Investigación e Innovación en Matemática Educativa

https://doi.org/10.46618/iime.213 ISSN: 2594-1046

UNA CONCEPCIÓN ALGEBRIZADA DEL LÍMITE COMO OBSTÁCULO PARA SU COMPRENSIÓN EN UN PROFESOR DE BACHILLERATO

AN ALGEBRIZED CONCEPTION OF THE LIMIT AS AN OBSTACLE TO ITS UNDERSTANDING IN A HIGH SCHOOL TEACHER

Dayana De Los Reyes
darec99@gmail.com
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. México

Lidia Aurora Hernández-Rebollar
lidia.hernandez@correo.buap.mx
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. México

Resumen

En este estudio se presenta el análisis de la comprensión de un profesor sobre el concepto de límite, detallando las estructuras mentales que se identificaron al resolver actividades relacionadas con el tema. Se recopilaron y analizaron los datos como parte del método de investigación de la Teoría APOE y se llevó a cabo un estudio de caso instrumental con un profesor de bachillerato. Para la recolección de los datos se utilizaron tres actividades sobre el límite de una función, diseñadas bajo la Teoría APOE, y una entrevista semiestructurada en línea. Para el análisis se utilizaron las herramientas que proporciona esta teoría. Se encontró que el informante concibe los procesos de aproximación en el dominio y en el rango de manera independiente a la representación de la función y para el proceso de aproximación coordinado, necesita una expresión algebraica. Los resultados permitieron concluir que el profesor entiende al límite como una operación y que la dependencia de una expresión algebraica de la función funcionó como un obstáculo para concebirlo dinámicamente (en términos de aproximaciones).
Palabras claves: Comprensión, Estructuras mentales, Límite de una función, Teoría APOE

Abstract

This paper presents the analysis of a teacher's understanding of the concept of limit, detailing the mental structures that were identified when solving activities related to the topic. Data were collected and analyzed as part of the APOE Theory research method and an instrumental case study was conducted with a high school teacher. Three activities on the limit of a function, designed under the APOE Theory, and an online semi-structured interview were used to collect data. The tools provided by this theory were used for the analysis. It was found that the informant conceives the approximation processes in the domain and in the range independently of the representation of the function and for the coordinated approximation process, he needs an algebraic expression. The results allowed us to conclude that the teacher understands the limit as an operation and that the dependence of an algebraic expression on the function functioned as an obstacle to conceiving it dynamically (in terms of approximations).
Keywords: Comprehension, Mental structures, Limit of a function, APOE Theory.

Recibido: Enero 10, 2024. Aceptado: Mayo 21, 2024. Publicado: Mayo 28, 2024

1. INTRODUCCIÓN

Se han realizado varias investigaciones que se centran en estudiar la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo. Bressoud et al. (2016) presentaron una revisión general de las investigaciones que se han hecho sobre esta asignatura y resumen cómo es la enseñanza del Cálculo en Europa y Estados Unidos así como los avances en la investigación de este tema. También, realizaron una descripción de las principales aproximaciones teóricas que abordan el estudio de conceptos claves del Cálculo, enfocándose en investigaciones que han abordado las dificultades de los estudiantes en la comprensión de límites, derivada e integral.

Dentro del Cálculo, el concepto del límite de una función en un punto se considera de mucha importancia porque es una idea fundamental del análisis matemático vinculada a conceptos como continuidad, derivada e integral (Pons et al., 2012). Su enseñanza en la educación actual constituye uno de los mayores retos, pues su aprendizaje trae consigo numerosas dificultades que se relacionan con procesos de pensamiento de orden superior como la abstracción, el análisis, la demostración, entre otros (Vrancken et al., 2006).

Aunado a esto, surgen dificultades provocadas por los esfuerzos para superar los modos de pensamiento numérico y algebraico (Vracken et al., 2006). Así, el álgebra o es una ayuda o es un impedimento para alcanzar la comprensión del concepto cuando los estudiantes resuelven problemas de límites, es decir, el álgebra inicia o bloquea el acceso al concepto debido a la sobreutilización de fórmulas para su cálculo (Bergsten, 2006).

Dentro de esta investigación hablaremos sobre una *concepción algebrizada del límite de una función*, haciendo referencia a la manera de entender al límite como un valor numérico que se obtiene al aplicar un conjunto de propiedades sobre el límite y sustituir el valor al que tiende x en la función o en alguna expresión equivalente a esta. Dicha concepción ya se ha reportado en investigaciones anteriores como fuente de dificultades, pues no permite entender que el límite informa sobre lo que ocurre cerca de un punto y no en el punto y a no comprender los límites laterales (e.g. Fernández-Plaza, 2010).

Blázquez y Ortega (2001) indicaron que cuando se trabaja el concepto de límite, la utilización de diferentes sistemas de representación tropieza con las dificultades del cambio de sistema de representación, lo cual sería un obstáculo didáctico por el abuso del registro algebraico en la enseñanza tradicional. También se conoce que, de manera general, una enseñanza tradicional del Cálculo se enfoca en el dominio de los algoritmos para calcular límites, derivadas e integrales. Esta provoca que los alumnos puedan calcular límites, derivadas e integrales, pero que no reconozcan las situaciones en las que estos conceptos son útiles para resolver problemas (Salinas y Alanís, 2009).

De igual forma, La Plata (2014) en un estudio cualitativo fundamentado en el Enfoque Ontosemiótico (EOS), reportó que alumnos de nivel superior determinaron con éxito el límite finito de una función de variable real usando métodos algebraicos, lo cual hace ver lo limitado del manejo del concepto de límite por los errores al responder preguntas dadas en el registro gráfico o simbólico; además, no vincularon claramente la existencia de un límite con la existencia e igualdad de los límites laterales.

La investigación realizada por Pons (2014) utilizó el marco de la Teoría APOE y una metodología cualitativa. En los resultados identificó dificultades en estudiantes de bachillerato para coordinar las aproximaciones en el dominio y en el rango, reportando que o no coordinan las aproximaciones o solamente realizan dicha coordinación en un único modo de representación (numérico o gráfico) cuando las aproximaciones laterales coinciden. Esto guarda relación con lo realizado por Pérez (2019), quien informó que estudiantes de ese mismo nivel construyeron la aproximación en el dominio y el codominio de la función, como procesos diferentes, presentando dificultad para coordinar los procesos anteriores a través de la función.

De acuerdo con Cottrill et al. (1996), esta coordinación de los procesos de aproximación en el dominio y en el rango de la función son necesarios para concebir al límite de forma dinámica. Es decir, para comprender que el límite en un punto x_0 es el valor al que se aproximan las imágenes de la función cuando las respectivas preimágenes se aproximan a

x_0. Además, él afirma que la concepción dinámica es necesaria para construir la concepción métrica del límite (definición formal o $\varepsilon - \delta$).

Hasta aquí se ha mencionado que la comprensión del límite se ha estudiado de manera amplia en estudiantes de diferentes de niveles académicos y desde diferentes perspectivas teóricas y metodológicas. En bachillerato, ya se señalaron los trabajos de Pons (2014) y Pérez (2019) quienes utilizaron el sustento de la Teoría APOE, pero también se encuentra la investigación de Arias (2019), en el mismo nivel educativo y perspectiva teórica. Con estudiantes de nivel superior y diferentes enfoques teóricos para estudiar la comprensión del límite de una función, ubicamos el trabajo de Guarín y Parada (2023), quienes usan como sustento teórico a Pirie y Kieren (1981). La investigación de Benítez y Gabriel (2020) busca que, con ayuda de un Software de Geometría Dinámica, los estudiantes mejoren su comprensión e imagen del concepto. Específicamente, en este mismo nivel académico, hay estudios que se centran en estudiar la comprensión de la concepción métrica del límite, identificando los elementos básicos que los estudiantes deben conocer para comprenderlo (Arsyad et al., 2021), identificando los obstáculos y conceptos erróneos más comunes al aprender este concepto (Slavíčková y Vargová, 2023), utilizando trayectorias de aprendizaje (Nurdin et al., 2021) o mediante el diseño de una secuencia de actividades para promover la transición de la concepción dinámica a la concepción métrica (Morante et al., 2022).

También, se ha estudiado la comprensión del límite en estudiantes para profesores de matemáticas, un ejemplo de esto es la investigación realizada por Bansilal y Mkhwanazi (2022). Además de estudiar la comprensión, otros investigadores se han enfocado en estudiar las imágenes conceptuales y el significado que le dan a este concepto los profesores en formación; es el caso de Ableitinger et al. (2023) y Sulastri et al. (2021), quienes lo hacen utilizando el marco referencial propuesto por Tall y Vinner (1981).

Sin embargo, esto no es así para los profesores en servicio, ya que son escasas las investigaciones que atienden a esta población (e.g. Guerrero, 2020; Fernández et al., 2015). Por lo que con este estudio se desea aportar a esta línea de investigación.

El objetivo de este trabajo es estudiar la comprensión del límite de una función de variable real de un profesor en servicio al resolver actividades relacionadas con la concepción dinámica del límite. El diseño de las actividades, el análisis de las respuestas y el método de investigación se realizó dentro del marco de referencia de la teoría APOE, ya que se consideró coherente con el objetivo propuesto y muy adecuado para describir la concepción de este concepto. El estudio se limitó a la concepción dinámica del límite porque esta se considera un acercamiento informal pero suficiente para la construcción de conceptos del cálculo en los niveles medio superior y superior (no en carreras de ciencias exactas) y, al mismo tiempo, necesaria para la construcción de la definición formal.

2. MARCO TEÓRICO

La teoría APOE es una teoría constructivista que parte de la epistemología de Piaget y, al mismo tiempo, un modelo que permite describir cómo se aprenden los conceptos matemáticos, así como explicar cómo las personas construyen mentalmente su comprensión de estos conceptos (Arnon et al., 2014). Dentro de esta teoría se consideran cinco tipos de abstracción reflexiva o mecanismos mentales: Interiorización, Coordinación, Encapsulación, Desencapsulación y la Generalización, que conducen a la construcción de las estructuras mentales: Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas (con la primera letra en mayúscula para distinguirlas como constructos de la teoría) (Figura 1).

El nombre de esta teoría se forma del acrónimo de estas estructuras mentales que la teoría define para caracterizar el pensamiento de los individuos al estudiar un concepto. Es conveniente precisar que la relación entre estructuras y mecanismos mentales es concebida dentro de la teoría como un sistema circular de retroalimentación. Aunque la construcción del conocimiento no es lineal y el hecho de que parezca que así lo es, se deriva de la descripción jerárquica de la misma (Arnon et al., 2014).

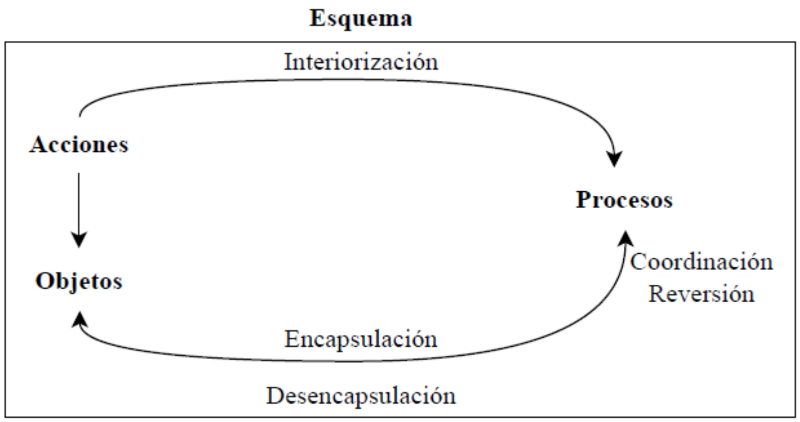


Figura 1. Estructuras y mecanismos mentales (Arnon et al., 2014).

Ahora, se describe brevemente cada uno de los mecanismos y estructuras mentales mencionados anteriormente; para conocerlos a detalle o revisar algunos ejemplos se recomienda ver Arnon et al. (2014).

- **Acción:** Se dice que un estudiante posee una concepción Acción si realiza las transformaciones de un objeto dirigidas externamente; cada paso de dicha transformación debe realizarse explícitamente y guiado por instrucciones externas, estableciendo una analogía. También, *coordina* Acciones para formar nuevas Acciones.
- **Proceso:** En esta estructura, el individuo realiza la misma operación que la Acción solo que totalmente en su mente, siendo capaz de imaginar la realización de la trasformación sin tener que realizar cada paso de manera explícita, se dice que el individuo *interiorizó* tales Acciones en un Proceso. El individuo *coordina* dos Procesos para dar origen a un nuevo Proceso coordinado.
- **Objeto:** Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un Proceso como un todo e identifica las transformaciones, además de construirlas (Acciones o Procesos), aplicando una Acción a un Proceso, se dice que el individuo posee una concepción Objeto del concepto y que el Proceso ha sido *encapsulado* en un Objeto. Además, una vez que ha sido encapsulado, este consigue ser desencapsulado para

regresar al Proceso que lo generó, siempre que desee. Asimismo, *coordina* Acciones para formar nuevos Objetos.

- **Esquema:** Esta estructura se construye como una colección coherente de las estructuras de Acción, Proceso, Objeto y otros Esquemas y las conexiones que se establecen entre ellas. También, se caracterizan por su dinamismo, es decir, su reconstrucción continúa debido a la actividad matemática del individuo en situaciones específicas. Ahora, un individuo aplica un determinado Esquema en un contexto distinto, por medio del mecanismo de *generalización*, determinando los alcances de sus construcciones.

En la Tabla 1 se presenta la Descomposición Genética del límite de una función utilizada en este estudio, que puede ser considerada como ejemplo de las estructuras y mecanismos descritos anteriormente.

2.1. Descomposición Genética

Una Descomposición Genética (DG) es un modelo hipotético que describe las estructuras y mecanismos mentales que un estudiante necesita construir para aprender un concepto matemático específico. De acuerdo con Roa-Fuentes y Oktaç (2010), la DG además de describir cómo se construye mentalmente un concepto, incluye una descripción de las estructuras que un individuo necesita haber construido previamente y explica las diferencias en el desarrollo de los estudiantes y sus variaciones en el rendimiento matemático. Así, una descomposición genética es un modelo de la epistemología y cognición de un concepto matemático.

2.2. Concepción dinámica de límite

Es pertinente precisar a qué nos referimos con que un sujeto tenga una concepción dinámica del límite de una función. Para esto, se tendrá en cuenta a Pons (2014), quien afirma que dicha concepción "supone construir un Proceso en el dominio en el cual x se aproxima a x_0, construir otro Proceso en el rango en el cual $f(x)$ se aproxima a L y utilizar la función para coordinarlos" (p. 101).

La concepción anterior se relaciona con la definición informal del límite de una función en un punto, la cual enuncia que L es el límite de la función f si $f(x)$ se aproxima a L cuando x se aproxima a x_0. Esta definición contrasta con la formal, que dice:

$$L = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow 0 < |f(x) - L| < \varepsilon$$

La comprensión de esta definición requiere de una concepción de límite que involucra elementos abstractos como los cuantificadores, el valor absoluto, desigualdades y la coordinación de dos procesos a través de la función, uno en el dominio y otro en el rango, en términos de la métrica (Arnon et al., 2014).

Para efectos de esta investigación, se utilizará la descomposición genética diseñada por Cottrill et al. (1996), en la que los autores predicen y describen siete construcciones mentales que un estudiante necesita construir para aprender el concepto de límite. Ahora, como las actividades implementadas en esta investigación requieren únicamente de la concepción *dinámica* del límite, en la Tabla 1 solo se muestran las tres primeras construcciones mentales que corresponden a dicha concepción del límite.

Tabla 1. Descomposición Genética del concepto del límite (Cottrill et al.,1996)

Estructuras	Descripción	
DG1	La Acción de evaluar f en un solo punto x que se considera cercano, o incluso igual al valor a.	
DG2	La Acción de evaluar la función f en unos pocos puntos, cada punto sucesivo más cercano al valor a que el anterior.	
DG3	Construcción de un esquema coordinado de la siguiente manera:	
	(A)	Interiorización de la Acción del paso 2 para la construcción de un Proceso en el dominio en el que x se aproxima al valor a.
	(B)	Construcción de un Proceso en el rango en el que y se aproxima al valor L.
	(C)	Coordinación de (A), (B) a través de f.

2.3. Ciclo de investigación

La metodología de investigación vinculada a la Teoría APOE se denomina Ciclo de Investigación y consta de tres componentes: *análisis teórico*, *diseño e implementación de estrategias de enseñanza*, y *análisis de datos*. El análisis teórico corresponde a la realización de un modelo viable de la construcción de algún concepto matemático en términos de construcciones mentales, a este modelo se le conoce como descomposición genética (Oktaç y Trigueros, 2010). Tal como se observa en la Figura 2, las tres componentes de este ciclo de investigación están relacionados. El *análisis teórico* fundamenta el *diseño y la implementación de la instrucción* a través de actividades destinadas a fomentar las construcciones mentales requeridas por el *análisis* (Arnon et al., 2014).

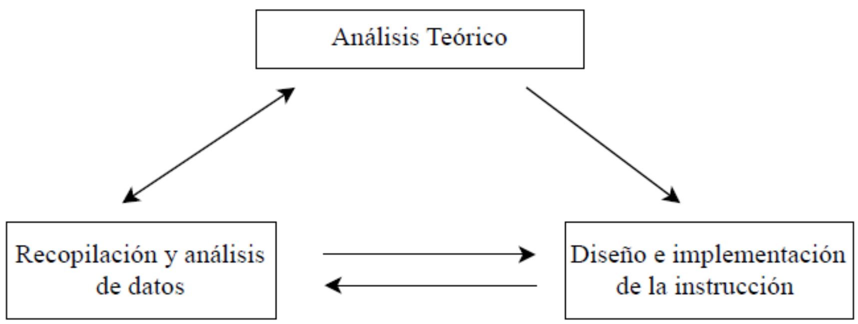


Figura 2. Ciclo de Investigación de la Teoría APOE (Arnon et al., 2014)

3. MÉTODO

Debido a que el propósito de esta investigación es estudiar la comprensión de un profesor sobre el concepto del límite en su concepción dinámica, se sigue el método de investigación que subyace en la Teoría APOE, específicamente se ha implementado el componente de *Recopilación y análisis de datos*.

Este componente se implementó con la recopilación de datos a través de tres actividades sobre el límite (vea Figuras 3, 4 y 5) y se realizó una entrevista semiestructurada, que en conjunto con la lente de la Teoría APOE fue posible analizarlos utilizando la DG de la Tabla 1. Por esto último, se implementó en este estudio un estudio de caso instrumental (Stake, 2007) y un enfoque cualitativo (Hernández-Sampieri y Mendoza, 2018) de corte interpretativo (Bassey, 2003).

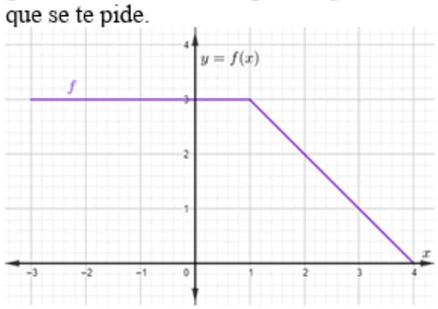
De esta manera, el caso es un profesor de matemáticas de bachillerato y el fenómeno de estudio será la comprensión que muestre sobre la concepción dinámica del límite. El informante es un profesor de matemáticas mexicano, ingeniero químico, al momento de su participación cursaba una maestría en Educación Matemática y tenía ocho años de experiencia enseñando Álgebra, Geometría, Trigonometría, Cálculo, Física, Química, Razonamiento Matemático, Robótica, Programación, entre otras en el nivel medio superior. En este nivel los estudiantes tienen edades entre los quince y los dieciocho años.

La entrevista se aplicó online por la plataforma Zoom en abril del 2022, fue grabada y transcrita. En esta se le preguntó al profesor sobre la forma en la que resolvió las actividades, con la intención de interpretar los constructos que puso en juego en concordancia con la DG del límite de Cottrill et al. (1996) y las estrategias o métodos de resolución utilizados. Algunas de las preguntas se plantearon de manera previa a la entrevista, y algunas otras surgieron al ver o escuchar las respuestas del informante, por lo que se formularon para profundizar en lo que él decía. Esta entrevista tuvo una duración de dos horas con quince minutos. Cabe aclarar que en este estudio no se pretendió validar ni refinar la DG utilizada, así como tampoco rediseñar las actividades implementadas.

A continuación, en las Figuras 3, 4 y 5 se presentan las actividades que se implementaron en este estudio y que fueron diseñadas por Morante (2020); enseguida se expone lo que se pretende con cada una de ellas. En estas actividades la función está representada en diferentes registros semióticos y el dominio no se hace explícito de manera intencional porque el propósito es que el profesor interprete la función únicamente a partir de su gráfica o de su expresión algebraica.

En la primera actividad (Figura 3) se le proporciona al profesor una función representada únicamente por su gráfica. Al carecer de la representación analítica de la función, se espera que el profesor realice Acciones en el registro gráfico, así como los Procesos DG3(A), DG3(B) y DG3(C) descritos en la DG (ver a la derecha de cada inciso).

Actividad N°1.
Considera la siguiente representación gráfica de una función f para responder lo que se te pide.



a. Determina los valores $f(x)$ de la función para los valores de x que se presentan en la tabla siguiente:

x	-3	0	0.8	...	**1**	...	1.4	2	4
$f(x)$				...	**3**	...			

b. Describa el comportamiento de los valores x que evaluaste cuando los comparas con el valor $x = 1$. — *Aproximación en el dominio*

c. Describa el comportamiento de los valores $f(x)$ cuando los comparas con el valor $f(1) = 3$. — *Aproximación en el rango*

d. Describa qué sucede con el comportamiento de los valores $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable x. — *Aproximación coordinada*

e. Calcula $\lim_{x \to 1} f(x)$ — *Evaluación del límite*

Figura 3. Actividad N°1 (Morante, 2020)

En la Figura 4 se presenta la segunda actividad, en la que el estímulo externo viene dado por la función en su representación algebraica. Con esto se espera que el profesor realice las Acciones (DG1 y DG2) y la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango (DG3) tanto en el registro algebraico como en el numérico. En esta actividad la función permite que las imágenes $f(x)$ obtenidas tras la evaluación de la función sean positivas para la aproximación por la izquierda y negativas para la aproximación por la derecha.

Actividad N°2.
Dada la función

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{4 - 3x}$$

a. Determina los valores $f(x)$ de la función para los valores de x que se presentan en la tabla siguiente:

x	-1.30	-1.22	-1.15	-1.05	-1.02	...	**−1**	...	-0.98	-0.95	-0.93	-0.90	-0.88
$f(x)$						...		...					

b. Describa el comportamiento de los valores x que evaluaste cuando los comparas con el valor $x = -1$. — *Aproximación en el dominio*

c. Describa el comportamiento de los valores $f(x)$ cuando los comparas con el valor $f(-1)$. — *Aproximación en el rango*

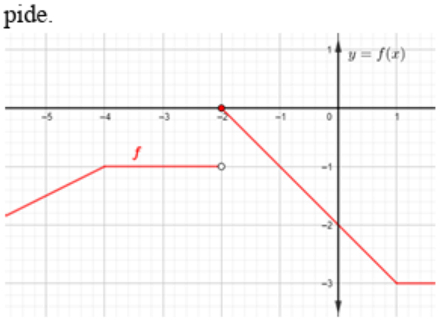
d. Describa qué sucede con el comportamiento de los valores $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable x. — *Aproximación coordinada*

e. Calcula $\lim_{x \to -1} f(x)$ — *Evaluación del límite*

Figura 4. Actividad N°2 (Morante, 2020)

En la tercera actividad se reanuda el trabajo en el registro gráfico, pero para una función definida por partes, con la intención de que se estudie un tipo función que no sea continua y así analizar la interpretación del profesor (ver Figura 5). De igual manera, se espera que el profesor interiorice las Acciones DG1 y DG2 y que coordine los Procesos DG3(A) y DG3(B) a través de la función en el registro gráfico.

Actividad N°3.
Utiliza la siguiente representación gráfica de la función f para responder lo que se te pide.



a. Determina los valores $f(x)$ de la función para los valores de x que se presentan en la tabla siguiente:

x	-6	-4	-2.8	-2.4	-2.2	...	-2	...	-1.8	-1.4	-1.2	-1	2
$f(x)$						...		...					

b. Describa el comportamiento de los valores x que evaluaste cuando los comparas con el valor $x = -2$. — *Aproximación en el dominio*

c. Describa el comportamiento de los valores $f(x)$ cuando los comparas con el valor $f(-2)$. — *Aproximación en el rango*

d. Describa qué sucede con el comportamiento de los valores $f(x)$ con relación al comportamiento de la variable x. — *Aproximación coordinada*

e. Calcula $\lim_{x \to -2} f(x)$ — *Evaluación del límite*

Figura 5. Actividad N°3 (Morante, 2020)

Lo que se espera en cada inciso de todas las actividades es lo siguiente:

- En el inciso (a) se espera que el profesor muestre la concepción Acción a través de evaluar una función f en una sucesión de valores de x que se acercan o incluso es igual a un valor x_0.
- Con el inciso (b) se pretende evaluar si el profesor ha interiorizado las Acciones DG1 y DG2, y es capaz de centrar su atención en el dominio de la función para notar que la serie de valores de x dados se aproximan cada vez más al valor de interés x_0 (DG3(A)). Para que esto sea posible se proporciona la serie de valores, cada uno más próximo que el anterior al valor de interés en el dominio de $f(x)$.
- Con el ítem (c) se busca algo similar que en el inciso (b) solo que esta vez en el rango de la función. Se busca que el profesor centre su atención en el rango de $f(x)$ y

describa lo que ocurre con los valores $f(x)$ cuando se comparan con $f(x_0)$, lo que correspondería a un Proceso de aproximación en el rango de la función (DG3(B)).

- El inciso (d) busca determinar si el profesor coordina los Procesos DG3(A) y DG3(B), asociando la causalidad de que el proceso de aproximación en el dominio produce el proceso de aproximación en el rango a través de $f(x)$. Así se busca evaluar DG3(C).
- En el (e) se pide al profesor que calcule el límite de la función en el valor de interés con la finalidad de estudiar qué método de resolución utilizará, si hace uso de la información obtenida en los incisos anteriores o si recurre a algún otro tipo de procedimiento.

4. RESULTADOS Y ANÁLISIS

Para los resultados de este estudio se tomaron como base la resolución de las actividades y su análisis, así como las respuestas que ofreció en la entrevista, en donde explicó a detalle la forma en la que las abordó. Se presentan las Acciones y Procesos correspondientes a la concepción dinámica del límite de una función que fueron identificados, primero por la autora principal de este estudio y que después fueron revisados y discutidos por el resto de los autores hasta llegar a un acuerdo.

4.1. Sobre las Acciones

El docente completó correctamente la tabla proporcionada, con los valores $f(x)$ correspondientes a cada preimagen, en cada una de las actividades. Así, se identificó la estructura mental Acción a través de la evaluación de una función en valores sucesivos, que corresponde a las estructuras DG1 y DG2, como se evidencia en la Figura 6.

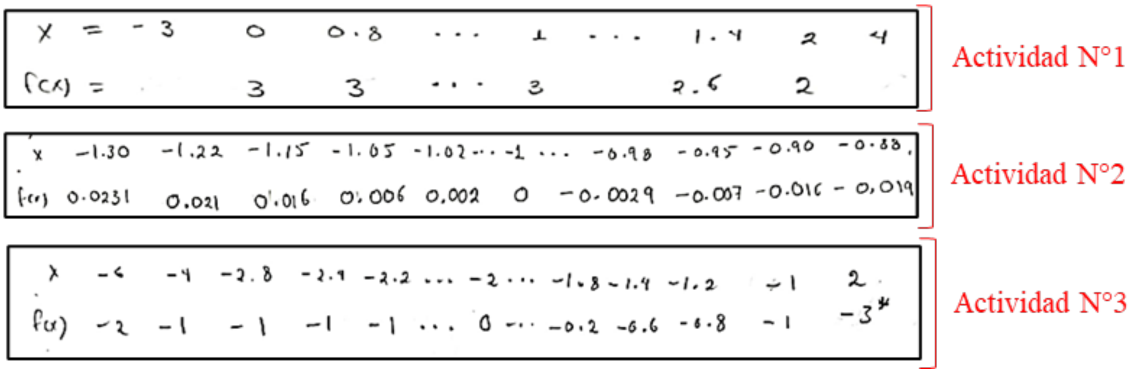


Figura 6. Manera en que el profesor realizó la tabulación (producción del profesor)

4.2. Sobre el Proceso de aproximación en el dominio

El profesor reconoció la aproximación que ocurre en el dominio de la función en las tres actividades, identificando a qué valor se aproximaban los valores del dominio de la función propuestos en las actividades (Figura 7).

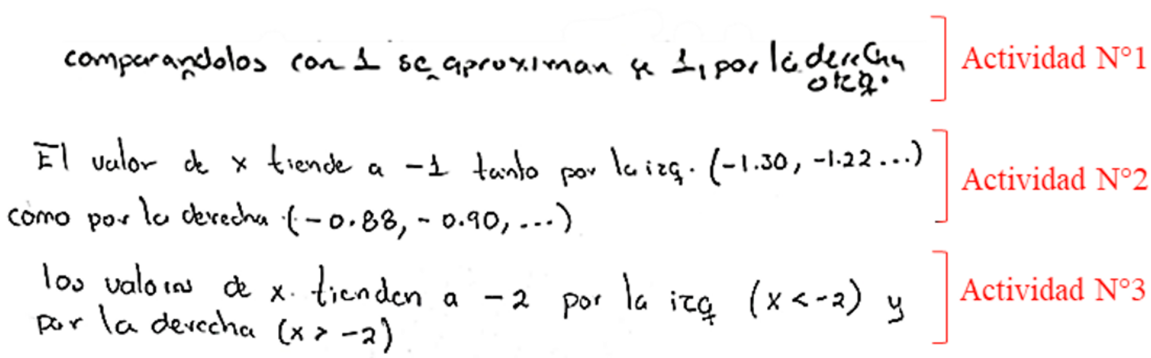
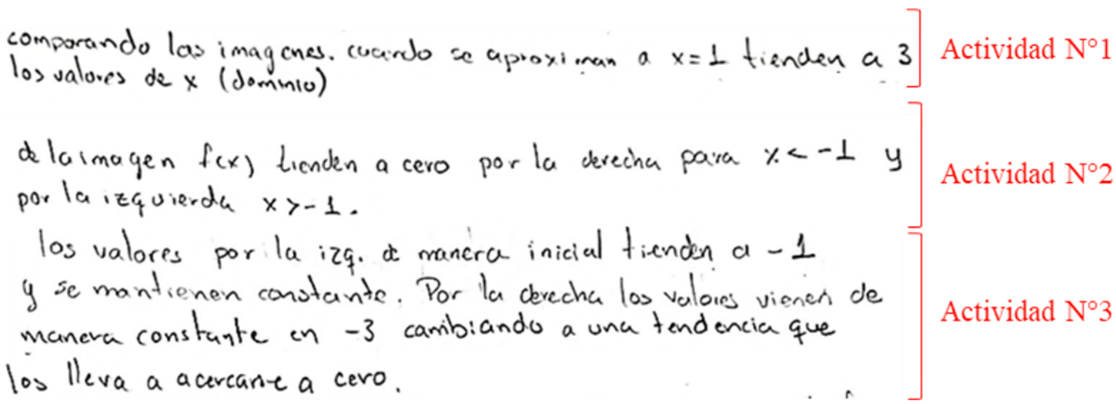


Figura 7. Respuestas del profesor sobre la aproximación en el dominio (producción del profesor)

En la Figura 7 se observa que el profesor responde que los valores de x se aproximan al valor $x = 1$ en la primera actividad, $x = -1$ en la segunda y $x = -2$ en la tercera actividad. Esto corresponde al Proceso de aproximación en el dominio de la función, correspondiente a la estructura DG3(A) en el registro algebraico, tabular y gráfico. Al dar esta respuesta, tuvo en cuenta los valores cercanos por la derecha y por la izquierda al valor de interés.

4.3. Sobre el Proceso de aproximación en el rango

De acuerdo con lo resuelto, se interpreta que el profesor reconoció la aproximación que ocurre en el rango de la función, al identificar a qué valor se aproximan las imágenes de x. Cuando describe este comportamiento tiene en cuenta los valores mayores o menores al punto de interés.


comparando las imagenes. cuando se aproximan a x=1 tienden a 3
los valores de x (dominio)

Actividad N°1

de la imagen f(x) tienden a cero por la derecha para x<-1 y
por la izquierda x>-1.

Actividad N°2

los valores por la izq. de manera inicial tienden a -1
y se mantienen constante. Por la derecha los valores vienen de
manera constante en -3 cambiando a una tendencia que
los lleva a acercarse a cero.

Actividad N°3

Figura 8. Respuestas del profesor sobre la aproximación en el rango (producción del profesor)

En la Figura 8 se presentaron las respuestas del profesor, en las que se evidencia que interiorizó las Acciones de calcular las imágenes de la función evaluando el valor de x en la expresión algebraica o a través de la gráfica de la función. Al responder que los valores de $f(x)$ se aproximan cada vez más a $f(1) = 3$ en la primera actividad, $f(-1) = 0$ en la segunda y $f(-2) = 0$ en la tercer actividad, se identifica el Proceso de aproximación que ocurre en el rango de la función, asociado a la estructura DG3(B) de la descomposición genética en los registros algebraico, tabular y gráfico.

4.4. Sobre el Proceso de aproximación coordinado

Se hace referencia al Proceso de aproximación coordinado cuando se comprende que la aproximación en el dominio produce la aproximación en el rango a través de la función, es decir, cuando se muestra la estructura DG3(C) de la DG. En este caso, cuando el profesor describe este comportamiento da dos respuestas diferentes. La primera de ellas la dio en la segunda actividad expresando que, cuando las preimágenes se aproximan a $x = -1$ por la izquierda y por la derecha entonces las imágenes se aproximan a cero, dando cuenta de la aproximación coordinada (ver Figura 9). En esta actividad la función estaba representada en el registro algebraico y utilizó la expresión para llenar una tabla.

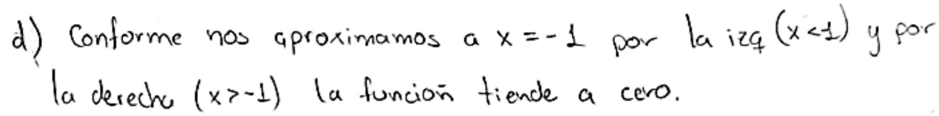

d) Conforme nos aproximamos a x = -1 por la izq (x < -1) y por la derecha (x > -1) la función tiende a cero.

Figura 9. Aproximación coordinada en la segunda actividad (producción del profesor)

Así, en esta actividad se identifica que el profesor coordinó el Proceso de aproximación en el dominio (DG3(A)) y el Proceso de aproximación en el rango (DG3(B)), correspondientes a la estructura DG3(C) de la descomposición genética.

Sin embargo, en el inciso d) de las otras dos actividades el profesor no logró describir la aproximación coordinada, en sus respuestas detalló un comportamiento particular de las funciones que involucraba el cálculo del dominio, el crecimiento, decrecimiento y la expresión algebraica de la función. En dichas actividades las funciones estaban representadas en el registro gráfico y eran funciones por partes. Algo que llama la atención en estos resultados es que el profesor buscó una expresión algebraica, sin que esto fuera necesario para describir la aproximación coordinada, pues tal información era posible obtenerla directamente de la gráfica (ver Figura 10). Pero, mostraba una dependencia del registro algebraico para responder, no solo sobre el comportamiento de la función, sino también sobre su límite, como se mostrará más adelante.

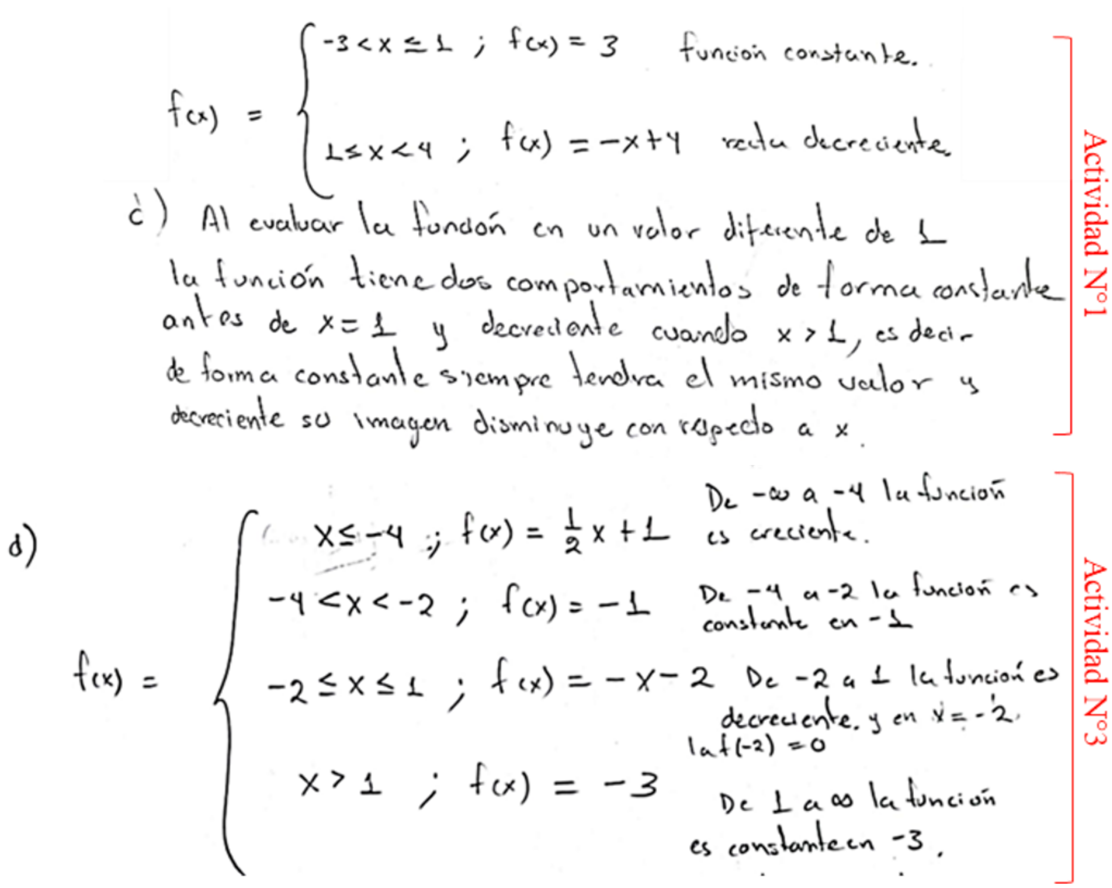


Figura 10. Descripción del comportamiento en la primera y la tercera actividad (producción del profesor)

Sobre la evaluación del límite en estas dos actividades se observó que el profesor utilizó los límites laterales para calcularlo (ver Figura 9). En la tercera actividad se observa que el profesor obtuvo los límites laterales usando la expresión algebraica de la función que calculó previamente. Así, para valores mayores a $x = -2$ utiliza la expresión $f(x) = -x - 2$ y para valores menores a $x = -2$ utiliza la expresión $f(x) = -1$.

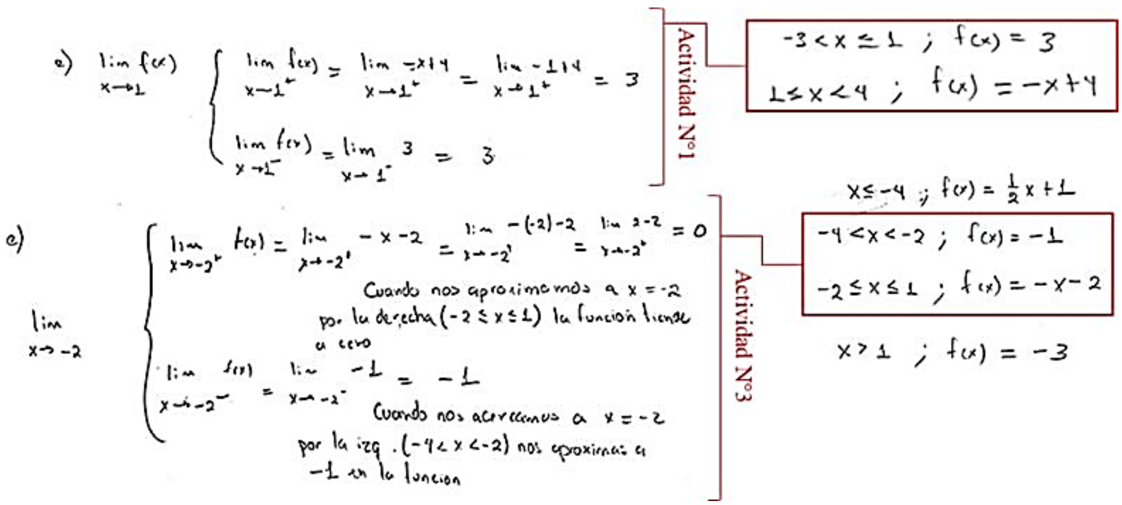


Figura 11. Evaluación del límite en la primera y la tercera actividad (producción del profesor)

Para la segunda actividad, el profesor no utilizó los límites laterales; en cambio, sustituyó el valor de interés directamente en la expresión algebraica que proporcionaba la actividad (ver Figura 12).

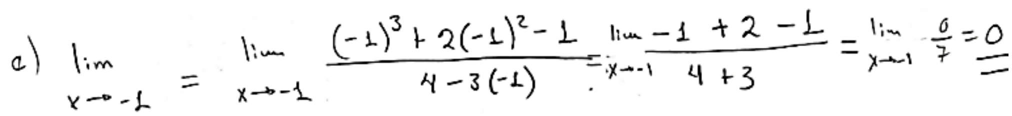


Figura 12. Evaluación del límite en la segunda actividad (producción del profesor).

A pesar de que se identifican dos procedimientos diferentes para evaluar el límite de la función en las actividades, un aspecto en el que sí coincidió el profesor en todas las actividades fue la necesidad de llevar a cabo esta evaluación utilizando procedimientos algebraicos, sustituyendo el valor de interés en la expresión algebraica. Evidencia una concepción algebrizada del límite de una función que le impidió coordinar las aproximaciones, y por ende, pensar sobre el límite de forma dinámica.

Otro aspecto notable en la resolución del profesor es que luego de calcular los límites laterales y observar que son iguales (como ocurre en la primera actividad) o diferentes, (como es el caso de la tercera actividad), no concluye sobre la existencia del límite, esto coincide con lo reportado por La Plata (2014).

De este modo, es posible interpretar que el profesor realiza Acciones para calcular el límite de una función, tales como, evaluar la función en el valor de interés y calcular los límites laterales algebraicamente. Así como, coordinar los Procesos de aproximación en el dominio y el rango en algunos momentos de la resolución de las actividades.

4.5. Sobre la concepción dinámica del límite

En un momento de la entrevista se le solicitó al profesor que escribiera la definición del límite de una función; para dar esta definición utilizó los registros de representación *lenguaje natural* y *algebraico*. La definición del límite en lenguaje natural dada por el profesor no es clara, debido a que no logra precisar la relación entre la aproximación a $x = a$ y $f(a)$. Lo que el informante hace es que define el límite en términos de aproximaciones y se refiere solo al caso de una función continua, escribiendo: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

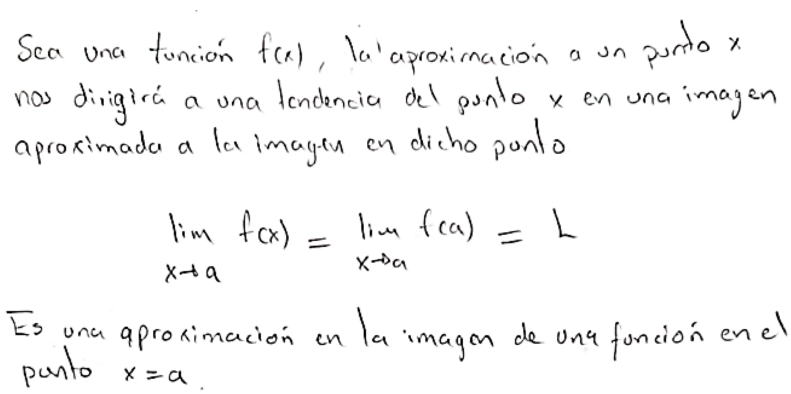


Figura 13. Definición de límite dada por el profesor (producción del profesor)

Al definir el concepto del límite, se identifican indicios del Proceso coordinado de la aproximación que ocurre en el dominio y en el rango de funciones continuas DG(3C) en el registro natural y algebraico, tomando en consideración que en su definición da a entender que cuando x tiende a a, $f(x)$ tiende a $f(a)$.

5. CONCLUSIONES

A partir del análisis realizado se concluye que el informante tiene una concepción Proceso del límite de una función en la que comprende los Procesos infinitos que ocurren en el dominio y en el rango. Sin embargo, de manera similar a lo que se ha reportado en estudiantes, el profesor de este estudio no mostró evidencias suficientes del Proceso que resulta de coordinar dichos Procesos. El Proceso coordinado se observó en la actividad N°2, donde no había una gráfica, pero no en la primera ni en la tercera actividad, en las que la función estaba representada en el registro gráfico.

Para hablar del comportamiento de la función y decidir sobre su límite en el valor de x dado, el docente siempre buscó tener una expresión algebraica de la función y sustituir el valor al que tiende x. Lo anterior ocurrió aun cuando esto no fuera necesario porque la información se podía obtener de la gráfica. Esta situación provocó que en la primera y en la tercera actividad no lograra hablar del límite como el valor al que se aproximan las imágenes cuando x se aproxima al valor de interés, tanto por la izquierda como por la derecha.

Por lo que se concluye que, en este estudio, una concepción algebrizada del límite de la función ha obstaculizado la concepción dinámica del límite del participante. Es decir, los procedimientos algebraicos vinculados al cálculo del límite le impidieron al profesor coordinar las aproximaciones utilizando la función, presentando dificultad para comprender que la aproximación en el dominio produce la aproximación en el rango de la función. Esta concepción centrada en lo algebraico puede ser un obstáculo también para la comprensión métrica del límite, ya que autores como Valls et al. (2011), afirman que esta requiere de la construcción previa de la concepción dinámica en el caso de la coincidencia de las aproximaciones laterales. Asimismo, Cottrill et al. (1996) indican que la dificultad de los estudiantes para comprender la definición formal del límite (ligada a la concepción métrica) puede ser el resultado de una comprensión insuficiente de su concepción dinámica.

La concepción algebrizada del límite no siempre será un obstáculo para concebir dinámicamente al límite funcional. Para evitar esto se recomienda a los profesores de matemáticas en ejercicio no abusar del registro algebraico e incluir en la enseñanza del límite variedad de registros de representación, tal como sugieren Hernández-Rebollar et al. (2023), Morante et al. (2022), Pons (2014), Engler et al. (2007), Blázquez y Ortega (2001), etc.

El principal aporte de esta investigación han sido las evidencias de la forma en la que un profesor de matemáticas en servicio del nivel medio superior concibe al límite de una función. El énfasis en lo algebraico, detectado en los estudiantes en diversas investigaciones, se manifestó en el informante de esta investigación en actividades matemáticas que no lo requerían. Como se mostró al inicio de este artículo, las investigaciones sobre la comprensión del límite de una función en estudiantes de los niveles medio superior y superior ha sido amplia, un poco menos en profesores en formación y escasa en profesores en servicio, por lo que los resultados de este trabajo podrían contribuir al diseño de contenidos de cursos de formación continua de docentes de los niveles medio superior y superior.

Dada la importancia que tiene la concepción dinámica del límite en la construcción de este concepto y de todos en los que este se ve involucrado, parece pertinente recomendar el uso de actividades como las que aquí se utilizaron, para el aprendizaje de este concepto, tanto en profesores como en estudiantes.

6. REFERENCIAS

Ableitinger, C., Götz, S. y Steinbauer, R. (2023). Conceptions of student teachers on the limit concept. In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, & E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 3329–3336). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME.

Arias, A. (2019). *Análisis de la comprensión del concepto de límite de una función en un punto en estudiantes ecuatorianos de bachillerato y del curso de nivelación.* [Tesis doctoral, Universidad de Alicante]. Repositorio Institucional de la Universidad de Alicante.

Arnon, I., Cottrill, J., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6

Arsyad, N., Ramadhana, Y. y Assagaf, S. F. (2021). Students' Factual Understanding on the concept of Limit. *Journal of Physics: Conference Series 1899*(1), 1-5. https://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1899/1/012148

Bansilal, S. y Mkhwanazi, T. W. (2022). Pre-service student teachers' conceptions of the notion of limit. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *53*(8), 2083-2101. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1864488

Bassey, M. (2003). *Case study research in educational settings.* Open University Press.

Benítez, E., y Gabriel, J. R. (2020). Una propuesta didáctica para mejorar la comprensión del concepto de límite de una función. *El Cálculo y su Enseñanza*, *14*(1), 16-29. https://doi.org/10.61174/recacym.v14i1.48

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *4*(3), 219-236.

Bergsten, C. (2006). Trying to Reach the Limit – The Role of Algebra in Mathematical Reasoning. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková. (Eds.). *Proceedings of the 30nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 153–160).

Bressoud, D., Ghedamsi, I., Martinez-Luaces, V. y Törner, G. (2016). *Teaching and learning of calculus.* Springer Nature.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior, 15*(2), 167-192.

Engler, A., Vrancken, S., Hecklein, D., Müller, D. y Gregorini, M. I. (2007). Análisis de una propuesta didáctica para la enseñanza de límite finito de variable finita. *UNIÓN*, *11*, 111-132.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Callejo, M. L. y Moreno, M. (2015). ¿Cómo estudiantes para profesor comprenden el aprendizaje de límite de una función? En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 249-257). SEIEM

Fernández-Plaza, J. A. (2010). *Unidad didáctica: límite y continuidad de funciones.* [Tesis de maestría, Universidad de Granada]. Repositorio Institucional de la Universidad de Granada.

Guarín, S. y Parada, S. (2023). Acciones y expresiones de la comprensión del límite de una función en un punto, por estudiantes de cálculo diferencial. *Educación Matemática*, *35*(1), 197-228. https://doi.org/10.24844/EM3501.08

Guerrero, J. (2020). *La reconstrucción del concepto de límite en un grupo de profesores del nivel medio superior utilizando la Teoría APOE.* [Tesis de maestría, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla]. Repositorio Institucional BUAP.

Hernández-Rebollar, L. A., Trigueros-Gaisman, M., Ruiz-Estrada, H. y Juárez-Ruiz, E. (2023). La concepción dinámica del límite de una función desde APOE y los registros semióticos. *Enseñanza de las Ciencias*, *41*(2), 117-135. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5796

Hernández-Sampieri, R. y Mendoza, C. (2018). *Metodología de la Investigación: Las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta.* Mc Graw Hill Education.

La Plata, C. S. (2014). *Errores en torno a la comprensión de la definición de límite finito de una función real de variable real.* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. Repositorio de Tesis PUCP.

Morante, J. (2020). *Una secuencia didáctica para la construcción de la definición formal del límite de una función basada en teoría APOE.* [Tesis de maestría, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla]. Repositorio Institucional BUAP.

Morante, J., Hernández-Rebollar, L. y Ruiz-Estrada, H. (2022). Contribuyendo a la transición de la concepción dinámica a la concepción métrica del límite de una función de una variable real en estudiantes de ingeniería. *Educación Matemática, 34*(1), pp. 249-279. https://doi.org/10.24844/EM3401.09

Nurdin, Assagaf, S. F., y Arwadi, F. (2021). Students' Understanding on Formal Definition of Limit. *Journal of Physics: Conference Series, 1752*(1),1-4. https://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1752/1/012082

Oktaç, A. y Trigueros, M. (2010). ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4), pp. 373-385.

Pérez, A. (2019). *Implementación de una secuencia didáctica para el concepto límite de una función basada en la Teoría APOE.* [Tesis de maestría, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla]. Repositorio Institucional BUAP.

Pirie, S. y Kieren., T. (1989). A recursive theory of mathematical understanding. *For the learning of mathematics*, *9*(3), 7-11.

Pons, J. (2014). *Análisis de la comprensión en estudiantes de bachillerato del concepto de límite de una función en un punto.* [Tesis doctoral, Universidad de Alicante]. Repositorio Institucional de la Universidad de Alicante.

Pons, J., Valls, J., Llinares, S. (2012). La comprensión de la aproximación a un número en el acceso al significado de límite de una función en un punto. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 435-445). SEIEM.

Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto de transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(1), pp. 89-112.

Salinas, P. y Alanís, J. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 12*(3), pp. 355-382.

Slavíčková, M. y Vargová, M. (2023). Differences in the Comprehension of the Limit Concept Between Prospective Mathematics Teachers and Managerial Mathematicians During Online Teaching. In G. Fulantelli, D. Burgos, G. Casalino, M. Cimitile, G. Lo Bosco, D. Taibi.

(Eds.). *Higher Education Learning Methodologies and Technologies Online* (pp. 168-183). Springer.

Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudio de casos* (4.ª ed.). Morata.

Sulastri, R., Suryadi, D., Prabawanto, S., Cahya, E., Siagian, M. D. y Tamur, M. (2021). Prospective mathematics teachers' concept image on the limit of a function. *Journal of Physics: Conference Series, 1882*(1),1-8. https://dx.doi.org//10.1088/1742-6596/1882/1/012068

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151–169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Valls, J., Pons, J., y Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(3), 325-338.

Vrancken, S., Gregorini, M., Engler, A. y Müller, D. (2006). Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. *Premisa*, *29*, 9-19.