interacción social entre compañeros y maestros que brinda la posibilidad de explicar y razonar sus pensamientos, ayudando a los estudiantes a obtener nuevas perspectivas de los conceptos matemáticos que están aprendiendo.

Teniendo en cuenta lo expuesto, en esta investigación se indaga sobre los conocimientos didácticos del contenido que movilizan dos profesores de matemáticas de Colombia en sus planeaciones de clase para enseñar la multiplicación y división de números naturales basados en la resolución de problemas. Los resultados presentados en este documento hacen parte de una investigación más amplia, donde se estudian las formas en las que se relaciona el conocimiento especializado de los profesores en la enseñanza de la problemática que aquí se aborda.

2. MARCO TEÓRICO

El modelo MTSK (por sus siglas en inglés - *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*) es considerado como una propuesta teórica y herramienta metodológica que permite analizar la práctica de los profesores de matemáticas (Advíncula et al., 2021; Escudero, 2015; Flores-Medrano et al., 2014). Enfatiza y comprende el conocimiento que le es útil y necesario al profesor brindando la oportunidad de analizar qué conocimientos movilizan en su actividad profesional (Climent y Montes, 2022).

El MTSK se compone de tres dominios: Conocimiento Matemático (MK), Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) y el dominio central relacionado con las Creencias que posee el profesor sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje (Figura 1).

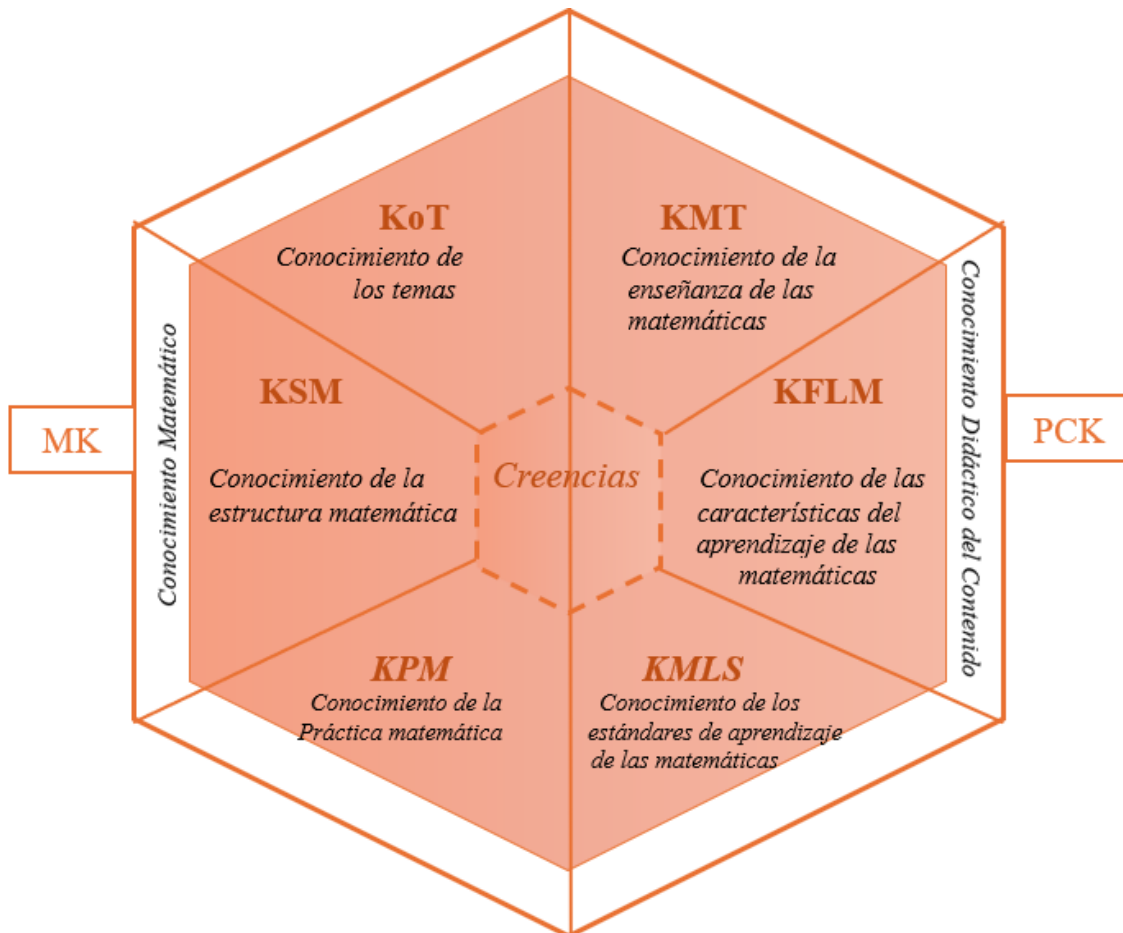


Figura 1. Estructura del MTSK

El dominio MK abarca el conocimiento que posee el profesor de matemáticas en relación con la disciplina científica en el contexto educativo y se relaciona con las características propias de las matemáticas. El dominio PCK considera el conocimiento que posee el profesor sobre el contenido matemático como objeto de enseñanza y aprendizaje (Carrillo-Yáñez et al., 2018). En cuanto al dominio de las Creencias, se considera que permea los otros dominios, por lo que se ubica en el centro del modelo (Espinoza-Vásquez et al., 2018). En este documento se describen los subdominios y categorías del PCK.

El dominio PCK está conformado por tres subdominios donde cada uno se conforma de una serie de categorías que permiten describir a mayor detalle el conocimiento del profesor (Climent y Montes, 2022):

Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM): centra su atención en el conocimiento del profesor de matemáticas sobre cómo se aprende un contenido. Considera la necesidad de que el profesor conozca cómo los estudiantes piensan y construyen el conocimiento matemático, enfocándose en los conocimientos que tiene el profesor sobre los procesos de aprendizaje propios de un contenido matemático. Incluye cuatro categorías: Teorías del aprendizaje matemático; Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas; Formas de interacción de los estudiantes con el contenido matemático; Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas (Carrillo-Yáñez et al., 2018; Escudero-Ávila, 2022).

Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT): tiene en cuenta el conocimiento del profesor de matemáticas en relación con los contenidos matemáticos y su enseñanza, integrando conocimientos teóricos personales e institucionales que pueden aplicarse en la construcción de conocimiento matemático. Incluye tres categorías: Teorías de enseñanza de las matemáticas; Recursos de enseñanza materiales o virtuales; Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos (Sosa y Reyes, 2022).

Conocimiento de los Estándares del Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS): incluye el conocimiento del profesor sobre lo que sus estudiantes deben aprender en determinado nivel, teniendo en cuenta conocimientos previos y su relación con conocimientos posteriores. Se compone de tres categorías: Resultados de aprendizajes esperados; Nivel esperado de desarrollo

conceptual y procedimental; Secuencia de temas (Carrillo-Yáñez et al., 2018; Codes y Contreras, 2022).

3. METODOLOGÍA

Esta investigación se realiza bajo un enfoque cualitativo, con un paradigma interpretativo mediante un estudio de caso instrumental múltiple. Siguiendo a Hernández-Sampieri y Mendoza (2018), el enfoque cualitativo permite explorar la forma en la que se experimentan algunos fenómenos asociados, en este caso, al PCK que dos profesores ponen en evidencia en sus planeaciones de clase. En cuanto al estudio de caso, Muñoz-Catalán y Monteiro (2016) manifiestan que permite explorar e interpretar de forma detallada un caso específico; además utiliza diversos métodos para recoger y analizar la información pues su carácter instrumental permite brindar evidencia sobre el PCK de los profesores. El estudio se realiza con dos casos buscando proporcionar una mejor comprensión de la competencia profesional del profesor de matemáticas para la enseñanza del contenido que aquí se aborda.

Los casos analizados son dos profesores de Colombia: Julia y Alan (seudónimos). Fueron seleccionados tomando en cuenta las características de profesores expertos, considerados como aquellos profesores de matemáticas que se diferencian del común de profesores. También se tuvieron en cuenta tres características secundarias propuestas por Rojas et al. (2012): que fueran docentes en ejercicio con más de cinco años de experiencia en la enseñanza de las matemáticas; que hubieran enseñado el contenido al menos una vez durante los últimos años; que tuvieran formación en el campo de la Educación Matemática.

Ambos profesores tienen formación en el campo de la Educación Matemática. La profesora tiene más de siete años de experiencia en su enseñanza. El profesor realizó un Posgrado en Educación Matemática y al momento de la investigación cursaba una especialización en el uso de las Tecnologías en la Educación; además tiene más de ocho años de experiencia en la enseñanza de las matemáticas.

Para recolectar los datos, primero se les solicitó a los profesores diseñar un plan de clase para la enseñanza de las operaciones de multiplicación y división considerando la resolución de

problemas, brindando total libertad de seleccionar la forma en la que llevarían a cabo su planeación: estándares curriculares, actividades, recursos, metodología, estrategias, etc.

También se utilizó la entrevista semiestructurada, ya que permite profundizar en el conocimiento de los profesores buscando precisar conceptos y proporcionar evidencia de los conocimientos que movilizan (Hernández-Sampieri y Mendoza, 2018). En este sentido se realizó una guía de preguntas abiertas basadas en cada una de las categorías de los subdominios del PCK. Algunos ejemplos de las preguntas se describen en la Tabla 1.

Para el análisis de los datos se utilizó el MTSK como modelo analítico que permite realizar una descripción detallada del PCK que movilizan los profesores de matemáticas en diferentes momentos y situaciones (Advíncula et al., 2021; Climent y Montes, 2022). Para el proceso de análisis, el MTSK considera tres tipos de datos: evidencias de conocimiento, como aquellos elementos que permiten afirmar que el profesor posee o moviliza un conocimiento; indicios de conocimiento, como las sospechas de que el profesor posee determinado conocimiento y es necesario profundizar en ellas para que se conviertan en una evidencia; oportunidades de investigación, sirven para analizar el conocimiento que el profesor pone de manifiesto en una situación determinada (Climent y Montes, 2022).

Para realizar el análisis de las planeaciones de clase, se construyeron descriptores de conocimiento para cada una de las categorías de los subdominios del PCK que fundamentan y permiten identificar los conocimientos movilizados. En esta investigación y así como se expone en Pacheco-Muñoz et al. (2023), se entiende que un descriptor de una categoría es un enunciado que permite establecer la presencia o ausencia de un conocimiento. Algunos ejemplos de los descriptores elaborados se presentan en la Tabla 1.

Posteriormente, se realizó el análisis de las planeaciones identificando indicios u oportunidades de conocimiento; ello brindó la posibilidad de profundizar en su PCK. De acuerdo con el análisis realizado y teniendo en cuenta los indicios y oportunidades de investigación encontrados, se seleccionaron las preguntas a realizar en la entrevista semiestructurada. En la Tabla 1 se presentan ejemplos de los descriptores de conocimiento y de las preguntas elaboradas para las categorías de los subdominios del PCK.

Tabla 1. Ejemplos de los descriptores y de las preguntas elaboradas

Subdominio	Categoría	Descriptor de conocimiento	Preguntas
KFLM	Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas	Conoce aspectos emocionales de los estudiantes que pueden influir en el aprendizaje de la multiplicación y división	¿Qué aspectos emocionales pueden influir en el aprendizaje de la multiplicación y división? ¿Cómo involucra esos aspectos en el proceso de enseñanza?
KMT	Recursos de enseñanza materiales y virtuales	Conoce recursos didácticos tanto virtuales como físicos para la enseñanza de las operaciones de multiplicación y división. Así como sus potencialidades y limitaciones.	¿Cuáles recursos didácticos, tanto virtuales como físicos, utiliza para la enseñanza de las operaciones de multiplicación y división? ¿Qué potencialidades o limitaciones pueden llegar a presentar los recursos didácticos que utiliza?
KMSL	Secuencia de temas	Conoce la secuenciación de los temas con respecto a la multiplicación y división, teniendo en cuenta los temas anteriores y posteriores, y sus potencialidades	¿Qué contenidos de menor complejidad se articulan con las operaciones de multiplicación y división? ¿Qué contenidos de mayor complejidad se articulan con las operaciones de multiplicación y división?

4. RESULTADOS Y ANÁLISIS

A continuación se describe el PCK movilizado por los profesores, así como su discusión y análisis. Se agrega que los indicios y oportunidades de conocimiento identificados en la planeación fueron transformados en evidencias por medio de una triangulación con los fragmentos de la entrevista (Aguilar y Barroso, 2015).

El formato de planeación que emplearon los profesores está constituido por tres momentos: inicio, desarrollo y cierre. A continuación, se presentan los extractos de la entrevista y de la planeación donde se identificó un indicio u oportunidad para proporcionar evidencia del PCK de cada profesor.

4.1 El PCK de Julia

En el momento de desarrollo en la planeación, la profesora emplea el recurso interactivo “Cocinando con Arturo” para promover el aprendizaje de la multiplicación y división de números naturales, tal como se observa en la Figura 2.

Se muestra a un chef prepara macarrones para sus invitados que son 540, al finalizar se da cuenta que 12 kg de macarrones alcanza para 180 platos. Se hace la siguiente pregunta:

1. ¿Para cuántos platos alcanzaría si preparara 36 Kg de macarrones? 540 platos



Siguiendo el recurso interactivo, se muestran problemas donde el estudiante deba utilizar la multiplicación o la división para resolverlos.

2. ¿Cuántas hojas se deben repartir por igual a 54 niños si hay 486 hojas?
3. Si Camilo empacó 35 kg de dulces en una bolsa. ¿Cuántos kg de dulces empacará en 8 bolsas?
4. ¿Cuántas bolsas se necesitan para empacar 8640 canicas, si en cada bolsa caben 96 canicas?

Figura 2. Recurso interactivo

Fuente: Extracto tomado de la planeación de clase de la profesora Julia

La actividad se tomó como un indicio del uso de recursos virtuales, por lo que, en la entrevista, se profundizó en lo siguiente:

Investigador: ¿Por qué utiliza el recurso en su planeación de clase o al momento de presentarle a los niños el contenido matemático?

Julia: Este recurso es un recurso que nosotros podemos encontrar en un portal educativo del MEN conocido como “Colombia Aprende”. Ahí encontramos temas, recursos, actividades que están agrupadas por grados. Ahora, ¿yo por qué escogí este recurso? Nosotros en el colegio tenemos la facilidad de que los estudiantes puedan hacer una exploración con el medio, en este caso, estamos haciendo una exploración haciendo uso de la tecnología, y así ellos puedan ir dándole significado, que ellos a través del juego también puedan ir practicando esos conceptos de la multiplicación, de la división. Esto es a través de la resolución de problemas y del juego de cierta forma. Presentar este tipo de recursos a los niños les llama mucho la atención a llevarlos solamente en una hoja y que ellos imaginen las situaciones. [...]. Entonces cuando llevamos este tipo de recursos ellos se concentran más, participan más, porque ellos a través del juego también están aprendiendo, y este tipo de recursos los mantiene atentos, activos, a querer encontrar la respuesta, a ver quién la hace primero.

En el fragmento de entrevista se evidencia el conocimiento de la profesora sobre recursos virtuales que favorecen la enseñanza (Recursos de enseñanza virtuales – KMT). También revela conocimiento sobre sus potencialidades considerando que al hacer uso de ellos los estudiantes se encuentran *más concentrados, atentos, activos y participativos* (Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas - KFLM). Además, se puede evidenciar conocimiento sobre el aprendizaje basado en la resolución de problemas y el juego, considerando que permite a los estudiantes darle sentido y significado al contenido matemático que aprenden. Esta última categoría se refleja al triangular la información de la planeación con la entrevista, puesto que en la planeación se proponen situaciones problema que los estudiantes deben resolver en aras de favorecer su aprendizaje (Estrategias– KMT). En la Tabla 2 se presentan las categorías y subdominios identificados con su respectivo descriptor de conocimiento.

Tabla 2. Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KMT y KFLM

Subdominio	Categoría	Descriptor de conocimiento
KMT	Recursos de enseñanza materiales y virtuales	Conoce recursos de enseñanza virtuales que potencializan el aprendizaje.
	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	Conoce y utiliza diversas estrategias de enseñanza que ayudan a los estudiantes a darle sentido y significado al contenido matemático como el juego y la resolución de problemas.
KFLM	Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas	Conoce que el uso de recursos virtuales despierta el interés y la motivación de los estudiantes por el aprendizaje.

Durante la entrevista surgió la oportunidad de profundizar en el PCK de la profesora sobre cómo y cuándo los estudiantes hacen uso de los algoritmos de las operaciones, considerando que las actividades propuestas en la planeación no proponen el uso de algoritmos y por el contrario se enmarcan en el aprendizaje basado en problemas, tal como se observa en la Figura 2. Por lo que en la entrevista se le preguntó lo siguiente:

Investigador: ¿En qué momento los estudiantes utilizarían los algoritmos para darle solución a las situaciones?

Julia: Esto se hace a través de la resolución de problemas, esa situación que se les está presentando en un lenguaje natural, de su contexto, de su diario vivir, ellos deben pasarla a un lenguaje matemático. Este proceso no es tan fácil, teniendo en cuenta la edad de ellos, de hecho, alguna teoría semiótico-

cognitiva como la de Duval plantea que hacer ese cambio no es un proceso fácil para los estudiantes. Y por eso es por lo que se empieza a trabajar desde temprana edad para que cuando ellos lleguen por ejemplo al álgebra, no tengan tantas dificultades para hacer esa traducción de esos lenguajes. Lo que se busca es que tengan una representación clara de cómo unir ese lenguaje o cómo hacer ese cambio, darle un significado a ese objeto matemático desde lo cotidiano.

De lo anterior se observa conocimiento de la profesora sobre las dificultades que presentan los estudiantes al usar los algoritmos de las operaciones en el proceso de resolución de problemas, manifestando que los cambios de lenguaje no son un proceso fácil (Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas – KFLM). También moviliza conocimiento sobre la conexión que existe entre el aprendizaje actual con aprendizajes posteriores reconociendo que se deben promover los cambios de lenguajes desde niveles tempranos para que en el aprendizaje del álgebra logren tener una representación más clara de cómo realizarlos (Secuencia de temas posteriores – KMLS). Del mismo modo, hace evidente conocimiento sobre la Teoría de Representaciones Semióticas con la cual argumenta por qué los cambios de registro no son un proceso sencillo para los estudiantes (Teorías de aprendizaje de las matemáticas – KFLM). En la Tabla 3 se presentan las categorías y subdominios identificados con su respectivo descriptor de conocimiento.

Tabla 3. Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KFLM y KMLS

Subdominio	Categoría	Descriptor de conocimiento
KFLM	Fortalezas y debilidades en el aprendizaje de las matemáticas	Conoce que una dificultad se da al momento de hacer el cambio del lenguaje natural al lenguaje matemático.
	Teorías del aprendizaje matemático	Conoce la Teoría de Representaciones Semióticas y la utiliza en el diseño de oportunidades para el aprendizaje.
KMLS	Secuencia de temas anteriores y posteriores	Conoce la relación que existe entre el aprendizaje actual y las potencialidades que tendrá para el desarrollo de temas posteriores.

4.2 El PCK de Alan

En el inicio de la planeación propuesta, el profesor estableció el siguiente desempeño de aprendizaje.

Desempeños
Resuelve situaciones problemáticas en las que utilice diferentes estrategias para calcular el resultado de multiplicaciones o repartos equitativos.

Figura 3. Desempeño de la clase propuesto en el diseño de planeación
Fuente: Extracto tomado de la planeación de clase del profesor Alan.

Ello fue tomado como un indicio de conocimiento para profundizar en su PCK, por lo que en la entrevista se le preguntó lo siguiente:

Investigador: Quiero preguntarle sobre el desempeño utilizado en su planeación ¿A qué se refiere? Es decir ¿Cómo podrían ellos enfrentarse a la situación y cómo esas estrategias le permiten al estudiante avanzar en su conocimiento matemático?

Alan: Los estudiantes pueden hacer uso de cualquier método de solución, ya sea una estrategia visual, también pueden utilizar bloques, material manipulativo, palitos, ramitas, lo que ellos consideren necesario para darle solución al problema, incluso hay estudiantes que son más matemáticos entonces utilizarían únicamente los números [...] Entonces lo que buscamos es que cuando se resuelve un problema o se plantea un problema los estudiantes lo solucionan primeramente ya sea individual o en parejas o grupal, dependiendo de cuál sea la situación y posteriormente ellos den cuenta de eso, pero no me dan cuenta a mí únicamente, le dan cuenta a todo el salón, entonces todos van a aprender una nueva estrategia, un nuevo método, o conocer que hicieron el mismo el método, pero en orden diferente y entender que se puede hacer. Entonces estaría llenando de herramientas a los estudiantes de diferentes estrategias o métodos, como se quiera llamar, para llegar a la solución de un mismo problema.

Del fragmento de entrevista y la planeación, se evidencia el conocimiento que moviliza el profesor sobre las formas en que sus estudiantes se relacionan con las situaciones propuestas: permite que sus estudiantes elijan las estrategias para resolver el problema (Formas de interacción con un contenido matemático – KFLM). También considera que hacer uso de esta estrategia de enseñanza permite que sus estudiantes conozcan nuevos métodos y formas para solucionar un

mismo problema (Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – KMT). En la Tabla 4 se presentan las categorías y subdominios identificados con sus correspondientes descriptores de conocimiento.

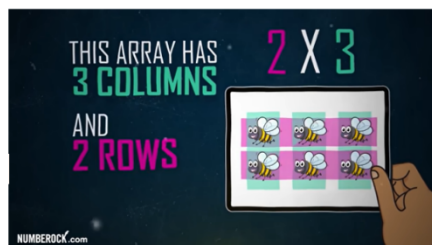
Tabla 4. Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KMT y KFLM

Subdominio	Categoría	Descriptor de conocimiento
KMT	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	Conoce y utiliza como estrategia de enseñanza el permitir que sus estudiantes utilicen diferentes métodos para darle solución a las situaciones.
KFLM	Formas de interacción con un contenido matemático	Conoce que el permitir que los estudiantes recurran a sus propios caminos de solución los llevará utilizar las estrategias con las que se sientan identificados.

En el desarrollo de la planeación, el profesor propone dos videos: el primero se relaciona con la operación de multiplicación y el segundo con la operación de división; además, hace referencia a la relación entre las dos operaciones, tal como se observa en la Figura 4.

En un momento inicial, el profesor conversará con los alumnos sobre el tema aprendido en la última semana: Multiplicación y división de naturales. Con esa información, el profesor hará un repaso de los temas y presentará dos vídeos sobre la multiplicación, la división y su relación.

Video 1. <https://youtu.be/gzFbUZ8VjEg>



Video 2. <https://youtu.be/oF2ftTujB4c>

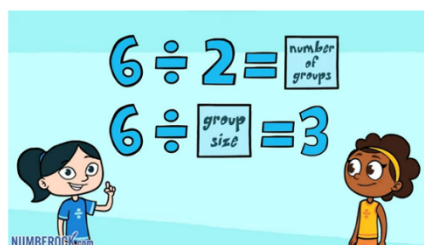


Figura 4. Videos propuestos por el profesor
Fuente: Extracto tomado de la planeación de clase del profesor Alan

El uso de los videos se tomó como un indicio de conocimiento, por lo que se le preguntó en la entrevista:

Investigador: ¿Cuál es el objetivo de utilizar este recurso? ¿Por qué utilizar recursos virtuales en la enseñanza de estos contenidos matemáticos? ¿De qué forma influye ese recurso virtual en la enseñanza de las operaciones?

Alan: Esos recursos son mucho más llamativos, interesantes para los estudiantes. Porque ellos están inmersos dentro de la tecnología, este mundo y esta realidad ya es tecnológica. Incluso lo cita un investigador: la tecnología ha influenciado directamente a la sociedad, pero al mismo tiempo ha influenciado la educación y el trabajo del docente, por lo que los profesores debemos incluir el uso de la tecnología en las aulas. Usar herramientas o recursos tecnológicos nos permite tener la atención de los estudiantes, motivarlos y darles una perspectiva diferente de las matemáticas. Una canción los estudiantes se la aprenden, están más atentos a ella, estos recursos para su formación son bastante significativos. Como te diste cuenta los dos videos tratan sobre las relaciones entre las operaciones y los explican muy bien, a pesar de que son canciones.

De la planeación de clase y el fragmento de entrevista se evidencia que el profesor emplea recursos virtuales, considerando que estos recursos permiten desarrollar conocimiento matemático sobre las operaciones y sus relaciones (Recursos virtuales – KMT). Asimismo, indica que en la selección de los recursos que utiliza tiene en cuenta aspectos emocionales de sus estudiantes; considera que son llamativos, los motiva y brindan una visión distinta de las matemáticas (Aspectos emocionales en el aprendizaje de las matemáticas - KFLM). En la Tabla 5 se presentan las categorías y los subdominios identificados con su respectivo descriptor de conocimiento.

Tabla 5. Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KMT y KFLM

Subdominio	Categoría	Descriptor de conocimiento
KMT	Recursos de enseñanza materiales y virtuales	Conoce recursos de enseñanza virtuales que potencializan el aprendizaje.
KFLM	Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas	Conoce que el uso de recursos virtuales despierta el interés y la motivación por el aprendizaje matemático

En el desarrollo de la planeación, el profesor propone algunas situaciones problema relacionadas con las operaciones de multiplicación y división; algunos ejemplos se observan en la Figura 5.

Problema 1.

Tienes cuatro bolsas de cinco canicas. ¿Cuántas canicas tienes en total?

- Pero ¿qué pasaría si otro amigo también quisiera canicas?



Problema 2.

Si tienes 12 trozos de chocolate que quieres repartir entre tres personas.

- ¿Cuántos trozos puede tomar cada persona?
- Ahora, hay cuatro personas que quieren
- compartir los doce trozos. ¿Cuántos trozos puede tener cada persona?



Figura 5. Situaciones problema propuestas

Fuente: Extracto tomado de la planeación de clase del profesor Alan.

Las situaciones fueron tomadas como un indicio de su PCK, por lo que se decide profundizar en ello:

Investigador: ¿Cuál es la intención de presentar esos problemas y cómo estas situaciones aportan al conocimiento no solamente de las operaciones, sino también al proceso de resolución de problemas?

Alan: Ya los estudiantes conocen y recuerdan las operaciones de suma y resta, la propiedad conmutativa, la asociativa porque ya la habían trabajado anteriormente. Ahora en cada uno de estos problemas, el estudiante va a poder hacer uso de todos esos conocimientos y puede aplicar cualquier tipo de estrategia. Ejemplo, puede hacer arreglos rectangulares o puede formar grupos y demás. Entonces yo te diría que este tipo de situaciones por tratarse de problemas, el estudiante lo que va a hacer es tratar de darle solución a esta situación que describe una situación real, a pesar de que no lo involucre de lleno a ella, es decir, por medio de diferentes estrategias el buscará resolver esos problemas. Este tipo de situaciones son apropiadas para estudiar esto porque el estudiante va a tener o puede emplear diferentes métodos, ya sea matemático, ya sea gráfico, ya sea tabular, va a buscar diferentes representaciones. Diferentes modelos para poder solucionar el problema, eso sí, estaría contribuyendo en ese sentido al proceso de resolución de problemas y la aplicación de propiedades de las operaciones.

De la planeación y el fragmento de entrevista se puede evidenciar que el profesor tiene conocimientos sobre algunos aprendizajes previos de los estudiantes como la propiedad conmutativa y las operaciones de suma y resta (Nivel esperado de desarrollo conceptual y procedimental - KMLS). También pone en evidencia conocimiento sobre la forma en la que sus estudiantes se enfrentan a las situaciones (Formas de interacción con un contenido matemático – KFLM). Por otro lado, se manifiesta la utilización de las situaciones problema como tareas que

potencializan el aprendizaje ya que permite al estudiante seleccionar sus propios caminos para la resolución de problemas; argumenta que recurren a diferentes heurísticas (Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos – KMT). En la Tabla 6 se presentan las categorías y los subdominios identificados con su respectivo descriptor de conocimiento.

Tabla 6. Categorías y descriptores evidenciados de los subdominios KMLS, KFLM y KMT

Subdominio	Categoría	Descriptor de conocimiento
KMLS	Nivel esperado de desarrollo conceptual y procedimental	Conoce que los estudiantes deben conocer y recordar la propiedad conmutativa de la multiplicación y las operaciones de suma y resta.
KFLM	Formas de interacción con un contenido matemático	Conoce que los estudiantes al momento de resolver los problemas hacen uso sus conocimientos previos. Además, pueden aplicar diversas estrategias de solución.
KMT	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	Conoce y utiliza situaciones problema como tareas que potencializan el aprendizaje, considerando que los estudiantes pueden aplicar distintas heurísticas para su solución.

5. DISCUSIÓN

De lo anterior se logra evidenciar la potencialidad de la planeación como un escenario que permite analizar el PCK de los profesores de matemáticas al momento de llevar a cabo su actividad profesional. En esta investigación, la planeación de clase como instrumento ha permitido identificar los subdominios que lo conforman y algunas de sus categorías. En este sentido, cabe resaltar que otras investigaciones como las realizadas por Carreño et al. (2017), Carreño y Climent (2019), Pacheco-Muñoz et al. (2022), Paternina-Borja y Juárez-Ruíz (2023), realizan reflexiones sobre planeaciones de clase para caracterizar el PCK de los profesores en la enseñanza, aunque con objetos matemáticos diferentes.

El PCK incluye el conocimiento sobre el uso de recursos virtuales para la enseñanza de las matemáticas. En este caso, se observó que los profesores movilizaron conocimientos en esta categoría indicando que su uso potencializa el aprendizaje de la multiplicación y división. De forma

similar, en las investigaciones realizadas por Paternina-Borja y Juárez-Ruíz (2023) y Otero-Valega et al. (2023) se refleja la importancia del uso de recursos digitales como medio para favorecer los procesos de enseñanza y aprendizaje de las simetrías y operaciones con enteros. Al respecto, Sosa y Reyes (2022) argumentan que existen elementos de la acción del profesor que le permite propiciar el aprendizaje de sus estudiantes y algunas de ellas se relacionan con la utilización de recursos tecnológicos en las aulas.

Aunado a lo anterior, se evidenció que ambos profesores al momento de seleccionar los recursos digitales tienen en cuenta aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas. Para Escudero-Ávila (2022) que el profesor pueda reconocer las expectativas o intereses que sus estudiantes tienen sobre un determinado contenido, puede ayudarlo a reconocer posibles vías de trabajo que promuevan el aprendizaje matemático. De acuerdo con Croda y Rodríguez (2022), el atender aspectos emocionales que permitan a los estudiantes mantener el interés, debe ser uno de los aspectos a considerar sobre el uso de recursos digitales en la enseñanza.

Ambos profesores movilizaron conocimiento sobre estrategias asociadas a la enseñanza de las matemáticas. La profesora hace uso de la resolución de problemas considerando que permite que los estudiantes doten de significado el contenido matemático que aprenden. El profesor, por su parte, considera que esta forma de enseñar matemáticas permite que sus estudiantes decidan los métodos y estrategias de solución. Para Barco et al. (2022), que los profesores de matemáticas empleen situaciones problema en el proceso de enseñanza les ayuda a innovar pedagógicamente además de fortalecer el aprendizaje autónomo de los estudiantes. Al respecto, Díaz y Ruíz (2019) manifiestan que la resolución de problemas se presenta como una intervención didáctica de carácter contextualizado cuya finalidad es involucrar a los estudiantes en el aprendizaje.

De forma particular, el profesor movilizó conocimientos sobre las formas en la que los estudiantes interactúan con el contenido, manifestando que al momento de solucionar los problemas recurren a métodos y estrategias con las que se identifican. Esta forma de concebir la actividad matemática es apoyada por las investigaciones de Díaz y Ruíz (2019) y Pehkonen (2019) quienes consideran que, en el proceso de resolución de problemas, los estudiantes articulan conocimientos previos con los datos del problema y reconocen los procesos que deben realizar para solucionar las situaciones.

Por su parte, la profesora evidencia conocimiento sobre teorías de aprendizaje de las matemáticas. Conoce que se debe abordar el aprendizaje de tal manera que los estudiantes realicen cambios de representación. Al respecto, Escudero-Ávila (2022) indica que cuando un profesor reconoce el concepto de registro de representación como un constructo propio de la didáctica de la matemática, además de diferenciar los distintos registros asociados al concepto matemático y los utiliza en el diseño de oportunidades, tiene un conocimiento sobre las teorías formales de aprendizaje.

Relacionado con lo anterior, se evidencia que la profesora conoce sobre dificultades asociadas a los cambios de lenguaje, considerándolo como uno de los procesos más complejos en el aprendizaje de las matemáticas, en este caso particular, al aprendizaje de las operaciones. Para Pino-Fan et al. (2015) y Duval (2017) los tratamientos realizados a las representaciones semióticas de los objetos matemáticos hacen parte de las actividades cognitivas menos espontáneas y más complejas para los estudiantes.

La profesora también movilizó conocimiento sobre la importancia que tiene el aprendizaje de las operaciones para el aprendizaje de conocimientos posteriores como el álgebra. Argumenta que los estudiantes en las primeras etapas deben tener una formación sólida sobre estos conceptos, considerándolos potencialmente útiles en aprendizajes más avanzados. De acuerdo con Codes y Contreras (2022) el profesor conoce sobre la secuencia de temas cuando reconoce las potencialidades que el aprendizaje actual tiene con el desarrollo de temas posteriores.

El profesor, por su parte, dejó evidencia sobre su conocimiento relacionado con el nivel de desarrollo conceptual y procedimental. Manifiesta que los estudiantes deben conocer y recordar las operaciones de suma y resta, así como algunas propiedades de las operaciones y usarlas en el proceso de resolución de problemas. Siguiendo a Codes y Contreras (2022), un profesor de matemáticas posee conocimientos sobre los estándares de aprendizaje de las matemáticas cuando reconoce lo relativo a lo que un estudiante puede o debe alcanzar en un nivel determinado.

5. CONCLUSIONES

Esta investigación da muestra del PCK movilizado por dos profesores de matemáticas en sus planeaciones de clase para enseñar las operaciones de multiplicación y división de números naturales. Del análisis de los resultados se pueden destacar similitudes y diferencias en el PCK de los profesores de matemáticas, lo que permite observar el carácter no universal, dinámico y en permanente evolución del conocimiento profesional de los profesores de matemáticas.

Se destaca, que la entrevista semiestructurada fue un instrumento útil para profundizar en el PCK de los profesores, considerando que permitió convertir los indicios de conocimiento observados en las planeaciones de clase, en evidencias de conocimiento. También se resalta la posibilidad que brinda para indagar en las oportunidades de conocimiento que los profesores ponen de manifiesto en situaciones determinadas. Se resalta la creación de los descriptores de conocimiento relacionados con las operaciones de multiplicación y división en las categorías del PCK que permitieron identificar e interpretar los conocimientos movilizados por los profesores.

En cuanto al concepto de operaciones básicas, es un tema presente en la matemática escolar como en la formación inicial de profesores, los resultados de esta investigación son potencialmente útiles para los formadores de profesores en el diseño de tareas en los cursos de formación. En este sentido y de acuerdo con Pascual et al. (2021), el identificar el PCK de los profesores permite reflexionar sobre los contenidos que deben incluirse en los programas de formación y de cómo el educador de docentes podría mediar entre el contenido y los futuros maestros. También, aporta a la comunidad educativa en general, en relación con que el profesor de matemáticas tiene un conocimiento profesional específico que va más allá del conocimiento disciplinar y que es indispensable para estructurar su actividad en el aula.

6. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue realizado gracias al financiamiento del Consejo Nacional de Ciencia y tecnología de México, mediante la beca de Maestría con CVU: 1180008

7. REFERENCIAS

- Advíncula, E., Beteta, M., León, J., Torres, I., y Montes, M. (2021). El conocimiento matemático del profesor acerca de la parábola: diseño de un instrumento para investigación. *Uniciencia*, 35(1), 190-209. <https://doi.org/10.15359/ru.35-1.12>
- Aguilar, S., y Barroso, J. (2015). la triangulación de datos como estrategia en investigación educativa. Bit de píxel. *Revista de Medios y Educación*, (47), 73-88. <http://dx.doi.org/10.12795/pixelbit.2015.i47.05>
- Aguilar-González, A., Muñoz-Catalán, C., Carrillo, J., y Rodríguez-Muñiz, J. L. (2018). ¿Cómo establecer relaciones entre conocimiento especializado y concepciones del profesorado de matemáticas? *PNA*, 13(1), 41-61. <https://doi.org/10.30827/pna.v13i1.7944>
- Barco, C., Raimundo, S., Oliveira, T., y Osorio, L. (2022). Aprendizagem baseada em problemas para o ensino de matemática: uma revisão sistemática. *Revista Internacional De Pesquisa Em Didática Das Ciências E Matemática*, 3, e022011. <https://periodicoscientificos.itp.ifsp.edu.br/index.php/revin/article/view/819>
- Carreño, E., Climent, N., y Flores-Medrano, E. (2017). Conocimiento geométrico especializado de estudiantes para profesor de matemáticas de secundaria al cursar la asignatura práctica profesional: una reflexión sobre el plan de clase y su desarrollo. En Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (Ed.), *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 274-284). FESPM.
- Carreño, E., y Climent, N. (2019). Conocimiento especializado de futuros profesores de matemáticas de secundaria. Un estudio en torno a definiciones de cuadriláteros. *PNA*, 14(1), 23-53. <https://doi.org/10.30827/pna.v14i1.9265>
- Carrillo-Yáñez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-Gonzales, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Carrillo-Yáñez, J., Climent, N., Contreras, L., y Montes, M. (2019). Mathematics teachers' specialised knowledge in managing problem-solving classroom tasks. En P. Felmer, P. Liljedahl y B. Koichu (Eds.), *Problem Solving in Mathematics Instruction and Teacher Professional Development* (pp. 297-316). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-29215-7_16
- Climent, N., y Montes, M. (2022). El modelo MTSK: Antecedentes y estructura. En J. Carrillo, M. Montes y N. Climent (Eds.), *Investigación sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 27-34). Dykinson.
- Codes, M., y Contreras, L. (2022). El Conocimiento de las Características del Aprendizaje Matemático. En J. Carrillo, M. Montes y N. Climent (Eds.), *Investigación sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 95-108). Dykinson.

- Croda, G., y Rodríguez, M. del S. (2022). Posibilidades pedagógicas del relato digital para el aprendizaje en ciencias. *Tendencias Pedagógicas*, 39, 288–301. <https://doi.org/10.15366/tp2022.39.021>
- Díaz, G., y Ruiz, J. (2019). La tienda didáctica: una estrategia para promover la resolución de problemas con estructura multiplicativa en 4º grado de básica primaria. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos*, 15 (2), 134-157. <https://doi.org/10.17151/rlee.2019.15.2.7>
- Duval, R. (2017). Mathematical activity and the transformations of semiotic representation. En: T. Campos (Ed). *Understanding the Mathematical Way of Thinking –The Registers of Semiotic Representations*. (pp. 21-43). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9_2
- Ekawati, R., Kohar, A., Siswono, T., Lukito, A., Yang, K., y Nisa, K. (2023). Mathematics teacher educators' noticing of pedagogical content knowledge on hierarchical classification of quadrilateral. *Infinity*, 12(2), 261-274. <https://doi.org/10.22460/infinity.v12i2.p261-274>
- Escudero, D. (2015). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria* [Tesis de Doctoral. Universidad de Huelva] Biblioteca Universitaria Huelva. <https://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/11456>
- Escudero-Ávila, D. (2022). Conocimiento de las características de aprendizaje del aprendizaje matemático. En J. Carrillo, M. Montes y N. Climent (Eds.). *Investigación sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 83-94). Dykinson.
- Espinoza-Vásquez, G., Zakaryan, D., y Carrillo Yáñez, J. (2018). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en el uso de la analogía en la enseñanza del concepto de función. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 21(3), 301-324. <https://doi.org/10.12802/relime.18.2133>
- Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, Á., y Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. En Á. Aguilar, E. Carmona, J. Carrillo, L. C. Contreras, N. Climent, D. Escudero-Ávila, E. Flores-Medrano, P. Flores, J. L. Huitrudo, M. Montes, M. Muñoz-Catalán, N. Rojas, L. Sosa, D. Vasco, y D. Zakaryan (Eds.), *Un marco teórico para el Conocimiento especializado del Profesor de Matemáticas* (1st ed., pp. 71–93). Universidad de Huelva. <http://doi.org/10.13140/2.1.3107.4246>
- Gourdeau, F. (2019). Problem Solving as a Subject and as a Pedagogical Approach, and the Ongoing Dialogue Between Mathematics and Mathematics Education. En: Felmer, P., Liljedahl, P., Koichu, B. (Eds.) *Problem Solving in Mathematics Instruction and Teacher Professional Development*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-29215-7_6
- Hernández-Sampieri, R., y Mendoza, C. (2018). *Metodología de la investigación*. McGraw-Hill Interamericana Editores.

- Mazibe, E., Coetsee, C., y Gaigher, E. A. (2020). Comparison Between Reported and Enacted Pedagogical Content Knowledge (PCK) About Graphs of Motion. *Research in Science Education* 50, 941–964. <https://doi.org/10.1007/s11165-018-9718-7>
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares para Matemáticas*. MEN. https://www.mineducacion.gov.co/1780/articles-339975_matematicas.pdf
- Muñoz-Catalán, M., y Monteiro, R. (2016). Afrontando la controversia: Discusión sobre la naturaleza de los elementos metodológicos en la investigación en Educación. *Omnia*, 4, 23–30. <https://idus.us.es/handle/11441/49766>
- Orrantia, J. (2006). Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva evolutiva. *Revista Psicopedagogía*, 23(71), 158-180. Recuperado http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-84862006000200010&lng=pt&tlng=es.
- Otero-Valega, K., Juárez-Ruiz, E., y Zakaryan, D. (2023). Relaciones entre subdominios de conocimiento de un profesor de matemáticas sobre resolución de problemas aditivos. *Revista Venezolana De Investigación En Educación Matemática*, 3(1), e202318. <https://doi.org/10.54541/reviem.v3i1.92>
- Pacheco-Muñoz, E., Juárez Ruiz, E. y Flores Medrano, E. (2023). Relaciones direccionales intradominio del conocimiento especializado del profesor de matemáticas sobre localización en el plano. *Avances De Investigación En Educación Matemática*, (24), 57–74. <https://doi.org/10.35763/aiem24.4360>
- Pascual, M., Montes, M., y Contreras, L. (2021). The Pedagogical Knowledge Deployed by a Primary Mathematics Teacher Educator in Teaching Symmetry. *Mathematics*, 9, 1241. <https://doi.org/10.3390/math9111241>
- Paternina-Borja, O., y Juárez-Ruiz, E. (2023). Planeación de clase para enseñar simetrías: escenario para caracterizar el conocimiento didáctico de una profesora de matemáticas. *Revista LASALLISTA de Investigación*, 20(1), 67-82. <https://doi.org/10.22507/rli.v20n1a5>
- Pehkonen, E. (2019). An Alternative Method to Promote Pupils' Mathematical Understanding via Problem Solving. En: Felmer, P., Liljedahl, P., Koichu, B. (Eds.) *Problem Solving in Mathematics Instruction and Teacher Professional Development*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-29215-7_6
- Pino-Fan., L.R., Guzmán, I., Duval, R. y Font, F. (2015). The theory of registers of semiotic representation and the onto-semiotic approach to mathematical cognition and instruction: Linking looks for the study of mathematical understanding. *Proceedings of the 39th Psychology of Mathematics Education Conference*, 4, 33-40, Australia: PME.
- Reyes, A., y Sosa, L. (2017). Caracterización del conocimiento didáctico de la razón como un significado de la fracción. El caso de un profesor en formación inicial de primaria. En L. Serna (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1218-1226). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Ribeiro, C. (2009). Conhecimento Matemático para Ensinar: uma experiência de formação de professores no caso da multiplicação de decimais. *Boletim de Educação Matemática*,

22(34),1-26. <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291221876002>

- Rojas, N., Carrillo, J., y Flores, P. (2012). Características para identificar a profesores de matemáticas expertos. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García, y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 479-485). SEIEM. <https://core.ac.uk/download/pdf/12342342.pdf>
- Rojas, N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: Un estudio de caso* [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. DIGIBUG. <http://hdl.handle.net/10481/35199>
- Rojas, N., Flores, P., y Carrillo, J. (2015). Conocimiento especializado de un profesor de matemáticas de educación primaria al enseñar números racionales. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 29, 143-166. DOI: <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a08>
- Santos-Trigo, M., Aguilar-Magallón, D., y Reyes-Martínez, I. (2019). A Mathematical Problem-Solving Approach Based on Digital Technology Affordances to Represent, Explore, and Solve problems via Geometric Reasoning. In: Felmer, P., Liljedahl, P., Koichu, B. (Eds) *Problem Solving in Mathematics Instruction and Teacher Professional Development. Research in Mathematics Education*. Springer. http://doi.org/10.1007/978-3-030-29215-7_8
- Sosa, L., y Reyes, A. (2022). Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas. En J. Carrillo, M. Montes y N. Climent (Eds.). *Investigación sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 71-82). Dykinson.
- Taylor, P. (2019). Reforming School Mathematics: Two Levels of Structure. En: Felmer, P., Liljedahl, P., Koichu, B. (Eds.) *Problem Solving in Mathematics Instruction and Teacher Professional Development*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-29215-7_6
- Zakaryan, D., y Ribeiro, M. (2016). Conocimiento de la enseñanza de los números racionales: una ejemplificación de relaciones. *Zetetiké*, 24(3), 301-321. <http://dx.doi.org/10.20396/zet.v24i3.8648095>