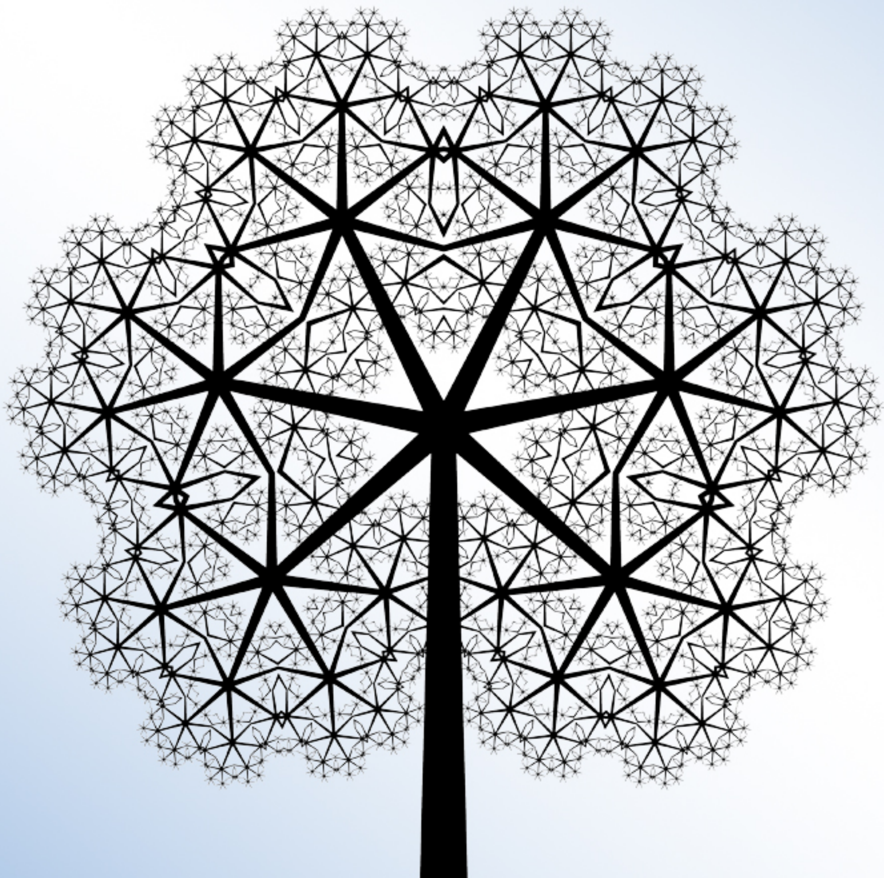
Investigación e Innovación en Matemática Educativa

Vol. 1, Núm. 1, 2016



Red Cimates

Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A. C.

Vol 1. Número 1. 2016

Investigación e Innovación en Matemática Educativa

Red Cimates

Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A.C.

Publicación oficial de la Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A. C.


Escuela de Invierno en Matemática Educativa
XII
Tampico
2009
XIII
Monterrey
2010
XI
Mérida
2007
XIV
Zacatecas
2011
III
Monterrey
1999
II
Monterrey
1998
XV
México
2012
X
Sta. Cruz
Tlaxcala
2006
IV
Acapulco
2000
XVIII
Oaxaca
2015
XVI
Tuxtla Gutiérrez
2013
IX
San Cristóbal
de las Casas
2005
I
Hidalgo
1997
V
Oaxaca
2001
VII
Chilpancingo
2003
VI
Tuxtla
Gutiérrez
2002
XVII
Oaxaca 2014
VIII
Tuxtla
Gutiérrez
2004

Investigación e Innovación en Matemática Educativa

Edita

Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A. C.

Flor Monserrat Rodríguez Vásquez

Ruth Rodríguez Gallegos

Landy Elena Sosa Moguel

Año 2016

Consejo Directivo de la Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A. C.:

Ruth Rodríguez Gallegos (Presidente)

Flor Monserrat Rodríguez Vásquez (Secretaria)

Landy Elena Sosa Moguel (Tesorera)

Las comunicaciones aquí publicadas han sido sometidas a evaluación y selección por parte de investigadores miembros de la Red Cimates.

Diseño de portada: Jesús Romero Valencia.

www.red-cimates.org.mx
Contribuciones e información: comite.editorial.red.cimates@gmail.com

ISSN 2594-1046

Comité científico

Alberto Camacho Ríos (Instituto Tecnológico de Chihuahua II)
Armando Albert (Instituto Tecnológico de Monterrey)
Bertha Ivonne Sánchez Luján (Instituto Tecnológico de Ciudad Jiménez)
Eddie Aparicio Landa (Universidad Autónoma de Yucatán)
Evelia Reséndiz Balderas (Universidad Autónoma de Tamaulipas)
Flor Monserrat Rodríguez Vásquez (Universidad Autónoma de Guerrero)
Francisco Cordero Osorio (Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN)
Gisela Montiel Espinoza (Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN)
Gabriela Buendía Ávalos (Colegio Mexicano de Matemática Educativa)
Guadalupe Cabañas Sánchez (Universidad Autónoma de Guerrero)
Javier Lezama (Instituto Politécnico Nacional)
Jose Marcos López Mojica (Universidad de Colima)
José Trinidad Ulla Ibarra (Universidad Autónoma de Nayarit)
Judith Hernández (Universidad Autónoma de Zacatecas)
Landy Elena Sosa Moguel (Universidad Autónoma de Yucatán)
Miguel Solís Esquinca (Universidad Autónoma de Chiapas)
Miguel Ángel Vásquez (Escuela Normal Superior Federal de Oaxaca)
Ricardo Cantoral Uriza (Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN)
Rosa María Farfán (Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN)
Ruth Rodríguez Gallegos (Instituto Tecnológico de Monterrey)

SECCIÓN A. INVESTIGACIONES DIDÁCTICAS EN MATEMÁTICA **14**

INDICIOS DE PRUEBA MATEMÁTICA SURGIDOS MEDIANTE EL USO DE GEOGEBRA 15
Miguel Ángel Huerta Vázquez, Olivia Alexandra Scholz Marbán, Sandra Areli Martínez Pérez *15*
UNA EPISTEMOLOGÍA BASADA EN LA TRANSVERSALIDAD DE LOS USOS DE LA GRÁFICA DE UNA COMUNIDAD DE INGENIEROS QUÍMICOS INDUSTRIALES 23
Irene Pérez-Oxté, Francisco Cordero Osorio *23*
ESTRUCTURAS ARGUMENTATIVAS PRESENTES EN LA PRODUCCIÓN DE UNA PRUEBA: EL CASO DE LA IGUALDAD DE ÁREAS EN GEOMETRÍA 31
Johnny Alfredo Vanegas Díaz *31*
LA FUNCIÓN CUADRÁTICA Y SU PROCESO DE MATEMATIZACIÓN 41
Melby Cetina-Vazquez, Guadalupe Cabañas-Sánchez, Jhony Alexander Villa-Ochoa *41*
TAREAS RELACIONADAS CON EL ÁLGEBRA TEMPRANA EN LOS LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICAS DE PRIMARIA 49
Virginia Salazar Luna, Guadalupe Cabañas-Sánchez, Catalina Navarro *49*
CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DE LOS FUTUROS LICENCIADOS EN EDUCACIÓN ESPECIAL: UN ACERCAMIENTO A LAS FRACCIONES 57
J. Marcos López-Mojica, Lilia P. Aké, Karina Cruz *57*
LA MODELIZACIÓN EN EL AULA DE EDUCACIÓN BÁSICA, UNA PROPUESTA DE EXPERIMENTACIÓN 67
Miguel Fabián Flores Bobadilla, Patricia Lamadrid González *67*
CARACTERIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR EN FORMACIÓN INICIAL PARA ENSEÑAR LA RAZÓN COMO UN SIGNIFICADO DE LA FRACCIÓN 75
Ana María Reyes Camacho, Leticia Sosa Guerrero *75*
LOS TÍTERES Y LA ARGUMENTACIÓN MATEMÁTICA 84
Marcela Ferrari Escolá, Nancy Marquina Molina *84*
EL TALENTO MATEMÁTICO. ESTRATEGIAS DE ATENCIÓN EXTRAESCOLAR 94
Orlando Daniel Jiménez Longoria, Carolina Carrillo García, Tomás Queralt Llopis *94*
LA FORMACIÓN INICIAL DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS EN MÉXICO: EL ANÁLISIS DE UN CASO 103
Lilia Patricia Aké Tec, José Marcos López Mojica, Cesar Martínez Hernández *103*
CONSTRUCCIÓN DE LA NOCIÓN NÚMERO DECIMAL POR ESTUDIANTES DE PRIMARIA. UN ESTUDIO DE CASO 111
Elizabeth Antero Tepec, Guadalupe Cabañas Sánchez *111*
LA MATEMÁTICA ESCOLAR EN EL CONOCIMIENTO PROFESIONAL DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS 120
Luis Cabrera Chim, Ricardo Cantoral Uriza *120*
LA MODELACIÓN-GRAFICACIÓN PRACTICADA DESDE LA COMUNIDAD DE INGENIEROS CIVILES EN FORMACIÓN: EL CASO DEL FENÓMENO DE INFILTRACIÓN 128
Adriana Atenea de la Cruz Ramos, Miguel Solís Esquinca, Hipólito Hernández Pérez *128*
EMERGENCIA DE LO HIPERBÓLICO EN UN CONTEXTO DE VARIACIÓN INVERSA 138
Aurea Guillermo Castellanos, Daniel Ortiz May, Landy E. Sosa Moguel *138*
EL PAPEL DEL CONTEXTO EN EL APRENDIZAJE MATEMÁTICO ESCOLAR. ANÁLISIS SOBRE LA NOCIÓN FUNCIÓN 147
Landy Sosa Moguel, Eddie Aparicio Landa, Martha Jarero Kumul *147*
EL FENÓMENO DE OPACIDAD Y LA SOCIALIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO. LO MATEMÁTICO DE LA INGENIERÍA AGRÓNOMA 157
Karla Gómez Osalde, Francisco Cordero Osorio *157*
ACTITUDES HACIA LAS MATEMÁTICAS EN ESTUDIANTES DE SECUNDARIA Y BACHILLERATO 165
Alejandra Mejía Saldaña, Ana María Castillo Juárez, José Gabriel Sánchez Ruíz *165*

SECCIÓN B. PERSPECTIVAS DIDÁCTICAS EN MATEMÁTICA **174**

EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL MEDIANTE EL USO DE ESTRATEGIAS DE PREDICCIÓN 175
Jesús Enrique Hernández Zavaleta, Ricardo Cantoral Uriza ... *175*
DESCOMPOSICIONES GENÉTICAS RELACIONADAS CON EL CONCEPTO DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL ... 184
Abel Medina Mendoza, Alejandro Miguel Rosas Mendoza ... *184*
MODELACIÓN MATEMÁTICA Y LA MATEMÁTICA DE UN INVESTIGADOR EN CIENCIAS: EN POS DE LA INNOVACIÓN Y DE LA TRANSDISCIPLINA ... 192
Astrid Morales, Jaime Mena-Lorca, Alexis González ... *192*
CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS SOBRE EL APRENDIZAJE DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS EN EL NIVEL SECUNDARIA ... 200
Marlene Vianney Guzmán Castro, Leticia Sosa Guerrero ... *200*
CONSTRUCCIÓN DE UN ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO IDÓNEO EN ÁLGEBRA LINEAL: EPISTEME VERSUS CURRÍCULO ... 207
Patricia Vásquez Saldías, Arturo Mena Lorca, Jaime Mena Lorca ... *207*
LOS MATERIALES MANIPULATIVOS EN LA ENSEÑANZA DE LAS OPERACIONES BÁSICAS CON RACIONALES ... 213
Sara Henao-Saldarriaga, Catalina Navarro-Sandoval, Flor M. Rodríguez-Vásquez ... *213*
PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL Y EL ENFOQUE POR COMPETENCIAS EN EL BACHILLERATO ... 222
EL ROL DE LOS CONSTRUCTOS DEL COTIDIANO Y LA MATEMÁTICA NO ESCOLAR ... 231
Julio Yerbes González, Francisco Cordero Osorio ... *231*
PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL EN LA PRÁCTICA MÉDICA. EL CASO DE "LA LECTURA" DEL ELECTROCARDIOGRAMA ... 238
Gloria Angélica Moreno-Durazo, Ricardo Cantoral Uriza ... *238*
CÓMO LLEGUÉ A SER PROFESOR DE MATEMÁTICAS; NARRACIONES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA DE OMETEPEC, GUERRERO ... 246
Magdalena Rivera Abrajan, Lourdes Soto Velásquez, Raúl Salas Vega ... *246*
IMPLEMENTACIÓN DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO FUNCIONAL TRIGONOMÉTRICO ... 253
María del Pilar Beltrán Soria, Gisela Montiel Espinosa ... *253*
EXPERIENCIAS EMOCIONALES ASOCIADAS A LAS MATEMÁTICAS DE ESTUDIANTES DE NIVEL MEDIO SUPERIOR EN SITUACIÓN DE RECURSE: UN ESTUDIO CON ENTREVISTAS DIARIAS ... 262
María E. Valle-Zequeida, Gustavo Martínez-Sierra ... *262*
PROPUESTA PARA EL REFORZAMIENTO DE CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS BÁSICOS APOYADA EN ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA ... 271
Sofía Elena Galván Hernández, Carmen Sosa Garza ... *271*
ESTADO ACTUAL DE LA INVESTIGACIÓN ALREDEDOR DE LA SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER ... 279
Fabián Wilfrido Romero Fonseca, Rosa María Farfán Márquez ... *279*
UN ESTUDIO DESDE LA SOCIOEPISTEMOLOGÍA DEL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL ... 287
Mario Adrián Caballero Pérez, Ricardo Cantoral Uriza ... *287*
USO DEL CONOCIMIENTO MATEMATICO DEL INGENIERO TOPÓGRAFO Y FOTOGRAMETRISTA ... 296
Luz Adriana Segura Camargo, Carolina Carrillo García, José Iván López Flores ... *296*
SUCESIONES FIGURATIVAS DE SEGUNDO ORDEN, UNA SECUENCIA DIDÁCTICA UTILIZANDO LAS VARIABLES COMO NÚMEROS GENERALES ... 303
José Rolando Palomino Iraburo, Nancy Janeth Calvillo Guevara, Leticia Sosa Guerrero ... *303*
UNA PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS PROPIEDADES DE LOS ÁNGULOS EN ESCUELAS TELESECUNDARIAS MULTIGRADO ... 311
Víctor Manuel Ibarra Solís ... *311*
UNA CARACTERIZACIÓN DE PROBLEMAS CONTEXTUALIZADOS QUE IMPACTEN EN EL DESARROLLO DE PENSAMIENTO MATEMÁTICO ... 317
Zuleyma Sarahí Pérez Moguel, Isabel Tuyub Sánchez, Landy Sosa Moguel ... *317*
CONEXIONES MATEMÁTICAS ENTRE LA DERIVADA Y LA INTEGRAL: UNA REVISIÓN DE LIBROS DE TEXTO DE BACHILLERATO ... 325
Javier García-García, Crisólogo Dolores Flores ... *325*
EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE BACHILLERATO SOBRE SISTEMAS DE ECUACIONES DE 2X2 Y EL APRENDIZAJE DE SUS ESTUDIANTES ... 334
Maricela Robles Robles, Lorena Jiménez Sandoval ... *334*
UNA SITUACIÓN DE MODELACIÓN EN EL CONTEXTO DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA ... 341

Salvador López-López, Guadalupe Cabañas-Sánchez ... 341
La fuente de sentido en la formacion docente en chile ... 350
Claudio Enrique Opazo Arellano, Francisco Cordero Osorio ... 350
Aprendizaje del concepto de matriz a traves de problemas aplicados a la ingenieria ... 359
José Luis Ávila Luna, Ofelia Montelongo Aguilar, Lorena Jiménez Sandoval ... 359
Conocimiento del profesor al enseñar la derivada usando recursos tecnológicos ... 366
Edgar Ponciano Bustos, Leticia Sosa Guerrero ... 366
La motivación en alumnos de ingeniería. Un taller de divulgación que emplea casos simulados con matrices ... 374
Daniel Salado Mejía, Lorena Jiménez Sandoval ... 374
La visualización didáctica en la formación inicial de profesores de matemáticas ... 381
Joan Sebastián Ordoñez ... 381
Educación básica y modelación matemática ¿qué concepciones tienen sus docentes? ... 386
Samantha Quiroz Rivera, Ruth Rodríguez Gallegos ... 386
Enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales: revisión bibliográfica ... 393
Sara Marcela Henao Saldarriaga, Flor Monserrat Rodríguez Vásquez ... 393
El criterio de la primera derivada en la resolución de problemas de optimización apoyados con tecnología y el papel que juegan los distintos registros de representación ... 402
Erick del Refugio de Lira Lozano, Elvira Borjón Robles ... 402
El uso de las gráficas por estudiantes de bachillerato. La modelación del llenado de recipientes ... 408
Karen Zúñiga González, María Esther Magali Méndez Guevara ... 408
Evaluación en el marco de las competencias una mirada desde los docentes del cobach 145 ... 416
Luis Alejandro Jonapá Chacón, Alma Rosa Pérez Trujillo ... 416
Una aproximación variacional al teorema fundamental del cálculo desde lo situacional ... 426
Aurea Guillermo Castellanos, Daniel Ortiz May, José Suárez Huchin ... 426
Lo matemático como argumentación en el aprendizaje escolar. Una reflexión desde la investigación para la educación ... 433
Karla Gómez Osalde, Landy Sosa Moguel, Eddie Aparicio Landa ... 433
CARACTERIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR EN FORMACIÓN INICIAL PARA ENSEÑAR LA RAZÓN COMO UN SIGNIFICADO DE LA FRACCIÓN ... 442
Ana María Reyes Camacho, Leticia Sosa Guerrero ... 442
Análisis didáctico de la relación pitagórica en libros de matemáticas de bachillerato ... 450
Carlos Rondero Guerrero, Aarón Reyes Rodríguez, Marcos Campos Nava ... 450
La operatividad con fracciones y su relación con la comprensión de equivalencias ... 457
Fabiana Mahtabel Arteaga Cervantes, José Antonio Juárez López ... 457

SECCIÓN C. INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS DIDÁCTICAS EN MATEMÁTICA ... 466

Postura científica de la modelación matemática y su impacto en la enseñanza y aprendizaje ... 467
Jaime Huincahue Arcos, Astrid Morales Soto, Jaime Mena Lorca ... 467
Modelación escolar. Estudio de situaciones de variación ... 479
María Esther Magali Méndez Guevara, Karen Zúñiga González, Ricardo Nájera Flores ... 479
Un estudio de las parábolas de galileo desde la reproducción de sus prácticas ... 484
Jaime Arrieta Vera, Noé Castellanos Rebolledo, Leonora Díaz Moreno, Brenda Pamela Barrios Enriquez, Ricardo Benítez Jiménez, Grecia Itzel García Hernández, Onésimo Ramos Magallón ... 484
Modelación graficación para la matemática escolar ... 492
Liliana Suárez Téllez, Blanca Rosa Ruiz Hernández, José Luis Torres Guerrero, Adriana Gómez Reyes, Claudia Flores Estrada, Víctor Hugo Luna Acevedo. ... 492
Matemática funcional. Resultados de un programa socioepistemológico ... 504
E. Johanna Mendoza Higuera, Claudio Opazo Arellano, Rosario Pérez López, Irene Pérez-Oxté, Julio Yerbes González ... 504
Simulación de fenómenos promotores del desarrollo del pensamiento matemático ... 515
Jesús Enrique Hernández Zavaleta, Vicente Carrión Velázquez ... 515
Geometría dinámica: el caso de las curvas trascendentes ... 526
Marcela Ferrari Escolá, Cira Saligan Pérez, Gustavo A. Meneses Cisneros ... 526
Visualizando la convergencia de la serie trigonométrica de Fourier ... 535

Fabián Wilfrido Romero Fonseca, Rosa María Farfán Márquez *535*
El uso de la gráfica a través de la modelación-graficación con sensores de movimiento 543
Fredy de la Cruz Urbina, Hipólito Hernández Pérez *543*
Resignificando a partir de los usos del conocimiento matemático 555
Gisela Montiel Espinosa, Gabriela Buendía Abalos *555*
Algunas didácticas de campo en la enseñanza de herramientas de modelamiento matemático para ingeniería 558
Luis Fernando Plaza Gálvez *558*
Desarrollo de applets para la conceptualización de la integral definida 566
Jesús Eduardo Hinojos Ramos, Diana del Carmen Torres Corrales, Evaristo Trujillo Luque, Rafael Antonio Arana Pedraza, Julia Xóchilt Peralta García, Omar Cuevas Salazar *566*
Jesús Eduardo Hinojos Ramos; ITSON. México; jesus.hinojos@itson.edu.mx *572*
Diana del Carmen Torres Corrales; ITSON. México; diana.torres@itson.edu.mx *572*
Evaristo Trujillo Luque; ITSON. México; evaristo.trujillo@itson.edu.mx *572*
Rafael Antonio Arana Pedraza; ITSON. México; rafael.arana@itson.edu.mx *572*
Julia Xóchilt Peralta García; ITSON. México; julia.peralta@itson.edu.mx *572*
Omar Cuevas Salazar; ITSON. México; ocuevas@itson.edu.mx *572*
Análisis y diseño de actividades didácticas en el contexto de las razones y funciones trigonométricas utilizando geogebra 573
Diana del Carmen Torres Corrales, Gisela Montiel Espinosa, Omar Cuevas Salazar, Jesús Eduardo Hinojos Ramos, Evaristo Trujillo Luque, Mucio Osorio Sánchez *573*
Una estrategia para el aprendizaje de la proporcionalidad ..... - 586 -
Olivia Alexandra Scholz Marbán, Sandra Areli Martínez Pérez, Miguel Ángel Huerta Vázquez ..... *- 586 -*
La aritmética en la formación de docentes ..... - 593 -
Aleida Cecilia Quiroz Rivera ..... *- 593 -*
Fortalecimiento de las competencias tecnológicas en el perfil de los futuros profesores de matemáticas ..... - 599 -
Gricelda Mendivil Rosas, Leidy Hernández Mesa, Daniel Everardo Amador Bartolini ..... *- 599 -*
Introducción a las teselaciones: experiencia de un taller ..... - 609 -
Ilse Domínguez Alemán, Itzel Domínguez Alemán, Esbeidy Abigail García Espinal, Gema Rubí Moreno Alejandri ..... *- 609 -*
La introducción al lenguaje algebraico desde las prácticas socialmente compartidas ..... - 618 -
Oscar Alejandro Cervantes Reyes ..... *- 618 -*
Fundamentación de una propuesta para el aprendizaje de la probabilidad frecuencial ..... - 626 -
Yessica del Rosario May Pech, Zuleyma Sarahí Pérez Moguel ..... *- 626 -*
Análisis y clasificación de los foros electrónicos generados en el curso de cálculo superior ..... - 634 -
María Inés Ortega Árcega, Rafael Pantoja Rangel, Elena Nesterova ..... *- 634 -*

SECCIÓN D. PERSPECTIVAS DE GRUPOS TEMÁTICOS ..... - 644 -

Género, actitud y reflexión: temáticas transversales en las investigaciones de corte socioepistemológico. La falta de visibilidad y estudio ..... - 645 -
Rosa María Farfán Márquez, María Guadalupe Simón Ramos, Mayra A. S. Báez Melendres, María del Socorro García González ..... *- 645 -*
Estudios sobre el dominio afectivo en matemática educativa ..... - 650 -
Gustavo Martínez Sierra, Erika García Torres, Lorena Jiménez Sandoval, Carolina Carrillo García, María Valle Zequeida, Yuridia Arellano García, Rocío Antonio Antonio, Magdalena Rivera Abrajan, José Antonio Juárez López ..... *- 650 -*
El uso de la historia de la matemática en el aula ..... - 660 -
Flor Monserrat Rodríguez-Vásquez, Carolina Carrillo-García, José Iván López-Flores, Maribel Vicario-Mejía ..... *- 660 -*
Formación de ingenieros y técnicos desde la matemática educativa ..... - 670 -
Ruth Rodríguez, Bertha Ivonne Sánchez, Alberto Camacho, Ismael Arcos, Hipólito Hernández, Atenea De la Cruz, Olda Covián, Fernando Cajas ..... *- 670 -*
Hacia la innovación en educación estadística ..... - 682 -

José Armando Albert Huerta, Blanca Ruiz Hernández, Santiago Inzunza Cazares, Sergio Hernández González, José Marcos López-Mojica. ....- 682 -
PROFESIONALIZACIÓN DOCENTE EN MATEMÁTICAS .... - 694 -
Eddie Aparicio, Landy Sosa, Elizabeth Mariscal, Ricardo Cantoral, Daniela Reyes-Gasperini, Javier Lezama, Crisólogo Dolores, Judith Hernández ....- 694 -

SECCIÓN E. REFLEXIONES TEÓRICAS 701

SEMINARIO DE INTRODUCCIÓN A LA INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA: UN EJEMPLO EN EDUCACIÓN BÁSICA 702
Catalina Navarro Sandoval, Judith Hernández Sánchez 702
SEMINARIO DE INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA EDUCATIVA. REFLEXIONES SOBRE LA PROFESIONALIZACIÓN DOCENTE EN MATEMÁTICAS 714
Eddie Aparicio, Landy Sosa, Karla Gómez 714

SECCIÓN F. RESEÑAS 721

........................723

INVESTIGACIÓN E INNOVACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA, Vol. 1, No. 1, Julio-Diciembre 2016, es una publicación semestral editada por la Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa, A. C., calle 19 A 350, Col. Fraccionamiento Pedregales de Lindavista, C. P. 97219. http://revistaiime.org / comite.editorial.red.cimates@gmail.com
Eds responsables: Flor Monserrat Rodríguez Vásquez, Landy Elena Sosa Moguel, Ruth Rodríguez Gallegos. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04-2016-072017141600-102, ISSN: 2594-1046, ambos otorgados por el Instituto Nacional de Derechos de Autor. Responsable de la última actualización de este Número, Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A. C., Dra. Flor Monserrat Rodríguez Vásquez. Fecha de última modificación, 21 de noviembre de 2016.

SECCIÓN A. INVESTIGACIONES DIDÁCTICAS EN MATEMÁTICA

INDICIOS DE PRUEBA MATEMÁTICA SURGIDOS MEDIANTE EL USO DE GEOGEBRA

Miguel Ángel Huerta Vázquez, Olivia Alexandra Scholz Marbán, Sandra Areli Martínez Pérez

Resumen

Esta investigación indagó cómo los estudiantes de nivel medio superior dan indicios de prueba matemática, mientras iban solucionando algunos problemas geométricos, usando software de geometría dinámica GeoGebra: qué hicieron, cómo advirtieron posibles soluciones a estos problemas, y lo más importante, cómo los explicaron o validaron y al final cómo el software ayuda para poder alcanzar cierto grado de validación.

Palabras clave: Software de geometría dinámica, prueba matemática, GeoGebra.

Introducción

Una de las piezas más importantes que influye en el aprendizaje de las matemáticas es la prueba de las diversas proposiciones inherentes en esta disciplina, ya que sin el conocimiento de cómo se construye y qué es la prueba, no se puede aprender matemáticas (Balacheff, 2010). En el ámbito del aprendizaje de las matemáticas, la prueba constituye una herramienta poderosa para que el alumno pueda sustentar de manera más adecuada el conocimiento que adquiere y logre aprender bases matemáticas cada vez más sólidas. En educación matemática, se entiende como prueba de una proposición (afirmación o teorema) al encadenamiento de afirmaciones (parciales, tomadas como verdaderas) que validan la afirmación (o negación de algo), sin embargo, hay distintos tipos de pruebas matemáticas; cada una de ellas tiene características especiales.

En sus primeros trabajos de investigación sobre la prueba matemática, Balacheff (1987) discutió la diferencia entre distintos conceptos que pueden ser confundidos con una prueba. En seguida son parafraseadas las ideas de Balacheff (2000) sobre estos conceptos.

- Explicación: implica dar a conocer la verdad a partir de una propuesta o de un resultado.
- Probar: es exponer una verdad a partir de una evidencia aceptada por la comunidad, la cual puede ser refutada.
- Demostrar o demostración: tiene reglas formales y definidas a la hora de presentar pruebas, las cuales están sustentadas en criterios lógicos rigurosos igualmente aceptados por la comunidad matemática, donde el rigor es mucho mayor que en una prueba.
- Razonamiento matemático: es la actividad, que no se explicita, y que sirve para manipular la información para producir nueva información, pero cuando dicha actividad busque como fin asegurarse de la validez de una proposición, y ayude a

producir una explicación; a estas acciones se les asocia el proceso de validación de esa aseveración.

En la parte de la validación, Brousseau (1997) puntualiza que ésta debe verse como un escenario en donde se trata de convencer a uno o a varios interlocutores de la validez de las afirmaciones que hacen; por ejemplo, respecto de los alumnos, estos deben elaborar pruebas para justificar sus afirmaciones, no basta la comprobación empírica; aunque Brousseau haya enunciado esta forma de validación en una situación de juego entre los alumnos. 1.1. Investigaciones sobre la prueba

En el tema de la prueba matemática han contribuido los expertos en diversos campos como la filosofía, la historia y la educación; todas ellas referidas al dominio de las matemáticas, y de ese intercambio han surgido nuevas maneras de hacer y visualizar la prueba matemática, aunado al hecho de que en las últimas décadas han habido avances notables de las herramientas tecnológicas al servicio de la prueba como la computadora, usada como herramienta de verificación o de elaboración de heurísticas como bien se puntualiza en Hanna (2010). El tema de la prueba ha motivado diversos acercamientos en la investigación de: filósofos, historiadores y educadores matemáticos. Algunos ejemplos de trabajos en las líneas de investigación de estos científicos son los que se citan a continuación.

De las más importantes investigaciones de la prueba está la de Lakatos (1976) quien da un tratamiento epistemológico de la prueba mediante el uso de nociones fundamentales de que las pruebas y las refutaciones están relacionadas con las ideas de los objetos matemáticos.

Otra investigación importante que tiene un gran aporte a la prueba matemática es el trabajo de Brousseau (1997), quien propone el diseño por parte del profesor de situaciones didácticas como medios de enseñanza y de aprendizaje de conceptos matemáticos. En su Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), Brousseau (1997) menciona las situaciones a-didácticas; las cuales están asociadas al trabajo de los alumnos cuando abordan las situaciones didácticas que les son propuestas por el profesor. Dentro de estas situaciones a-didácticas está la validación de aquellos conceptos matemáticos que el profesor desea que aprendan sus alumnos, tal como es ejemplificado por su famosa situación didáctica "carrera a 20" (Brousseau, 1997). Atendiendo a la TSD, y dado que se pretende que los alumnos aprendan el concepto de prueba, se debe pensar en un buen diseño de situaciones didácticas que conduzcan a los alumnos al concepto de prueba en el salón de clases.

El trabajo de Brousseau sirve también, como contexto para el desarrollo de otras investigaciones, como Balacheff (1997, 2000) quien precisa (en sus diversos trabajos de investigación) qué es una explicación, prueba y demostración. Este investigador clasifica distintos tipos de prueba, como: pruebas pragmáticas, pruebas basadas en el empirismo que suelen carecer de índices de procesos de validación y pruebas intelectuales, en las que existe una explicación de las razones que fundamenta la validez de las preposiciones demostradas.

También, Balacheff (2010) retoma sus investigaciones anteriores, y propone un marco conceptual para analizar la prueba. Este investigador argumenta que la explicación está contenida en la prueba, y ésta a su vez está contenida en la demostración. Balacheff llega a la conclusión de que existen tres componentes alrededor del concepto de prueba: la acción, la formulación y la validación, por lo que no hay validación posible si no está bien expresada y compartida. Esta trilogía figura situaciones didácticas dentro del contexto del trabajo de Brousseau (1997), ya que se puede enmarcar dentro de las situaciones a-didácticas de: acción, formulación, validación e institucionalización del conocimiento matemático. 1.2. Problema de investigación

Diversas investigaciones en educación matemática muestran que existen dificultades de aprendizaje en la prueba de proposiciones geométricas, como bien lo demuestran Battista y Clements (1995) comparando la teoría de Piaget y la de Van Hiele, la primera estratifica el pensamiento en niveles que van del no reflexivo y no sistemático al lógico deductivo, mientras que la de Van Hiele estratifica niveles dentro del pensamiento geométrico y cómo van desarrollándose bajo la influencia de un currículo escolar.

Apoyándose en estas teorías, Battista y Clements (1995) concluyen que ambas teorías sugieren que los estudiantes deben pasar forzosamente por los niveles iniciales para poder alcanzar niveles superiores de razonamiento lo que requiere un considerable tiempo. La teoría de los Van Hiele sugiere que la enseñanza escolar debería ayudar a los estudiantes a alcanzar niveles más altos de entendimiento geométrico, pero en el caso de intentar prematuramente pasar a niveles superiores, los estudiantes terminan memorizando y confundidos. Más aún, ambas teorías (la de Piaget y la de los Van Hiele) marcan que los estudiantes pueden alcanzar a entender trabajos explícitos con sistemas axiomáticos siempre y cuando alcancen niveles superiores de razonamiento [o de entendimiento] en ambas teorías.

En las últimas tres décadas, la llegada de las computadoras al entorno cotidiano; en particular, a la educación ha propiciado que la enseñanza de temas geométricos con el uso de software de geometría dinámica sea un poco más amigable que sólo usar lápiz-y-papel como medio para enseñar conceptos de geometría euclidiana. Por ejemplo, el uso de software, como herramienta de enseñanza, propicia el uso de representaciones dinámicas de objetos matemáticos, mientras que el uso de lápiz-y-papel en la enseñanza propicia el tratamiento de objetos matemáticos estáticos.

El software de geometría dinámica (SGD) tuvo su origen en la década de los 80, el cual servía en aquel tiempo como análogo al lápiz-y-papel, ya que permitía replicar los problemas de manera similar de como se hacen con regla y compás, siendo las construcciones rígidas; con el paso de tiempo, diversos software, como: Geometer's Sketchpad y Cabri-Geometry evolucionaron de tal manera que las construcciones geométricas podían ser dinámicas. Al usar el software de geometría dinámica, el alumno puede dinamizar las contrucciones en lápiz-y-papel. Esta forma dinámica de objetos matemáticos producidos por los distintos tipos de software disponibles en la actualidad (e.g., GeoGebra, Geometer's Sketchpad y Cabri-Geometry, entre otros) da una visión diferente de los distintos objetos matemáticos, a través de sus representaciones, al permitir "ver" cómo se preservan las relaciones entre esos objetos, y así poder explicar y probar aseveraciones de enunciados geométricos.

Marco Teórico

Utilizando las ideas de Brousseau (1997) de la teoría de situaciones didácticas, Balacheff (2010) postula que las concepciones son el resultado de interacciones del alumno con el medio ambiente (*milieu*), y que el aprendizaje es tanto un proceso como un resultado de la adaptación del alumno a este entorno. Por "medio ambiente", se refiere a un entorno físico, un contexto social o incluso un sistema simbólico (sobre todo ahora que este último puede ser representado por una tecnología que se materializa dinámicamente).

Una concepción, define Balacheff (2010), es un saber situado, en otras palabras, es la creación de instancias de un saber en una situación específica que se detalla por las propiedades del medio y de las restricciones en las relaciones (acción / feedback) entre este medio y el sujeto [S ↔ M] (véase Figura 1).

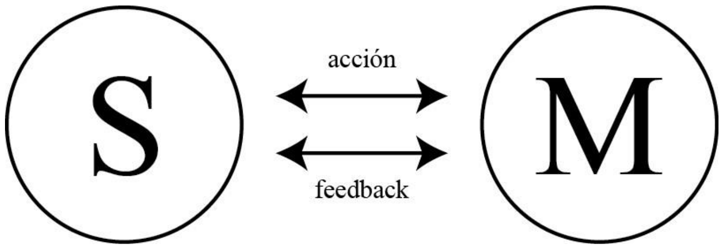


Figura 1. Relación entre el sujeto y el medio.

Con esa definición de concepción Balacheff define el modelo ck¢ para el análisis del conjunto de datos obtenidos de la observación de las actividades de los estudiantes; el cual tiene como objetivo establecer un *puente* necesario entre el saber y probar al proporcionar un papel equilibrado para controlar las estructuras respecto a la función asignada generalmente a las acciones y representaciones.

Balacheff (2010) afirma que la prueba es la actividad más visible dentro del proceso de la validación. Hasta cierto punto, "probar" puede ser visto como un logro fundamental de control y validación el cual es fundamental, ya que nadie puede pretender saber sin comprometerse en la validez de un conocimiento que se adquiere.

A cambio, este conocimiento funciona como un medio para establecer la validez de una decisión en el curso de la realización de una tarea e incluso en el proceso de construcción de nuevos conocimientos, especialmente en el proceso de aprendizaje. En este sentido, conocer y probar están estrechamente relacionados. Por lo tanto, una concepción es la validación dependiente; en otras palabras, es posible diagnosticar la existencia de una concepción porque hay un dominio observable en el que "funciona", en el que hay medios para validarlo y para impugnar las posibles falsificaciones.

Esta es la esencia de la declaración de Vergnaud (Vergnaud, 1981, p. 220, citado en Balacheff 2010) al aseverar que los problemas son las fuentes y los criterios del aprendizaje de conceptos. Vergnaud demostró que es posible caracterizar las concepciones de los alumnos en tres componentes: los problemas, los sistemas de representación y los operadores invariantes (esquemas).

Con lo anterior, Balacheff postula un modelo similar al de Verganud, pero le agrega la estructura de control, quedando una caracterización de la concepción en cuatro componentes (P, R, L, ∑), donde:

- P es un conjunto de problemas: este conjunto corresponde a la clase de los desequilibrios del sistema considerado sujeto / medio ambiente [S ↔ M] puede reconocer, en términos matemáticos. Dichos problemas pueden ser resueltos en términos pragmáticos, P es la esfera de la concepción de la práctica.
- R es un conjunto de operadores.
- L es un sistema de representación: R y L describen el ciclo de retroalimentación en relación al sujeto y el medio, es decir, las acciones, las evaluaciones y los resultados.

- $\sum$ es una estructura de control: En la estructura de control se describen los componentes que apoyan el seguimiento del equilibrio del sistema de [S ↔ M], esta estructura garantiza la coherencia de la concepción, además, incluye las herramientas necesarias para tomar decisiones, y expresar un juicio sobre el uso de un operador o sobre el estado de un problema (es decir, resuelto o no).

Sobre el control (Schoenfeld, 1985) afirma que: “Esta categoría de comportamiento se ocupa de la forma en que las personas utilizan la información potencialmente a su disposición. Se centra en las principales decisiones sobre qué hacer en caso de un problema, las decisiones que en sí mismos pueden “hacer o deshacer” un intento de resolver el problema. Comportamientos de interés como la elaboración de planes, la selección de objetivos y sub-objetivos , el seguimiento y la evaluación de las soluciones a medida que evolucionan, y revisar o abandonar planes cuando las evaluaciones indican la adopción de tales medidas”. (p. 27)

Balacheff (2010) afirma que el aprendizaje de las matemáticas empieza desde los primeros años de la escuela; en este nivel dependen de su experiencia y del profesor para poder distinguir entre sus opiniones y su conocimiento real. Para poder diferenciar entre aquello que se opina con el conocimiento que poseen los estudiantes, ellos [los estudiantes] deben basarse en la eficacia tangible del conocimiento y de la validación del profesor, respecto de la prueba de algo. Pero, el profesor tiene que a su vez confiar en el conocimiento [utilizado por él o por sus estudiantes, cuando es movilizado con fines de prueba de una cierta proposición], lo que demuestra que no es la última referencia. Por lo tanto, la eficiencia y la evidencia tangible [de la utilización del conocimiento con fines de prueba matemática] son los soportes para la validez de una declaración; Balacheff (2000) afirma que es cierto, porque funciona, además declara que los estudiantes matemáticos, antes que nada son prácticos, pero para poder entrar a las matemáticas tienen que cambiar dicha postura para poder convertirse en teóricos.

Balacheff (2010) indica que la estrecha relación entre la acción, la formulación (sistema semiótico) y validación (estructura de control) se impone ampliando las ideas de Brousseau (1997). Esta trilogía que define una concepción (véase Figura 2), también da forma a una situación didáctica, no hay validación posible si un reclamo que no se ha expresado de manera explícita y compartida, y no hay ninguna representación sin una semántica que emerge de la actividad (es decir, de la interacción del alumno con el medio matemático).

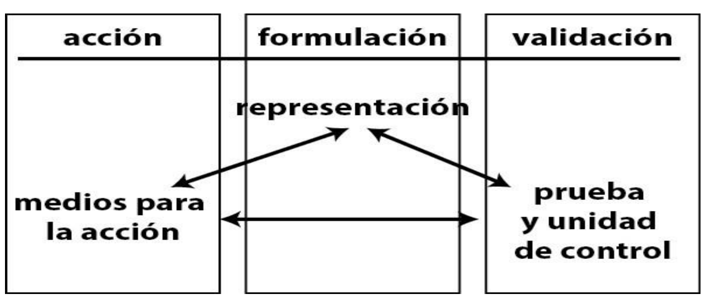


Figura 2. Las tres dimensiones interrelacionadas y de interacción del conocimiento matemático.

El lenguaje permite a los estudiantes entender y apropiarse del valor de la prueba matemática en comparación con la prueba pragmática a la que están acostumbrados. Ahora, este lenguaje podría ser de los niveles más bajos que el formalismo ingenuo matemático que utilizan, el nivel de lenguaje se une al nivel de la prueba que los alumnos pueden producir o entender.

Sin embargo, hay espacio para una verdadera actividad matemática en todos estos niveles, siempre que los alumnos hayan ido más allá del empirismo y hayan visto el valor añadido de la postura teórica (véase Figura 3).

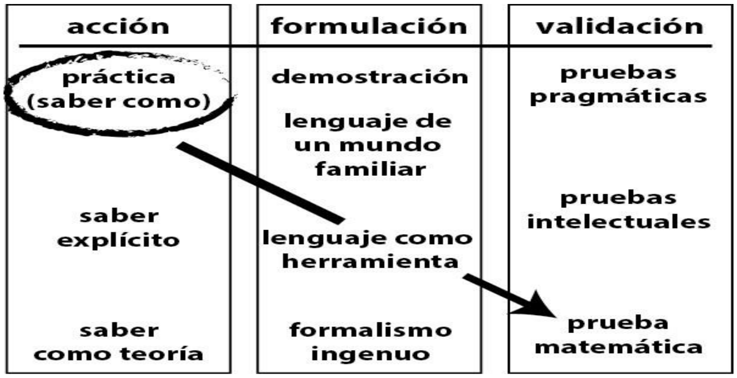


Figura 3. La correlación aproximada entre las categorías críticas en cada una de las tres dimensiones (acción, formulación y validación). Se requiere que los maestros proporcionen a los estudiantes los medios para cambiar de un enfoque práctico de la verdad a un enfoque teórico de validez basada en la prueba matemática. Donde el lenguaje como herramienta es fundamental ya que permite el cambio de la acción a la validación.

Método

La investigación es de corte cualitativo. Tomando en cuenta la información respecto de este tipo de estudios, respecto de cómo fueron seleccionados los participantes en esta investigación. Se debe mencionar que al inicio de ésta, se preseleccionaron diez estudiantes, cuyas edades fluctuaban entre los 15 y 16 años quienes, en el momento de la experimentación, se encontraban cursando el tercer semestre en una institución de educación media superior. Se les pidió que resolvieran los primeros dos problemas [construcciones geométricas relacionadas con el problema de Apolonio, que más adelante, en este mismo capítulo se enuncia] seleccionados. Con base en su desempeño en el uso del Geogebra se seleccionaron cinco estudiantes para que solucionaran los problemas restantes.

Tomando en cuenta la literatura de investigación, referente a los problemas de construcción, usando regla y compás, en este trabajo se decidió tomar en cuenta cinco problemas, los cuales pertenecen a casos particulares del problema de Apolonio de Praga (262-190 a.C.). La selección de estos cinco problemas fue tomando en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes seleccionados, pues se debía tener certeza de que sus conocimientos [de los estudiantes] debían estar "cerca" de aquellos tanto en la construcción geométrica solicitada como en su justificación de porqué ella es válida. De forma general, el problema de Apolonio puede ser enunciado de la siguiente manera: “Dadas tres circunferencias arbitrarias en el plano, construir otra circunferencia que sea tangente a ellas" (Courant & Robins, 2002, p. 147).

Se recolectaron dos tipos de evidencias: los archivos de su trabajo para solucionar los problemas, y la grabación de sus acciones [justificaciones] mientras los solucionaban. Para los primeros, se les pidió que terminando de solucionar los problemas, guardaran su trabajo al usar Geogebra como herramienta de solución de los problemas. Para lo segundo, se usó software de “screencasting” (grabación digital de la salida por pantalla de la computadora) donde se grabó en video lo que hacían con el Geogebra y en audio lo que decían mientras eran interrogados acerca de sus acciones [justificación de por qué hacían algún trazo en particular] mientras solucionaban los problemas.

Resultados

Los estudiantes al iniciar el estudio mostraban deficiencias de conocimientos geométricos en el momento de hacerles preguntas específicas acerca de definiciones específicas como por ejemplo la mediatriz o condiciones de perpendicularidad, pero el uso del software les ayudo a construir definiciones emergentes que les ayudaron para encontrar solución a los problemas propuestos. Para poder solucionar los problemas era necesario que ellos tuvieran los conocimientos mínimos necesarios que les hubieran permitido llevar a cabo las acciones para llegar a solución. Existe evidencia de que tanto el software como las Actividades [problemas] pueden ayudar a que los estudiantes construyan definiciones geométricas que les permitan construir soluciones para estos problemas

Conclusiones

Es claro que uno de los principales obstáculos que los estudiantes tuvieron para lograr soluciones correctas, en todos los problemas aquí propuestos, está en el hecho de que no tenían los conocimientos previos necesarios, aunque sus cursos precedentes a la presente investigación indicaban lo contrario.

Por otro lado, también es claro que los estudiantes no estaban acostumbrados a actividades que involucren la prueba matemática, como tal. El primer curso donde los estudiantes se enfrentan a la prueba matemática es en el segundo semestre de la institución. De manera informal, se sabe que en actividades previas al presente trabajo, habían estado involucrados en una formación académica relacionada con la prueba matemática. El hecho de que en cursos de matemáticas de bachillerato no se contemple la discusión sobre los primeros indicios de una prueba matemática, contribuye a generar obstáculos conceptuales en los estudiantes, o tal vez, tales obstáculos son generados por una mala didáctica de los profesores responsables de los cursos de matemáticas de ese nivel educativo.

Como consecuencia de esta falta de atención, por parte de las autoridades educativas responsables del buen aprendizaje de las matemáticas de bachillerato al no contemplar discusiones con los estudiantes tendientes a que ellos empiecen a entender el sentido de una prueba matemática, la mayoría de los estudiantes de bachillerato estarán bastante lejos de poder resolver problemas como los propuestos en este trabajo de investigación.

De las reflexiones precedentes, se infiere que para trabajos futuros sería conveniente diseñar y proponer actividades encaminadas a provocar básicamente en los estudiantes dos habilidades: a) poder explicar a ellos mismos o bien a otro de sus compañeros de clase, y b) mediante el uso de herramientas tecnológicas, ser capaces adoptar o adaptar definiciones de conceptos involucrados en los problemas propuestos; de modo que después, al abordar ciertas tareas matemáticas, ellos entiendan y reflejen [en sus procesos de solución] el uso de la prueba matemática en problemas cada vez más complejos.

Referencias bibliográficas

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. (K. A. Publishers, Ed.) Educational Studies in Mathematics, 18(2), 147-176.

Brousseau, G. (1997). Theory of didactical situations in mathematics: didactique des mathématiques, 1970-1990.

Balacheff, N. (1998). Aspects of proof in pupils' practice of school. (D. Pimm, Ed.) Hodder and Stoughton, 216-235.

Balacheff, N. (2000). Proceso de prueba en los alumnos de matemáticas. Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.

Balacheff, N. (2010). Bridging Knowing and Proving in Mathematics: A Didactical Perspective. En G. Hanna, H. N. Jahnke, & H. Pulte (Edits.), Explanation and Proof in Mathematics (págs. 115-134). Springer.

Battista, M., & Clements, D. H. (1995). Geometry and Proof. Mathematics Teacher, 88(1), 48-54.

Brousseau, G. (1997). Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques. Kluwer Academic Publishers.

Courant, R., & Robbins, H. (2002). ¿Qué son las matemáticas? Fondo de Cultura Económica.

Coxeter, H. S. (1989). Introduction to Geometry. Wiley.

Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. Educational Studies in Mathematics, 44(1-2), 5-23. doi:10.1023/A:1012737223465

Hanna, G., & Barbeau, E. (2010). Proofs as Bearers of Mathematical Knowledge. En G. Hanna, H. N. Jahnke, & H. Pulte (Edits.), Explanation and Proof in Mathematics (págs. 85-100). Springer.

Hohenwarter , M., & Lavicza , Z. (2011). The Strength of the Community. En ModelCentered Learning (págs. 7-12). SensePublishers.

Mariotti, M. A. (2010). Proofs, Semiotics and Artefacts of Information Technologies. En G. Hanna, H. N. Jahnke, & H. Pulte (Edits.), Explanation and Proof in Mathematics (págs. 169-188). Springer.

Marrades, R., & Gutierrez, Á. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. Educational Studies in Mathematics, 44(1-2), 87-125.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge university press.

Ruthven , K., Hennessy, S., & Deaney, R. (2008). Constructions of dynamic geometry: A study of the interpretative flexibility of educational software in classroom practice. Computer & Education, 51(1), 297-317.

Schoenfeld, A. H. (1985). Mathematical problem solving. Academic Press, Inc.

Autores

Miguel Ángel Huerta Vázquez; CCH, UNAM. México; mhuertav@gmail.com
Olivia Alexandra Scholz Marbán; CCH, UNAM. México; scholzalexa@gmail.com
Sandra Areli Martínez Pérez; CCH, UNAM. México; miarelin@gmail.com

UNA EPISTEMOLOGÍA BASADA EN LA TRANSVERSALIDAD DE LOS USOS DE LA GRÁFICA DE UNA COMUNIDAD DE INGENIEROS QUÍMICOS INDUSTRIALES

Irene Pérez-Oxté, Francisco Cordero Osorio

Resumen

El presente reporte de investigación se circunscribe en un programa Socioepistemológico cuyo objeto de estudio son los *usos del conocimiento matemático* en el reconocimiento de otra epistemología y de naturaleza diferente a la del discurso matemático escolar. El objetivo consiste en la construcción de una epistemología de la transversalidad del uso de la gráfica de los ingenieros químicos industriales. Las situaciones de variación, transformación y selección son los ejes de esa epistemología, la cual se pone en evidencia en el modelo de comunidad de conocimiento matemático de ingenieros químicos industriales.

Palabras clave: Usos del conocimiento, Transversalidad, Socioepistemología.

Introducción

Entender la naturaleza de la problemática de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas considera dimensionarla a partir de tres ejes: el *discurso matemático escolar* (*dME*), el reconocimiento de un *sujeto olvidado* y la *pluralidad epistemológica*.

El *dME*, en términos generales, norma y legitima la construcción de la matemática escolar única y exclusivamente a través de los conceptos matemáticos. Esto en desmedro de la funcionalidad que juega la matemática escolar en la vida cotidiana de los ciudadanos (Gómez, Silva, Cordero y Soto, 2014).

El *sujeto olvidado* ante tal discurso hegemónico se traduce en términos de los usos del conocimiento matemático que hacen de la matemática una matemática funcional. Se supone que la enseñanza de la matemática es para que el estudiante mejore su cotidiano, pero lo que se le enseña en la escuela no responde a las situaciones del cotidiano, y peor aún, el conocimiento del cotidiano no se parece nada al de la escuela. Así, existen dos epistemologías: la de la vida y la de la matemática escolar. No se conocen, ni mucho menos dialogan entre ellas, pero el conocimiento legitimado por la sociedad, en este contexto, es el de la escuela. Todo esto conlleva un fenómeno más: la opacidad del conocimiento de la vida cotidiana (Cordero, 2013).

Bajo este panorama, se reconoce, que no existen marcos de referencia (MR) en la que se resignifiquen usos de la matemática bajo la construcción social del conocimiento matemático, es decir, debe significar que la matemática escolar se fundamente en la *pluralidad* del conocimiento matemático y, por ende, forme parte de los MR para su enseñanza y aprendizaje (Gómez, Silva, Cordero y Soto, 2014).

La construcción de los MR está en la pertinencia de realizar estudios transversales en la escuela, el trabajo y la ciudad para recuperar los usos del conocimiento matemático de tal suerte que se construyan epistemologías y que se traduzcan en situaciones de aprendizajes para el aula.

Ante tal panorama, la investigación reconoce el fenómeno de opacidad de los usos del conocimiento matemático y la pertinencia de construir una epistemología que rescate los usos opacados por el *dME*.

Así, el objetivo de la investigación fue construir una epistemología de usos a la luz de una transversalidad del conocimiento matemático. Se consideró el desarrollo de usos de la gráfica que emerge ante una problemática a la que se enfrenta una comunidad de ingenieros químicos industriales. Para formular la epistemología se realizó una articulación de tres situaciones: Variación, Transformación y Selección a la luz del desarrollo de usos de esa comunidad de conocimiento matemático.

Un programa socioepistemológico

El reporte de investigación se enmarca en un programa de investigación dentro de la teoría Socioepistemológica cuyo objeto de estudio son *los usos del conocimiento matemático* en el reconocimiento de *otra epistemología* de naturaleza diferente a la del discurso matemático escolar.

La postura respecto a la Matemática está en la funcionalidad de la misma, es decir, se cuestiona qué matemática y no qué es la matemática. Esto abre un panorama a reconocer varios conocimientos, por ejemplo, el de la obra matemática, la matemática escolar, la matemática de otras disciplinas e inclusive la matemática del cotidiano, es decir, el conocimiento matemático que construye la gente.

En Cordero (en prensa) se considera lo anterior como el objeto de estudio de la Matemática Educativa a través de estudios transversales en diferente escenarios como son, la escuela, el trabajo y la ciudad. Donde, se reconocen usos que son resignificados en situaciones específicas y donde la mayoría de las veces la matemática no es el objeto de estudio. Así, la discusión se centra en construir una Matemática Funcional.

Para efectos de la investigación, se consideró la categoría Modelación – Graficación que responde a lo que es de utilidad a lo humano en una situación específica, en este caso, la argumentación de la predicción, el comportamiento tendencial y la optimización en la articulación de tres situaciones: Variación, Transformación y Selección. Con esto se construyó una epistemología donde intervienen significaciones o resignificaciones con sus respectivos procedimientos que se van construyendo de acuerdo con las operaciones que los participantes son capaces de hacer, con las condiciones que ellos son capaces de capturar y transformar y con los conceptos que van construyendo progresivamente (Cordero, en prensa).

El constructo comunidad de conocimiento matemático de la ingeniería química

Se retoma el trabajo de Torres (2013) como dato para realizar la investigación que aquí se reporta y hacer un estudio de transversalidad dentro de un programa de investigación socioepistemológico.

Dicha investigación está situada en un escenario del *trabajo* donde se reporta una epistemología que está normada por los *usos del conocimiento* de una *comunidad* de ingenieros químicos industriales.

De ahí que se consideró construir una *epistemología* de la *funcionalidad* del *conocimiento matemático* en una situación específica *desde* el *cotidiano* del ingeniero químico industrial.

En primera instancia se reconoce a una comunidad de ingenieros químicos en términos del conocimiento que construyen en el seno de su comunidad. Así, se reconocen tres elementos: Reciprocidad, Intimidad y Localidad. Otro aspecto, son los ejes transversales de la Institucionalización y la Identidad que distinguen a esta comunidad de conocimiento de otras. En la Figura 1 se observan dichos elementos que posicionan a la comunidad como una comunidad de conocimiento matemático.

COMUNIDAD DE CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DE LA INGENIERÍA QUÍMICA INDUSTRIAL

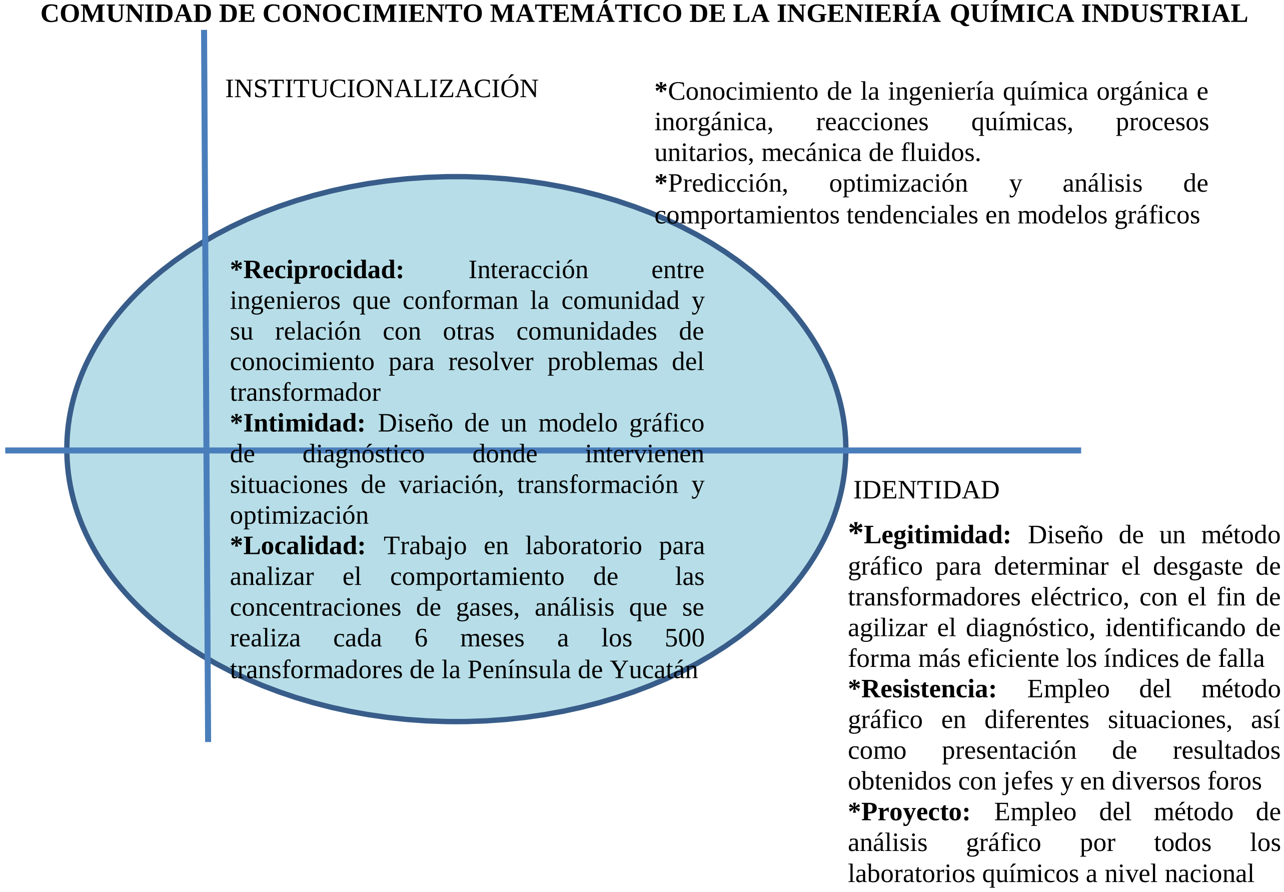


Figura 1. Modelo de comunidad de conocimiento matemático del ingeniero químico industrial (Torres, 2013).

Cabe resaltar que el núcleo de la situación específica identificado en la Comunidad de Conocimiento Matemático del Ingeniero Químico Industrial ***CCM (IQI*)** está en la discusión de aspectos como la predicción, el comportamiento tendencial y la optimización en la lectura y análisis de las gráficas. Este conocimiento construido y usado por los ingenieros tiene cabida en su cotidiano caracterizado por predecir fallas en los transformadores que proveen de electricidad a cierta población, de tal suerte, que pueda ser retirado de servicio antes de que ocurra la falla y para ello, hacen uso de un método gráfico.

Epistemología de una transversalidad del conocimiento

A continuación se describe la epistemología que se construyó a partir del dato de Torres (2013) con la finalidad de evidenciar los usos del conocimiento matemático y su articulación con Situaciones de Variación, Transformación y Selección.

La situación atribuida a la epistemología se ha convenido llamarle: La predicción y lo estable en modelos gráficos de concentraciones de gases de un transformador.

Las gráficas identificadas en la comunidad, no son utilizadas únicamente como representaciones, sino que son considerados como modelos de comportamiento, son herramientas que permiten analizar las tendencias de las concentraciones de los gases que tiene el transformador y con base en ello, se toman decisiones (Torres, 2013).

En la Figura 2 se presenta un esquema global en el cual se visualiza que los datos formulados en Torres (2013) es resignificada para la construcción de una epistemología que a futuro se presume sería una base para diseñar situaciones de aprendizaje para una comunidad en específico.

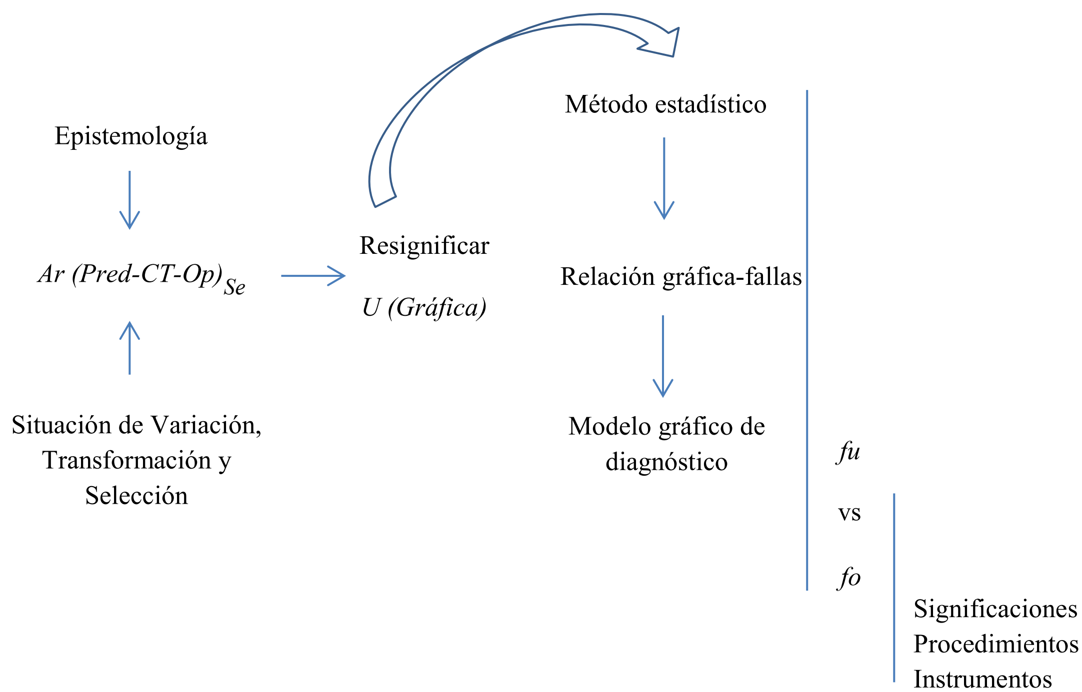


Figura 2. Epistemología general de usos de la gráfica de la CCM (IQI)

La situación específica (*Se*) genera una argumentación (*Ar*) de Predicción (*Pred*), Comportamiento tendencial (*CT*) y Optimización (*Op*) a partir de resignificar los usos (*U*) de la gráfica en el que se debaten funcionamientos (*fu*) y formas (*fo*). Los usos que se resignifican están asociados a tres momentos, Uso del control estadístico, Uso de la relación gráfica- fallas y Uso del modelo gráfico de diagnóstico.

Cabe recalcar que las gráficas que favorecen una matemática funcional son más que simples representaciones, es decir, son consideradas como modelos de comportamiento y como herramientas que permiten analizar tendencias.

Por ejemplo, para hacer conjeturas sobre una posible falla, se realiza una lectura e interpretación de dos de las ocho gráficas de las concentraciones de los gases. En este caso, el monóxido de carbono y bióxido de carbono son indicadores de que hay una pirolisis de papel (el papel dentro del transformador se está quemando) y por tanto, se le tiene que dar mantenimiento.

Ambos gases deben presentar un comportamiento paralelo, es decir, entre ellos debe haber una diferencia del 10%. La relación anterior se analiza a partir de un comportamiento tendencial de las concentraciones de los gases. En la Figura 3, se observa que el comportamiento gráfico del monóxido de carbono tiende a 150 ppm, mientras que el comportamiento del modelo del bióxido de carbono tiende a estabilizarse en 1500 ppm concluyéndose que el estado del transformador está en buenas condiciones.

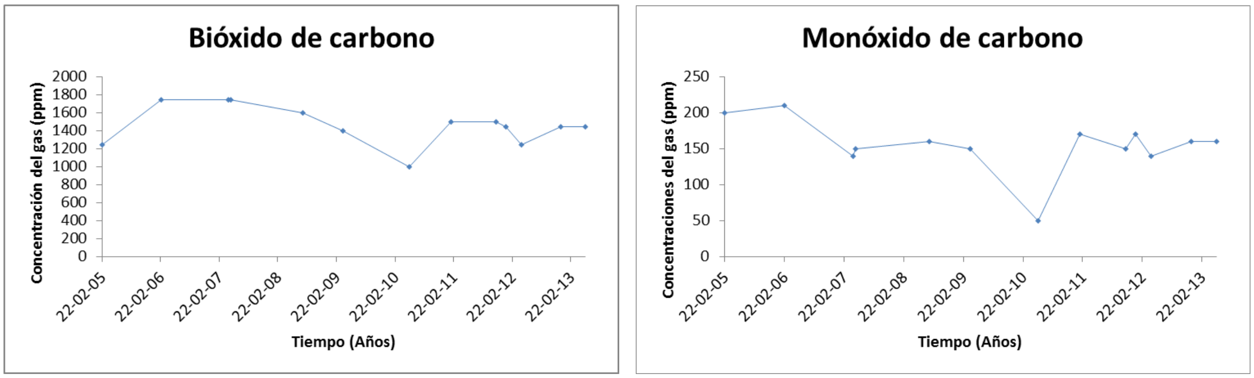


Figura 3. Modelos gráficos de concentraciones de gases.

Cuando el comportamiento tendencial no es estable en la proporción del 10% es indicador de que el transformador tiene una posible falla.

Al analizar este ejemplo es posible reconocer la variación de las concentraciones y aspectos de estabilidad a partir de analizar el comportamiento tendencial de ambos gases y predecir si el transformador requiere de mantenimiento o no. En los modelos se presentan incrementos en las concentraciones de los gases en ciertas fechas, por ejemplo, en el 22-02-11, pero éstas son consideradas normales, debido a que el incremento de uno de los gases es similar al otro.

Lo ideal en los modelos gráficos sería que la relación de un gas con respecto al otro sea del 10%, pero eso no sucede, y basta con que la relación se cumpla en la tendencia de los modelos.

Análisis como el presentado en el ejemplo, permitió formular la epistemología y el desarrollo de usos de la gráfica que se desglosa en tres momentos:

Momento 1. *Momento del uso del control estadístico.* La variación y lo estable en las concentraciones de gases de un transformador:

*Las gráficas que presentan variaciones similares modelan comportamientos estables.

Momento 2. *Momento del uso de la relación gráfica-fallas.* El comportamiento tendencial de las concentraciones de los gases para determinar lo estable en las gráficas:

*Las gráficas muestran variaciones no similares que lleva a cuestionar el comportamiento tendencial de las mismas.

Momento 3. *Momento del uso del modelo gráfico de diagnóstico.* La predicción en la simultaneidad de las variaciones de las concentraciones de los gases y la optimización para tendencias futuras:

*Lo estable como una cualidad para discernir de comportamientos normales y extraordinarios.

La matemática funcional a la luz de la comunidad de conocimiento matemático de los ingenieros químicos industriales se refleja en la articulación de tres situaciones: Variación, Transformación (Cordero, 2001, 2008) y Selección (Del Valle, 2015). Ver Figura 4.

	SITUACIONES		
Elementos de construcción	**Variación**	**Transformación**	**Selección**
Significaciones	Estado permanente de concentración de gases	Patrones de comportamientos gráficos	Patrones de adaptación gráficos
Procedimientos	Identificación y comparación de las concentraciones de gases	Variación de parámetros en modelos gráficos	Distinción de cualidades en modelos gráficos
Instrumento útil al humano	Cantidad de variación continua	Instrucción que organiza comportamientos	Lo estable
Argumentación	**Predicción del estado de un transformador eléctrico**	**Comportamiento tendencial en los modelos gráficos**	**Optimización de modelos gráficos**

Figura 4. Epistemología de usos de la gráfica de una CCM(IQI)

El cuadro epistemológico se construyó a partir de cuestionarse sobre las significaciones, procedimientos y el instrumento asociados a los usos del conocimiento matemático de la comunidad. Asimismo, la resignificación de los usos debía evidenciar las argumentaciones, es por ello que el Momento 1 evidencia aspectos de la situación de Variación, el Momento 2 evidencia una situación de Transformación y el Momento 3 una situación de Selección.

La articulación de las situaciones es producto de la experiencia de la comunidad de ingenieros químicos que construyen conocimiento matemático y cuya naturaleza es diferente al *dME*. La Figura 4 enuncia una categoría funcional de la matemática, donde intervienen conocimientos articulados bajo una lógica funcional y no utilitaria; que adquieren sentido en la comunidad.

La situación de Variación y Transformación generan la argumentación de la predicción y comportamiento tendencial respectivamente. La idea está en centrar la atención en ciertas concentraciones o en ciertos intervalos de tiempo para analizar y poder tomar decisiones sobre el estado del transformador.

La situación de Selección genera la argumentación de la optimización al verse intervenida por un “objetivo ideal” que se le ha llamado lo estable, provoca la construcción de patrones de adaptación a través de la distinción de cualidades (Del Valle, 2015). Lo "ideal" en la situación específica de la comunidad está en considerar a los modelos gráficos con incrementos normales o con comportamientos tendenciales estables. También es posible realizar tendencias a futuro con la condición de que el transformador se encuentre en buen estado.

La epistemología construida y reportada expresa la recuperación del sujeto olvidado, es decir, evidencia el rescate de los usos del conocimiento matemático ante el fenómeno de Opacidad atribuida al *dME.* En ese sentido, se encuentra la pertinencia de realizar estudios sobre la transversalidad del conocimiento matemático para posteriormente diseñar situaciones de aprendizaje donde se pongan en juego dichos usos.

Referencias bibliográficas

Cordero, F. (en prensa) Modelación, Funcionalidad y Multidisciplinariedad: El Eslabón de la Matemática y el Cotidiano. En Díaz y Arrieta (Eds). *Investigaciones latinoamericanas en Modelación Matemática Educativa*. México: Gedisa.

Cordero, F. (2013). Matemáticas y el Cotidiano. Diplomado Desarrollo de estrategias de aprendizaje para las matemáticas del bachillerato: la transversalidad curricular de las matemáticas Módulo III. [Documento interno]. CINVESTAV –IPN.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. M. Farfán, J. Lezama & A. Romo (Ed.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 285-309). México, D. F.: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4(2), pp. 103-128.

Del Valle, T. (2015*). Los Usos de la Optimización: Un Marco de Referencia y la Teoría Socioepistemológica.* Tesis de doctorado no publicada. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Valparaiso-Chile.

Gómez, K., Silva H., Cordero, F. y Soto, D. (2014). Exclusión, Opacidad y adherencia. Tres fenómenos del discurso matemático escolar. En Lestón, P. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 27*, .1457- . México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Torres, L. (2013). *Usos del Conocimiento Matemático. La Simultaneidad y Estabilidad en una Comunidad de Conocimiento de la Ingeniería Química en un Escenario de Trabajo.* Tesis de Maestría no publicada. CINVESTAV-IPN. México, D.F.

Autores

Irene Pérez Oxté; CINVESTAV, IPN. México; iperezo@cinvestav.mx
Francisco Cordero Osorio; CINVESTAV, IPN. México; fcordero@cinvestav.mx

ESTRUCTURAS ARGUMENTATIVAS PRESENTES EN LA PRODUCCIÓN DE UNA PRUEBA: EL CASO DE LA IGUALDAD DE ÁREAS EN GEOMETRÍA

Johnny Alfredo Vanegas Díaz

Resumen

La presente investigación analiza las *estructuras argumentativas* que se configuran en un grupo de futuros profesores de matemáticas, cuando se involucran en la producción de una *prueba*. De manera particular, se ejemplifican tres estructuras argumentativas: *abductiva*, *inductiva* y *deductiva*; sustentadas en el *modelo fundamental de Toulmin* (1958), las cuales tienen lugar en la reconstrucción de los argumentos dados por los estudiantes frente a una tarea particular, que consistía en probar que una recta que pasa por el centro de un cuadrado, lo divide en dos regiones de igual área. A modo de conclusión se discuten posibles relaciones entre las estructuras identificadas y la prueba en matemáticas.

Palabras claves: modelo fundamental de Toulmin, estructuras argumentativas, prueba formal, inferencia abductiva, inferencia inductiva, inferencia deductiva.

Contextualización y planteamiento del problema

La presente investigación se inscribe en el marco de la producción académica desarrollada en la asignatura: *Metodología de la Enseñanza de la Matemática II*, del Programa de Maestría en Ciencias, Área Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de Guerrero. Surge como resultado del estudio de diversos artículos de investigación concernientes a la argumentación en el campo de la Matemática Educativa.

La revisión de literatura permitió identificar dos líneas de trabajo en el análisis de los argumentos producidos por estudiantes y matemáticos, a saber: a) el contenido de los argumentos y b) la estructura de los argumentos (Inglis, Mejía-Ramos & Simpson, 2007). Además, dicha revisión mostró que un análisis estructural de la argumentación posibilita una mayor comprensión de la relación entre argumentación y prueba en matemáticas (Knipping, 2003; Pedemonte, 2007; Knipping & Reid, 2015).

Para la elaboración de análisis estructurales de los argumentos, las investigaciones en Matemática Educativa frecuentemente han empleado un modelo basado en el trabajo de Toulmin (1958). Por ejemplo, en Inglis et al. (2007) se utiliza la versión del esquema completo de Toulmin: *dato*, *garantía*, *soporte*, *calificador modal*, *refutación* y *pretensión*, para analizar los argumentos individuales construidos por estudiantes de matemáticas, resaltando el papel que juegan tanto el calificador modal como la refutación, en las argumentaciones producidas. En cambio, otras investigaciones (Pedemonte, 2007; Boero, Douek, Morselli & Pedemonte, 2011; Krummheuer, 2015) enfocadas en la reconstrucción de las estructuras argumentativas suelen omitir esos elementos.

La presente investigación, únicamente considera los siguientes elementos del esquema de argumentación de Toulmin: dato, garantía y pretensión. En conjunto dichos elementos constituyen el *modelo fundamental* de Toulmin. Diversos investigadores (Boero et al., 2011) han demostrado que este modelo permite representar las estructuras argumentativas de los estudiantes en términos de estructuras: abductivas, inductivas y deductivas. Incluso, recientemente Conner y sus colaboradores (2015) trabajaron con el modelo fundamental y lo combinaron con aspectos distintivos del razonamiento, desde la propuesta de Pierce, para identificar tipos de razonamientos en *argumentaciones colectivas* (múltiples personas trabajando juntas para establecer una pretensión).

El objetivo de esta investigación está vinculado con la línea de trabajo desarrollada por Boero et al. (2011). En este sentido, se pretende analizar, con base en el modelo fundamental de Toulmin, las diferentes estructuras argumentativas que se configuran en un grupo de futuros profesores de matemáticas y discutir a modo de conclusión, posibles relaciones de estas estructuras con la prueba en matemáticas. No obstante, a diferencia de otras investigaciones que también se han desarrollado en esta dirección (eg. Pedemonte, 2007, Pedemonte & Reid, 2011) aquí se quiere mostrar que una tarea particular, puede dar lugar a diversas estructuras argumentativas y que estas guardan una estrecha relación con la prueba.

En el marco de estas delimitaciones, esta investigación se propone abordar la siguiente pregunta: ¿Qué estructuras argumentativas se configuran en un grupo de estudiantes de licenciatura en matemáticas, durante la producción de una prueba?

Marco de referencia conceptual

En esta investigación el modelo fundamental de Toulmin (1958) es usado para analizar y comparar, desde un punto de vista estructural, las argumentaciones y sus posibles relaciones con laprueba en matemáticas. Este modelo está constituido por tres elementos: dato, garantía y pretensión. Estos elementos pueden representarse de acuerdo con el siguiente esquema (figura 1).

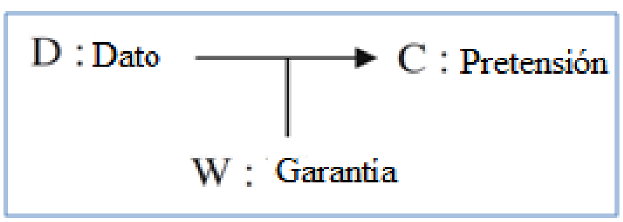


Figura1. Modelo fundamental de Toulmin (1958)

En la terminología de Toulmin (1958), la argumentación es la actividad de plantear pretensiones, apoyarlas con razones, criticar esas razones y refutar esas críticas. La pretensión (C) significa, tanto el punto de partida como el punto de llegada en la argumentación, donde el dato (D) representa las razones o hechos específicos en favor de la pretensión, mientras que la garantía (W) se refiere a enunciados generales que posibilitan la conexión entre las razones y la pretensión; apelando a reglas, definiciones y analogías (Atienza, 2005).

Con base en el modelo fundamental de Toulmin se pueden representar diferentes estructuras argumentativas: abductiva, inductiva y deductiva (Pedemonte, 2007). Incluso, es posible clasificar ciertos tipos de abducción: *undercoded*, *overcoded* y *creative* (Pedemonte, 2011). En esta investigación se considera la representación propuesta por Pedemonte (2007), puesto que los diferentes tipos de abducción no tuvieron presencia en la tarea que aquí se ejemplifica. A continuación se ilustra la representación de la estructura abductiva (figura 2) y la estructura inductiva (figura 3) de la argumentación. La estructura deductiva se corresponde con el modelo fundamental (figura 1).

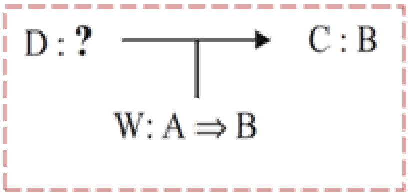


Figura2. Estructura abductiva

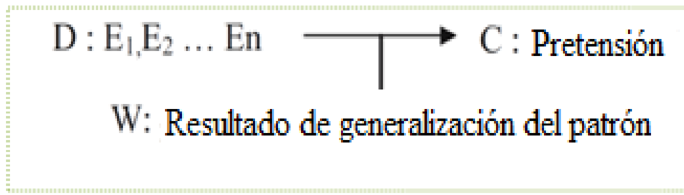


Figura 3. Estructura inductiva

En una estructura abductiva, la pretensión (B) es probable pero no certera, puesto que depende de la validez de la razón (A), la cual debe ser organizada con otras razones (D: ?) para aplicar alguna regla de inferencia (W: A $\Rightarrow$ B). El signo de interrogación significa que hay que buscar un orden para los datos, antes de aplicar la regla de inferencia.

Por otro lado, en la estructura inductiva, la pretensión se construye a partir de algunos casos particulares (D: E_1, E_2,..., E_n) donde la identificación de un aspecto clave permite pensar la generalidad de los casos. En este sentido, la garantía (W) puede entenderse como el resultado de la generalización del patrón, pero la pretensión (C) puede no resultar certera.

Finalmente, una estructura deductiva queda determinada cuando la pretensión se construye a partir de hechos y reglas de inferencia, sustentadas en conocimientos de la matemática, lo cual imprime certeza a la pretensión. Así, lo que distingue la deducción de otro tipo de inferencia es la garantía y la naturaleza del soporte. Entonces una prueba formal se entiende como una justificación de carácter deductivo que encadena en forma explícita razones a través de leyes matemáticas (axiomas, definiciones, teoremas, etc.), desde la información conocida (dato) hasta el enunciado esperado (pretensión).

Diseño del estudio

El contexto de la situación

Con el objeto de reconstruir las estructuras argumentativas de un grupo de futuros profesores de matemáticas seusó como instrumento para la recolección de datos una situación problemática conformada por tres tareas. No obstante, esta investigación se focaliza en la primera tarea y deja para estudios posteriores en análisis derivado de las tareas restantes. El contexto de la situación tomó como referente un problema propuesto por Santos-Trigo (2008, p.164) cuyo objetivo era que los estudiantes representaran y exploraran relaciones matemáticas por medio del uso de un software dinámico. En contraste, la situación que aquí se presenta (figura 4) fue pensada para desarrollarse en un contexto de lápiz y papel.

Sara y Francisco son estudiantes encargados de la siembra de hortalizas en el jardín de la escuela; se les asigna un pedazo de tierra en forma de cuadrado y deciden repartirse el terreno en dos partes de tal manera que a cada uno le corresponda la misma área. Las figuras 1 y 2 representan las dos formas que consideraron Sara y Francisco, respectivamente, para dividir el terreno. Otro estudiante, Johnny, les sugiere seleccionar un punto sobre cualquier lado del cuadrado y trazar una recta que pase por ese punto y el centro del cuadrado (figura 3). Johnny afirma que esa recta divide el cuadrado en dos regiones que tienen la misma área. **Tarea 1.** ¿Es cierta la afirmación de Johnny?

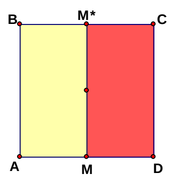


Figura 1. M y M son los puntos medios de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$*

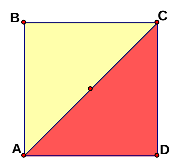


Figura 2. $\overline{AC}$ es la diagonal del cuadrado

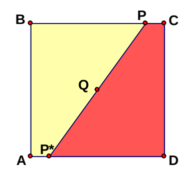


Figura 3. Q es el centro del cuadrado. P y P están sobre el perímetro.*

Figura 4. Contexto de la situación

La población y contexto del estudio

Los participantes fueron 14 estudiantes de un programa de licenciatura en matemáticas, los cuales se encontraban cursando el cuarto semestre. Estos estudiantes fueron distribuidos en cuatro grupos de trabajo (G_1,G_2, G_3 y G_4) destacándose para los intereses de esta investigación las producciones desarrolladas por los tres primeros grupos (G_1, G_2, G_3). La situación fue implementada como parte de una actividad de clase, puesto que teóricamente cada uno de los participantes contaba con los prerrequisitos matemáticos fundamentales para enfrentar la situación, tales como: criterios de congruencia de triángulos y fórmulas para calcular áreas de polígonos. Además, las actividades desarrolladas por los participantes, en sesiones anteriores de clase, permitió verificar que los estudiantes estaban familiarizados con la producción de pruebas en matemáticas.

Método de recolección de datos

La recolección de datos se hizo en una sesión de clase de 2 horas, distribuidas de tal forma que los estudiantes lograrán trabajar en argumentaciones colectivasal interior de pequeños grupos. Al final de la sesión, se le solicitó a cada grupo asignar un representante para que explicara la prueba ante toda la clase. En este sentido, tanto las producciones de los grupos como sus respectivas explicaciones jugaron un papel fundamental para reconstruir sus estructuras argumentativas. Se hizo entonces un seguimiento sistemático y continuo de cada una de las producciones de los estudiantes, empleando para ello dos cámaras de video y dos grabadoras de voz. Del mismo modo, también se filmaron los momentos en que los representantes de cada grupo explicaban sus producciones.

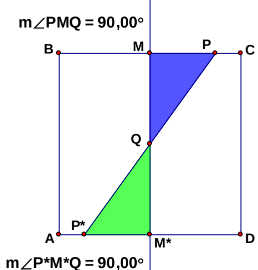
Análisis de los datos

Los tres episodios que se discuten en este apartado ilustran que en el análisis estructural de los argumentos producidos por los estudiantes, la estructura argumentativa no siempre es deductiva, sino que además pueden presentarse estructuras abductivas e inductivas.

Para la identificación de las diferentes estructuras argumentativas se tuvieron en cuenta las producciones escritas de los estudiantes, así como las explicaciones dadas por un integrante de cada grupo de trabajo. Los fragmentos discursivos sirvieron para no dar lugar a la ambigüedad,puesto que los fragmentos escritos, usualmente suministraban poca información para reconstruir las estructuras argumentativas. Con el objeto de hacer explícita la estructura derivada de los procesos argumentativos de los participantes, en cada fragmento discursivo, se presta especial atención a las declaraciones del representante de cada grupo,estableciendo correspondencias directas con algún elemento constitutivo del modelo fundamental de Toulmin. En algunos casos, la explicación está acompañada de una gráfica que es necesaria para entender sobre qué se está hablando. Cabe resaltar que dicha representación ha sido sometida a ciertos arreglos de imagen y forma, únicamente con el objeto de mejorar la visibilidad de los objetos que fueron citados por el representante del grupo.

Ejemplo de una estructura abductiva

Esta estructura queda determinada a partir de la suposición de un hecho, que de ser cierto permite validar la pretensión a la que se quiere llegar. El proceso de producción y explicación de los argumentos planteados por G_2configuran una estructura abductiva que puede hacerse explicita a través del siguiente fragmento:



Nosotros según trazamos la mediatriz de este segmento (refiriéndose al segmento $\overline{BC}$) y es obvio que tiene que interceptar el punto medio del cuadrado, entonces **aquí se forman ángulos de 90°** (señalando los ángulos $\measuredangle PMQ$ y $\measuredangle P^{*}M^{*}Q$: **$D_1$**) y también por criterio este de ...**éstos son iguales** (refiriéndose a las congruencias: **D_2** y **A**)...ya por criterio de congruencia lado..., por el **criterio de congruencia**(identificación de W) de lado, ángulo...de lado, lado, ángulo son iguales los triángulos (señalando el ΔMPQ y el $\Delta M^{*}P^{*}Q$: **B**). Estos son iguales (refiriéndose a D_2) porque como es la mediatriz, el punto medio la divide en dos partes iguales. Ahora como dice Euclides, si a cosas iguales se le quitan cosas iguales los restos son iguales y por lo tanto, las áreas de los cuadriláteros son iguales.

En este caso, el primer dato D_1 se puede identificar cuando el estudiante expresa: "aquí se forman ángulos de 90°", señalando esos ángulos y haciendo explicita la congruencia. Además, cabe mencionar que este dato está debidamente sustentado sobre principios formales de la matemática: la mediatriz de un segmento es la línea recta perpendicular a dicho segmento trazada por su punto medio, lo cual implica que los ángulos considerados sean ángulos rectos. El segundo dato D_2se hace evidente cuando el estudiante dice: "estos son iguales" y señala los segmentos $\overline{M^{*}Q}$ y $\overline{QM^{*}}$. Es evidente para el grupo, desde lo que ellos conocen en matemáticas, que el centro del cuadrado divide el segmento perpendicular $\overline{M^{*}M}$ en dos partes iguales. Ahora bien, nótese que la congruencia entre los segmentos $\overline{P^{*}Q}$ y $\overline{QP}$ simplemente se dice, pero en ninguna parte del fragmento se justifica por qué es así. Este supuesto que hace el grupo y que se representa con A es lo que permite hacer evidente una estructura abductiva (figura 5).

El paso a la pretensión final (la igualdad entre las áreas de los cuadriláteros) está justificado por un conocimiento matemático que comparte y acepta toda la clase. Sin embargo, la prueba de este grupo no es formal, puesto que la sentencia de congruencia entre los triángulos se obtiene a partir de un dato (A) que es plausible. Se asume que A es válido y por lo tanto, se infiere la congruencia entre los triángulos. Es importante hacer énfasis que en el discurso de este grupo, tanto D_1 como D_2 están soportados en argumentos matemáticos, pero no se dice nada acerca de la validez de A.

D_1: $\measuredangle PMQ \cong \measuredangle P^*M^*Q$
D_2: $\overline{M^*Q} \cong \overline{QM}$

B: $\Delta MPQ \cong \Delta M^*P^*Q$

A: $\overline{P^*Q} \cong \overline{QP}$
W: $D_1, D_2, A \rightarrow B$

Figura 5. Reconstrucción de la estructura argumentativa de G_2

Ejemplo de una estructura inductiva

En este episodio se aprecia la manera en que G_1 reconoce que los modelos propuestos por Sara y Francisco son casos particulares del modelo sugerido por Johnny. En su solución expresan textualmente lo siguiente:

> "La afirmación de Johnny es cierta porque en los ejemplos que se dieron (figura 1 y figura 2) tienen el punto susodicho que se encuentra en el cuadrado, sólo que son casos particulares, en un caso es el punto medio de un segmento, en el otro es un vértice".

Este fragmento de texto por sí mismo, no permite poner de manifiesto la estructura inductiva de la argumentación. Sin embargo, la explicación realizada por uno de sus integrantes permite inferir este tipo de estructura.

> Nosotros **tuvimos en cuenta los ejemplos que nos daban** (refiriéndose a la figura 1 y 2) y nos dimos cuenta que **en todas las figuras los segmentos que dividen el cuadrado pasan por el centro**…y entonces estos puntos (refiriéndose a P y P*) se mueven así (indicando la variación de P* a medida que P se mueve)…esto nos lleva a pensar que este segmento (señalando el segmento $\overline{MM^*}$) y este otro (el segmento $\overline{AC}$) son casos particulares de los segmentos determinados por estos puntos (refiriéndose a P y P*)…y pues ya, estos cuadriláteros tendrán la misma área.

La reconstrucción de estos argumentos llevo a ser explicita una estructura inductiva. La inducción empieza a hacerse notaria en el instante en que el estudiante dice: "tuvimos en cuenta los ejemplos que nos daban", aspecto que nunca manifestó G_2. Ahora bien, suponiendo que los otros grupos hayan considerado los ejemplos, únicamente este grupo se percató de que en todas las figuras "los segmentos que dividen el cuadrado pasan por el centro" y que esto es importante para pensar en que cualquier segmento que pase por el centro del cuadrado lo divide en dos regiones de igual área. A continuación se muestra la representación de esta estructura inductiva (figura 6).

Es importante hacer énfasis en que este grupo logró reconocer que los ejemplos dados en las figuras 1 y 2 podían interpretarse como casos particulares de la figura 3, lo cual es importante dentro del análisis de los argumentos de los estudiantes, puesto que la situación no sugiere tal hecho. De igual importancia es el hecho de que los integrantes de este grupo, encontraran la regularidad en términos de un aspecto clave: todos los segmentos pasan por el punto medio del cuadrado. Además, sin hacerlo explicito, están considerando más casos de los que ellos mismos emplean para llegar al resultado de la generalización, debido a que interpretan P y P* como puntos móviles sobre los segmentos.

E$_1$: $\overline{MM^*}$ pasa por el centro y divide el cuadrado en dos partes iguales
E$_2$: $\overline{AC}$ pasa por el centro y divide el cuadrado en dos partes iguales

El segmento $\overline{PP^*}$ divide el cuadrado en dos partes de igual área

El segmento $\overline{PP^*}$ pasa por el centro del cuadrado. Si P es punto móvil sobre el segmento $\overline{BC}$ a medida que P se mueve una determinada distancia, el punto P^* sobre el segmento $\overline{AD}$ debe recorrer la misma distancia pero en sentido contrario, para que ambos lleguen al punto medio de sus respectivos segmentos. Así que $\overline{MM^*}$ y $\overline{AC}$ son casos particulares de $\overline{PP^*}$

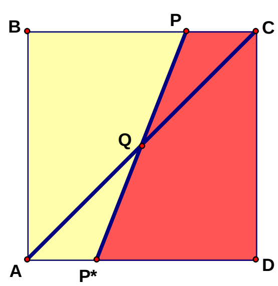
Figura 6. Reconstrucción de la estructura argumentativa de G$_1$

En cuanto a la prueba, es claro que esta carece de argumentos matemáticos explícitos que la hace vulnerable a críticas y pocas aceptaciones.La pretensión final se construye a través de inferencias eminentemente inductivas, pero a diferencia de una prueba inductiva, la validez de la pretensión no es certera porque puede pensarse en la posibilidad de que cierta recta que pase por el punto medio del cuadrado, no lo divida en dos regiones de igual área.

4.1.3. Ejemplo de una estructura deductiva

Los argumentos dados por G$_3$ configuraron una estructura deductiva, la cual permite apreciar cierta continuidad estructural con una prueba formal, puesto que las inferencias lógicas están sustentadas teóricamente a través del encadenamiento de razones soportadas en argumentos eminentemente matemáticos.

Uno de los integrantes de este grupo sugirió trazar la diagonal del cuadrado (el segmento $\overline{BC}$). A partir de aquí consideraron dos triángulos y reconocieron que la congruencia de ellos, les ayudaría a justificar la igualdad de áreas entre los cuadriláteros $ABPP^*$ y $PCDP^*$. Al igual que en los episodios anteriores, se pone de relieve un pequeño fragmento, donde uno de sus integrantes explica como construyeron la prueba.



Bueno, nosotros trazamos esta diagonal auxiliar porque aquí **ya sabemos que estas dos áreas son iguales** (refiriéndose al triángulo ΔABC y al triángulo ΔADC), entonces si este triángulo (ΔPQC) es igual a este (ΔAQP^*)… esta figura (cuadriláteroABPP*)es igual a esta otra (cuadrilátero PCDP*)…a la figura amarilla a la figura roja...y **vimos aquí que este ángulo (señalando el ∡PCQ) es igual a éste(indicando el ∡P*AQ),**porque esta diagonal ($\overline{AC}$) es como si fuera la bisectriz…después,**estos dos (el ∡AQP*y el ∡PQC) son opuestos por vértice entonces son iguales** y este (∡AP*Q) está en un par de paralelas que los corta una transversal, entonces este ángulo de aquí (∡CPQ) va a ser igual a este ángulo de aquí (∡AP*Q), pero **el criterio necesita que un lado sea igual, mínimo para que sea ALA,** entonces sabemos que esta diagonal pasa por el punto medio y punto medio está dentro de la línea media, entonces

cualquier línea que corte la línea media…cualquier transversal la va a dividir en dos partes iguales, entonces **estos dos segmentos son iguales ($\overline{QP^*}$ y $\overline{CQ}$)**. Por lo tanto, ya tenemos un criterio de congruencia y este triángulo es igual a este otro y ya las figuras amarillas y rojas son iguales.

El primer dato que reconocen es que los ángulos $\measuredangle PCQ$ y $\measuredangle P^*AQ$ son congruentes, argumentando que la diagonal del cuadrado divide el ángulo recto en dos partes iguales porque "es como si fuera su bisectriz". El segundo dato referido a la congruencia entre los ángulos $\measuredangle AQP^*$ y $\measuredangle PQC$ lo justifican por medio de la regla: ángulos opuestos por el vértice son iguales. El tercer dato, podría ser la congruencia entre los dos ángulos restantes de cada triángulo, pero este dato no es tomado en cuenta por el grupo, porque ellos saben que requieren únicamente dos ángulos y el lado común a esos ángulos: **"**el criterio necesita que un lado sea igual, mínimo para que sea ALA". Así que el tercer dato es precisamente la congruencia entre los segmentos $\overline{QC}$ y $\overline{QA}$ justificada en propiedades de la línea media de un cuadrado: "cualquier transversal que corte la línea media la va a dividir en dos partes iguales". Nótese que a diferencia de los otros grupos, G_3 deja entrever que cada uno de sus datos necesita estar soportado en leyes matemáticas antes de aplicar la regla de inferencia: criterio ALA (ángulo, lado, ángulo). La reconstrucción de los argumentos de este grupo se representa a través del siguiente esquema (figura 7).

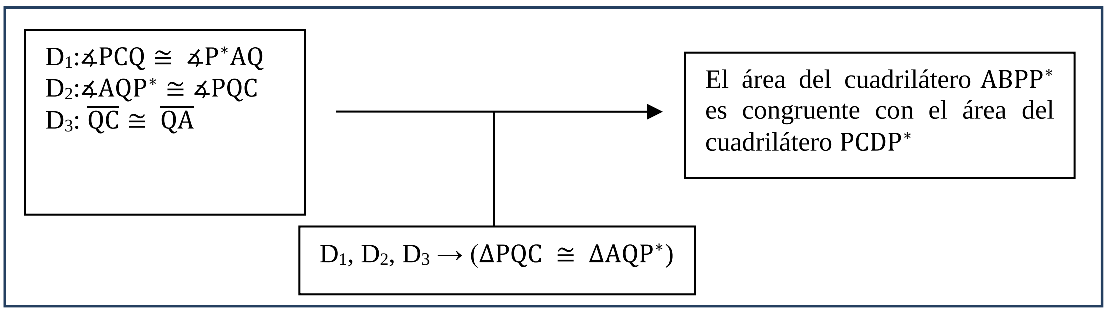


Figura 7. Reconstrucción de la estructura argumentativa de G_3

Es claro que este tipo de estructura se conecta directamente con una prueba formal. Sin embargo es interesante observar que en la primera parte del fragmento, el representante de este grupo se refiere a los triángulos ΔABC y ΔADC. Al parecer, este grupo recurrió a trazar la diagonal porque consideraron importante recurrir a una división que se sabía, previamente, dividía el cuadrado en dos regiones de igual área. Esto hecho, permite inferir que antes de la construcción de la prueba formal, existen aspectos que se corresponden con una estructura inductiva. Incluso, antes de empezar a nombrar los datos y la manera en que estos se sustentan en leyes matemáticas, se declara un supuesto importante acerca de que la posible congruencia entre los triángulos ΔPQC y ΔAQP^* permite probar que las áreas de los cuadriláteros son congruentes, lo que constituye en cierto sentido una hipótesis abductiva, dado que no se ha dicho de forma contundente, que argumentos matemáticos sustentar dicha idea.

Reflexiones finales

En esta investigación se constata que el modelo fundamental de Toulmin (dato-garantía-pretensión) permite analizar los argumentos de los estudiantes en el proceso de producción de una prueba. Por un lado, dicho modelo permitió tipificar las estructuras argumentativas de los estudiantes, en términos de estructuras inductivas,abductivas y deductivas. Por otra parte, posibilitó una mayor comprensión, desde un punto de vista estructural, de lo que significa la prueba en matemáticas y como ayudar a construirla.

La reconstrucción de cada una de las estructuras argumentativas puso de manifiesto la manera de proceder de los estudiantes ante la búsqueda de una prueba. Si bien, las estructuras inductivas y abductivas no pueden ponerse en correspondencia con una prueba formal; son en gran medida una fuente importante para que esta última pueda producirse. Esto implica que pese a la forma sofisticada de la prueba formal, el reconocimiento de estructuras argumentativas no deductivas abre el universo de posibilidades para concebir la prueba en matemáticas desde una visión más amplia.

En este sentido las estructuras abductivas e inductivas dar lugar a pruebas que pueden tipificarse como conjeturales. Desde un punto de vista estructural esto es perfectamente admisible, puesto que la pretensión en estas estructuras está parcialmente validada. Así, por ejemplo; en el caso de lo abductivo, la prueba puede definirse como una justificación parcial en la que se explicitan los datos necesarios para aplicar alguna regla de inferencia lógica, pero donde se supone la validez de una de las razones para poder construir la pretensión final.

El cambio de categoría de una prueba abductiva a una prueba formal requerirá entonces, llamar la atención sobre aquel supuesto y la debilidad que contiene en el acto de convencer a otros, con el objeto de que los estudiantes busquen argumentos matemáticos para sostener el supuesto y no para desecharlo, lo que eventualmente les ayudará a producir la sofisticada prueba formal que de hecho, como se puso de manifiesto aquí, no necesariamente todos los estudiantes la construyen.

Referencias bibliográficas

Atienza, M. (2005). La teoría de la argumentación en Toulmin. En R. Márquez& J. Yescas (Eds.), *Las razones del derecho* (pp 81-102). México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Boero, P., Douek, N., Morselli, F., & Pedemonte, B. (2011).Argumentation and proof: a contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Belo Horizonte, Brazil 1.*

Conner, A., Singletary, L., Smith, R., Wagner, P., & Francisco, R. (2015). Identifying Kinds of Reasoning in Collective Argumentation.*Mathematical Thinking and Learning*, *16*(3), 181-200, doi: 10.1080/10986065.2014.921131.

Inglis, M., Mejia, J., Simpson, A. (2007). Modelling Mathematical Argumentation: The Importance of Qualification. *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 3-21.

Knipping, C. (2003). Argumentation structures in classroom proving situations. In M. A. Mariotti (ed.). *Proceedings of the Third Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Bellaria, Italy, ERME.

Krummheuer, G. (2015). Methods for Reconstructing Processes of Argumentation and Participation in Primary Mathematics Classroom Interaction. En A. Bikner, C. Knipning & N. Presmeng (eds.), Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education (51-74). doi: 10.1007/978-94-017-9181-6_3.

Pedemonte, B., & Reid, D. (2011).The role of abduction in proving processes.*Educational Studies in Mathematics*, *76*, 281-303. doi: 10.1007/s10649-010-9275-0.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, *66*, 23-41. doi: 10.1007/s10649-006-9057-x.

Santos-Trigo, M. (2008). La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la Construcción de una Agenda de Investigación y Práctica. *Investigación en Educación Matemática XII*. 157-187.

Toulmin, S. (1958). *The uses of arguments*. Cambridge: Cambridge University Press.

Autores

Johnny Alfredo Vanegas Díaz; CIMATE, UAGro. México; yovanegasdiaz@gmail.com

LA FUNCIÓN CUADRÁTICA Y SU PROCESO DE MATEMATIZACIÓN

Melby Cetina-Vazquez, Guadalupe Cabañas-Sánchez, Jhony Alexander Villa-Ochoa

Resumen

Se estudian procesos de matematización desarrollados por estudiantes de bachillerato mientras reflexionan y modelan situaciones realistas en el marco de la función cuadrática. Este proceso de matematización emerge de analizar *qué*, *cómo* y *cuánto* varían las variables involucradas en dos situaciones realistas. En un primer nivel de reflexión, emergen conocimientos informales, que favorecen que reconozcan y establezcan el modelo matemático que organiza esa variación. Los resultados se expresan en términos de los modelos, reflexiones y de los niveles de comprensión alcanzados por los estudiantes.

Palabras clave: Matematización, función cuadrática, niveles, modelos.

Introducción

En la reforma integral del nivel medio superior en México, las competencias se presentan como una opción para promover el desarrollo de aprendizajes funcionales que contribuyan a que los estudiantes afronten los desafíos de la realidad que les toca vivir e incidir sobre ella (Cabrera & Cantoral, 2010). Se traduce en el interés porque los estudiantes le den sentido y significado a la matemática mientras interpretan y explican situaciones o fenómenos diversos; es decir, que en el aula de matemáticas se propongan situaciones problemáticas reales que promueva al estudiante a transitar del lenguaje cotidiano a un lenguaje matemático para explicar sus procedimientos y resultados (SEP, 2011a, 2011b; UAGro, 2010). Una manera de promover dicho tránsito es mediante la **modelación matemática**. En el contexto de la modelación, una distinción que se hace comúnmente en la literatura (Stillman, 2012 en Ärlebäck & Doerr, 2015) es entre modelación y aplicación. Como aplicación, la ruta que siguen quienes la conciben de este modo es *matemáticas* → *realidad* y se preguntan ¿dónde puedo usar esta particular pieza de conocimiento matemático? Desde esta perspectiva, se entiende al menos hipotéticamente, que el modelo ya fue aprendido y construido. Con la modelación matemática, estos investigadores sostienen, que la dirección que se sigue es contraria, es *realidad* → *matemáticas* y la pregunta central es ¿Qué matemáticas puedo usar para resolver este problema? Desde esta postura, el modelo tiene que ser construido a través de la idealización, especificación y matematización de la situación del mundo real. Ambos tipos de tareas, ocupan un lugar importante en el salón de clases. Vista como **proceso de matematización** (u organización) de la realidad favorece un aprendizaje significativo y gradual de la matemática (Gravemeijer, 1999), mediante la puesta en escena de situaciones problemáticas realistas, suscitando que el estudiante parta de sus saberes informales asociados, con el contexto de la situación hacia una matemática formal. La investigación se centra en dar respuesta a la siguiente pregunta: ¿Qué procesos de matematización desarrollan estudiantes de segundo grado de bachillerato al modelar situaciones realistas en el marco de la función cuadrática?

Perspectiva Teórica

El proceso de matematización se estudia en el marco de la Educación Matemática Realista (EMR), teoría de instrucción de la educación matemática enfocada en describir el cómo y el qué considerar para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Heuvel-Panhuizen, 2002). Seis principios la fundamentan: (1) *de actividad*, la matemática debe ser pensada como una actividad humana a la que todas las personas pueden acceder y la mejor forma de aprenderla es haciéndola; (2) *de realidad*, si la matemática surge como matematización de la realidad, el aprendizaje matemático debe originarse también en esa realidad (haciendo referencia no solo al mundo real o existente sino también a lo realizable, imaginable o razonable para los estudiantes); (3) *de reinvención*, la educación matemática debe dar a los estudiantes la oportunidad guiada por el maestro de reinventar la matemática; (4) *de interacción*, la enseñanza de las matemáticas es considerada una actividad social, cuya discusión y reflexión entre pares permite alcanzar niveles más altos de compresión; (5) *de interconexión*, no hay distinciones entre los ejes curriculares, lo cual da una mayor coherencia a la enseñanza y hace posibles distintos modos de matematizar las situaciones realistas bajo diferentes modelos y lenguajes, logrando alta coherencia a través del currículo y; (6) *de niveles de comprensión*, los estudiantes deben comenzar por matematizar un contenido o tema de la realidad para luego analizar su propia actividad matemática; durante este proceso de matematización se admite que los estudiantes pasan por distintos niveles de comprensión ligados al uso de estrategias, modelos y lenguajes de distinta categoría cognitiva (Bressan, 2011).

Los niveles de compresión son cuatro: El *situacional*, se da una interpretación de la situación problemática y un uso de estrategias y conocimientos informales ligadas al contexto de la situación. El *referencial* aparecen representaciones o modelos gráficos, materiales o notacionales, y las descripciones, conceptos y procedimientos personales que esquematizan el problema. El *general* se desarrolla a través de la exploración, reflexión y generalización de lo aparecido en el nivel anterior, pero propiciando una focalización matemática sobre las estrategias que supera la referencia al contexto. El *formal*, se comprende y se actúa con los conceptos, procedimientos y notaciones convencionales, propios de la rama de la matemática con que se está trabajando (Bressan & Gallego, 2011).

Estos principios se consideran de manera conjunta en el diseño de las situaciones realistas y también, para el ambiente en el aula que se espera desarrollar el proceso de matematización.

Metodología

Es un estudio de caso descriptivo-cualitativo. Participan 15 estudiantes (16 a 17 años) matriculados en segundo grado de bachillerato de una institución educativa en el estado de Guerrero, México. La actividad matemática en el aula, se organizó en equipos de tres integrantes. Los datos del estudio provienen de dos situaciones realistas diseñadas bajo los principios de la EMR, en un contexto de procesos de variación y cambio. La toma de datos considera las producciones escritas de los estudiantes, grabaciones de video y diarios de clase. Las situaciones se describen a continuación.

Situación 1. Cuadrados y áreas. (Situación retomada y ajustada de Llluzi & Sessa, 2014, p. 39). La situación se plantea en un contexto geométrico. El propósito es que los estudiantes construyan modelos matemáticos que organizan la variación del área de un cuadrado inscrito en otro, mientras se modifica la distancia que hay de sus vértices a los del circunscrito.

Situación 2 (S2). La promoción del Video Club. La situación se plantea en un contexto de la economía y las finanzas. El propósito es que el estudiante arribe a modelos matemáticos que organizan la variación del ingreso mensual que obtiene el dueño de un Video Club, al variar el precio de la mensualidad que les cobra a sus socios.

Se establece un análisis preliminar de los modelos esperados por cada situación, así como de su correspondencia con los niveles de comprensión establecidos por la EMR.

Datos y análisis

El proceso de matematización se analizó teniendo en cuenta los desempeños de los estudiantes en cada situación (S1, S2). Se tuvo en cuenta las reflexiones, los modelos y el nivel de compresión (situacional, referencial, general y formal) alcanzado por los equipos (E1, E2, E3, E4 y E5), bajo la guía del profesor.

Por cuestiones de espacio, se muestra sólo el proceso de matematización revelado por los estudiantes, al modelar S2, la cual los sitúa a analizar la variación de la recaudación mensual que obtiene el dueño de un Video Club, al variar el precio de la mensualidad que les cobra a sus socios, y a partir de ello deben determinar modelos matemáticos que organicen esa variación. Como información inicial aparece la cuota mensual ($79), el número de socios (93 personas) y la relación para obtener la recaudación mensual a partir del incremento que se le hace a la cuota a fin de que las ganancias aumenten.

Mediante la forma de proceder de los estudiantes se distingió como conocimiento informal detonante al producto entre dos factores (PF), dado que reconocieron, que la recaudación mensual puede determinarse mediante el producto entre el costo de la cuota y el número de socios. Sabían que tanto el costo de la cuota como el número de socios es un valor a determinar. El primero, resultó de sumarle al costo inicial el valor de un incremento. El segundo, se obtuvo de restarle al número de socios inicial el valor del incremento que se le suma al costo de la cuota. Esta forma de proceder (figura 1) la repitieron cada vez que iban a determinar la recaudación mensual para un cierto incremento.

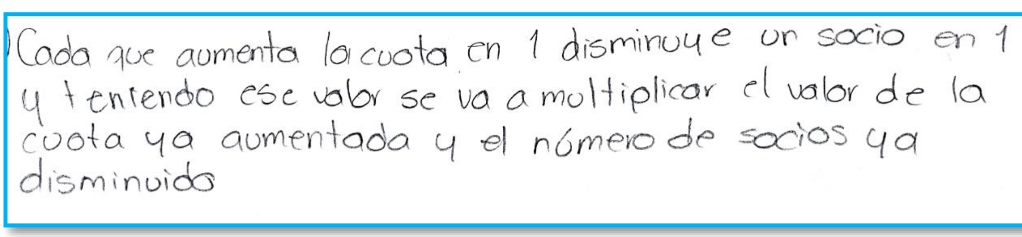

Cada que aumenta la cuota en 1 disminuye un socio en 1 y teniendo ese valor se va a multiplicar el valor de la cuota ya aumentada y el número de socios ya disminuido

Figura 1. Evidencia del conocimiento informal PF en E1.

Evidencia de esta forma de proceder se muestra en la figura 2, donde los estudiantes determinaron las recaudaciones mensuales para cuando el incremento es $0, $4 y $7.

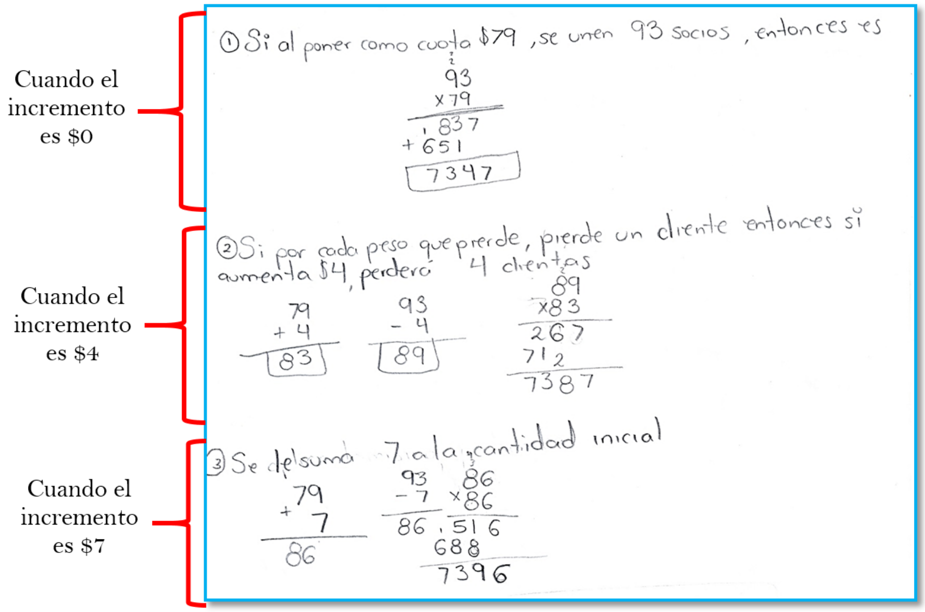


Figura 2. Forma de proceder de E4 mediante TP.

La determinación de estos valores puntuales demandados en la situación, motivó a los estudiantes a reconocer el **qué varía**. Pues identificaron que varía la recaudación mensual al modificar la cantidad de incremento que se le hace a la cuota mensual. Reconociendo también, que los valores que podía tomar la cantidad de incremento, iban de 0 a 93 pesos. Ello dio cuenta, que se ubicaron en un **nivel situacional**, dado que el conocimiento que pusieron en juego está ligado al ***contexto*** de la situación.

Evidencia de que los estudiantes transitaron a un **nivel referencial** se dio cuando organizaron mediante tablas (figura 3) los valores determinados en el nivel anterior, así como determinaron nuevos valores. Las tablas muestran la relación de correspondencia que establecieron entre la cantidad de incremento y la recaudación mensual. Además de que les permitió hacer deducciones del **cómo** y **cuánto varía**.

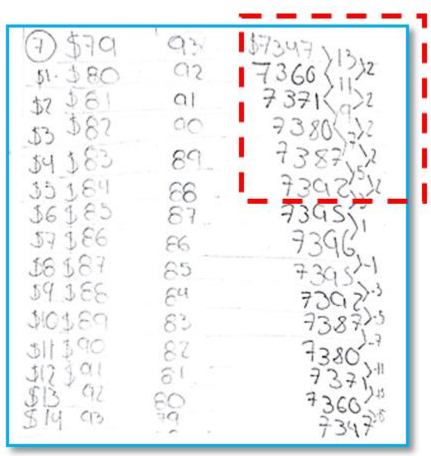


Figura 3.Tabla de valores realizada por E3.

En relación con el *cuánto varía*, los estudiantes distinguieron que la segunda diferencia es constante, con contante 2; y con el *cómo varía* reconocieron que los valores de la recaudación aumentaban para valores de incremento de 0 a 7, y luego disminuían para valores de incremento de 8 a 93. Identificaron que cuando el incremento es \$7 se generaba una ganancia única de \$7396 y es la ganancia máxima de entre todas las que se podían obtener luego de variar el incremento. Estas características también las expresaron mediante una representación gráfica (figura 4). Si bien empezaron a identificar características de una función cuadrática, éstas las expresaron en términos del contexto de la situación, por lo que dichas producciones son ***modelos de*** la situación.

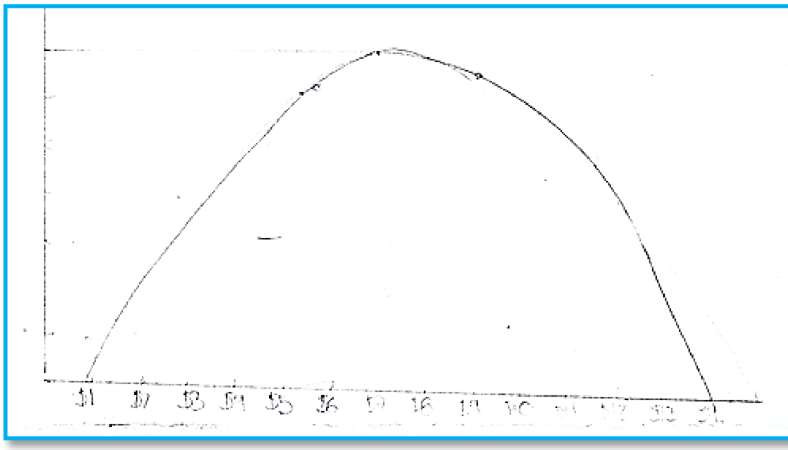


Figura 4. Gráfica de la variación analizada, construida por E3.

También establecieron una expresión algebraica que resultó de generalizar los modelos desarrollados en los niveles anteriores. La figura 5 muestra el modelo algebraico que organizó la variación inmersa, al cual llegaron los estudiantes, siendo este un ***modelo para*** resolver otras situaciones que presenten una variación cuadrática con las mismas características, por lo que se dice que alcanzaron el **nivel general**.

$$f(x) = (79+x)(93-x)$$

Figura 5. Expresión obtenida por E2

El **nivel formal** lo alcanzaron en la discusión y reflexión grupal de sus producciones, como son los modelos tabular, gráfico y algebraico. Una de las discusiones, se centró en el reconocimiento de que la gráfica era una parábola, la cual representa una función cuadrática. Los estudiantes mencionaron que en la expresión algebraica, a la cual se llegó, no se mostraba el término cuadrático, por lo que sugirieron desarrollarla. En la figura 6 se muestra el procedimiento realizado en la pizarra por una estudiante, para dar cuenta del término cuadrático en la expresión.

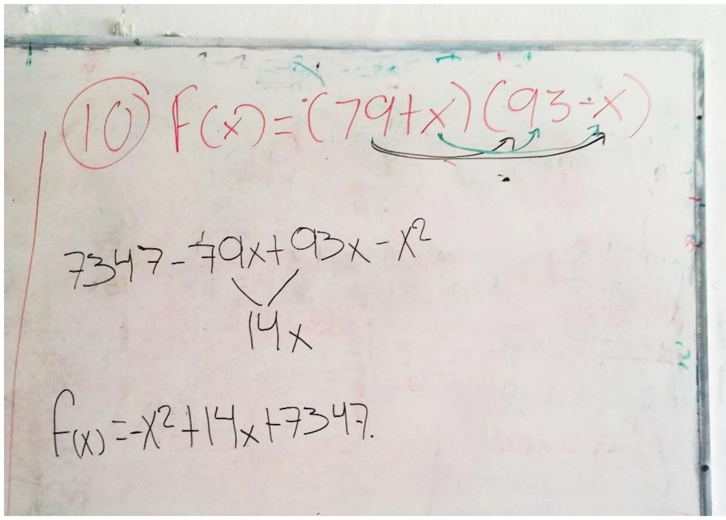


Figura 6. Procedimiento realizado por una estudiante de E3 para determinar el término cuadrático.

Entorno a ello, el profesor cuestionó a los estudiantes sobre las características que habían determinado de la función cuadrática mediante la variación analizada. Mencionaron que vieron la presencia de un máximo, el crecimiento y decrecimiento de los valores, que su segunda diferencia entre los valores de la variable dependientes es constante y la simetría de los valores. Fue en este tipo de reflexiones, que los estudiantes alcanzaron el nivel formal de compresión, puesto que reconocieron la matemática inmersa en la situación, la función cuadrática y la expresaron mediante un ***lenguaje matemático formal***. Incluso, reconocieron que el modelo gráfico, representa una parábola. Esto es producto del conocimiento que poseen, puesto que en cursos de geometría analítica estudiaron a la parábola como lugar geométrico.

Reflexiones finales

Los modelos generados en S2 fueron de tipo aritmético, tabular, gráfico y algebraico, asociados a una variación cuadrática, que a su vez la relacionaron con la función cuadrática. Las características que reconocieron al explorar y explicar las variaciones de ambas situaciones son: (1) sus valores son simétricos; (2) presenta un valor mínimo o máximo; (3) sus valores decrecen/crecen o crecen/decrecen; (4) la gráfica de las variaciones son parábolas; (5) su segunda diferencia entre los valores de la variable dependientes es constante. El aprendizaje de la función cuadrática en los estudiantes se favoreció de forma *gradual* y *significativa*.

Se reconoció que tanto las *interacciones* en equipo, como grupales favorecieron en los estudiantes a discusiones y reflexiones, que a su vez promovieron a que convergieran en procedimientos y herramientas. Pues sus producciones escritas evidenciaban ritmos de trabajo y vías de solución diferentes. Se distinguió que el proceso de matematización no es neutro o no es uniforme debido a las diferentes categorías cognitivas de los estudiantes.

Los seis principios que establece la EMR tuvieron implicaciones en el proceso de matematización de los estudiantes, tanto a nivel del aula de clase como de la teoría. Es decir, se hacen presentes en el desarrollo de las situaciones y brindan también, a la teoría de explicaciones hacia los mismos. De modo que si se aspira a diseñar e implementar un ambiente de aprendizaje que favorezca el proceso de matematización, debe tenerse en cuenta dichos principios. Pues son los que provocaron significados, interacciones, vías de solución, reflexiones y modelos matemáticos en la actividad matemática de los estudiantes participantes.

Referencias bibliográficas

Ärlebäck, J., & Doerr, H. (Febrero, 2015). *At the core of modelling: connecting, coordinating and integrating models*. Trabajo presentado en 9TH Congress of Euripean Research in Mathematics Education, Prague, Czech Republic. Resumen recuperado de https://www.dropbox.com/sh/2twajch6jj6ky5v/AAAioQIrtx4YKiIumrSgAT--a/25-Arleback-Doerr.pdf?dl=0

Bressan, A. (2011). Los principios de la Educación Matemática Realista. Recuperado de https://lasmatesdeinma.files.wordpress.com/2011/11/principios-de-educacion-matematica-realista.pdf

Bressan, A., & Gallego, M. (2011). La Educación Matemática Realista. Bases teóricas. Recuperado de http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/emr_bases_teoricas.pdf

Cabrera, L. & Cantoral, R. (2010). El pensamiento y lenguaje variacional como eje rector para el desarrollo de competencias. Un estudio en el marco de la RIEMS. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23*, 859-867. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, A.C.

Gravemeijer, K. (1999). How Emergent Models May Foster the Constitution of Formal Mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, *1*(2), 155–177.

Heuvel-Panhuizen, M. Van Den. (2002). Realistic Mathematics Education as Work in Progress. In Common sense in Mathematics education de Fou-Lai Lin (Ed.), *Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education*, Taiwan.

Llluzi, A., & Sessa, C. (2014). *Matemática. Función cuadrática, parábola y ecuaciones de segundo grado*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires.

SEP. (2011a). *Plan de estudios 2011. Educación básica*. México, D. F.: Secretaría de Educación Pública.

SEP. (2011b). *Programa de Estudios 2011. Guía para el maestro. Educación Básica Secundaria. Matemáticas*. México, D. F.: Secretaría de Educación Pública.

UAGro. (2010). *Plan de estudios por Competencias 2010. Mateáticas II: Interpretando la realidad.* Guerrero: Comisión General de Reforma Universitaria Educación Media Superior.

Autores
Melby Cetina Vazquez; CIMATE, UAGro. México; melby_gcv@hotmail.com
Guadalupe Cabañas Sánchez; CIMATE, UAGro. México; gcabañas.sanchez@gmail.com
Jhony Alexander Villa Ochoa; UdeA. Colombia; Jhony.villa@udea.edu.co

TAREAS RELACIONADAS CON EL ÁLGEBRA TEMPRANA EN LOS LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICAS DE PRIMARIA

Virginia Salazar Luna, Guadalupe Cabañas-Sánchez, Catalina Navarro

Resumen

El objetivo de la investigación es caracterizar las tareas relacionadas con el álgebra temprana en los libros de matemáticas de segundo y tercer año. El estudio se sustenta de un marco analítico, que toma como base tres categorías de tareas relacionadas con el álgebra que consisten de: a) relaciones aritméticamente situadas , b) relaciones basadas en las propiedades matemáticas , y; c) relaciones conocidas-desconocidas. Los resultados evidencian que una mayoría de las tareas pertenecen al eje temático sentido aritmético y que se ubican en la primer categoría. Pocas tareas se ubican en la segunda categoría. En general se reconoce que las tareas relacionadas con el álgebra temprana poco aparecen en los primeros grados de la educación primaria.

Palabras claves: Libros de texto, álgebra temprana.

Introducción y problema de investigación

Los libros de texto desempeñan un papel importante respecto de lo que ocurre en las aulas (Demosthenous y Stylianides, 2014), pues contribuyen en orientar la actividad matemática y a que los estudiantes construyan conocimiento, por lo que objetivos y enfoque de enseñanza del plan de estudios se ponen manifiesto en ellos. En la mayoría de los salones de clase son las herramientas físicas más íntimamente relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje. Su papel exacto de mediación puede variar de acuerdo a las características específicas de las diferentes naciones, los sistemas educativos y en las aulas (Valverde et al., 2002). Ortiz de Haro (2002) los concibe como un medio típico de "conservar" el conocimiento matemático. Así también, como un segundo nivel de transposición didáctica, después del primer nivel que lo constituirán los currículos y programas oficiales, postura que se comparte. Bullejos (1983) y Villarrasa (1992) por su parte, sostienen que el libro de texto es, aunque no el único, el recurso más utilizado en la enseñanza, que tiene una gran influencia a la hora de decidir qué y cómo enseñar y que con el tiempo éste pasa a ser el principal controlador del currículo. En sistemas educativos centralizados, los objetivos de la educación se establecen a nivel nacional y se desarrollan a través del currículum y los libros de texto. El sistema educativo básico de nuestro país es centralizado, de manera tal que los objetivos de la educación se establecen a nivel nacional por la Secretaría de Educación Pública (SEP), quien tiene a su cargo el desarrollo de los planes y programas de estudio y los libros de texto gratuitos, entre ellos los de matemáticas. En el caso de la escuela primaria, los libros de texto de matemáticas en México se distribuyen en todo el país cada ciclo escolar en las escuelas tanto públicas como privadas. De manera que todos los alumnos tienen los mismos libros de texto de matemáticas, con la salvedad que las escuelas privadas tienen la libertad de completar con otros textos. De ahí que los responsables de las políticas educativas los utilizan como un medio esencial para decidir lo que deben aprender los estudiantes tal como se reconoce en Battista y Clements (2000).

Los libros de texto en general y los de matemáticas en particular, a través de los siglos y en el mundo han diferido en muchos sentidos. Kilpatrick (2014) reconoce que en el caso de matemáticas, se ha dado más en el enfoque y la forma, que sobre su función o su contenido. Por cuanto a su función (principal), identifica que sirven como depositarios del conocimiento oficialmente aceptado, aunque a veces se han alistado como recursos para la solución de problemas creativos o como material para el autoaprendizaje.

La investigación sobre los libros de texto ha examinado muchas de sus características, mirando cómo han cambiado con el tiempo y, con menos frecuencia, en qué se diferencian en las comunidades (Kilpatrick, 2014), esto se asocia con las reformas educativas fundamentalmente en una mayoría de países. Hay quien se ha enfocado a identificar errores matemáticos en libros de texto de primaria, a describirlos, clasificarlos y descubrir las relaciones que pudieran existir entre las distintas clasificaciones que se establezcan, así como su incidencia en el rendimiento académico de los alumnos que los utilizan (egr. Fernández, 2013). Gravemeijer (2014) por su parte, mientras discute sobre la necesidad de transformar la enseñanza de las matemáticas en el siglo XXI, reconoce limitaciones de los actuales libros de texto como medio de hacer dicha transformación. Destaca las tareas que en ellos se plantean, pues considera que limitan a los maestros en la adaptación al tipo de razonamiento de los estudiantes. Desde su perspectiva, los libros de texto deberán informar a los maestros acerca de las teorías de instrucción local y explicar qué actividades mentales hipotéticas de trayectorias tienen que centrarse el en aprendizaje. Reconoce además, que los libros de texto tendrán que ser más explícito acerca de las teorías que se utilizan y tendrán que contener las actividades de instrucción ejemplares.

Sin duda los libros de texto desempeñan un papel fundamental en la enseñanza en general y de las matemáticas en particular. En el campo de la investigación también ha sido objeto de estudio, como se señaló previamente. En el contexto de los libros de texto de matemáticas, recientemente se inició una discusión en torno a ellos, a través del primer congreso internacional, denominado *International Conference on Mathematics Textbook Research and Development* por sus siglas *ICMT* realizado en el Reino Unido en julio de 2014. El objetivo general, es compartir resultados de investigación, experiencias de desarrollo y las ideas de reforma, y discutir temas y orientaciones relativas a la investigación y el desarrollo de libros de texto de matemáticas (Jones et al, 2014).

Es en torno a los libros de texto que se desarrolla la investigación que se reporta. En particular, interesa indagar en los libros de matemáticas de enseñanza básica (primaria) en México, las características de las tareas orientadas a promover el estudio del álgebra temprana, a fin de categorizarlas. La pregunta de investigación que guía el estudio es la siguiente ¿Qué características presentan las tareas relacionadas con el álgebra temprana en los libros de texto de primaria? Para llevar adelante este trabajo, se ha elegido un marco analítico.

Orientación Teórica

El estudio se sustenta de un marco analítico, el cual es una adaptación de los marcos propuestos por Thompson, Senk, y Johnson (2012) y Stylianides (2009). En este contexto, se considera en primer lugar, una unidad de análisis, que son las tareas de los libros de texto de matemáticas (Stylianides, 2009) de primero a sexto grado de primaria. En segundo lugar, se decide que las tareas relacionadas con el álgebra temprana no se limitarán a aquellas que implicaron el uso de letras, en razón de que se considera que el simbolismo de la letra no es una condición ni necesaria ni suficiente para el pensamiento algebraico (Radford, 2010, citado en Demosthenous y Stylianides, 2014). En tercer lugar, se consideran las tres categorías de tareas relacionadas con el álgebra adaptadas por Demosthenous y Stylianides (2014), que consisten de: a) relaciones aritméticamente situadas, b) relaciones basadas en las propiedades matemáticas, y; c) relaciones conocidas-desconocidas. A continuación se describe en qué consiste cada una de las categorías.

a) Las tareas de *relaciones aritméticamente situadas* (RAS) se centran en la estructura de la aritmética ocupándose del comportamiento de operaciones aritméticas y propiedades como objetos matemáticos y por qué funcionan así. Además, estas tareas podrían involucrar a los estudiantes en la generalización de estas relaciones. Esta categoría de tareas corresponde a lo que se conoce en la literatura como aritmética generalizada (Carpenter et al., 2003; Kaput, 2008). Un ejemplo es una tarea que pide a los estudiantes para formar una expresión general para la propiedad conmutativa de la suma.

b) Las tareas de *relaciones basadas en reglas* (RBR) se centran en las relaciones dentro de un conjunto de datos o entre conjuntos de datos. Estas tareas podrían involucrar a los estudiantes en la formación de una regla que se aplica a todos los elementos de los conjuntos de datos, poniendo a prueba las reglas plausibles, extendiendo una regla para casos cercanos y lejanos y generalizar una regla. Además, estas tareas podrían ofrecer oportunidades para trabajar con representaciones equivalentes de la misma norma (por ejemplo, verbal y expresiones algebraicas). Un ejemplo es una tarea que pide a los estudiantes a generalizar verbalmente el estado funcional de un creciente patrón geométrico.

c) Las tareas de *relaciones conocidos – desconocidos* (RC-D) se centran en las relaciones entre cantidades y números conocidos y desconocidos, y tratan a las incógnitas como objetos (entidades que se destacan por su cuenta) y no como procesos. La naturaleza de las relaciones varían a complejas relaciones directas (es decir, las relaciones de las que no hay puente directo entre conocidos y desconocidos). Un ejemplo es el problema de la historia siguiente: "Una granja tiene pollos y conejos. Contamos a las cabezas y encontramos con 27. Contamos los pies y encontramos 78. ¿Cuántos son los pollos y cuántos son los conejos?" Esta categoría de tareas se basa en la descripción de álgebra como un conjunto de lenguajes de modelado (Kaput, 2008) y la resolución de problemas enfoque en la introducción al álgebra (Bednarz et al., 1996). El potencial de formación de expresiones y ecuaciones durante el acoplamiento con las tres categorías de tareas relacionadas con el álgebra se alinea con el propósito de actividades generacionales como se define por Kieran (2004) (es decir, formando expresiones generales que surgen de los patrones y relaciones numéricas y ecuaciones que representan situaciones problemáticas).

Orientaciones metodológicas

El análisis consiste de una revisión de los textos de matemáticas aprobados por la SEP en el marco de la actual reforma educativa (SEP, 2011), así como del libro de texto para el profesor y el programa de enseñanza de matemáticas. El análisis considera las categorías propuestas Demosthenous y Stylianides (2014). Se usan dos tipos de códigos (CO) para caracterizar las tareas: CO1: Tareas explícitas y CO2: Tareas implícitas. En las del primer tipo, aparecen explícitas las relaciones algebraicas o bien, letras. Las implícitas, cuando no se reconocen palabras claves relevantes.

Algunos resultados

El marco se aplica a la serie de los libros de texto usados en el contexto educativo mexicano en los seis grados de la educación básica de las escuelas primarias públicas. En cada uno de los libros para el docente, los *desafíos* (a modo de lecciones) se presentan organizados en cuatro secciones fundamentales: intenciones didácticas, consigna (o tareas), consideraciones previas y observaciones posteriores. La sección marcada como consiga es la que se presenta tanto en el libro del docente como en el libro del alumno, ya que es donde se plantean las actividades o problemas a realizar. En cada uno de los programas de todos los grados, el eje sentido numérico y pensamiento algebraico alude a los fines más relevantes del estudio de la aritmética y el álgebra y la que se enfoca al trabajo de investigación hace referencia sobre la exploración de propiedades aritméticas que en la secundaria podrán ser generalizadas con el álgebra.

En la siguiente tabla se presenta la distribución por porcentaje de las tres categorías de tareas relacionadas con el álgebra a lo largo de cada grado.

Categorías de tareas asociadas con el álgebra	**Primer grado** (n= 77, 19.8%)	**Segundo grado** (n=76, 19.5%)	**Tercer grado** (n=64, 16.4%)	**Cuarto grado** (n= 81, 20.8%)	**Quinto grado** (n= 40, 10.3%)	**Sexto grado** (n=50, 12.8%)
Relaciones aritméticamente situados (n=290, 74.7%)	77.9%	81.6%	76.6%	75.3%	72.5%	58%
Relaciones basadas en reglas (n=67, 17.2%)	19.5%	17.1%	14%	17.3%	10%	24%
Relaciones conocido-desconocidos (n=31, 7.9%)	2.6%	1.3%	9.4%	7.4%	17.5%	18%
Total	100	100	100	100	100	100

Tabla 1. Porcentaje de tareas asociadas al álgebra temprana, por grado

En general, en la estructura de los libros de texto de matemáticas de primaria, las tareas se organizan a través de Bloques (B). El análisis de estos textos, evidencia cinco por grado, con diferente cantidad de tareas, según los objetivos de enseñanza. En este reporte se describe el análisis realizado a los libros de texto de matemáticas de segundo a tercer grado.

La tabla 1 muestra que las relaciones aritméticamente situadas son más frecuentes que las otras dos categorías, en estos dos grados revisados hasta el momento.

En el estudio es fundamental el análisis de las orientaciones que aparecen en el libro del profesor, en correspondencia con las tareas presentadas en el libro del alumno, con respecto al papel de las tareas relacionadas con el álgebra temprana, examinando si son del tipo CO1 o bien CO2,. Las tareas tipo CO1 se categorizan cuando se presenta al menos uno de los siguientes aspectos claves: símbolo, pensamiento, representaciones, ecuaciones algebraicas, generalización verbal, encontrar la regla, fórmula, números generales, investigando las relaciones entre números, cantidades, patrones, funciones, propiedades aritméticas y relaciones, resolución de problemas y resolviendo ecuaciones (Demosthenous y Stylianides, 2014). En ese contexto, se reconoció que en los dos libros de texto de matemáticas revisados hay un total de 140 tareas relacionadas con el álgebra temprana, de ellas, 29 son tipo CO1, mientras que las restantes 111, se corresponden con la categoría C02.

a) *Libro de matemáticas de segundo grado*

En el libro de texto de matemáticas de segundo grado (SEP, 2013a), así como al programa de enseñanza (SEP, 2013b), evidencia el estudio del algebra temprana en este grado, a nivel exploratorio. Hay 85 tareas. 17 aparecen en B1, 9 en B2, 17 en B3, 15 en B4 y 18 en B5. Las tareas ubicadas en las lecciones (o Desafíos) del B1 se inscriben en la categoría tipo RAS, a las que se articulan tareas que involucran distintos significados de la adición y la sustracción.

En el caso del B2 las tareas de las lecciones 16 al 19 se ubican dentro de la categoría RAS y las tareas de las lecciones 20 a la 23 se ubican en la categoría RBR, donde se establecen las regularidades sucesiones con progresiones aritméticas. Para el caso del B3 todas las tareas presentadas se ubican dentro de la categoría RAS, ya que se menciona el trabajo comparativo, resolución de problemas que implican a la adición y sustracción e introduciendo el algoritmo convencional. En el B4 en la mayoría de las tarea que se presentan se ubicaron en la categoría RAS las tareas se encuentran diseñadas de forma aritmética ya que se pretende identificar las reglas para la escritura de los números y las propiedades que implican en la adición y sustracción. Solo dos tareas se encuentran ubicadas en la categoría de RBR por tratarse de patrones en sucesiones construidas con figuras compuestas. Por ultimo en el B5, 12 tareas se encuentran dentro de la categoría de RAS y 6 tareas dentro de la categoría RBR. Por lo tanto la mayoría de las tareas se sitúan en la categoría donde está presente las propiedades básicas de la aritmética, con muy pocas tareas donde se introduce el álgebra temprana. Un ejemplo de una tarea de este tipo, se muestra en la figura 1, la cual aparece en B2 y se ubica de acuerdo a la categoría presentada en el marco como relaciones basadas en reglas RBR.

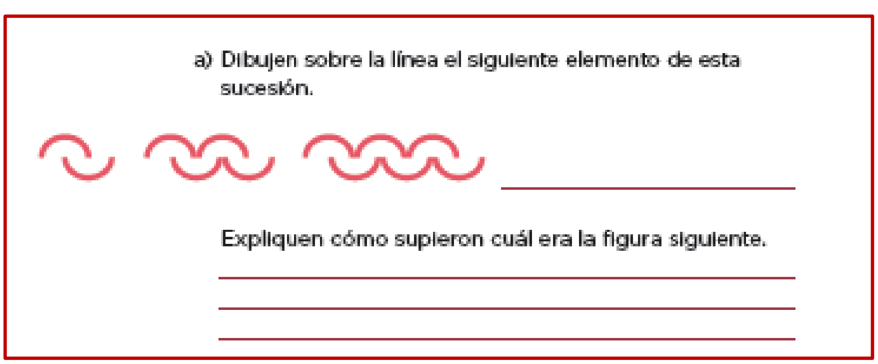
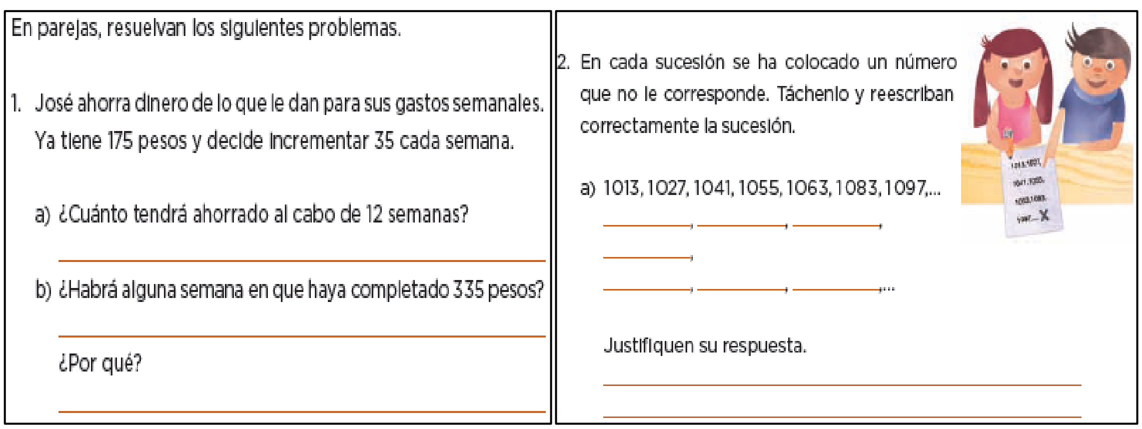


Figura 1. Tarea tipo RBR del libro de matemáticas de segundo grado

b) *Libro de matemáticas de tercer grado*

En tercer grado se presentan las siguientes tareas relacionadas con el álgebra temprana, presentadas en el eje sentido numérico y pensamiento algebraico. Las tareas establecidas en el libro *Desafíos* para el alumnos de este grado, hay un total de 96, de ellas, 22 se ubican en el B1, 15 en B2 se reconocen 23 en B3; 24 en B4 y 12 en B5. Cada tarea describe cómo se plantea desarrollarlas en condiciones de enseñanza: individual, en equipo, en parejas y grupal donde interviene el profesor. De acuerdo con cada contenido que se expresa en el programa de estudios 2011, de tercer grado se buscó la concordancia con las tareas establecidas en el libro del alumno y la categoría definida en el marco analítico, el cual se identifica que todas las tareas del B1 y B2, se consideran dentro de la categoría RAS ya que establece el comportamiento de las operaciones aritméticas y las propiedades, definiendo las operaciones de la adición y de la sustracción con procedimientos convencionales y para la introducción de la multiplicación y la división con procedimientos informales.

Para el caso de las tareas que se plantean en el B3, en el tema números y sistemas de numeración, se ubica en la categoría RBR que se especifica el trabajo con patrones, presentadas en las tareas de las lecciones 36, 37 y 38. El resto de las tareas quedan definidas dentro de la categoría RAS. Ejemplo de una tarea de este tipo, se muestra en la figura 2, la cual aparece en el B3 ubicándola en la categoría RBR, donde se pide descubrir y explicar la regularidad de una sucesión numérica.



En parejas, resuelvan los siguientes problemas.

1. José ahorra dinero de lo que le dan para sus gastos semanales. Ya tiene 175 pesos y decide incrementar 35 cada semana.

a) ¿Cuánto tendrá ahorrado al cabo de 12 semanas?

b) ¿Habrá alguna semana en que haya completado 335 pesos?

¿Por qué?

2. En cada sucesión se ha colocado un número que no le corresponde. Táchenlo y reescriban correctamente la sucesión.

a) 1013, 1027, 1041, 1055, 1063, 1083, 1097,...

Justifiquen su respuesta.

Figura 2. Tareas tipo RAS del libro de matemáticas de tercer grado

En el caso del B4, en el tema números y sistemas de numeración las tareas ubicadas en las lecciones 48 hasta el 51 se sitúan en la categoría RAS de acuerdo a la relación que se encuentra con el programa de estudio y las características especificadas en la categoría presentada en marco. En la lección 52 y 53, las tareas se ubicaron en la categoría de RBR ya que el contenido hace mención de “la identificación de la regularidad en sucesiones con figuras…”. En el tema problemas aditivos, que se aborda desde la lección 54 hasta la lección 56, las tareas se ubicaron en las tres categorías RAS, RBR y RC-D. Para el caso del tema problemas multiplicativos las tareas de las lecciones 57 hasta el 59 se sitúa en la categoría RAS.

Por último en el B5, el tema números y sistemas de numeración las tareas se ubicaron en la categoría RAS, iniciando en la lección 65 y 66. Para el caso del tema problemas aditivos las tareas presentadas en las lecciones 67 al 69 también se ubican en la categoría RAS. En el tema problemas multiplicativos las tareas de las lecciones 70 a la 72 se encuentran ubicadas en dos categorías, RAS y RC-D.

Reflexiones finales

El análisis a los dos libros de texto de matemáticas, da cuenta que una mayoría de las tareas planteadas se sitúan en el eje temático sentido aritmético, por lo tanto se encuentra situada en la categoría (RAS). Pocas tareas se ubican en la categoría RBR. En general se reconoce que las tareas relacionadas con el álgebra temprana poco aparecen en los primeros grados de la educación primaria mexicana.

Referencias bibliográficas

Battista, M. T., & Clements, D. H. (2000). Mathematics curriculum development as a scientific endeavor. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 737-760). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Bullejos, J. (1983): *Análisis de actividades en textos de física y química en 2º de BUP. Enseñanza de las Ciencias*. 1(3): 147-157.

Demosthenous, E. & Stylianides, A. (2014). *Algebra- Related tasks in pimary school textbooks.* Proceedings of the Joint Meeting 2 – 369 of PME 38 and PME-NA 36, Vol. 2, pp. 369-376. Vancouver, Canadá.

Fernández, P. (2013). *¿Yerra el niño o yerra el libro de Matemáticas?* Números, revista de didáctica de las matemáticas. http://www.sinewton.org/numeros ISSN: 1887-1984 Volumen 83, julio de 2013, páginas 131-148. Universidad de Alcalá de Henares. España.

Gravemeijer, K. (2014). Transforming mathematics education: The role of textbooks and teachers. In Y. Li, E. A., Silver, & S. Li (Eds.), *Transforming mathematics instruction: Multiple approaches and practices* (pp. 153-172). New York, NY: Springer.

Jones, K., Bokhove, C., Howson, G., & Fan, L. (Eds) (2014), *Proceedings of the International Conference on Mathematics Textbook Research and Development* (ICMT-2014). Southampton: University of Southampton.

Kilpatrick, J. (2014). *From Clay Tablet to Computer Tablet: The evolution of school mathematics texbooks*. In Jones, K., Bokhove, C., Howson, G. & Fan, L. (Eds) (2014) International Conference on Mathematics Textbook Research and Development 2014 (ICMT-2014) 29-31. University of Southampton, UK.

Ortiz de H, J. (2002). La probabilidad en los libros de texto. Departamento de Didáctica de la Matemática Universidad de Granada Editores: Carmen Batanero y Luis Serrano.

SEP (2013a). *Desafíos Matemáticos Alumno*. *Libros de texto de Primaria. Segundo grado.* México.

SEP (2013b). *Desafíos Docente*. *Libros de texto de Primaria para el Docente. Segundo grado*. México.

SEP (2011). *Programa de estudios 2011. Guía para el maestro, segundo grado*. México.

Valverde, Gilbert A., Leonard J. Bianchi, William H. Schmidt, Curtis C McKnight, & Richard G. Wolfe. (2002). *According To the Book: Using TIMSS To Investigate The Translation Of Policy Into Practice In The World Of Textbooks.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. Recuperado de: https://books.google.com.mx/books?hl=es&lr=&id=e48FwrR8IAQC&oi=fnd&pg=PR7&dq=Valverde+et+al.,+2002+textbook&ots=P44_a4cWCT&sig=wOcEAYTtt1HrkG7PqFoUHrJj3BE#v=onepage&q&f=false

Villarasa, A. (1992). Materials curriculars: la reforma del material. *Perspectiva escolar*, 161:2-6.

Autores

Virginia Salazar Luna; CIMATE, UAGro. México; vsalazar@uagro.mx
Guadalupe Cabañas Sánchez; CIMATE, UAGro. México; gcabañas.sanchez@gmail.com
Catalina Navarro Sandoval; CIMATE, UAGro. México; nasacamx@yahoo.com.mx

CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DE LOS FUTUROS LICENCIADOS EN EDUCACIÓN ESPECIAL: UN ACERCAMIENTO A LAS FRACCIONES

J. Marcos López-Mojica, Lilia P. Aké, Karina Cruz

Resumen

El presente documento forma parte de un proyecto de investigación de licenciatura, el cual se interesó por caracterizar el conocimiento matemático sobre fracciones que tienen los futuros licenciados en educación especial. Los elementos teóricos conciernen al pensamiento matemático, las fracciones, el conocimiento del docente y la profesionalización del docente de educación especial. Se desarrolló en tres fases, en la primera se analizó el plan de estudios de los futuros licenciados en educación especial, en la segunda se diseño y aplicó un cuestionario sobre fracciones: solución de operaciones, representación gráfica y orden de los números fraccionarios. En la tercera se aplicaron tres entrevistas. Los resultados informan una deficiencia en el conocimiento sobre fracciones. Algunos estudiantes aplican el algoritmo de la adición al producto de fracciones. En la suma y en la resta operan de manera directa el numerador y el denominador.

Palabras clave: conocimiento matemático, formación inicial, fracciones.

Introducción y planteamiento del problema

Al cambiar el llamado *paradigma* en Educación Especial del modelo médico al modelo educativo, promovido por la Conferencia Mundial de Salamanca (1994), los profesores de educación especial viven un proceso de *desprofesionalización* (Guajardo, 2010). Según el autor, toda su formación bajo el modelo médico es incompatible en el modelo educativo y a los asesores pedagógicos se les ha complicado actualizarlos.

En la actualidad se requiere que todo ciudadano tenga acceso a los conocimientos de la educación básica y, desde el enfoque de la integración, es imperante que los profesionistas (profesores y especialistas) de la educación especial dominen los conocimientos de la educación regular para que puedan enseñarlos a los niños con discapacidad o sin ella. En ese sentido, los profesionales de la educación especial deben estar preparados para poder orientar y apoyar al docente de primaria que está frente a grupo y que atiende a niños con discapacidad.

De lo anterior surge una interrogante ¿los futuros licenciados en Educación Especial están preparados para poder orientar, diseñar, implementar o evaluar los conocimientos matemáticos de niños con discapacidad? El presente informe de investigación forma parte de un proyecto más amplio, el cual se interesó por caracterizar el conocimiento matemático en fracciones que tienen los estudiantes de la licenciatura en Educación Especial de la Universidad de Colima. Particularmente se pretende responder a la pregunta ¿Cuál es el conocimiento sobre fracciones que tienen los futuros licenciados en educación especial?

El problema de investigación surge después de analizar el plan de estudios de la Licenciatura, particularmente el perfil de egreso que establece “El egresado diseña, implementa y evalúa propuestas de atención e intervención pedagógica dirigida a personas que presentan Necesidades Educativas Especiales asociadas o no a una discapacidad, trastorno o aptitud sobresaliente para lograr su integración escolar, social y laboral” (CICA, pág. 71). Por lo que, ¿el estudiante está capacitado para aplicar sus competencias en el área de las matemáticas para la educación primaria?

Antecedentes de la investigación

En López-Mojica y Ojeda (2013) se argumentó la importancia de tratar los temas de probabilidad y de estadística en la Educación Especial. En su investigación, los autores informaron sobre la comprensión de ideas fundamentales de probabilidad de docentes de ese nivel educativo, identificaron nociones de espacio muestra, medida de probabilidad y variable aleatoria. Además, las docentes participantes propusieron actividades de enseñanza para esos temas después de su tratamiento en el escenario de *estudio dirigido*, espacio donde confluyen docencia e investigación (Ojeda, 2006). Los autores concluyeron que no se pueden enseñar los temas de matemáticas si no se conocen, además justifican que no basta con un curso de matemáticas en la formación inicial de los docentes de Educación Especial para desarrollar el pensamiento matemático y, sobre todo, para la enseñanza de esos temas a los niños con discapacidad.

Por su parte, Aké y Vargas (en prensa) reflexionan sobre la preparación de los futuros profesores de matemáticas ante la inclusión educativa. En su documento ponderan la posibilidad de preparar a los profesores de matemáticas para atender a los niños con necesidades educativas especiales, enfatizan la carencia de investigaciones que permitan orientar a una mejor formación de los niños con discapacidad en matemáticas.

Motivó la realización de una investigación como tal las necesidades planteadas en el artículo de Guajardo (2010), en el que se deja evidencia de la desprofesionalización docente. Si bien la población con la que se trabajó en la presente no se forman como docentes, pero sí como especialistas que podrían asesorar a los primeros en sus aulas y en temas de la educación básica regular, agregamos a esto que deben tener conocimiento sobre las personas que presentan Necesidades Educativas Especiales asociadas o no a una discapacidad, trastorno o aptitud sobresaliente.

Los conocimientos básicos de matemáticas son elementales para una cultura general. Las matemáticas se usan en varios aspectos de la vida, cambio monetario, compra-venta, en el peso de productos como frutos, semillas, etc. Este tipo de aspectos deberían ser considerados en la enseñanza en todos los niveles educativos.

Elementos teóricos

Dada la naturaleza del problema de investigación y por los escasos trabajos de esa línea, que tratan la formación inicial del profesionista de la educación especial en matemáticas, se optó por considerar los siguientes elementos teóricos: pensamiento matemático, conocimiento de fracciones, formación del docente y la profesionalización del docente de educación especial.

Es pertinente aclarar que si bien los estudiantes participantes no serán futuros docentes de educación especial, pero sí profesionistas de esa área, es necesaria la información sobre la formación docente, pues ellos serán los que apoyen a los primeros en sus aulas, respecto al conocimiento de los niños con NEE con discapacidad o sin ella, o bien aquellos con aptitud sobresaliente.

Según Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez y Garza (2005) el pensamiento matemático no se limita a las acciones de los matemáticos, éste refiere también a procesos avanzados del pensamiento como abstracción, justificación, visualización, estimación. Según los autores, desde esta perspectiva están incluidas todas las formas posibles de construcción de ideas matemáticas. Por lo tanto, el pensamiento matemático se desarrolla en todos los seres humanos en el enfrentamiento cotidiano a sus múltiples tareas (Cantoral *et al*, 2005).

García Díaz (2012) presenta una síntesis sobre el concepto de fracciones, sus propiedades y tipos de operaciones para entender los diversos significados. La autora define a una fracción como un número de la forma a / b, donde a y b son números enteros y $b \neq 0$. En la que b se conoce como denominador y el elemento a como numerador (pág. 10). En la Tabla 1 se sintetizan los procedimientos para la solución de operaciones aritméticas con fracciones.

Operaciones	**Expresión matemática**	
	Igual denominador	**Distinto denominador**
Suma	$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$	$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{(a\times d)+(b\times c)}{b\times d}$
Diferencia	$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$	$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{(a\times d)-(b\times c)}{b\times d}$
Producto	$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$	
Cociente	$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a\times d}{b\times c}$	

Tabla 1. Operación de fracciones (Fuente García-Díaz, 2012; p. 11, 12).

Por otra parte fue de interés conocer sobre el Conocimiento profesional del profesor, que tiene sus inicios con la propuesta de Shulman (1986), la cual surge como respuesta a las preocupaciones por los resultados desfavorables de los estudiantes de secundaria en exámenes nacionales e internacionales, buscando esencialmente determinar el conocimiento base requerido para la enseñanza y con ello rediseñar los currículos para la formación del profesorado.

Guajardo (2010) cita que desde la Conferencia Mundial de Salamanca en 1994 (UNESCO, 1994), en el 2007 en México egresan los primeros licenciados en educación especial formados con los Planes de Estudio de la Licenciatura que adoptaron el modelo educativo y centraron la atención en la integración educativa (Guajardo, 2010, p. 119).

Para Guajardo (2010), la profesionalizacion del docente está constituida por la formación inicial y la práctica profesional. La primera se refiere a la preparación para el tratamiento educativo de los niños con discapacidad. La enseñanza del español y un curso de matemáticas, así como materias relativas al tratamiento de las discapacidades, son parte de los temas de la propuesta curricular de la licenciatura de la educación especial. La práctica profesional tiene que ver con la aplicación de lo que aprendieron en su formación inicial. Para iniciar esa práctica, los futuros docentes se incorporan en el último año a una institución encargada de ofrecer los servicios educativos a niños con discapacidad.

Método

La investigación de tipo cualitativa (Vasilachis, 1992) se desarrolló en tres fases. La primera de tipo documental, tiene que ver con el análisis del plan de estudios de la licenciatura en Educación Especial de la Universidad de Colima. En la segunda fase nos interesamos en identificar los conocimientos matemáticos respecto a fracciones, por medio de la aplicación de un cuestionario, que tienen los estudiantes de la licenciatura. En la tercera fase se aplicaron entrevistas individuales semiestructuradas a tres estudiantes de la licenciatura con mejor desempeño en el cuestionario. Como instrumentos de la investigación fueron un cuestionario y un guión para las entrevistas individuales semiestructuradas. Las técnicas de registro de información fueron la escritura en papel y la videograbación.

El cuestionario se aplicó a los dos grupos del quinto semestre de la licenciatura en Educación Especial, después de haber cursado la asignatura “Adquisición, alteraciones y estrategias de atención en las matemáticas”. De los resultados del cuestionario, se eligieron a tres estudiantes para aplicarles la entrevista.

El cuestionario

El cuestionario se diseñó incluyendo operaciones con Fracciones: suma, resta, multiplicación y división de fracciones con numerador y denominador diferente. Este contenido es la primera parte del cuestionario. El objetivo del primer inciso fue determinar el procedimiento que utilizan los estudiantes al resolver ejercicios de operaciones con fracciones.

Realiza las operaciones que se solicitan.

Realiza las siguientes operaciones con fracciones y simplifica el resultado.

1.- $\frac{6}{5} + \frac{4}{3} =$

2.- $\frac{9}{10} - \frac{15}{20} =$

3.- $\frac{3}{7} * \frac{6}{8} =$

4.- $\frac{4}{6} \div \frac{4}{3} =$

Figura 1. Operaciones con fracciones.

Otro de los incisos tenía como objetivo identificar si los estudiantes reconocían el orden de los números fraccionarios en una recta numérica. En la figura 2, se muestra el inciso en el que se le solicitó al estudiante marcar una fracción entre 1/5 y 2/5.

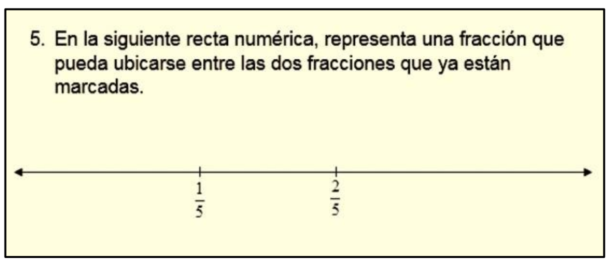


Figura 2. Presentación en recta numérica.

El tercer inciso se le planteó al estudiante con la intención de identificar si él podría señalar que el segmento dado estába dividido en tres partes iguales y cuál era su forma de presentarlo.

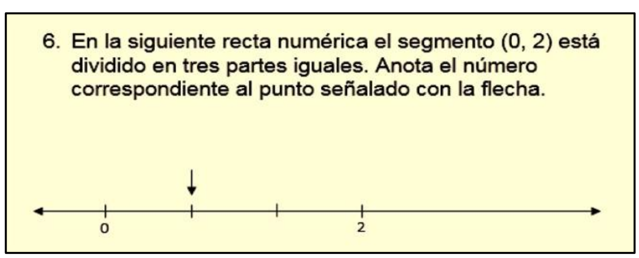


Figura 3. Segmentación de fracción

Una idea intuitiva de la fracción corresponde a la de dividir una totalidad en partes iguales, como cuando hablamos, por ejemplo, de un cuarto de hora, de la mitad de un pastel o de las dos terceras partes de un depósito de gasolina. En ese sentido, se planteó en el último inciso del cuestionario representar de manera gráfica ¼ de ½.

La entrevista

El objetivo de la entrevista individual semiestructurada fue profundizar en los desempeños de los estudiantes en los cuestionarios. Se estableció un guión de entrevista que dependió de las respuestas de tres estudiantes con mejor desempeño. Las preguntas referían a las formas de resolver las operaciones de fracciones, profundizar sobre la comprensión del orden de los números fraccionarios y la representación gráficas de éstos. Se utilizaron fichas de trabajo para que en ellas las estudiantes anotaran sus contestaciones.

Resultados del análisis del plan de estudios

Para efectos del presente informe, sólo se muestran los resultados de las dos primeras fases de la investigación. Para la primera se identificó que la formación que se ofrece a los futuros licenciados respecto a matemáticas es muy general. Durante los ocho semestres su acercamiento a la disciplina es en la asignatura “Adquisición, alteración y estrategias de atención de las matemáticas”, si bien no tiene la finalidad de enseñarles los conceptos matemáticos como tal, se debería considerar un apartado para recordar los temas que se han visto en niveles educativos anteriores y éstos relacionarlos con los problemas de aprendizaje de las matemáticas y las características de cada una de las discapacidades.

El objetivo de la asignatura es “que los alumnos construyan conocimientos sobre la matemáticas y la forma en que se puede aplicar la misma a personas con discapacidad y/o trastorno así como aquellas con aptitudes sobresalientes para que desarrollen actitudes de integración, compromiso y responsabilidad social” (DGEP, 2011; p. 274). Se plantea el contenido de la materia en tres unidades, predomina el tratamiento al número. En la Tabla 2 se puede notar el contenido específico para la asignatura.

Se percibe una contradicción, por una parte se pretende la inclusión de las personas con discapacidad en la sociedad, pero por otro lado no se les ofrece a los futuros profesionistas de Educación Especial una formación un poco más especializada en matemáticas, las cuales permitan realmente que el estudiante pueda resolver problemas de su vida cotidiana (López-Mojica y Ojeda, 2013).

UNIDAD I	UNIDAD II	UNIDAD III
- Operaciones infralógicas - Clasificación - Seriación - Conservación - Número - Diseño de evaluaciones de número - Diseño de perfiles grupales - Diseño de actividades para trabajar el número	- El sistema decimal de numeración. - Bases para trabajar diferentes sistemas de numeración. - Diseño de instrumentos para trabajar el sistema decimal de numeración. - Diseño de perfiles grupales - Diseño de actividades para trabajar el S. D. N - Algoritmos (suma, resta, multiplicación y división) -Diseño de evaluaciones para los algoritmos.	- Problemas de estructura aditiva - Problemas de estructura multiplicativa - Diseño de evaluaciones para el trabajo de problemas de estructura aditiva y multiplicativa - Diseño de perfiles grupales - Diseño de actividades para trabajar problemas de estructura aditiva y multiplicativa

	- Diseño de perfiles grupales. - Diseño de actividades para trabajar los algoritmos.

Tabla 2. Contenido de la materia "Adquisición, alteraciones y estrategias de atención de las matemáticas" (CICA, 2011; pág. 274, 275).

Resultados del conocimiento matemático

Desde la perspectiva de Cantoral *et al* (2005), el conocimiento matemático se refleja cuando los individuos realizan acciones que requieren procesos avanzados del pensamiento como abstracción, justificación, visualización, estimación. En ese sentido el cuestionario tenía la intención de identificar esos procesos. A continuación se presentan algunos resultados.

El cuestionario se aplicó a 47 estudiantes de quinto semestre. De los resultados se identificó que la mayoria no aplicó el algoritmo de la adición de fracciones, por ejemplo 29 alumnos sumaron de manera directa el numerador y el denominador.

Un caso utilizó el mínimo común múltiplo para determinar el denomidor de la nueva fracción, pero para encontrar el numerador sumó de manera directa como se señala en la siguiente figura 4.

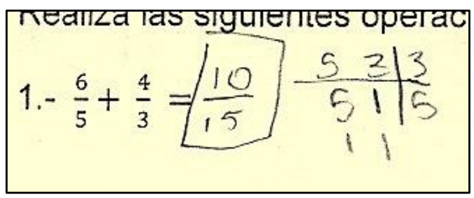


Figura 4. Uso del mínimo común múltiplo.

Otro de los estudiantes emplea la siguiente estrategia: suma de manera directa tanto el numerador como el denominador sin reflexionar o recordar el procedimiento adecuado.

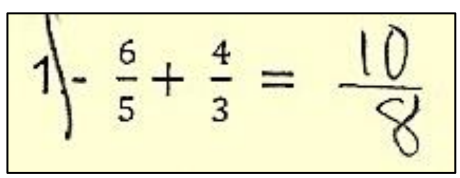


Figura 5. Suma directa de numeradores y denominadores.

Para la resta de fracciones, una estudiante resta los numeradores y los denominadores de las fracciones de manera correspondiente. Es decir, a 15 – 9 = 6 y a 20 – 10 = 10, por lo que obtiene la fracción $\frac{6}{10}$ y a ella la simplifica, pero además no considera el signo de la fracción. Lo anterior también indica una deficiencia en el tratamiento de números con signo negativo.

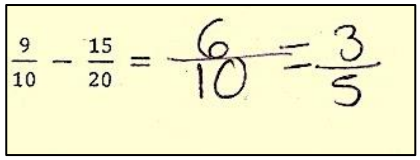


Figura 6. Forma de resolver la resta de fracciones por parte de una estudiante.

Para la multiplicación 19 estudiantes aplicaron el algoritmo sin problema, multiplicaron ambos numeradores y ambos denominadores y simplificaron la fracción. Por otro lado, 17 estudiantes multiplicaron cruzado y seis estudiantes prefirieron no responder. Uno de los estudiantes aplicó el algoritmo de la suma para poder realizar la operación señalada. En la siguiente figura se puede notar lo anterior.

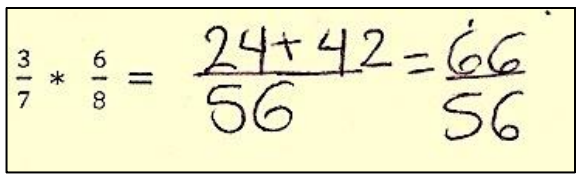
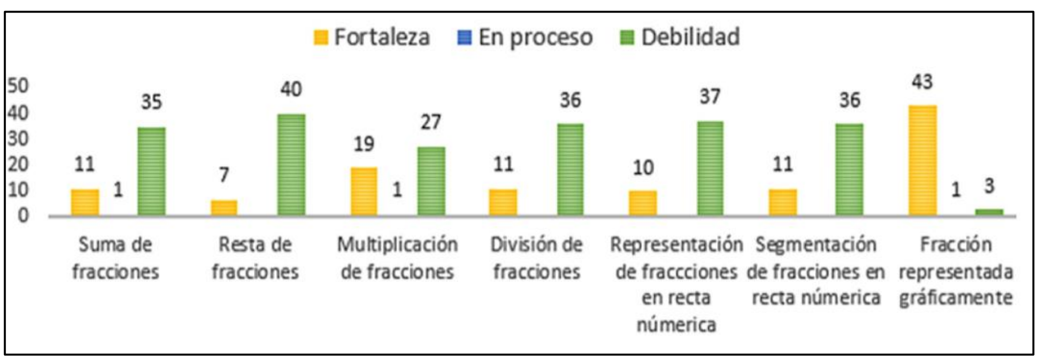


Figura 7. Utiliza el algoritmo de la suma para la multiplicación.

Los desempeños de los estudiantes, según sus respuestas en los cuestionarios, se caracterizaron en tres aspectos, según las *fortalezas* que pudieran señalarse en las respuestas, *en proceso* cuando no se aplicaba el algoritmo de manera correcta y *debilidad* cuando se confundian con la aplicación de los procedimientos. Según los resultados de la gráfica 1, los estudiantes presentan debilidades en los temas que se trataron en el cuestionario.



Gráfica 1. Frecuencia de respuestas a la adición de fracciones.

Conclusiones y reflexiones

Se pudo identificar con frecuencia el mal uso de la representación, pero por cuestiones de espacio sólo se colocó la gráfica 1 en la que se resumen los desempeños, de la recta numérica en la gráfica de fracciones y mal uso de algoritmos para la suma, resta, multiplicación y división. Lo anterior es preocupante pues ellos serán quienes orienten a los docentes de educación especial y primaria regular que tengan niños con discapacidad en sus aulas. Por lo que, si no dominan los temas básicos de la educación regular en matemáticas, no tendrán elementos para una adecuada orientación, evaluación o implementación de estrategias pedagógicas requeridas según la discapacidad de que se trate.

Respecto a la formación de futuros profesionistas que se analizó, nos dimos cuenta que no basta con solo saber matemáticas para poder enseñarlas, pues éstas requieren de un tratamiento particular, tampoco es suficiente tener una formación disciplinar respecto a las afecciones presentes en la educación especial. Se requiere de un equilibrio para poder promover una educación integral para las futuras generaciones.

De la propuesta institucional solo se tratan las operaciones básicas de la aritmética, descuidando por ejemplo los temas de geometría o probabilidad y estadística. Se identificó una carencia en temas matemáticos para ejercer y a atender a la diversidad, teniendo en cuenta el principio de igualdad y equidad para lograr el óptimo desarrollo de niños, niñas y jóvenes que se encuentran escolarizados en el sistema educativo y propiciar su pleno aprendizaje matemático siendo uno de los principales desafíos del profesionista en educación especial.

Referencias bibliográficas

Aké, L. y Vargas, M. (en prensa). Formación de profesores de matemáticas: Reflexiones ante la inclusión educativa. En Martín V. Briseda R (Eds). *Por una, Educación Inclusiva, una perspectiva de oportunidades*. México: Universidad de Colima.

Cantoral, R., Farfán, R., Cordero, F., Alanís, J., Rodríguez, R. y Garza, A. (2005). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.

CICA (2011). *Curriculum Integrado Centrado en el Aprendizaje*. México: Universidad de Colima.

Declaración de Salamanca (1994). Marco de Acción sobre Necesidades Educativas Especiales. España: UNESCO.

García-Díaz, I. (2012). Un estudio sobre el concepto de fracción en situaciones de medición, división y la relación parte-todo con estudiantes de nivel medio superior. Tesis de Licenciatura no publicada. Unidad Académica de Matemáticas. Universidad Autónoma de Guerrero.

Guajardo, E. (2010). La desprofesionalización docente en educación especial. *Revista Latinoamericana de Educación Inclusiva, 4*(1), 105-126.

López-Mojica J.M.L. y Ojeda A. M. (2013). La formación matemática del docente de Educación especial: una experiencia con estocasticos. En J. Carrillo, V. Ontiveros y P. Ceceñas (Coords). *Formación docente: Un análisis desde la práctica* (pp. 18-38). México: Red Durango de investigadores educativos.

Ojeda, A.M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: un ensayo en la enseñanza de estocásticos. En E. Filloy (Ed.), Matemática Educativa, treinta años (257-281). México: Santillana.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Vasilachis, I. (1992). El análisis lingüístico en la recolección e interpretación de materiales cualitativos. En Floreal H. Forni, María A. Gallart & Irene Vasilachis de Gialdino (Eds.), *Métodos Cualitativos II. La práctica de la investigación* (pp.153-210). Buenos Aires: Centro Editor de América Latina.

Autores

J. Marcos López-Mojica; UCOL. México; josemarcos_lopez@ucol.mx
Lilia P. Aké; UCOL. México; liliapatricia_ake@ucol.mx
Karina Cruz; UCOL. México; kari_cruzz@hotmail.com

LA MODELIZACIÓN EN EL AULA DE EDUCACIÓN BÁSICA, UNA PROPUESTA DE EXPERIMENTACIÓN

Miguel Fabián Flores Bobadilla, Patricia Lamadrid González

Resumen

En el presente documento exponemos los resultados obtenidos durante una propuesta de experimentación con estudiantes de quinto grado de educación primaria la cual se llevó a cabo en el espacio natural donde desarrollan sus actividades de manera cotidiana. Nuestro objetivo fue identificar los sub-procesos de la modelización matemática explícitos de forma empírica por alumnos de quinto grado de educación primaria en la resolución de problemas. La propuesta estuvo centrada en la modelización matemática, se plantearon cuatro problemas, cada uno se resolvió en cinco sesiones de treinta minutos. El análisis de los resultados se realizó con base en los sub-procesos de la modelización matemática (Blomhoj, 2004). Se expresan los aspectos que favorecen y dificultan la puesta en práctica de actividades de modelización matemática.

Palabras clave: modelización, modelación, resolución de problemas, estudiantes quinto grado de educación primaria.

Introducción

Esta investigación se desarrolló a través de una propuesta de experimentación con la puesta en práctica de diversas tareas que deberían resolver estudiantes de educación básica, específicamente alumnos de quinto grado. Los problemas a resolver se articularon con base la modelización matemática (Blomhoj, 2004).

La modelización matemática (Blomhoj, 2004) es un proceso a través del cual los estudiantes resuelven problemas en contextos cercanos a su realidad, lo que les permite establecer relaciones entre la información que les proporciona el problema y entre objetos matemáticos lo que favorece el desarrollo de la resolución. En el proceso de la modelización matemática, se han identificado cinco sub-procesos que el sujeto puede experimentar y desarrollar no de forma lineal.

Bassanezi & Biembengut, (1997) consideran a la modelación matemática como proceso de enseñanza-aprendizaje centrada en la modelización propone llevar al aula de la escuela elemental no sólo problemas para establecer modelos que nos sirvan para analizar situaciones reales, si no que se pueda emplear para el estudio de las matemáticas.

En este reporte de investigación exponemos los resultados obtenidos durante el desarrollo del proceso de resolución de uno de los problemas e identificamos los sub-procesos de modelización por los que transitaron los estudiantes de forma explícita y espontánea.

Marco teórico

El proceso de modelización implica seis sub-procesos cíclicos por los que un estudiante puede transitar cuando resuelve problemas que a través de los cuales el alumno identifique y establezca relaciones entre los objetos matemáticos y su realidad (Blomhoj, 2004). Al señalar los sub-procesos como cíclicos Blomhoj (2004) establece la posibilidad y la necesidad de regresar a los diferentes niveles de tal forma que se puedan reestructurar los modelos creados con anterioridad. Los sub-procesos son los siguientes:

a) Formulación del Problema: Formulación de una tarea (más o menos explícita) que guíe la identificación de las características de la realidad percibida que será modelizada.

b) Sistematización: Selección de los objetos relevantes, relaciones, etc. del dominio de investigación resultante e idealización de las mismas para hacer posible una representación matemática.

c) Traducción de esos objetos y relaciones al lenguaje matemático. Uso de métodos matemáticos para arribar a resultados matemáticos y conclusiones.

d) Interpretación de los resultados y conclusiones considerando el dominio de investigación inicial.

e) Evaluación de la validez del modelo por comparación con datos (observados o predichos) y/o con el conocimiento teórico o por experiencia personal o compartida.

El reto para el docente es crear situaciones problemáticas, las cuáles estén enfocadas a situaciones de la vida diaria con las que se pueda identificar el niño y sobre todo tenga la iniciativa de implementar y poner en juego su conocimiento matemático en un proceso de modelización. Para esto el profesor debe tener en claro el modelo matemático que se va a trabajar, mismo que se puede entender, por un lado, como la relación entre ciertos objetos matemáticos y sus conexiones, y por el otro, una situación o fenómeno de naturaleza no matemática.

Se puede llamar modelación matemática al proceso de enseñanza-aprendizaje que utiliza el proceso de modelización en cursos regulares, es decir, se busca que el proceso de modelización, no se quede sólo en establecer modelos que nos sirvan para analizar situaciones reales, si no que se pueda emplear para el estudio de las matemáticas en el aula (Bassanezi & Biembengut, 1997).

Con este proceso se busca que el alumno sea partícipe de su aprendizaje de las matemáticas, al ser él mismo quien elige el tema o la situación que se va a estudiar, es labor del profesor lograr encaminar al alumnado a elegir los temas en los que el profesor ya haya tenido un proceso de modelización y haya construido sus propios modelos matemáticos, con la finalidad de tener la capacidad de poder guiar al alumnado durante el proceso de modelación.

Cuando hablamos de modelación o modelización, se piensa en procesos en los que se generan ciertos modelos para comprender algunas otras ciencias como las Ciencias Naturales o utilizada sólo por investigadores para desarrollar nuevos conocimientos y teorías, sin embargo, Sadovsky (2005) también nos dice que es necesario pensar en un proceso de producción en la clase que tenga en cuenta las condiciones de la institución escolar, que son esencialmente diferentes de las que rigen la producción de saberes de la ciencia.

En primer lugar, los alumnos deberán elaborar conocimientos que – seguramente con rasgos diferentes – ya existen en la cultura; lo cual obliga a pensar qué elementos tendría un alumno para reconstruir una idea que fue elaborada con otras herramientas y desde otro marco conceptual. En segundo lugar, la escuela impone un modo de trabajo según el cual los saberes sólo pueden durar cierto tiempo en la vida de clase, ya que luego hay que pasar a ocuparse de otros saberes, esto implica un condicionante fuerte a la hora de pensar en procesos de reconstrucción del conocimiento en la escuela pues los tiempos de aprendizaje no se rigen por la lógica de los "trimestres" o "bimestres".

La visión de modelización permite tener una visión integrada del trabajo matemático poniendo en cuestión las miradas que hacen énfasis sobre algún aspecto particular priorizándolo por encima de los otros (lo importante son las técnicas o lo importante son los problemas). La variedad y complejidad de problemáticas que pueden ser interpretadas desde la noción de modelación es enorme: la misma abarca asuntos en los que los modelos matemáticos requeridos están vinculados a dominios específicos de la matemática avanzada (álgebra superior, análisis matemática, probabilidades) como también cuestiones que pueden ser abordadas desde la escuela primaria. En este sentido nos ofrece la posibilidad de actuar sobre una porción de la realidad a través de un aparato teórico, es decir, modelos teóricos creados con la modelación, adaptados a la realidad del alumnado por medio de la modelización; esto conlleva la idea de producción de conocimiento lo cual permite situar el aspecto central al que se apunta a través de la enseñanza.

Cuando hablamos de resolución de problemas nos referimos a todo tipo de estrategias que el alumno utiliza para resolver alguna situación problemática. Cabe señalar que el profesor es el responsable de guiar a sus alumnos en el desarrollo de métodos o estrategias para poder afrontar y dar solución a dichos problemas, así mismo si no lo realiza adecuadamente puede terminar ocasionando que el alumno tenga la idea de sólo querer pasar la materia, porque está es parte de su mapa curricular y lo único que busca es llegar el día del examen final y tener los conocimientos necesarios para poder aprobarlo (solo memorización).

Es importante que profesor desarrolle en sus alumnos habilidades para resolver problemas, que promueva el interés hacia la resolución así como diversas posibilidades para imitar y practicar. Es necesario que continuamente le formule preguntas al estudiante que le ayuden en otro momento a plantearse dichas interrogantes durante el procesos de resolución a fin de que pueda identificar lo que él ya sabe y plantear un plan de acción.

Julie & Mudaly (2007, citados en Kaise & Schwarz, 2010) señalan dos formas de emplear la modelización en el aula, como un medio a través del cual se motiva a los estudiantes y se favorece el desarrollo de algún contenido matemático, o bien, como contenido para que los estudiantes tengan capacidad de resolver problemas relacionados con la realidad. Lo anterior nos permite hacer una reflexión en torno a la modelación (Bassanezi & Biembengut, 1997) y a la modelización matemática (Blomhoj, 2004) desde la perspectiva de Julie y Mudaly, ambos procesos implican la resolución de problemas en contextos reales y/o el desarrollo de la construcción o del empleo de algún contenido matemático en específico, por lo cual lo consideraremos como significados equivalentes.

Plan metodológico

En este apartado expresaremos la propuesta de experimentación, la cual estuvo desarrollada con fundamento en el marco teórico que hemos expuesto en párrafos anteriores. La investigación es de carácter cualitativo. Empleamos la modelización matemática como contenido. Nuestro objetivo fue identificar los sub-procesos de la modelización matemática explícitos de forma empírica por alumnos de quinto grado de educación primaria en la resolución de problemas.

Por las características de los problemas, se incentivó a los alumnos a que se enfocaran en ellos aún fuera de la clase, de tal forma que durante el tiempo que se trabajaran en el aula pudieran compartir lo que habían pensado. Se plantearon cuatro problemas distintos, cada uno se resolvió en cinco sesiones de treinta minutos. El análisis de los resultados se realizó con base en los sub-procesos señalados por Blomhoj (2004). El objetivo fue identificar los aspectos que favorecen y dificultan la puesta en práctica de actividades de modelización matemática con estudiantes del quinto grado de educación primaria.

Nuestros sujetos fueron estudiantes del quinto grado, cuyas edades oscilan entre los nueve y los trece años. El escenario como espacio para la reflexión, el análisis y la resolución de las tareas fue en el aula de quinto grado, que es el lugar donde de forma cotidiana los alumnos realizan sus actividades académicas y de convivencia con sus compañeros.

Instrumentos de investigación

Observación participante: la investigación empírica es de carácter cualitativo, desarrollamos observación participante en tanto que el investigador es quien desarrolla las sesiones de trabajo para la resolución de las tareas, así mismo, los estudiantes están en continua interacción con él durante los procesos de resolución (Taylor & Bogdan, 1990).

Recopilación de los procesos de resolución de los problemas por parte de los estudiantes: nos referimos a las hojas donde los estudiantes realizaron los registros de todos los procesos de resolución. Se les pidió que no borraran ningún procedimiento, por lo que se les proporcionó el material necesario para su realización.

Registros de audio: utilizamos una audio grabadora para registrar todo lo que pudiera surgir de manera espontánea por parte de los estudiantes y que fue expresado de forma oral, lo anterior a fin de que en otro momento distinto al desarrollo de la clase se pudiera recuperar y analizar lo sucedido en el aula. *Registro anecdótico*: se tomó nota también de las expresiones verbales referidas a los procesos de resolución que consideramos relevantes y reiteradas en los estudiantes para identificar formas de pensamiento similares.

Desarrollo de la experiencia

En este apartado exponemos los resultados obtenidos en la resolución del problema titulado *Ahorrando agua, una propuesta sustentable*. Cabe mencionar que el análisis de resultados se realizó a partir de identificar los sub-procesos de modelización que fueron explícitos por los estudiantes durante la realización de la tarea (Blomhoj, 2004).

AHORRANDO AGUA, UNA PROPUESTA SUSTENTABLE

Realiza una propuesta para resolver la problemática de falta de agua que se presenta en la escuela, ¿qué factores debemos tomar en cuenta para poder realizar esta propuesta y poder cubrir las necesidades de toda la comunidad escolar?

Se esperaba que el estudiante tomara en cuenta los siguientes factores: capacidad de la cisterna y los tinacos en la escuela. Número de alumnos, profesores y trabajadores en la *escuela. Gasto de agua promedio por persona (en la descarga del tanque del agua y lavarse las manos). Cuántas cubetas de agua se necesitarían para llenar nuevamente la cisterna, cuántas cubetas deberían acarrear cada alumno para cubrir el gasto diario de agua en la escuela.*

En este problema planteado se puede notar la naturaleza cíclica del proceso, ya que lo primero que planteamos era saber cuánta agua gasta cada uno de los alumnos, es decir, cada uno tenía que investigar y sacar la cuenta de los litros de agua que gastaba al día en la escuela. Para ello Carlos fue el primero en salir a investigar la cantidad de agua contenida en la caja del baño, la cual es de cuatro litros y en lavarse las manos gastaban un promedio de diez litros, para comprobarlo propusieron bajar con una cubeta o jarra con medidas, abrir la llave y ver cuánta agua salía en determinado tiempo, el resultado fue de un litro cada cinco segundos, como se muestra en la Figura 1. Como se puede observar, los sub-proceso formulación de la tarea y sistematización se hicieron evidentes cuando los estudiantes analizan el problema planteado y buscan la información necesaria para resolverlo.

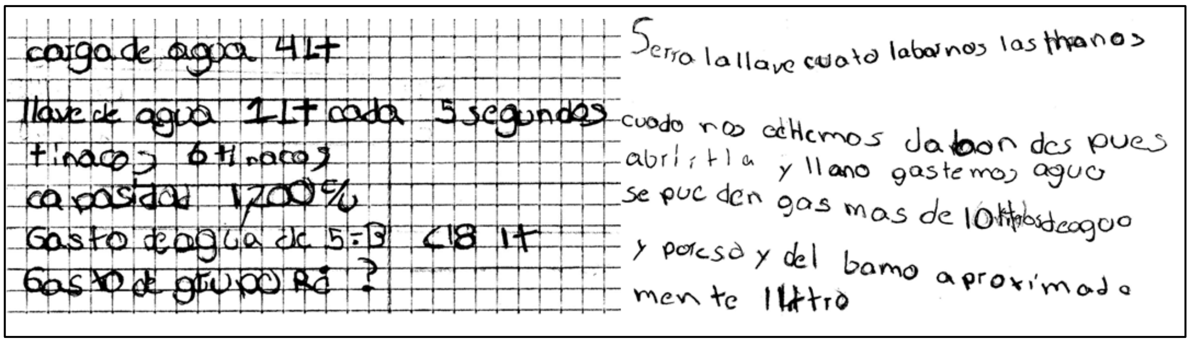


Figura 1. Gasto promedio de agua identificado por Carlos.

Los sub-procesos sistematización y traducción de esos objetos y relaciones al lenguaje matemático se hicieron evidentes en la búsqueda continua de información para resolver el problema y en establecimiento de relaciones de proporcionalidad entre los datos obtenidos. Consideramos que por la naturaleza de los objetos, cubetas y tinacos, los estudiantes se centraron en la capacidad y no en el volumen.

Entre todos entonces establecimos los gastos de agua en cuatro litros la carga de agua del retrete y al lavarse las manos un litro cada cinco segundos, partiendo de estos datos obtuvieron el gasto de agua al día, en su mayoría de cinco litros pensando en que se lavan en cinco segundos las manos. Eduardo comentó que él gasta once litros de agua al día a partir del número de veces que va al baño y se lava las manos. A partir del gasto por día obtiene el gasto por semana tomando en cuenta los cinco días que asiste a la escuela.

La información obtenida en relación al gasto de agua por día y por semana de cada alumno del grupo se registró en el pizarrón. Para conocer la cantidad de litros de agua que se utiliza en toda la escuela propusieron saber el total de niños de cada grupo y cuántas veces salen al baño. Realizaron una nueva investigación en la escuela pasando a los salones y preguntando cuántos alumnos tenían y en promedio cuántas veces salían al baño al día. En la Figura 2 se muestra el registro realizado por Erika, la cantidad de veces que salen los niños al baño y los litros de agua que se gastan.

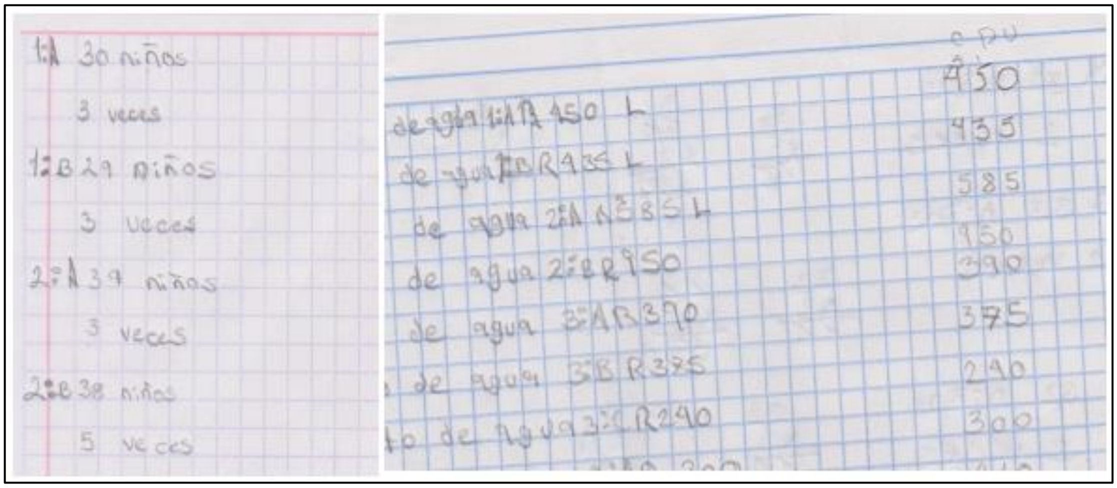


Figura 2. Registros de información realizados por Erika.

Nuevamente sistematizaron todos los datos obtenidos y establecieron relaciones de proporcionalidad entre la cantidad de veces que los niños salen al baño y el gasto de agua, lo anterior para cada grupo. Erika realizó sus multiplicaciones y obtiene el gasto de agua de cada grupo sin embargo como gasto total obtiene *1150* litros, el número de litros no le resultó satisfactorio por lo que decidió reacomodar los datos colocando en una columna las unidades, en otra las decenas y por ultimo las centenas, para realizar nuevamente la suma y obtener el valor real de *5445* litros que gastan los alumnos de la escuela al día.

Carlos realizó las multiplicaciones sin embargo no establece las relaciones correctas ya que sólo establece la relación de la cantidad de niños con las veces que salen al baño en los cinco días de la semana sin contemplar los litros de agua que se gastan cuando van al baño.

Guillermo realizó al igual que Erika las multiplicaciones pero ya no suma ni obtiene el total de litros que utilizan los alumnos de la escuela, solo obtiene el gasto por grupo, el sí identificó las salidas al baño y como obtener el total de litros. Brenda y Diana trabajaron juntas para realizar la investigación y llegar a los resultados, al igual después de obtener los datos de cada grupo, realizaron sus operaciones obteniendo el gasto de agua por grupo y al último sumaron todos los resultados para obtener el gasto total de agua de los alumnos de la escuela por día. Daniela realizó el mismo procedimiento

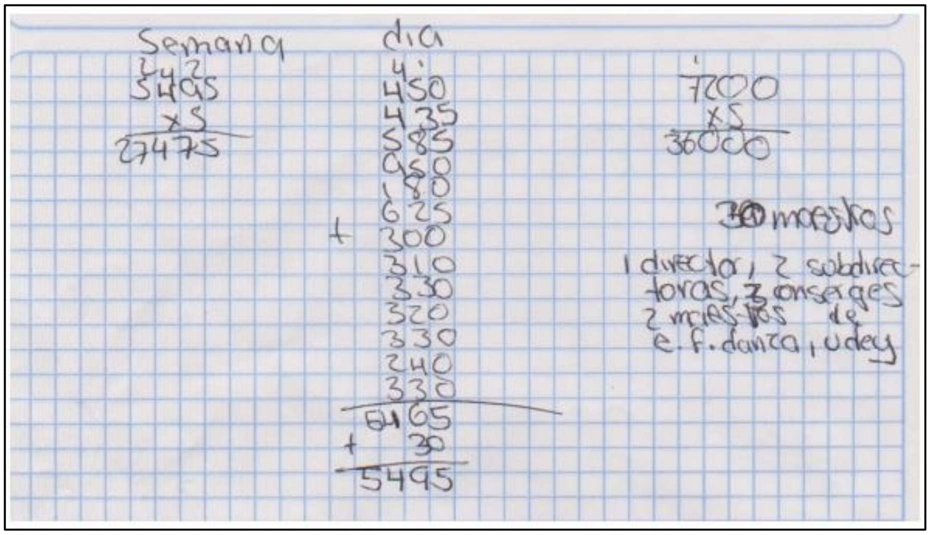


Figura 3. Gasto total de agua en la escuela. Procedimiento realizado por Yoselin

Yoselin realizó también los procedimientos anteriores sin embargo ella se plantean dos nuevas situaciones: ¿Los niños son los únicos que gastan agua en la escuela? Y ¿El agua que se tiene en la escuela es suficiente para cubrir todo el gasto de agua?, Yoselin contó a los maestros y personas de apoyo en la escuela en total son treinta personas más para contabilizar en el gasto de agua (Figura 3).

Consideramos que el sub-proceso interpretación de los resultados y conclusiones considerando el dominio de investigación inicial, se hizo explícito durante el proceso de resolución del problema sin embargo, el sub-proceso evaluación de la validez del modelo por comparación con datos (observados o predichos) y/o con el conocimiento teórico o por experiencia personal o compartida no se logró desarrollar.

Conclusiones

Los primeros dos días planeados para la actividad no obtuvimos buenos resultados en relación a la actitud mostrada por los estudiantes, pudimos identificar que el trabajo cotidiano en la resolución de problemas es poco y además están centrado en el uso y aplicación de algoritmos específicos esto dificultó la puesta en práctica de las actividades de modelización. Sin embargo coincidimos con Kaiser & Schwarz (2010) al identificar durante el desarrollo de la propuesta los estudiantes mostraron actitudes más positivas, al finalizar cada problema expresaron agrado por poder resolverlos y solicitaron continuar con actividades semejantes siempre y cuando tuvieran la ayuda del investigador.

Posteriormente se logró centrar su atención e identificamos que después de la formulación del problema los estudiantes se enfocaron en buscar y sistematizar la información, así mismo de establecer relaciones entre la información y el lenguaje matemático, usaron métodos matemáticos para obtener los resultados e interpretarlos, sin embargo no se llegó a la evaluación de la validez de los procesos. Como se puede observar la tarea propuesta favoreció el desarrollo de la capacidad de resolución de problemas y se identificaron los sub-procesos de la modelización en los estudiantes del grupo de quinto grado durante dicho proceso (Blomhoj, 2004). Identificamos el establecimiento de relaciones de proporcionalidad, el uso adecuado del sistema de numeración decimal en la realización de las operaciones y el reconocimiento de litros como unidad de medida de capacidad.

En todo momento, la intervención del investigador consistió en realizar preguntas y orientaciones que permitieran a los estudiantes buscar información y organizarla para poder resolver el problema. Promover que argumentaran entre ellos el por qué cierta información era necesaria. Coincidimos con Reid, Etcheverry, Roldán y Gareis, (2010) quienes señalan la importancia del trabajo con modelización matemática por parte de quien desarrollará la actividad con los estudiantes además de haber realizado los modelos posibles para cada uno de los problemas que se plantearan.

Referencias

Blomhoj, M. (2004). Mathematical Modelling – A theory for practice. En Clarke, B; Clarke, D. Emanuelsson, G.; Johnansson, B;Lambdin, D; Lester, F. Walby, A. & Walby, K. (Eds.) International Perspectives on Learninng and Teaching Mathematics. National Center for Mathematics Education. Suecia, p. 145-159.

Kaiser & Schwarz (2010). Authentic Modelling in Mathematics Education – Examples and Esperiencias. J. Math Didakt 31, P. p. 51 – 76.

Reid, M.; Etcheverry, N.; Roldán, M. & Gareis, M. (2010). Modelización Matemática en el Aula: Relato de una Experiencia. Reunión Panamericana de Educación Matemática REPEM. Argentina. p. 313-319.

Bassanezi, R. & Biembengut, M. (1997). Modelación matemática. Una antigua forma de investigación-un nuevo método de enseñanza. En Números. Revista de didáctica de las matemáticas. Vol. 32. P. p. 13 – 25.

Sadovsky, P. (2005). Enseñar matemáticas hoy. Zorzal, Buenos Aires Argentina, P. p. 22-31.

Taylor S. J. & Bogdan R. (1990). Introducción a los métodos cualitativos de investigación. La búsqueda de significados. Ed. Paidos, México. P. p. 49 – 99.

Autores

Miguel Fabián Flores Bobadilla; CINVESTAV, IPN. México; fabianturilli@gmail.com
Patricia Lamadrid González; CINVESTAV, IPN. México; lago.pattricia@gmail.com

CARACTERIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR EN FORMACIÓN INICIAL PARA ENSEÑAR LA RAZÓN COMO UN SIGNIFICADO DE LA FRACCIÓN

Ana María Reyes Camacho, Leticia Sosa Guerrero

Resumen

En este trabajo identificamos el conocimiento matemático de los profesores en formación inicial de primaria para la enseñanza de la razón como un significado de la fracción a través de un estudio cualitativo. Esta investigación se enfoca en el modelo Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (*MTSK, por sus siglas en inglés - Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*) con el objetivo de obtener información sobre el conocimiento en cuanto a los temas matemáticos (*KoT, por sus siglas en inglés - Knowledge of topics*), a partir de entrevistas semiestructuradas que permiten explorar los conocimientos del futuro profesor sobre el aprendizaje esperado que abordará (significado de razón), el eje de las matemáticas en el que se ubica, el enfoque y las competencias matemáticas que favorecen.

Palabras claves: Formación inicial de profesores, primaria, MTSK, razón.

Introducción

La formación inicial del profesor de primaria en el campo de las matemáticas demanda de éste una variedad de conocimientos que favorecen la gestión de contenidos como las fracciones. En este sentido, Ríos (2007) señala: "[…] Dominar más contenido del que se va a enseñar permite tener una visión amplia y profunda de cómo enseñar, hacer conexiones y transferencias entre los diversos saberes matemáticos" (p.121). Para algunos investigadores (Ávila, 2001; González, 2005; Llinares y Sánchez, 1997), las fracciones representan un tema complejo por los diferentes significados que poseen: relación parte-todo y medida, cociente, razón y operador; situación que propicia dificultades en su enseñanza y aprendizaje. La reforma en Educación Normal bajo el Plan de Estudios 2012, aspira a que los profesores en formación inicial adquieran el conocimiento disciplinar de matemáticas para contribuir al desarrollo de sus competencias docentes.

En esta investigación, se indaga sobre los conocimientos que tienen los profesores en formación en relación al significado razón y los significados de la fracción que asocian a su enseñanza en la escuela primaria, así como su ubicación en los ejes del estudio de las matemáticas, su relación con el enfoque y competencias de las matemáticas. Con frecuencia, el significado razón se designa como el último de los significados que se aborda en la escuela primaria (Gascón, 2013). En este sentido, la pregunta que guía la presente investigación es: ¿Cuáles son los conocimientos matemáticos que los profesores en formación inicial asocian al significado razón para su enseñanza?, cuyo propósito es caracterizar el conocimiento matemático de los profesores en formación inicial para enseñar el significado razón.

Marco teórico

La profesionalización del docente implica el reconocimiento de los conocimientos que están en juego durante el desarrollo de su tarea, conocimientos que por otra parte a lo largo del tiempo han sufrido una serie de cambios en función de las condiciones de la sociedad y se han convertido en objeto de estudio para contribuir a su buen desempeño como docente.

Desde hace décadas se han llevado a cabo una serie de investigaciones con el propósito de definir y organizar el conocimiento profesional de los profesores. Al respecto, Shulman (1986) realiza un trabajo sobre el conocimiento del contenido para la enseñanza, donde considera tres componentes esenciales de la materia que se va a enseñar: el conocimiento del contenido, el conocimiento didáctico del contenido y el conocimiento curricular.

En el caso de los estudios sobre los profesores que enseñan matemáticas surgieron algunas interrogantes: ¿Cuál es el conocimiento matemático que poseía el profesor? ¿Cuál es el conocimiento matemático que debe poseer para el ejercicio efectivo de su función docente? (Sosa, 2011). Ambos cuestionamientos encuentran respuesta en la práctica de los docentes en formación continua y de los profesores en formación inicial durante su estancia en la escuela primaria.

En Carrillo, Climent, Contreras & Muñoz-Catalán (2013) se presenta un modelo de conocimiento del profesor de matemáticas denominado el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK), el carácter de especializado se debe a que afecta a todos los dominios y subdominios que lo integran y no sólo a alguno de ellos, los cuales pretenden avanzar en el análisis y la conceptualización del conocimiento especializado que requiere el profesor de matemáticas para su enseñanza. En la Figura 1 se presentan los componentes del conocimiento especializado del profesor de matemáticas a través de la representación gráfica del modelo MTSK. Las siglas empleadas para los dominios y subdominios corresponden a su nombre en inglés.

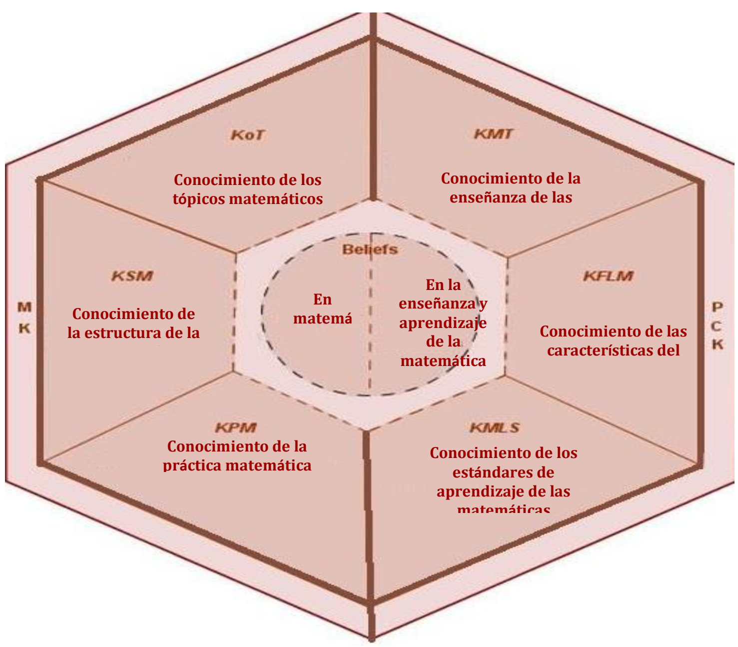


Figura 1. Diagrama del Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) (Carrillo, Contreras & Flores, 2013).

El dominio conocimiento didáctico del contenido (PCK) contemplan los subdominios: conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) y conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS).

En lo que respecta al dominio conocimiento matemático (MK), se consideran tres subdominios de conocimiento (Carrillo et al., 2013; Montes, Contreras & Carrillo, 2013; Carrillo, Escudero & Flores, 2014): conocimiento de la práctica matemática (KPM), que hace énfasis en las formas de hacer y proceder en matemáticas, como son las distintas formas de demostrar o definir; por otra parte, el conocimiento de la estructura matemática (KSM), responde a la necesidad de conocer el objeto de enseñanza de manera integral y relacionada, donde entran en acción los conocimientos de las relaciones existentes entre contenidos avanzados y elementales; finalmente, se ubica el conocimiento de los temas matemáticos (KoT), subdominio que se estudia en el presente trabajo, hace referencia al contenido disciplinar de las matemáticas que figura en manuales y textos escolares, así como su fundamentación teórica. Estos conocimientos responden a una mirada enfocada en lo que tiene sentido para el profesor, en tanto que se considera importante para él tener un conocimiento disciplinar profundo. Así, este subdominio ofrece cabida a conocimientos ligados al contenido, al conocimiento de la fenomenología de los conceptos, que aporta un bagaje de aspectos epistemológicos que le permite al profesor comprender diferentes significados atribuidos a un mismo contenido, además de poder hacer asociaciones con los conocimientos de propiedades y definiciones asociados a un determinado tema. Por lo cual, esta investigación pone énfasis en el estudio del KoT.

Método

La investigación educativa tiende a comprender situaciones particulares, pero no con el objetivo de generalizar, sino de propiciar la reflexión sobre la práctica y los conocimientos que el profesor emplea durante la anterior (Elliot, 1978, citado por Albert, 2007). Es en este espacio donde el enfoque interpretativo encuentra su lugar para indagar el significado de los fenómenos educativos, cuyo objetivo es la comprensión de los significados en relación con el contexto. Esta perspectiva rechaza la existencia de patrones que constituyen toda la realidad. De acuerdo con Pérez (1996):

> La estrategia interpretativa en educación supondrá sumergirse en el ambiente natural de la escuela y del aula e indagar, observando, interrogando y contrastando, los factores que intervienen y su influencia relativa en la determinación y desarrollo de los problemas que aparecen en dicha realidad (p.123).

En este sentido, por la naturaleza de este trabajo, se atiende a una investigación cualitativa, que propicia la orientación hacia la exploración, descripción y entendimiento de las prácticas plasmadas por los profesores en formación inicial en cuatro entrevistas semiestructuradas que surgen de cuatro planificaciones que realizaron para abordar la enseñanza del significado razón en una sesión de clase. De esta manera, nos acercamos a la comprensión del conocimiento por medio de las interpretaciones que como investigadores se realizan de los datos obtenidos, las cuales se nutren de referentes teóricos respecto al contenido matemático y de indicadores relacionados con el conocimiento del profesor de matemáticas (Rojas, 2014).

Los participantes fueron cuatro profesores en formación inicial (PFI1, PFI2, PFI3 y PFI4) que cursan el sexto semestre de la Licenciatura en Educación Primaria con el enfoque del Plan de Estudios 2012. Estos estudiantes llevaron todos los programas del área de matemáticas que se ubican en el trayecto formativo preparación para la enseñanza y el aprendizaje: Aritmética: su aprendizaje y enseñanza, Álgebra: su aprendizaje y enseñanza, Geometría: su aprendizaje y enseñanza y Procesamiento de la información estadística.

La fuente primaria para la recolección de datos son cuatro entrevistas semiestructuradas que surgen de cuatro planificaciones de los estudiantes para maestros donde se favorece la enseñanza de la razón como un significado de la fracción en un grupo de quinto grado de educación primaria. En este primer acercamiento al contenido de las entrevistas semiestructuradas aplicadas se pretende caracterizar el KoT que les permite abordar el significado razón.

Resultados

El conocimiento especializado del profesor de matemáticas se hace evidente en diferentes momentos durante el ejercicio de la docencia; una situación significativa es el trabajo que realiza en el aula con un grupo de alumnos, aunque, previo a esto existen otros documentos que dan cuenta de los conocimientos del profesor, tal es el caso de sus planes de clase.

En este reporte de investigación, se caracterizan los conocimientos de los temas matemáticos de los profesores en formación inicial a partir de la información que arrojan cuatro entrevistas semiestructuradas, teniendo como antecedente el diseño de planificaciones para abordar la noción de razón en cuatro grupos de quinto grado de educación primaria. Dichas entrevistas están estructuradas en función de los dominios y subdominios del MTSK. En este momento, se aborda el subdominio *Conocimiento de los temas matemáticos* (*KoT)* como parte del dominio Conocimiento matemático (MK). Las siguientes tres preguntas y respuestas que se analizan, comienzan a explorar el conocimiento que tienen los futuros profesores del contenido disciplinar de matemáticas, de manera general, contenido en los textos escolares de educación primaria.

La organización de las matemáticas, en el plan y los programas de estudio 2011 de Educación Primaria (1º a 6º) gira en torno a tres ejes: sentido numérico y pensamiento algebraico, forma, espacio y medida, y manejo de la información. Cuando se les pregunta a los estudiantes ¿Cuál es el eje de las matemáticas que se aborda en su plan de clase? Todos responden que se pretende estudiar el sentido numérico y pensamiento algebraico, pues es donde se plantea la resolución de problemas que implican suma y resta de fracciones. De acuerdo con Block (2008), la noción de razón se encuentra en la intersección de dos temas: los números racionales y la proporcionalidad, por lo que también se puede ubicar el estudio de la razón desde el eje manejo de la información, dentro de la proporcionalidad y funciones.

El estudio de las matemáticas en la educación primaria pretende favorecer que los niños desarrollen cuatro competencias: resolución de problemas de manera autónoma, comunicar información matemática, validar procedimientos y resultados y, manejar técnicas eficientemente. Ante esta gama de competencias, PFI1 menciona que durante su clase busca que los alumnos comuniquen información matemática y manejen técnicas eficientemente. Por su parte, PFI2 agrega la resolución de problemas de manera autónoma, además de las dos anteriores. PFI3 se enfoca a favorecer la resolución de problemas de manera autónoma. Finalmente, PFI4 pretende que avancen en la resolución de problemas de manera autónoma, comunicar información matemática y validar procedimientos y resultados. Como se puede apreciar, todos los estudiantes incorporan a su respuesta alguna o algunas de las cuatro competencias matemáticas.

Cuando se preguntó a los estudiantes, ¿Cómo se hace presente el enfoque de las matemáticas en su plan de clase? PFI4 señala "[…] Al plantear situaciones problemáticas"; PFI1 agrega que sí se hace presente porque se busca que el niño esté resolviendo problemas por sí sólo. Aquí se le otorga un papel activo al alumno, lo cual coincide con lo expresado por PFI2 "El enfoque de las matemáticas se hace presente porque es una actividad novedosa y les permite poner en práctica diferentes procedimientos para resolver actividades, además porque se invita a los alumnos a realizar un análisis de la reflexión de resultados, se propicia que formulen y den argumentos de lo que están haciendo". Por su parte, PFI3 afirma que se hace presente porque "A partir del problema el niño construye sus hipótesis para resolver el problema y al final se la da el nombre formal". En este caso, PFI3 retoma la participación de PFI4, PFI1 y PFI2, pero le agrega un papel activo al maestro, aunque de manera implícita cuando advierte que al final se da el nombre formal.

En relación al enfoque de las matemáticas, el programa de estudio 2011 señala que:

> El planteamiento central en cuanto a la metodología didáctica que se sugiere para el estudio de las Matemáticas, consiste en utilizar secuencias de situaciones problemáticas que despierten el interés de los alumnos y los inviten a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver los problemas y a formular argumentos que validen los resultados. Al mismo tiempo, las situaciones planteadas deberán implicar justamente los conocimientos y habilidades que se quieren desarrollar (SEP, 2011a, p. 67).

Como se puede apreciar, las ideas expresadas en esta cita textual establecen un rol específico para el maestro y el alumno, lo cual agrupa las respuestas que dan los estudiantes durante las entrevistas.

Las últimas tres preguntas que se presentan en este apartado de resultados exploran los conocimientos que tienen los futuros profesores sobre las fracciones y sus significados en relación a lo que plantean los programas de estudios de educación primaria (materiales escolares). ¿Cuál es el aprendizaje esperado de este plan de clase? Es otras de las preguntas que se plantean a los estudiantes. Para dar a conocer las respuestas de los profesores en formación se presenta la siguiente tabla:

PFI1	**PFI2**	**PFI3**	**PFI4**
"Que los alumnos conozcan la fracción en razón de la razón, es decir, cómo se ve la razón representada en	"Es que los niños expresen por medio de razón o cociente una comparación entre dos cantidades"	"Que los alumnos sepan resolver problemas con las fracciones pero como razón"	"Que los alumnos identifiquen el uso de la razón a partir de las fracciones"

fracciones"			

Tabla 1. Comparación de las respuestas de los profesores en formación inicial.

A partir de la información de este cuadro, se observa que PFI1 y PFI4 coinciden en que los alumnos identifiquen y conozcan la razón como un significado de la fracción. En cuanto a PFI3 coincide referente a que conozcan la razón como un significado de la fracción, pero agrega que resuelvan problemas que las impliquen. Mientras tanto, PFI2 avanza en la descripción de una razón geométrica "[…] Es de tipo multiplicativo, expresa cuántas veces una cantidad es la otra, es decir, su cociente" (Block, Mendoza & Ramírez, 2010, p.27).

Después de las interrogantes anteriores se planteó a los profesores en formación inicial las siguientes preguntas:

	a) ¿Cuáles significados y/o partes de la fracción se estudian en los grados anteriores (1º, 2º, 3º y 4º)?	**b) ¿Cuáles significados y/o partes de la fracción se estudian en sexto grado?**
PFI1	Primero se abordan como enteros, por ejemplo con representaciones gráficas (representa en un círculo un entero y luego un medio). De aquí se va a la representación numérica y se les explica que el de arriba es el numerador y el de abajo el denominador; las dos partes de la fracción. Concluye diciendo que el significado que se aborda es como parte de un todo.	En sexto grado se estudia la comparación entre cantidades, la suma de fracciones y al igual que la multiplicación de fracciones. Se define como un conocimiento más abstracto.
PFI2	La fracción como parte-todo y medida.	La fracción mixta y un repaso de la fracción como razón.
PFI3	La fracción como parte-todo (representación gráfica) y la fracción como equivalencia y la estructura, fracciones mixtas	Operaciones con fracciones (multiplicación, división, suma y resta)
PFI4	Parte-todo	Suma de fracciones y otras operaciones.

Tabla 2. Respuestas de los profesores en formación inicial

En relación a la pregunta a) PFI1, PFI2, PFI3 y PFI4 identifican parte-todo como uno de los significados que se abordan en los grados anteriores a quinto. En el caso de la PFI1 antes de hacer referencia al significado parte-todo expresa el tipo de contextos en donde se puede favorecer la enseñanza de las fracciones, en este caso continuo, además menciona algunas de sus representaciones (gráfica y numérica), identifica las partes de la fracción (numerador y denominador) y la función que desempeñan. En este sentido, PFI3, especifica la representación gráfica de una fracción desde el significado parte-todo. PFI2 es el único que identifica dos significados de la fracción (parte-todo y medida) que corresponden a los definidos por Llinares y Sánchez (1997).

Parte-todo y medida, cociente, razón y operador son los significados de las fracciones establecidos por Llinares y Sánchez (1997), por lo cual se toman como referente para ubicar las respuestas expresadas por PFI1, PFI2, PFI3 y PFI4 en las respuestas que dan a la pregunta b) ¿Cuáles significados y/o partes de la fracción se estudian en sexto grado? PFI2 menciona el significado de razón y el resto los define a partir de las operaciones con fracciones, dentro de las cuales se puede encontrar el significado de cociente y operador, pero de manera explícita no está.

Conclusiones

A partir de la información obtenida en las entrevistas semiestructuradas, se observa el KoT que los profesores en formación inicial de primaria poseen en relación al contenido disciplinar de matemáticas, presente en materiales escolares como el plan de estudios 2011 de Educación Básica y los programas de estudio de los diferentes grados de Educación Primaria (1º, 2º, 3º, 4º, 5º y 6º) tomando como objeto de enseñanza el significado de razón. Las diferentes respuestas que se presentan se convierten en indicios para explorar el conocimiento especializado que los futuros profesores tienen sobre algunas categorías del subdominio KoT (definiciones, procedimientos, registros de representación, propiedades y sus fundamentos y fenomenología).

Las primeras cuatro preguntas que se plantean en el apartado anterior, al igual que sus respuestas, muestran algunos indicios de conocimientos de la categoría *definiciones,* ya que intentan contextualizar el significado razón en la Educación Primaria, en función de lo que plantean los materiales escolares; se queda en indicios porque no se profundiza en la definición explícita de dicho significado. Una categoría más, de la cual se rescatan indicios es *registros de representación,* pues en las respuestas a las preguntas 5 y 6 se muestran algunos conocimientos de los profesores en formación inicial cuando señalan que existen diferentes formas de representación de las fracciones (gráfica y numérica) en relación al significado o significados que aborden.

En este reporte de investigación se manifiestan algunos indicios del KoT que los profesores en formación inicial poseen en una entrevista semiestruturada, previo a la aplicación de sus planificaciones para favorecer la enseñanza del significado razón en una sesión de clase en un grupo de quinto grado de primaria. Sin embargo, en investigaciones posteriores será objeto de estudio en sus clases y en otras entrevistas semiestructuradas que aporten no sólo indicios, sino evidencias del KoT de los futuros profesores.

Referencias

Albert Gómez, M. J. (2007). *La investigación educativa: claves teóricas.* España: McGraw-Hill.

Ávila, A. (2001). *La experiencia matemática en la educación primaria. Estudios sobre los procesos de trasmisión y apropiación del saber matemático escolar*. México: UNAM (Tesis doctoral).

Block, D. (2008). El papel de la noción de razón en la construcción de las fracciones en la escuela primaria. En R. Cantoral, O. Covián Chávez, R. M. Farfán Márquez, J. Lezama Andalón, & A. Romo Vázquez. *Investigaciones sobre enseñanza y* *aprendizaje de las matemáticas: un reporte iberoamericano* (pp. 455 - 470). México: CLAME - Díaz de Santos.

Block, D., Mendoza, T. & Ramírez, M. (2010). *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica*. México: SM.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C. & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Defining specialized knowledge for mathematics teaching. *Actas del CERME8*. Antalya, Turquía.

Carrillo, J., Contreras, L.C., & Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M.C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina, & I. Segovia (Eds.). *Investigación en Didáctica de la Matemática* (pp. 193- 200). Granada, España: Comares.

Carrillo, J., Escudero, D. & Flores, E. (2014). El uso del MTSK en la formación inicial de profesores de matemáticas de primaria. En *FOR-MATE Revista de análisis matemático-didáctico para profesores.* Vol. 1 (1), 16-26

Gascón, J. (2013). *Razón de ser de los números negativos y racionales.* Barcelona: Universidad de Barcelona.

González, I, (2005). *Los significados de la fracción en el discurso y en la práctica de los estudiantes de 4º grado de normal.* México: UPN (Tesis de maestría).

Llinares, S. & Sánchez, M. (1997). *Fracciones.* España: SÍNTESIS.

Montes M.A., Contreras, L.C., & Carrillo, J. (2013) Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, & N. Climent (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XVII*. (pp. 403-410), Bilbao, España.

Pérez, A. (1996). Comprender la enseñanza en la escuela. Modelos metodológicos de investigación educativa. En J. Gimeno Sacristán. A. I. Pérez Gómez**.** *Comprender y transformar la enseñanza*. España: Ediciones Morata.

Ríos, Y. (2007). Una ingeniería didáctica aplicada sobre fracciones. [en línea] *Revista Omnia* vol. 13, 120-157. Universidad del Zulia, Venezuela.

Rojas, N. (2014).*Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: un estudio de casos.* Granada: España. Tesis de doctorado publicada en http://fqm193.ugr.es/produccion-cientifica/**tesis**/ver_detalles/7483/descargar/

SEP (2011). *Plan de estudios 2011. Educación Básica*. México: Autor.

----- (2011a). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica Primaria. Quinto grado.* México: Autor.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Sosa, L. (2011). *Conocimiento Matemático para la enseñanza en bachillerato. Un estudio de dos casos*. Huelva: España. Tesis doctoral publicada en http://hdl.handle.net/10272/4509

Autores

Ana María Reyes Camacho; UAZ. México; anyreca0712@hotmail.com
Leticia Sosa Guerrero; UAZ. México; lsosa@mate.reduaz.mx

LOS TÍTERES Y LA ARGUMENTACIÓN MATEMÁTICA

Marcela Ferrari Escolá, Nancy Marquina Molina

Resumen

En este reporte nos interesa discutir el papel que el títere juga en la argumentación matemática. El uso escolar del títere se refleja en varios reportes de investigación y libros que priorizan el desarrollo de la comunicación al establecer una interacción especial con muñecos, al estimular la imaginación de los niños, fomentar el juego creativo e introducir narrativa de modo interactivo, en temáticas generales. Bajo la mirada socioepistemológica y una metodología cualitativa, nos interesa poner el acento en el desarrollo de la argumentación matemática mediante obras que desafíen los saberes matemáticos de los participantes. Pretendemos ejemplificar, por medio de breves episodios, el diálogo que entablan los matetíteres al presentarse ante un público diverso a veces, y otras determinado, así como compartir un primer análisis de los recursos que se perciben en la interacción.

Palabras clave: títeres, argumentar, contar, ubicar, clasificar.

El desafío de proporcionar una educación integral y equitativa, particularmente en el nivel básico conlleva, según el Plan de Estudios para Educación Básica (2011) de México, el desarrollo de competencias inherentes a los campos de formación de lenguaje y comunicación, pensamiento matemático, exploración y conocimiento del mundo natural y social, desarrollo personal y para la convivencia. Reflexionar sobre el entramado de tales campos y la interdisciplinaridad que invita a gestionar nos acerca a la incorporación del teatro de títeres como una alternativa para la construcción social de conocimiento y analizar las interacciones que podrían generarse alrededor de las matemáticas, enfocándonos particularmente en el ambiente discursivo que provoca.

En la escuela mexicana, títeres y matemáticas ocupan nichos distantes e incluso no dialógicos. Efectivamente, los títeres, estructurados desde el juego, la expresión artística y la creatividad generan un mundo donde lo titiritesco (Finkel, 1984) propicia el transferir a un objeto inanimado la voz de aquel que lo convoca (Tillería, 2003; Szulkin y Amado, 2006, Santa Cruz y García Labandal, 2008), tienen la habilidad de unir el mundo real y el posible mundo imaginario y es una herramienta versátil para la comunicación y el aprendizaje de niños en contexto preescolar (Rogozinski, 2005; Ahicrona, 2012). En tanto que para Brits, Potgieter y Potgieter (2014) los títeres pueden estimular la imaginación de los niños, fomentar el juego creativo e introducir narrativa de modo interactivo. Para nosotros, en tanto construimos saberes nos permiten escapar de nuestra propia realidad, de aquella que aprisiona; dando paso a la estesis como aquella manera de hablar de lo sensible, de la significancia, de los procesos que involucran a un ser en tanto sujeto abierto al mundo (Mandoki, 2008) entremezclada con la semiosis en tanto proceso de intercambio de significación y significancia.

Sarabia e Iriarte (2011) comentan que en los últimos años se han profundizado las reflexiones sobre la concepción del alumno como un aprendiz activo de los conocimientos;

la del profesor como orientador y guía del proceso; la concepción de la enseñanza como un proceso de descubrimiento, razonamiento y construcción conjunta; la del aprendizaje como un proceso de relación de conocimientos significativos y funcionales; la del afecto como un componente esencial del éxito del alumno y del contexto como el lugar donde se realizan las interacciones entre alumnos y profesor. Sin embargo, para Charlot y da Silva (2013) sigue percibiéndose un desfase entre los contenidos y actividades matemáticas que en la escuela se pretenden enseñar y el uso de las matemáticas que demanda los estudiantes en prácticas cotidianas; desfase que propicia la generación de fracasos y sufrimientos en los actores del sistema.

Desde nuestra perspectiva, la confluencia de elementos teatrales y escolares en la dupla títeres-matemática nos abre un espectro especial para analizar, aquel donde el ambiente discursivo entintado por la magia que provoca el teatro de títeres complejiza la objetivación de los saberes en íntima subjetivación en lo afectivo, estimulando una argumentación participativa. Nos interesa en particular, reportar un primer análisis de las argumentaciones que se perciben en algunas de las experiencias realizadas con niños y jóvenes entremezclando el ambiente teatral y matemático. Compartimos con Arrieta y Díaz (2015) la necesidad de "…tender puentes entre la escuela y su entorno"(p. 22).

Marco teórico

Los matetíteres, emergentes de la necesidad de acercar las matemáticas a la comunidad acapulqueña, transitan entre dos posturas, aquella de incursionar en el aula de matemáticas para que los estudiantes vivan el proceso de crear una obra de títeres; y aquella de generar un ámbito discursivo que recree un salón de clases de matemáticas pero sin paredes, sin campana, sin obligatoriedad de estar, sin un aprendizaje explícito pero con la intencionalidad de construir saberes en un mundo imaginario provocado por los títeres con intencionalidades didácticas.

La socioepistemología, como marco teórico que enmarca nuestra investigación, sostiene que el saber no se limita a definir la relación que éste guarda con los objetos matemáticos sino a posicionar al ser humano en el acto mismo de significar, conocer, construir significados y en consecuencia estructurar sus sistemas conceptuales en tanto se lo problematiza. Ese saber emerge de prácticas sociales que no se limitan a caracterizar lo que el ser humano hace, sino a problematizar las causas del porque lo hace, describir las circunstancias de cómo y cuándo lo hace, en dónde y porqué lo hace y como se concibe haciéndolo. Se considera entonces que las funciones de la práctica social son: la *normativa*, al normar la actividad humana en su conjunto; la *pragmática*, al orientar las acciones en la actividad humana; la *identitaria*, al generar escenarios de representaciones sociales donde se auto confirma el rol del sujeto en el mundo, la pertenencia del individuo a su comunidad y del individuo hacia su yo interno; y la *discursiva*, práctica más recurrente e influyente en los actos de entendimiento y consenso, constituyendo un discurso reflexivo (Cantoral, 2013).

Es el hombre quien construye explicaciones sobre la realidad que emerge de la cotidianidad, de la historicidad, del contexto, de ese entrelace de convivir, propiciando el desarrollo de complejos procesos de construcción de significados compartidos. Para Cantoral (2013),

> la teoría socioepistemológica de la Matemática Educativa se ocupa entonces, específicamente, del problema que plantea la construcción social del conocimiento matemático y el de su difusión institucional. Dado que este conocimiento se ha constituido socialmente, en ámbitos no escolares, su difusión hacia y desde el sistema de enseñanza le obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente su estructura y su funcionamiento, de manera que afectan también a las relaciones que se establecen entre los estudiantes y profesores (p. 62).

Los títeres, al igual que las matemáticas han irrumpido en el sistema educativo, sufriendo modificaciones, adecuándose a las intencionalidades didácticas, a las prácticas docentes que los involucran. Están presentes y constituyen de cierta manera la cotidianidad del niño, son instituciones que han ido evolucionando al par de los tiempos, fuera del ámbito escolar, pero convocadas a participar en la construcción explícita de saberes, uno poniendo el acento en el desarrollo de la oralidad y creatividad del niño y la otra, para alfabetizarlos científicamente, es decir, dotarlos de un lenguaje complejo muchas veces alejado de la cotidianidad.

En nuestra investigación, nos interesa analizar el ambiente discursivo que genera el teatro de títeres, particularmente la argumentación que emerge en la interacción "títere-matemáticas-participante". En este sentido, la mayoría de los investigadores se apoyan en el trabajo de Toulmin, quien genera un modelo de argumentación refiriéndose a ella como *la actividad de plantear pretensiones, someterlas a debate, producir razones para respaldarlas, criticar esas razones y refutar esas críticas.* (Toulmin *et al*. 1984, p.14; citado en Marafioti, 2003).

La argumentación se percibe, desde las primitivas ideas aristotélicas, como un proceso desarrollado por una persona para convencer a una audiencia de la validez de sus ideas, donde persuadir y convencer son dos caras de una misma moneda (Billing, 1989). Sin embargo, Lavy (2006) establece que el concepto contemporáneo de argumentación, en el contexto educativo, es enriquecido al incluir, a aquellas ideas iniciales, el estudio de las interacciones que emergen en la explicación intencional del razonamiento que apoya una solución durante su desarrollo o después de establecerla.

La argumentación, genera un interesante soporte teórico para aquellos investigadores que desean analizar los sutiles aspectos de la realidad áulica, de reflejar la vida en clase. Krummheruer (2007) establece que, por lo general, se asume que la argumentación, que parece ser bastante explícita y sofisticada en los participantes, es una condición previa para la posibilidad de aprender y no sólo el resultado deseado del conocimiento matemático puesto en juego. En este sentido, considera que, el conocimiento matemático es argumentativo y surge en la participación de los estudiantes en *"una práctica de explicar* " (Garfinkel, 1967, p. 1 citado en Krummheruer, 2007). Práctica que es provechosa y de apoyo, así como la iniciativa para los procesos de aprendizaje matemático de los estudiantes.

En la socioepistemología partimos de la idea de que desde las construcciones sociales, generadas por ciertas prácticas así como desde los contextos argumentativos que surgen naturalmente en los grupos sociales, emerge la construcción del conocimiento matemático.

Buendía (2005) rescata que argumentar es presentar una postura con la conciencia de que existe otra opinión, implícita o explícita, diferente de la propia.

Un argumento es un invento, una construcción original, planteado para la situación expresa y que utiliza material conocido (Billing, 1989). Coincidimos con Krummheruer (2007) en que el foco principal debe estar sobre el análisis del proceso y no del producto, pues al analizarlo se descubre un cierto dominio de realidad, que está, de algún modo, entre el nivel sociológico de los aspectos institucionalizados escolarmente y el nivel psicológico del individuo de conocimiento.

Metodología de la investigación

Nuestra inquietud por uso del títere en matemáticas surge desde la necesidad de divulgar, de compartir saberes matemáticos. En las primeras exploraciones, de las cuales presentamos algunos resultados, no llevamos una metodología rigurosa, sino que priorizamos el convivir con aquellos que se acercaran al teatrino a interactuar con títeres, buscábamos divertir y divertirnos en tanto nos explorábamos como titiriteros matemáticos. La intención fundamental ha sido invitarles a ser parte de un cuento, a interactuar con los títeres, a cantar con María mientras riega sus florecitas en tanto las cuentan; a zapatear cuando el lobo se lleva las flores en tanto responden cuantas flores faltan o cuantas se llevó y contarle a María lo sucedido; a reir o enojarse al observar que las chismositas de la aldea de los rombos consideran al Señor cuadrado como un extraño que debía ser expulsado de la aldea en tanto clasifican figuras geométricas; a viajar en el barco del pirata Barbasucia buscando el tesoro en tanto ubican en el mapa las islas; por dar algunos ejemplos de nuestro quehacer.

En general, hemos seguido los lineamientos de la metodología cualitativa, generando espacios de divulgación y recopilando información mediante videograbaciones, notas de campo, grupos focales con los integrantes del grupo para analizar los logros o mejoras que se deberían implementar. En algunos puntos de estos diez años de acumular bellas experiencias en espacios abiertos, videograbando las intervenciones en diferentes ámbitos, rediseñando las obras en tanto evaluábamos la interacción provocada o su ausencia, hemos recurrido a la Ingeniería didáctica para organizar la toma de datos. Esto, cuando nos ha interesado preguntarnos sobre la apropiación de objetos matemáticos y no sólo de provocar y observar el ambiente discursivo que los títeres tensan. Su uso nos permite analizar sus alcances y sus limitaciones para este tipo de intervenciones y revisar otros métodos de recolección de datos en búsqueda de generar nuestros lineamientos metodológicos sobre lo que seguimos trabajando y explorando.

Resultados

En este reporte, nos interesa compartir diferentes episodios donde consideramos que se van dibujando las posibilidades de analizar la argumentación compartida, la articulación de elementos que conllevan la reflexión matemática, la reacción emocional, la gesticulación en tanto convivimos. Hemos escogido algunos momentos de distintas obras, con distintos públicos, con distintos ámbitos, con el fin de evidenciar diferentes maneras de reaccionar en la interacción.

María y el Lobo en Cinvesniños con pequeños de maternal

María y el Lobo es la primer obra de teatro que los matetíteres estrenan en 2004. Esta obra tiene la estructura clásica de una obra de títeres para pequeños de preescolar. Su trama se desarrolla con dos personajes: María, que desea tener un jardín con muchas flores, y el Lobo, que arranca y se lleva las flores para hacer su propio jardín. La interacción que propicia esta obra puede ejemplificarse con el diálogo que se centra en la pregunta: ¿cuántas florecitas tengo? que provoca el conteo repetido jugando con la dupla número-flor (Ferrari, 2014).

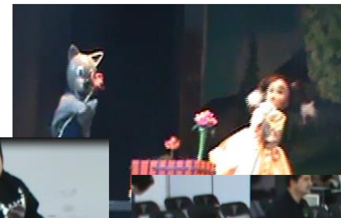


Foto 1

Foto 2

En los pequeños de kínder (salita de 3 años) escuchamos "*el lobo se la llevó*" (niño 1) …. "*el lobo no me hizo caso y se la llevó*"… (Foto 1)… pero ¿cuántas florecitas se llevó el lobo?... y en coro "*una*"… mientras algunos levantan su manito indicando el numeral con su dedo índice (ver Foto 2).

Se entremezclan, en esta edad, los gestos con los gritos, la desesperación por ser escuchados en tanto protegen las flores de María, el zapateo cuando aparece el lobo denotando el nerviosismo, en tanto van observando lo que pasa, van contado las flores, van realizando pequeños cálculos y van dialogando en cada escena, en un intento de argumentar y convencer al otro.

El pirata Barbasucia con niños de preescolar

El pirata Barbasucia fue estrenada en 2006, ha sido presentada en diferentes ámbitos y ha ido, como las demás obras, evolucionando. En su presentación en el auditorio de un preescolar, con niños de 3 a 5 años, la discusión (en una de sus escenas) se concentró en ¿dónde está la isla triángulo? Los argumentos que surgen ante la dificultad de tratarse de dos movimientos simultáneos (abajo y derecha, sudeste) nos da pauta de que no sólo debemos esperarlos en palabras, sino en gestos (Foto 3) y recursos directos como indicar al tocar la figura (Foto 4). La palabra triángulo se escucha entre los gritos de los niños y su insistente "*ahí… ahí*"… denota su reconocimiento de la figura geométrica en juego, pero su posición en el mapa se resiste para ser transmitida al pirata y pueda dirigir su barco a destino.

Foto 4: Niños de 3 años

Foto 3: Niños de 5 años

La Aldea de los Rombos con niños de nivel básico

La aldea de los rombos, además de ser presentada en diferentes eventos, fue utilizada para trabajar en talleres para niños como para profesores. En el taller que diseñamos sólo presentamos la primera parte de la obra, la llegada del Señor cuadrado a la aldea de los rombos y la interacción con diferentes habitantes de la aldea (niños, vecinas, policías) disparando la necesidad de decidir si se puede quedar en la aldea o debe irse (Foto 5). Cada personaje desarrolla brevemente un argumento diferente. En la interacción con los niños se asentúa el deseo de ayudar pero con reservas ante un extraño en tanto que las vecinas reaccionan con desconfiaza y miedo ante un intruso cuya forma es distinta a ellas y por tanto amerita llamar a la policía para que lo expulse. En general, la reacción de los habitantes de la aldea es encarcelar al Señor cuadrado y darle la posibilidad de aclarar su situación en un juicio. Se invita entonces a los participantes del taller a construir el final desde la pregunta: ¿qué pasará en el juicio?...

Con niños de quinto de primaria encontramos que los argumentos se basaron en defender al Señor cuadrado "pese" a su forma diferente. Por ejemplo:

Equipo 1: Rombo: *según la ley de los romboides se puede quedar cualquier tipo de figura en la aldea*

Jueza: *declaro al señor cuadrado inocente*

TODOS--- *bravo… bravo…*

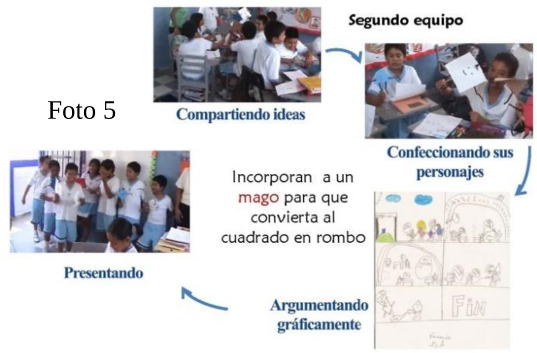


Foto 5

Equipo 2:

Niño 2: *el cuadrado es peligroso…*

Niño 3: *no es justo…*

Niños: *es inocente… es inocente…*

… (lo invitan a que siga a uno de los personajes)

Niño 4 (cuadrado): *¿a donde vamos?*

Niño 3: *sólo ven… sígueme… yo soy un mago…*

te convertiré en un rombo… shiishiiiii (agita el títere como una varita mágica)

Niño 4 (cuadrado): (gira el títere y exclama) *soy un rombo… soy un rombo*

En general los equipo proponen, como final de la obra, que el Señor cuadrado se quede en la aldea. Argumentan unos, que el juez puede cambiar la ley general de: "sólo rombos pueden vivir en la aldea" a: *"Según el artículo de los romboides toda figura puede entrar en la aldea"* en tanto que otros inventaron *un mago* para que "*convierta al cuadrado en un rombo*". Observamos que no centran su atención en elementos que evidencien que el cuadrado es un caso particular de los rombos sino en "lo diferente" que se percibe a primera vista, entre un rombo y un cuadrado, uno estilizado como los personajes del cuento y uno gordito que pareciera no pertenecer ya que su "forma es diferente", requiriendo ampliar la aldea hacia los paralelogramos o de cambiar su forma, pero prestando atención sólo a su posición. Los equipos creativamente continúan el argumento del cuento, apoyando su final en su lado humanitario, alejándose de argumentos matemáticos y propiciando, en definitiva, una clasificación excluyente.

En el taller que se desarrollara con estudiantes de primaria y secundaria en el auditorio de nuestra facultad, la dinámica fue distinta. Iniciamos proponiendo a los niños construir su propio títere rombo de varilla discutiendo, al confeccionarlo, las características de las diferentes figuras geométricas que van emergiendo con el plegado de papel. Terminado el títere, se les presentó la primera parte de la obra y al finalizar, se les indicó que deberían proponer el final de la obra participando en el juicio como fiscales algunos y otros como defensores del cuadrado.

En el momento de discutir en su equipo de trabajo sobre qué argumentos utilizar para defender al Señor cuadrado o ser fiscal en el juicio encontramos diferentes diálogos, tales como:

Niño 1: *cuatro lados, cuatro aristas, cuatro vértices…* pero es interrumpido por uno de los compañeros diciendo:

Niño 2: *no le pongas tanta matemática..*

Niño 1: [murmullo que no se entiende…]…*los rombos son iguales, entonces no puede quedarse*

Niño 4: *no se parece en nada…*

Niño 5: *es más fácil defenderlo que atacarlo pues si se gira es un rombo también pero el rombo se acuesta y es distinto.*

Se percibe un su diálogo que les preocupa actuar como fiscales, es decir buscar argumentos que permitieran expulsar al cuadrado de la Aldea de los rombos. Sin embargo, los elementos que aportaban tiene que ver con que un cuadrado no puede ser considerado como un rombo. Se escucha en la mayoría de los grupos "*es distinto*", "*no se parece*" refiriéndose directamente al cuadrado, por lo que la expresión "es más fácil defenderlo" tiene que ver más con razones humanitarias que aceptar que un cuadrado es un rombo por tanto no hay nada que discutir.

Construyen títere

Argumentan participando en el final de la obra

Los argumentos que emergen en las discusiones que se entablan en los diferentes equipos se ven fortalecidos por los elementos que se presentaron en el momento de construir el títere. Lados, ángulos, diagonales, cuadrado, romboide, rombo, entre otras, fueron palabras que se presentaron y discutieron con los niños, mismas que aparecieron con naturalidad en sus finales. Siguió persistiendo la clasificación euleriana en los argumentos pese a que declaraban que el cuadrado se podía quedar en la aldea (García, 2015). La clasificación jerárquica de las figuras geométricas, elemento que se espera sea construido escolarmente sigue resistiéndose (Fujita, 2007, Zazkis & Leikin, 2008, Türnüklü, Akkaş & Gündoğdu Alayli, 2013)

Conclusiones

Como se percibe en este documento, hemos trabajado en diferentes ámbitos con los títeres. En espacios abiertos como la explanada de Cinvestav-IPN, en el evento Cinvesniñ@s, del cual extraemos el ejemplo de *María y el Lobo*; en el auditorio de un prescolar donde presentamos *El Pirata Barbasucia*; en el aula de una escuela primaria donde trabajamos *La aldea de los Rombos*; y finalmente, en el auditorio de nuestra facultad con la misma obra e idea pero con la actividad rediseñada. En cada puesta en escena llevamos la consigna de propiciar el diálogo, de generar un ámbito discursivo rico y desafiante, que nos invite a reflexionar en tanto nos divertimos, a comunicarnos en tanto contamos, sumamos, clasificamos, ubicamos en el espacio, entre otras actividades.

Vislumbramos las diferentes argumentaciones que se presentan ante el desafío propuesto que se refleja en distintos recursos y en la evolución de los mismos. Desde un: *ahí… ahí…* marcando un triángulo con un dedito; a "*sudeste"* que el pirata termina diciendo para cerrar la discusión, conlleva abstracción reflexiva (en palabras piagetianas), implica evolucionar de un gesto a palabras sustentadas y por ende a reflexionar sobre la argumentación provocada. Desde un: "*porque sí*", el cuadrado se puede quedar en la aldea a: "*cállense… no me están escuchando… el cuadrado es un rombo*" que grita un niño de 8 años agitando su títere de varilla desconcertando a los titiriteros, nos da pauta de que el taller, donde se caracteriza al rombo mediante el plegado de papel, robustece la argumentación de los participantes en el desarrollo de la obra.

Si bien son los más pequeños lo que reaccionan con mayor entusiasmo y candidés, no faltan los adultos acompañándolos y soplándoles algunas respuestas involucrándose también en la obra, en la argumentación que deseamos provocar en cada presentación. En este sentido, seguimos trabajando en profundizar los análisis, establecer con mayor fineza los constructos teóricos que nos permitan explicar lo que sucede al abrir las cortinas del teatrino y emocionar a los pequeños y grandes, en tanto construyen saberes matemáticos.

Referencias bibliográficas

Ahlcrona, M.R., (2012). The puppet's communicative potential as a mediating tool in preschool education. *International Journal of Education Communication 44*, 171-184.

Bauersfeld, H. (1980). Hidden dimensions in the so-called reality of mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics 11*, 23–29.

Billing, M. (1989). *Arguing and thinking. A rhetorical approach to social psychology*. Cambridge, Gran Bretaña: Cambridge University Press.

Brits, J. S., Potgieter, A. & Potgieter, M. J. (2014). Exploring the Use of Puppet Shows in Presenting Nanotechnology Lessons in Early Childhood Education. *International Journal for Cross-Disciplinary Subjets in Education 5*(4), 1798-1803.

Buendía, G. (2005). Prácticas sociales y argumentos: el caso de lo periódico. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol 18, (pp.* 451-456). México: CLAME.

Charlot, B. & da Silva, V. A. (2013). La relación con la matemática de los alumnos de la escuela primaria. Un estudio con niños brasileños. En C. Broitman (Comp.) *Matemáticas en la escuela primaria II. Saberes y conocimientos de niños y docentes* (pp. 47-68). Buenos Aires, Argentina: Paidós, cuestiones de educación.

Ferrari, M. (2014). El uso de títeres en matemáticas. En P. Lestón (Ed.*): Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol 27*. (pp. 1340-1347). México: CLAME.

Finkel, B. (1984). *El títere y lo titiritesco de la vida del niño*. Argentina: Plus Ultra.

Fujita, T y Jones, K. (2007). Learners´ understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: towards a theoretical framing. *Research in Mathematicas Education, 9*(1 y 2), 3-10.

García A. (2015). *El uso de los títeres en el acercamiento de la clasificación de cuadriláteros.*Tesis de Maestría no publicada. Unidad Académica de Matemtáicas. Universidad Autónoma de Guerrero. México.

Keogh, B., Naylor, S., Maloney, J. & Simon, S. (2008). Puppets and engagement in science: a case study. *NorDiNA 4*(2), 142-150.

Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom. Two episodes and related theoretical abductions. *Journal of Mathematical Behavior 26*, 60-82.

Lavy, I. (2006). A case study of different types of arguments emerging from explorations in an interactive computerized environment. *Journal of Mathematical Behavior 25*, 153-169.

Mandoki, K. (2008). *Estética cotidiana y juegos de la cultura. Prosaica uno.* México: Conaculta-Fonca.

Núñez, M. E. & Escandón, M.V. (2012). El teatrino como herramienta didáctica para el desarro- llo de la expresión oral en el preescolar. *Campo Abierto, vol. 31 no 1, pp. 167-180, 2012.*

Rogoinski, V. (2005). *Títeres en la escuela. Expresión, juego y comunicación*. Argentina: Novedades Educativas.

Santa Cruz, E. & García, Labandal, L. (2008) *Títeres y resiliencia en nivel inicial.* Argentina: Homo Sapiens.

Sarabia, A. & Iriarte, C. (2011). *El aprendizaje de las matemáticas: ¿Qué actitudes, creencias y emociones despierta esta materia en los alumnos?* España: EUNSA

Secretaria de Educación Pública (2011). *Plan Estudios. Educación Básica*. México: SEP.

Szulkin, C. & Amado, B. (2006). *Una propuesta para el uso del teatro de títeres como herramientas socio-pedagógica en las escuelas rurales*. Argentina: editorial Comunicarte.

Tillería, D. (2003). *Títeres y máscaras en la educación. Una alternativa para la construcción de saberes.* Argentina. Homo Sapiens Ediciones.

Türnüklü, E., Akkaş, E. & Gündoğdu Alayli, F. (2013). Investigation of prospective primary mathematics teachers´perceptions and images for quadrilaterals. *Educational Sciences Theory & Practice 13*(2), 1225-1232.

Zazkis, R & Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: A case of a square. *Educational Studies in Mathematics 69*(2), 131-148.

Autores

Marcela Ferrari Escolá; CIMATE, UAGro. México; mferrari@uagro.mx
Nancy Marquina Molina; CIMATE, UAGro. México; nmarquina@uagro.mx

EL TALENTO MATEMÁTICO. ESTRATEGIAS DE ATENCIÓN EXTRAESCOLAR

Orlando Daniel Jiménez Longoria, Carolina Carrillo García, Tomás Queralt Llopis

Resumen

El presente trabajo da a conocer los resultados de una investigación cuyo objetivo fue observar, analizar y caracterizar las estrategias de atención en torno a los niños con talento en matemáticas. Para ello se realizó una estancia en dos programas especializados en la atención de niños talento en la Ciudad de Valencia, España. Se llevó a cabo una observación situada y se utilizaron instrumentos variados para la recogida de información, se llevó de manera sistemática una bitácora para el registro de las actividades y se complementó con cuestionarios y entrevistas a los profesores y estudiantes del centro mencionado. A partir de los datos obtenidos se caracterizaron los estilos de enseñanza utilizados para potencializar el talento matemático.

Palabras clave: Talento matemático, actitud, potencialización, estrategias de atención.

Introducción

La educación en México (y en muchos países) se concibe desde una perspectiva homogénea cuyo principal criterio de distinción es la edad de los escolares. Esto propicia que los estudiantes que quedan fuera de la media, tanto aquellos con algún tipo de rezago como los sobresalientes, reciban la misma atención (Farfán y Cantoral, 2013).

Si bien los planes de estudio de programas enfocados en la formación de profesores abordan temas relacionados con la inclusión y la atención a la diversidad (ver por ejemplo el Plan de Estudios de la Licenciatura en Educación Primaria), estos términos suelen entenderse como aquellos casos en los que los estudiantes por algún motivo se encuentran por debajo de la media de aprendizaje, dejando fuera de observación a los que se encuentran en el extremo opuesto: los que tienen capacidades sobresalientes. El motivo de tal situación quizás radique en la suposición de que si un estudiante es capaz de desempeñarse de una manera destacada no debe ser un motivo de preocupación sino al contrario, pero es bien sabido por los profesores en servicio y reportado en diversas investigaciones que algunos de estos alumnos tienen dificultades para desarrollar buenos hábitos de trabajo, se les dificultan las relaciones sociales dentro de la escuela y en algunos casos presentan problemas emocionales, además suele aburrirles la rutina dentro del salón de clases y pueden llegar a aislarse (Morelock y Feldman 1997, citados en Romagossa, 2013). Si bien éstas no son características generalizables a todos los alumnos sobresalientes sí es un hecho observable en las aulas. Paralelamente, Conejeros y Gudenschwager (2011) advierten que si los niños y jóvenes con talento no reciben una atención educativa especial y una práctica sistemática a través del tiempo, su talento no pasará de ser un potencial que eventualmente se perderá.

En el análisis de antecedentes encontramos que la investigación en torno a alumnos sobresalientes se ha enfocado principalmente en su detección (Ver Rodríguez, 2004; Souza y Soriano, 2004 y Díaz, Sánchez, Pomar y Fernández, 2008) y en el diseño y perfeccionamiento de herramientas para ello (Ver García, 2007; Medrano, 2009; Suaste, 2012 y Benavides y Maz-Machado, 2012); sin embargo, son escasas las propuestas para la atención y generalmente ocurren en un ambiente extraescolar, olvidando el tratamiento dentro del aula. Un reporte más amplio de este análisis puede ser encontrado en Jiménez y Carrillo (2014).

En el campo particular de las matemáticas, Canché (2013) inicia su investigación cuestionando qué son el talento y la inteligencia y si son o no estos aspectos susceptibles de desarrollarse a través de la educación; atendiendo la importancia fundamental del contexto social y educativo, propone una alternativa conceptual y teórica para redimensionar el talento en matemáticas. Asimismo Shayshon, Gal, Teslet y Ko (2014) expresan que la mayoría de los alumnos con talento matemático aprenden en escuelas regulares pasando muchas horas en clases mixtas, dejando de lado la potencialización de estos estudiantes. Podemos observar que existen varios aspectos que no se han considerado aún a profundidad en las investigaciones. Por estos motivos consideramos pertinente indagar sobre esta temática poniendo atención en la detección pero principalmente en la atención de los niños con talento en matemáticas.

Aunado al análisis de investigaciones, se hizo una búsqueda de centros de atención a niños con talento con el objetivo de realizar una estancia en uno de ellos, con la idea de realizar observaciones *in situ* de manera tal que se pudieran analizar las formas de trabajo, las metodologías de enseñanza, los ambientes físicos, el diseño de tareas y la relación profesor-estudiante, entre otras características. Es decir, nos interesa caracterizar el estilo de trabajo de instituciones especializadas, llevado a cabo con los estudiantes una vez identificados con talento matemático.

La pregunta de investigación que guio este trabajo fue: ¿Cómo se trabaja en instituciones especializadas en alumnos sobresalientes para potencializar su talento matemático?

Suponemos que el conocimiento de las estrategias de trabajo de algunos centros de atención enfocados en el área de las matemáticas nos permitirá posteriormente diseñar o adaptar propuestas de acción para la atención de niños con talento matemático en las escuelas del contexto mexicano, generando el interés y desarrollo de aptitudes, provocando un espacio óptimo así como una sana convivencia en un espacio de colaboración dentro del aula.

Sustento teórico

Dentro de la jerga especializada en este ámbito se usan diversos términos tales como alta capacidad, talento, superdotación, habilidad, entre otras. Creemos conveniente presentar un panorama general de esta terminología, asimismo el modelo explicativo que adoptamos pero también consideramos necesario un apartado que nos permita interpretar los aspectos didácticos observados durante la estancia. Para su presentación, se ha dividido este apartado en tres rubros.

Talento matemático

Al referirse a los alumnos con altas capacidades se manejan diferentes conceptos para definirlos según sus características. Para Miguel y Moya (2012) se clasifican de la siguiente manera:

Alta capacidad. Presentan un nivel de rendimiento intelectual superior en una amplia gama de capacidades y aprenden con facilidad cualquier área o materia. Hay autores que distinguen los casos de superdotación extrema y así hablan de «superdotación de primer orden» (sujetos con productividad superior y CI mayor de 155) y «segundo orden» (CI entre 125 y 130).

Talentosos. Alumnos que muestran habilidades específicas en áreas muy concretas. Se puede hablar de talento académico, talento matemático, talento verbal, talento motriz, talento social, talento artístico, talento musical, talento creativo.

Prodigio. Es el sujeto que realiza una actividad fuera de lo común para su edad. Realizan producciones admirables, equiparables a los adultos, y suelen presentar competencias prematuras en áreas específicas.

Genio. Persona que por unas capacidades excepcionales en inteligencia y creatividad ha creado una obra importante y significativa para la sociedad.

Eminencia. Persona que debido a la perseverancia, oportunidad, azar, suerte, etc… ha producido una obra genial, sin que el nivel intelectual sea el factor determinante.

Según Bisquerra (en Romagossa, 2013), el concepto de altas capacidades incluye a superdotados y a personas con talento. En el superdotado todas las aptitudes presentan un nivel elevado, mientras que el talento es más específico. Tiene talento la persona con aptitudes para uno o varios aspectos concretos, pero en el resto son normales o incluso deficitarios.

Podemos concluir este apartado adhiriéndonos a la postura de que los alumnos con *aptitudes sobresalientes* son aquéllos capaces de destacar significativamente del grupo social y educativo al que pertenecen, en uno o más de los siguientes campos del quehacer humano: científico-tecnológico, humanístico-social, artístico o de acción motriz. Los alumnos con *talento* son aquéllos que presenta un conjunto de competencias que los capacitan para dominar la información dentro de un área concreta del actuar humano. Lo esencial en el talento es que es <u>específico</u>, a diferencia de las aptitudes sobresalientes. Por esta razón, requieren de instrumentos de evaluación específicos para cada área y una atención diferenciada para que se potencialice dicho talento (SEP, 2014).

Modelo teórico

Asimismo, existen varios modelos teóricos en torno al rendimiento intelectual. Entre estos modelos destacan el psicométrico o de capacidades, de rendimiento, cognitivos y socioculturales (Para mayor información, ver Martínez y Guirado, 2013). El modelo cognitivo más utilizado con los alumnos sobresalientes, y el cual asumimos dentro de nuestra investigación, es la teoría de las inteligencias múltiples de Gardner, en la que se contemplan diversos tipos de inteligencia (lingüística-verbal, lógica-matemática, espacial, corporal-kinestética, musical, interpersonal, intrapersonal, naturalista, espiritual y existencial), evadiendo la idea de la inteligencia como único proceso de razonamiento (Miguel y Moya, 2012). A diferencia de los demás modelos explicativos del talento, hace referencia al campo específico de las matemáticas aspecto que los otros modelos no abordan de manera directa sino más bien como un componente de las altas capacidades de manera general.

Gardner plantea una visión plural de la inteligencia, reconociendo en ella diversas facetas, deduciéndose así que cada persona posee diferentes potenciales cognitivos, que puede desarrollar a través de la herencia genética, entrenamiento, oportunidades ambientales y socialización de los valores culturales. A su vez consideran que las inteligencias se manifiestan de distintas maneras en los diferentes niveles evolutivos, por lo que tanto el estímulo como la evaluación deben tener lugar de manera oportuna y adecuada. Existen diferentes espacios en nuestra sociedad que quedan sin cubrirse o se cubren escasamente por no considerar a la inteligencia como un conjunto de talentos siendo oportuna la orientación de los individuos dotados del conjunto de habilidades convenientes (Gardner, 2005).

Desde este modelo explicativo se define la inteligencia lógico-matemática como la capacidad efectiva para manipular números, operar sobre las relaciones que involucran sistemas de símbolos abstractos y lógicamente para evaluar las cantidades y conceptos de manera eficaz y de razonar de una manera adecuada. Los alumnos destacarían en matemáticas, resolución de problemas, razonamiento lógico y su mejor método de aprendizaje es a través de la resolución de problemas, realizar esquemas, trabajar con contenidos abstractos.

Modelos de enseñanza

Perales (1998) clasifica las formas de enseñanza como:

Transmisión- recepción: El alumno es considerado como una «tabla rasa» donde es posible «grabar» toda la información suministrada. El profesor se constituye como el principal artífice del proceso de enseñanza-aprendizaje, utilizando los recursos necesarios para optimizar el acto de la enseñanza verbal: repetición, asociación de ideas, analogías, contraste. El contenido que se imparte debe estar lógicamente estructurado y ser de naturaleza preferentemente conceptual.

Descubrimiento: El alumno es considerado como el gran artífice del proceso de enseñanza-aprendizaje, a través de una construcción del conocimiento ya establecido. El profesor juega un papel secundario en el aprendizaje, dependiendo de las distintas opciones del modelo (descubrimiento dirigido, semidirigido o autónomo). El contenido científico a enseñar debería poseer una fuerte carga procesual (observación, recogida de datos, elaboración de hipótesis).

Constructivista: considera lo que sabe el alumno, como aprende para considerar la articulación de conceptos. El constructivismo intenta explicar cómo el ser humano es capaz de construir conocimiento desde los recursos de la experiencia e información que recibe (Chadwick, 2001, en Boscán y Klever, 2012)

Investigación: Se plantea sobre problemas significativos para el grupo de trabajo, ya sean de carácter teórico o práctico, interrogantes cuyas respuestas deben ser investigadas considerando el método científico para ello.

Metodología

La presente investigación es de corte descriptivo. Los estudios descriptivos tienen como objetivo interpretar con precisión las características de un individuo en particular, una situación o un grupo (Kothari, 2004). Se pretende describir el trabajo que se desarrolla con alumnos con talento matemático, de modo que permita, a partir de los datos obtenidos, responder la pregunta de nuestra investigación y así caracterizar algunas actividades que puedan potencializar el talento matemático dentro del aula (Sierra, 2011).

Se trata de una investigación cualitativa, ya que se pretende obtener un conocimiento directo de la realidad social que se estudia con la finalidad de comprenderla (Peiró, 1996 en del Valle y Curotto, 2008). La investigación cualitativa esencialmente desarrolla procesos en términos descriptivos e interpreta acciones, lenguajes, hechos funcionalmente relevantes y los sitúa en una correlación con el más amplio contexto social (Martínez, 2011). En este caso, no sólo pretende centrarse en el hecho de conocer, sino también se considera de sumo interés la forma de intervención en el aula.

Se realizó una estancia de investigación con duración de 5 meses en la ciudad de Valencia y se observó el trabajo realizado con niños talentosos en el área de matemáticas. Los programas que se consideraron fueron:

Estímulo del Talento Matemático (ESTALMAT). Programa que tiene varias sedes en España, país en el que se desarrolla. Trata de detectar, orientar y estimular de manera continua, a lo largo de dos cursos, el talento matemático excepcional de estudiantes de 12-13 años, sin desarraigarlos de su entorno, mediante una orientación semanal, que se efectúa cada semana por tres horas. Este programa fue de nuestro interés debido a que se enfoca específicamente a la potencialización del talento matemático.

Asociación Valenciana de Apoyo al Superdotado y Talentoso (AVAST). Se encarga de la asistencia a las personas con altas capacidades, especialmente a los niños y jóvenes que necesiten acciones preventivas asistenciales o rehabilitadoras. Así como la difusión de información referente a las altas capacidades y la formación de profesionales que estén en contacto con las altas capacidades. En este programa observamos únicamente lo respectivo al talento matemático.

Como herramienta principal para el registro de las observaciones se utilizó la bitácora ya que es un instrumento de recolección de datos que acompaña al observador de campo y tiene la función de guardar de forma primaria y así como se presentan, todos los datos que se consideran pertinentes al tema de una investigación. También pueden agregarse las apreciaciones del observador, las emociones y reacciones que le producen los hechos y conclusiones personales, dejando registrado que se trata del pensamiento del investigador. De la misma manera pueden adicionarse muestras físicas de materiales, fotografías, dibujos, esquemas, gráficos y todo aquello que contribuya a mostrar de la manera más completa posible la realidad observada (Krumm, 2007). Se utilizaron como herramientas complementarias cuestionarios y entrevistas, dirigidas a alumnos, docentes y directivos de los programas ESTALMAT y AVAST.

Se recopilaron los planes de clase para analizar y registrar la manera en que se conducen y considerar las estrategias sugeridas que potencializan el talento matemático.

Mediante las bitácoras se tomaron registros de las sesiones en los programas de atención al talento. Las entrevistas fueron aplicadas a los profesores y directores de los dos programas (7 en total) y a los estudiantes (18 en total). Se utilizó la entrevista en todas ocasiones en que fue permitido, en caso contrario se utilizó un cuestionario. Las entrevistas estuvieron guiadas por un conjunto de preguntas diseñadas con la finalidad de investigar cómo se identifican a los alumnos talentosos en matemáticas así como la mecánica de trabajo con ellos, cuáles son las actividades que se consideran más atractivas dentro de la clase de matemáticas, profundizando en las características que hacen de éstas una forma de potencializar el talento matemático. Para el registro de los datos, las entrevistas fueron audiograbadas y los cuestionarios fueron llenados digitalmente. El análisis de datos se hizo mediante un análisis temático (Mieles, Tonon y Alvarado, 2012).

Conclusiones

Se presenta a continuación una breve descripción de la forma de trabajo de los programas observados:

La detección de los alumnos en el programa ESTALMAT comienza con la nominación por parte de los profesores de matemáticas. Una vez detectados, los profesores verifican mediante una prueba diseñada por ellos que los alumnos efectivamente poseen talento matemático; de ser así, se seleccionan 25 alumnos por ciclo escolar para ser atendidos dentro del programa. En el programa AVAST los alumnos son detectados mediante algunos test de inteligencia. Por ser un programa donde participan socios, se les da la libertad de asistir a las clases que los alumnos consideren de mayor importancia. Asistiendo así algunos de ellos al taller de matemáticas.

En el programa ESTALMAT las sesiones de clase son guiadas por maestros de matemáticas que pertenecen a la Asociación de Profesores de Matemáticas. Para el diseño de las clases se considera un tema específico a desarrollar, incluyendo actividades lúdicas donde los alumnos puedan compartir sus aprendizajes con el resto de sus compañeros.

En el programa AVAST los encargados de desarrollar las clases son estudiantes de magisterio, que proponen algunas actividades haciendo énfasis en lo lúdico para la construcción de significados, también participa una alumna estudiante de doctorado en matemáticas.

Ambos programas se efectúan en las aulas de la Universidad de Valencia, dotadas de proyectores y computadoras que facilitan la proyección de actividades. Utilizan diferentes recursos manipulables para la ejecución de la clase y la apropiación de nuevos conocimientos.

Se hace énfasis en el uso de materiales didácticos tangibles que puedan hacer más interesantes las clases. La utilización de material manipulable hace que el trabajo en estos programas se diferencie de las clases regulares. Se tratan temas que no siguen los planes y programas del currículo, lo que hace que los alumnos consideren un enriquecimiento en contenidos diferente al que se desarrolla en sus escuelas. Para los estudiantes, compartir el trabajo con otros alumnos con un nivel intelectual similar al suyo hace que el ambiente de trabajo sea más competitivo y se esfuercen por dar a conocer detalladamente los procesos mediante los cuales construyen conocimiento.

En ambos programas se utiliza la enseñanza constructivista, consideran el aprendizaje gradual de los alumnos, partiendo de lo más sencillo hasta contenidos más complejos. Para ello se utiliza el trabajo autónomo, dando a los alumnos algunas instrucciones por escrito, en hojas de trabajo de tal manera que puedan ir construyendo nuevos aprendizajes por su cuenta. Estas actividades facilitan la potencialización del talento matemático ya que los alumnos van construyendo nuevos aprendizajes en torno al tema de manera divertida y diferente a lo que se desarrolla en el aula en sus escuelas.

Finalmente, dado que las actividades observadas se desarrollan en un ambiente extraescolar, consideramos que sería adecuado un trabajo posterior en el que se propusieran diversas adaptaciones de las tareas observadas vinculándolas en la medida de lo posible con los contenidos oficiales de los Planes de estudio de nivel básico en México.

Agradecimientos

Se agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) mexicano el apoyo económico otorgado para el desarrollo de este trabajo y por brindarme la posibilidad de realizar una estancia académica de 5 meses en la ciudad de Valencia, España. Un agradecimiento especial al profesor Tomás Queralt, por recibirme en la Universidad de Valencia, invitarme a participar en las actividades académicas en las que él cotidianamente labora y por toda la asesoría y dirección brindadas en los programas ESTALMAT y AVAST.

Referencias

Benavides, M. y Maz-Machado, A. (2012). ¿Qué deben conocer los profesores y padres sobre talento matemático? *IX congreso iberoamericano superdotación, talento y creatividad*. Buenos Aires, Argentina.

Boscán, M. y Klever, K. (2012). Metodología basada en el método heurístico de Polya para el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos. *Escenarios, 10* (2), 7-19.

Canché, E. (2013). *Matemática Educativa y Equidad: Un estudio socioepistemológico del Talento en Matemáticas*. Tesis doctoral no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Díaz, O., Sánchez, T., Pomar, C. y Fernández, M. (2008). Talentos matemáticos: análisis de una muestra. *Revista Faísca, 13* (15), 30-39.

Del Valle, M. y Curotto, M. (2008). La resolución de problemas como estrategia de enseñanza y aprendizaje. *REEC: Revista electrónica de enseñanza de las ciencias, 7*(2), 463-479.

Farfán, R., Cantoral, R., Vidal, R., Méndez, C., Alonso, G., Jaso, G., Marín, L. y Robles, I. (2013). Construcción social de la ciencia entre las niñas y los niños del programa niños talento. México: Gobierno del Distrito Federal, Instituto de Ciencia y Tecnología del Distrito Federal.

Gardner, H. (2005). *Inteligencias múltiples*. España: Paidós.

García, M. (2007). *El potencial de aprendizaje y los niños superdotados*. Tesis doctoral. Universidad de Granada, España.

Jiménez, O. y Carrillo, C. (2014). La potencialización de aptitudes sobresalientes en matemáticas. *Memorias de la XVII Escuela de Invierno en Matemática Educativa*. Oaxaca, México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa, A.C.

Kothari (2004). *Research Methodology. Methods & Techniques*. Second Revised Edition. New Delhi: New Age International (P) Ltd., Publishers.

Krumm, S. (2007). La bitácora de recolección de datos. *Centro de recursos para la enseñanza y el aprendizaje*. Recuperado el 4 de febrero de 2015 en: http://crea.um.edu.mx/display.aspx?idCol=67&idItem=1703&tipoItem=Documento

Martínez, J. (2011). Métodos de investigación cualitativa. *Silogismos de investigación, 8*(1)

Martínez, M. y Guirado, A. (2013). *Altas capacidades intelectuales. Pautas de actuación, orientación, intervención y evaluación en el periodo escolar*. México: Graó/Colofón.

Medrano, R. (2009). *Diseño y desarrollo de pruebas de español y matemáticas para el uso en la identificación de niños sobresalientes*. Tesis de maestría no publicada. Facultad de Educación. Universidad Autónoma de Yucatán. México.

Mieles, M.D., Tonon, G. y Alvarado, S. (2012). Investigación cualitativa: el análisis temático para el tratamiento de la información desde el enfoque de la fenomenología social. *Universitas Humanística* (74), 195-225.

Miguel, A. y Moya, A. (2012). Conceptos generales del alumno con altas capacidades. En Torrego, J. (Coord.). *Alumnos con altas capacidades y aprendizaje cooperativo. Un modelo de respuesta educativa*. Fundación SM, España.

Perales, J. (1998). Enseñanza de las ciencias y resolución de problemas. *Revista Educación y pedagogía, 10* (21), 119-144.

Rodríguez, L. (2004). Identificación y evaluación de niños con talento. En Maz, A., Castro, E., y Blanco, R. (2004). *La educación de niños con talento en Iberoamérica*. M. Benavides (Ed.). UNESCO, Oficina Regional de Educación de la Unesco para América Latina y el Caribe.

Romagossa, M. (2013). *Las necesidades emocionales en niños con altas capacidades*. España: Aljibe.

Shayshon, B., Gal, H., Tesler, B., & Ko, E. S. (2014). Teaching mathematically talented students: a cross-cultural study about their teachers' views. *Educational Studies in Mathematics, 87*(3), 409-438.

SEP (2014). *Educación especial. Conceptos básicos*. Recuperado el 22 de octubre de 2014, de: http://www.educacionespecial.sep.gob.mx/html/asconceptosbasic.html

Souza y Soriano (2004). La educación de niños con talento en Brasil. En Maz, A., Castro, E., y Blanco, R. (Eds.). *La educación de niños con talento en Iberoamérica*. M. Benavides (Ed.). UNESCO, Oficina Regional de Educación de la Unesco para América Latina y el Caribe.

Suaste, A. (2012). *Necesidades de atención en alumnos adolescentes con talento académico*. Tesis de maestría no publicada. Universidad Autónoma de Yucatán. México.

Autores

Orlando Daniel Jiménez Longoria; UAZ. México; ordanielitillo@hotmail.com
Carolina Carrillo García; UAZ. México; cgcarolin@hotmail.com
Tomás Queralt Llopis; UV. España; tomas.queralt@uv.es

LA FORMACIÓN INICIAL DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS EN MÉXICO: EL ANÁLISIS DE UN CASO

Lilia Patricia Aké Tec, José Marcos López Mojica, Cesar Martínez Hernández

Resumen

La formación de profesores de matemáticas es una línea de investigación de la Matemática Educativa que ha tomado mayor relevancia en las últimas décadas a nivel internacional. Dichas investigaciones se han interesado por determinar el complejo bagaje de conocimientos necesarios para que la práctica del profesor sea efectiva y propicie el aprendizaje. En este sentido, situándose en el contexto mexicano, el presente trabajo se interesa por indagar sobre la formación inicial de profesores en el marco de la reestructura curricular que actualmente vive el plan de estudios de la Licenciatura en Enseñanza Media Especializado en Matemáticas de la Universidad de Colima. Se plantea como interrogante: ¿Qué conocimientos matemáticos y didácticos son necesarios proporcionar para formar a futuros profesores de matemáticas del nivel bachillerato?

Palabras clave: Formación inicial, conocimiento del profesor.

Planteamiento del problema

La formación de profesores de matemáticas siempre ha sido un desafío, ciertamente porque implica una diversidad de dimensiones y componentes a tener en cuenta y porque no existe un programa de formación homogéneo en México. Así lo constata Dolores (2013) cuando afirma que tradicionalmente la formación de profesores para preescolar y primaria ha sido tarea de las escuelas normales. La formación de profesores para secundaria ha sido atendida (en su modalidad de educación continua) por los centros de actualización del magisterio. Por otro lado, la demanda de profesores de matemáticas para el bachillerato (nivel medio superior) y para el nivel superior ha sido cubierta por profesionales egresados de las universidades o centros de educación superior, no necesariamente formados como profesores de matemáticas; más bien son ingenieros, matemáticos, contadores, actuarios o de otras profesiones que se hacen profesores de matemáticas en la práctica.

Estas realidades provocan interrogantes como ¿quiénes deberían enseñar matemáticas?, ¿qué formación debe tener el profesor de matemáticas? En este sentido, en las últimas décadas han surgido programas de formación de docentes de matemáticas en México (Dolores y Hernández, 2012). Este reconocimiento de la necesidad de una formación específica para los docentes de matemáticas abre paso al análisis de los programas de formación, propuestas curriculares y aportaciones desde las investigaciones que ayuden a definir ¿qué es lo que debe saber el profesor de matemáticas para llevar a cabo su tarea educativa? Un primer acercamiento a esta definición es el estudio que realizan Dolores y Hernández (2012) quienes llevaron a cabo un análisis de las licenciaturas en México que tienen una orientación hacia la formación de profesores de matemáticas. Según estos autores, esa formación debiera contemplar un equilibrio entre el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico de la matemática. La complejidad del planteamiento anterior, implica cuestionarse sobre la posibilidad de caracterizar una formación inicial, en el nivel licenciatura, para formar a profesores de matemáticas. Sobre todo cuando Hernández, Sosa y López (2013) señalan que la gran mayoría de las universidades e institutos de educación superior que ofertan programas de educación continua en el área de enseñanza de la matemática en México, no realizan formación inicial de profesores de matemáticas. Específicamente nos interesamos en reflexionar sobre ¿qué conocimientos matemáticos y didácticos son necesarios proporcionarles a los futuros profesores de matemáticas durante su formación inicial para su futura práctica educativa? Esta pregunta es la que orienta la primera parte de esta investigación que pretende dar evidencia de los elementos considerados en la formación inicial de los profesores de matemáticas en el contexto de las nuevas expectativas de la reforma curricular de la Licenciatura en Educación Media Especializado en Matemáticas (LEMEM) de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Colima.

Marco teórico metodológico

La formación del profesor de matemáticas es un área que ha cobrado mayor interés en las últimas décadas, así lo refleja la diversidad de propuestas que se han desarrollado para caracterizar los componentes que debiera integrar la formación de un profesor de matemáticas. Esta formación no sólo debe estar basada en métodos de instrucción, sino también en su articulación con el conocimiento matemático, en un proceso que conduce a los futuros docentes a construir el conocimiento (Kieran, 2007). Al respecto, diversos investigadores a nivel internacional como Ball, Lubienski y Mewborn (2001); Godino (2009) y Carrillo, Contreras y Flores, (2013) son más o menos coincidentes en su posicionamiento sobre que la formación del profesor de matemáticas requiere de un conocimiento del contenido matemático y de un conocimiento pedagógico del contenido matemático. Lo anterior teniendo como referente el conocimiento matemático para la enseñanza (MKT por sus siglas en inglés) y en la enseñanza (Hill, Ball y Schilling, 2008; Rowland y Ruthven, 2011). Cada propuesta tiene singularidades y especificaciones en sus interpretaciones que dependen de los marcos teóricos que los acogen, pero que se fundamentan en las ideas desarrolladas por Shulman (1986), cuyos trabajos fueron los primeros en esta área.

Por otro lado, en México, Dolores (2013) plantea contar con una perspectiva más amplia e integral, proponiendo que la formación del profesor de matemáticas se articula sobre la base de tres áreas fundamentales: formación matemática, formación pedagógica y formación docente. Según este autor, el profesor de matemáticas necesita de una formación profesional que le permita "desarrollar competencias para propiciar o producir el aprendizaje de las matemáticas. Para que esto sea posible es necesario dominar el saber matemático, conocer cómo aprenden los estudiantes y, sobre estas bases, poder utilizar o diseñar métodos, procedimientos y medios didácticos que posibiliten el aprendizaje" (p. 17). Sin embargo, pese a las investigaciones realizadas en el área, las propuestas no son consideradas para la elaboración de planes de estudios de licenciaturas orientadas a la formación de profesores de matemáticas en México. Lo anterior se puede colegir de los trabajos realizados por Dolores y Hernández (2012), Hernández, Sosa y López (2013); Sosa, Aparicio, Jarero, y Tuyub (2013).

Bajo estas consideraciones el presente trabajo de tipo cualitativo, a través de un análisis documental, se interesa por indagar tres aspectos. El primero centra en el análisis de la propuesta curricular de la formación de profesor de matemáticas de bachillerato que propone la Facultad de Ciencias de la Educación (FCE) de la Universidad de Colima enmarcándola en las investigaciones realizadas en torno al análisis de las licenciaturas que tienen una orientación hacia la formación de profesores de matemáticas siguiendo los trabajos realizados por Dolores y Hernández (2012), Hernández, Sosa y López (2013); Sosa, Aparicio, Jarero, y Tuyub (2013). La segunda se centra en el análisis de las propuestas sobre los elementos que integran la formación del profesor de matemáticas, desde diversas investigaciones nacionales e internacionales (Hill, Ball y Schilling, 2008; Carrillo, Contreras y Flores, 2013, Godino, 2009; Rowland y Ruthven, 2011 y Dolores, 2013). Finalmente, la tercera temática se centra en la articulación de una propuesta teórica de aspectos a considerar para la caracterización de la formación inicial de los profesores de matemáticas atendiendo tanto a las orientaciones sobre los planes y programas que forman profesores de matemáticas en México como a las propuestas de investigaciones sobre la formación del profesor de matemáticas. A continuación se desarrolla la primera fase de esta investigación.

Un análisis general de las propuestas de formación inicial para el profesor de matematicas de la fce

Ante el panorama de la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática surgen cuestiones, entre muchas otras, sobre ¿quiénes son los que fungen como profesores de matemáticas en los distintos niveles educativos? Al respecto, en la Universidad de Colima desde el año 2002 se oferta una licenciatura para formar a profesores de matemáticas que inciden bachillerato. La Licenciatura en Educación Media Especializado en Matemáticas tiene como propósito formar profesionales con sustento teórico-metodológico- práctico para incidir en el ámbito educativo, específicamente en los procesos de Enseñanza-Aprendizaje en el área de las matemáticas (FCE, 2014). El mapa curricular de dicho plan de estudios se puede apreciar en la Figura 1.

Sem	**M A T E R I A S**					
1	**Historia General de las Matemáticas**	**Estrategias Para el Estudio y la Comunicación**	**Bases Filosóficas y Legales y Organizativas del Sistema Educativo Mexicano**	**Problemas y Políticas de la Educación Básica y Media Superior**	**Informática**	**Inglés I**
2	**Aritmética Elemental**	**Introducción a la Enseñanza de las Matemáticas**	**Ética y Valores**	**Didáctica General**	**Formación docente**	**Inglés II**
3	**Aritmética Superior**	**Álgebra Elemental**	**Geometría Plana y del Espacio**	**Didáctica de las Matemáticas**	**Observación y Práctica Docente I**	**Inglés III**
4	**Trigonometría**	**Álgebra Superior**	**Geometría no Euclidiana**	**Planeación de la Enseñanza y Evaluación del Aprendizaje**	**Observación y Práctica Docente II**	**Inglés IV**

5	**Geometría Analítica**	**Cálculo Diferencial**	**Geometría Descriptiva y Dibujo de Proyecciones**	**Conocimiento de los adolescentes I**	**Observación y Práctica Docente III**	**Inglés V**
6	**Temas Selectos de Matemáticas**	**Cálculo Integral**	**Probabilidad y Estadística Aplicada a la Educación**	**Conocimiento de los adolescentes II**	**Observación y Práctica Docente IV**	**Inglés VI**
7			**Seminario I**	**Taller de Diseño de Propuestas Didácticas y Análisis del Trabajo Docente I**	**Trabajo Docente I**	**Inglés VII**
8			**Seminario II**	**Taller de Diseño de Propuestas Didácticas y Análisis del Trabajo Docente II**	**Trabajo Docente II**	**Inglés VII**

Figura 1. Mapa curricular del plan de estudios de la LEMEM 2002

La organización del mapa curricular clasifica en color verde al área disciplinar referente al contenido matemático, en azul al contenido sobre formación docente y en amarillo el contenido instrumental. Este último hace referencia, según el plan de estudios, "al conocimiento y dominio de herramientas básicas que les permitan ser eficientes y eficaces en el desarrollo de su profesión" (FCE, 2002, p.38). Es posible apreciar algunas inconsistencias, entre las cuales se destaca el posicionamiento de la asignatura de "Historia General de las Matemáticas" como una materia de contenido matemático. En términos generales, según los análisis realizados por Sosa, Aparicio, Jarero y Tuyub (2013), se trata de una licenciatura en educación que ofrece cierta especialización en el área de matemáticas, en este caso en el nivel medio superior. Según estos autores el plan de estudios de la LEMEM, ofrece un 32.45% de asignaturas con contenido matemático, un 10.85% relativo a la didáctica de la matemática y un 51.64% de las asignaturas son de didáctica general. Estos programas tienen una tendencia marcada hacia la pedagogía general, sin embargo incluyen contenido de conocimiento matemático relativo al nivel educativo que se propone atenderán sus egresados (básico, medio superior y superior) (Dolores y Hernández, 2012). Este escenario resulta contradictorio con los planeamientos sobre el conocimiento del contenido matemático planteado por Hill et al. (2008). El contenido sobre formación docente dista de los planteamientos de Dolores (2013) sobre el área pedagógica para la formación del profesorado de matemáticas y de Hill et al. (2008) sobre el conocimiento pedagógico del contenido, ya que dichos planteamientos sobre pedagogía giran entorno al conocimiento matemático. En este sentido, el contenido (matemático) es esencial e interviene al mismo tiempo sobre la forma en la cual reacciona quien enseña y a quien se enseña (Adda, 1987). El área instrumental carece de identidad.

Después de 10 años de la implementación de este plan de estudios, en el 2012, se inicia la reestructura curricular del mismo, bajo los fundamentos de que la LEMEM requiere de cambios sustanciales desde lo establecido en el currículo oficial y por ende en el currículo real. En ese sentido el equipo de trabajo inició un proceso de análisis partiendo de los referentes internos y externos para recuperar evidencias y testimonios de los aspectos álgidos por atenderse en un nuevo programa educativo (FCE, 2015). En su fundamentación describe como referentes internos los siguientes: (a) indicadores de rendimiento académico, (b) rendimiento en el examen general de egreso interno y (c) voces del profesorado (a partir de foros con las academias). Los referentes externos se sustentan a partir de: (a) opinión de egresados, (b) sondeo de empleadores, (c) análisis de evaluaciones externas realizada por los Comités Interinstitucionales para la Evaluación de la Educación Superior (CIEES) y por el Comité Evaluador de Programas de Pedagogía y Educación (CEPPE), (d) las reflexiones sobre el campo disciplinar de la enseñanza de las matemáticas en el contexto internacional, nacional y local y (e) las tendencias formativas en este campo de conocimiento (FCE, 2015).

A través de diversos mecanismos de retroalimentación y evaluación se identificaron áreas de fortalecimiento y se realizó una propuesta de plan de estudios para la formación del profesor de bachillerato que intentó recoger los planteamientos señalados en su fundamentación. Particularmente se hace notoria la consideración de algunos aspectos relativos a la formación del profesorado de matemáticas recogidos en la investigación. Además se toman en cuenta resultados de investigación desde el área de matemática educativa para la conformación del contenido de las materias.

La malla curricular del nuevo plan de estudios puede apreciarse en la Figura 2, en la que se observa también un cambio en el nombre de la licenciatura. Se articula en tres grandes áreas de formación: (a) matemáticas, (b) enseñanza y aprendizaje de la matemática, y (c) desarrollo de proyectos.

Facultad de Ciencias de la Educación

Mapa Curricular de la Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas — **Clave:** — **Fecha de Aprobación:**

Sem	Núcleo de Formación Básico y Materias Optativas del Área						Materias Complementarias y Electivas			Crédito
I	Aritmética A 4 1 5 5	Elementos de álgebra A 5 1 6 6	Geometría Euclideana A 5 1 6 6	Política y Legislación Educativa B 4 1 5 5	Psicología Educativa B 4 1 5 5	Tecnologías de Información y Comunicación en el Desarrollo Docente B 4 1 5 5	Inglés I E 3 1 4 4	Electiva I E 1 1 2 2	Servicio Social Universitario E 0 0 3 3 1	39
II	Trigonometría A 5 1 6 6	Probabilidad A 5 1 6 6	Álgebra A 4 1 5 5	Teoría del Aprendizaje B 4 1 5 5	Didáctica General B 4 1 5 5	Multimedia Educativa B 4 1 5 5	Inglés II E 3 1 4 4	Electiva II E 1 1 2 2	Servicio Social Universitario E 0 0 3 3 1	39
III	Geometría Analítica A 5 1 6 6	Estadística A 5 1 6 6	Practicum 1 D 4 1 5 5	Didáctica de la Aritmética y el Álgebra B 4 1 5 5	Planificación y Evaluación de los Aprendizajes B 4 1 5 5	Entornos Virtuales B 4 1 5 5	Ingles III E 3 1 4 4	Electiva III E 1 1 2 2	Servicio Social Universitario E 0 0 3 3 1	39
IV	Precálculo A 5 1 6 6	Diseño de Proyectos C 4 1 5 5	Practicum 2 D 4 1 5 5	Didáctica de la Geometría B 4 1 5 5	Optativa 1 F 4 1 5 5	Optativa 2 F 4 1 5 5	Ingles IV E 3 1 4 4	Electiva IV E 1 1 2 2	Servicio Social Universitario E 0 0 3 3 1	38
V	Cálculo Diferencial A 5 1 6 6	Desarrollo de Proyectos C 4 1 5 5	Practicum 3 D 4 1 5 5	Didáctica de la Probabilidad B 4 1 5 5	Optativa 3 F 4 1 5 5	Optativa 4 F 4 1 5 5	Ingles V E 3 1 4 4	Electiva V E 1 1 2 2	Servicio Social Universitario E 0 0 3 3 1	38
VI	Cálculo Integral A 5 1 6 6	Investigación Educativa I C 4 1 5 5	Practicum 4 D 4 1 5 5	Didáctica del cálculo B 4 1 5 5	Optativa 5 F 4 1 5 5	Optativa 6 F 4 1 5 5	Ingles VI E 3 1 4 4	Electiva VI E 1 1 2 2	Servicio Social Universitario E 0 0 3 3 1	38
VII	Álgebra Lineal A 5 1 6 6	Investigación Educativa II C 5 2 7 7			Optativas 7 F 4 1 5 5	Optativas 8 F 4 1 5 5	Servicio Social Constitucional D 0 0 30 30 9.6	Electiva VII E 1 1 2 2	Servicio Social Universitario E 0 0 3 3 1	36
VIII	Cálculo en Varias Variables A 5 1 6 6	Investigación en Matemática Educativa C 5 2 7 7			Optativas 9 F 4 1 5 5	Optativa 10 F 4 1 5 5	Práctica profesional D 0 0 25 25 8.0	Electiva VIII E 1 1 2 2	Servicio Social Universitario E 0 0 3 3 1	34

Figura 2. Malla curricular del Plan de estudios de la LEM 2015

Las asignaturas que conforman estas áreas de describen a continuación:

1. Área de formación matemática: Aritmética, elementos de álgebra, geometría euclidiana,

trigonometría, probabilidad, álgebra, geometría analítica, estadística, precálculo, cálculo diferencial, cálculo integral, álgebra lineal y cálculo de varias variables.

2. Área de formación sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática: Política y legislación educativa, psicología educativa, teoría del aprendizaje, planificación y evaluación de los aprendizajes, tecnologías de información y de comunicación en el desarrollo docente, multimedia educativa, entornos virtuales, didáctica general, didáctica de la aritmética y el álgebra, didáctica de la geometría, didáctica de la probabilidad y la estadística y didáctica del cálculo.
3. Área de formación sobre desarrollo de proyectos: Diseño de proyectos, desarrollo de proyectos, investigación educativa I, investigación educativa II e investigación en matemática educativa.

De la figura 2 se desprende que del núcleo de formación básico, un 38.23% de las asignaturas corresponden a un contenido matemático; un 35.29% representa a las asignaturas de pedagogía y docencia y un 11% específicamente del área de didáctica de la matemática. Se destaca la inclusión de una asignatura relativa a la investigación en matemática Educativa en el área de formación sobre desarrollo de proyectos. Este posicionamiento, es concordante con el planteamiento de Gómez-Chacón (2005) sobre que las tendencias en la formación de profesores deben apuntar hacia una mejor integración de la teoría con la práctica, hacia una formación inicial más efectiva en matemáticas que considere a la investigación como una dimensión formativa importante (citado en Dolores, 2013).

Llama la atención que no todas las asignaturas contempladas en el área de formación sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática están relacionadas con la matemática, más bien, algunos son contenidos relacionados con la pedagogía general.

El contenido matemático continúa ciñéndose al nivel medio superior, al igual que el plan de estudios anterior. Se incluye dos asignaturas de matemáticas que no son parte del currículo del bachillerato: álgebra lineal y cálculo de varias variables. Este escenario indica que el futuro profesor de matemáticas tendrá un conocimiento matemático del mismo nivel que sus futuros aprendices. Lo anterior plantea la no incorporación del conocimiento en el horizonte matemático planteado por Hill et al. (2008). El contenido sobre enseñanza y aprendizaje de la matemática refleja un acercamiento a los planteamientos de Dolores (2013) sobre el área pedagógica para la formación del profesorado de matemáticas. Destaca la incorporación del área tecnológica, aunque no con el objetivo de desarrollar habilidades para el uso e innovación de los medios y recursos tecnológicos para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática (Dolores, 2013). Es de notar que el principal objetivo de la actual licenciatura es formar profesionistas en la enseñanza de las matemáticas, más que matemáticos educativos como lo mencionan otras investigaciones (Dolores y Hernández, 2012).

Conclusiones y reflexiones

Con base al análisis previamente descrito, la propuesta curricular del nuevo plan de estudios se sustenta en algunos de los planteamientos sugeridos por Hill et al. (2008), a la vez que contiene elementos de la formación pedagógica y docente planteados por Dolores (2013). Sin embargo, nuestro posicionamiento sugiere que la formación inicial del Licenciado en enseñanza de las matemáticas sólo le proporciona determinados aspectos de lo que el profesorado necesita conocer y comprender en el ejercicio de su carrera. Se necesita profundizar en el análisis de los conocimientos matemáticos y didácticos, para los cuales será necesario adoptar una visión amplia que reconozca el papel central de la actividad de resolver problemas en la generación del conocimiento.

La nueva propuesta curricular sugiera un avance en la consideración de elementos, que desde la investigación, son importantes en el campo de la formación del profesorado de matemáticas. Sin embargo, muchas cuestiones todavía continúan abiertas: ¿Qué matemáticas necesitan los profesores de matemáticas? ¿Se requiere una formación inicial específica de acuerdo al nivel educativo sobre el cual se incide? ¿La didáctica y la pedagogía deben ceñirse al contenido matemático o deben abordarse desde un enfoque general?

En el sentido anterior, es imperante que cada vez los resultados de investigaciones en el área de la matemática educativa incidan en el sistema educativo nacional, particularmente en la formación de los profesores de matemáticas, que el aula se vuelva escenario empírico y dotar a los profesores de elementos para poder analizar su propia práctica. Es necesario de la investigación vaya de la mano con la docencia y tratar de lograr en los profesores un proceso de indagación (Ojeda, 2006).

Referencias

Adda, J. (1987). Elementos de didáctica de la matemática. Manuscrito no publicado. Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN.

Ball, D. L., Lubienski, S. T., y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Carrillo, J., Contreras, L.C. y Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática*. *Libro homenaje a Encarnación Castro* (pp. 193-200). Granada, España: Comares.

Dolores, C. (2013). La formación profesional del profesor de matemáticas. En C. Dolores, M. García, J. Hernández y L. Sosa (Eds.), *Matemática Educativa: La formación de profesores* (pp. 13-25). México: Díaz de Santos.

Dolores C. y Hernández, J. (2012). El reconocimiento de la matemática educativa como campo académico. El caso de la estructura institucional. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp.1239-1246). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Facultad de Ciencias de la Educación (2002). *Documento curricular. Licenciatura en educación media especializada en matemáticas*. Documento presentado en reunión de academia, Colima, Colima, México.

Facultad de Ciencias de la Educación (2015, Febrero). *Documento curricular. Licenciatura en enseñanza de las matemáticas*. Documento presentado en reunión de academia, Colima, Colima, México.

Godino J. D. (2009). *Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas*. *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.

Gómez-Chacón, I. M. (2005). Tendencias y retos en formación de profesores en Matemáticas. Vivir el presente y crear futuro en la cooperación Europa-Latinoamérica. En I. Gómez-Chacón y E. Planchart (Eds.), *Educación Matemática y Formación de Profesores. Propuestas para Europa y Latinoamérica* (pp. 15-32). Bilbao, España: Universidad de Deusto.

Hernández, J. Sosa, L. y López, I. (2013). Los formadores de profesores como punto de inflexión en la educación. *Presentado en el Segundo Congreso Latinoamericano de Ciencias Sociales: Las crisis en América Latina, diferentes perspectivas y posibles soluciones*. Universidad Autónoma de Zacatecas.

Hill H. C., Ball D.L. y Schilling S.G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.

Kieran, K. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Building meaning for symbols and their manipulation. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, 707-762). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Ojeda, A.M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: un ensayo en la enseñanza de estocásticos. En E. Filloy (Ed.), *Matemática Educativa, treinta años* (257-281). México: Santillana.

Rowland, T. y Ruthven, K. (2011). *Mathematical knowledge in teaching*. London: Springer.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15* (2), 4-14.

Sosa, L., Aparicio, E., Jarero, M., y Tuyub, I. (2013). Matemática Educativa y profesionalización docente en matemáticas. El caso de Yucatán. En C. Dolores, M. García, J. Hernández y L. Sosa (Eds.), *Matemática Educativa: La formación de profesores* (pp. 31-47). México: Díaz de Santos.

Autores

Lilia Patricia Aké Tec; UCOL. México; liliapatricia_ake@ucol.mx
José Marcos López Mojica; UCOL. México; josemarcos_lopez@ucol.mx
Cesar Martínez Hernández; UCOL. México; cmartinez7@ucol.mx

CONSTRUCCIÓN DE LA NOCIÓN NÚMERO DECIMAL POR ESTUDIANTES DE PRIMARIA. UN ESTUDIO DE CASO

Elizabeth Antero Tepec, Guadalupe Cabañas Sánchez

Resumen

Se reportan los resultados de una investigación que tiene como objetivo que estudiantes de quinto grado, matriculados en una escuela primaria de la Región Montaña Baja del Estado de Guerrero, construyan la noción de número decimal mediante la experimentación de una situación didáctica (SD). Desde el punto de vista didáctico la construcción de este objeto matemático está prevista al transitar de la fracción decimal al número decimal, tal transición responde al proceso progresivo que aborda el estudio de tres nociones matemáticas: la fracción del tipo $n = a/10^p$, la notación desarrollada y la notación decimal. El estudio se sustenta de la Teoría de las Situaciones Didácticas y la Metodología de la Ingeniería Didáctica.

Palabras clave: Número decimal, fracción decimal, notación decimal.

Introducción

Un número decimal es un número racional que posee al menos una escritura en forma de fracción decimal, de la forma $n = \frac{a}{10^p}, con\ a, p\ \in Z$, siendo esta, la fracción que tiene como denominador a una potencia de 10 (Centeno, 1997). Su origen es de tipo social y cultural, por la necesidad práctica de representar cantidades que no pueden ser expresadas solo con los números naturales. La escritura actual de estos números está vinculada a la necesidad de facilitar cálculos con fracciones decimales. Este tipo de fracciones empezó a usarse en la Antigua China, en la Arabia medieval y en la Europa renacentista. En esta época (Siglos XV y XVI), el ingeniero y matemático holandés Stevin, inventó un método para hacer cálculos con fracciones decimales sin usar el denominador, el cual explica en detalle y de forma elemental en su obra *La disme* (El décimo). Su objetivo fue enseñar a todo el mundo como efectuar con una facilidad insospechada los cálculos necesarios en la vida diaria por medio de enteros sin fracciones (Boyer, 1999).

La importancia del estudio de los números decimales en la escuela estriba en la necesidad de medir de manera aproximada cantidades continuas, lo que supone abordar un problema de interés práctico (Centeno, 1997). En nuestro país, su estudio inicia en cuarto grado de primaria, ante situaciones asociadas a la medición de magnitudes de longitud y superficie, de repartos y a la resolución de problemas en contextos de dinero. No obstante, se han reconocido dificultades en su comprensión (Ávila, 2013), y se enmarcan en torno al objeto matemático mismo y formas de representación, a las propiedades, y su operatoria. La experiencia docente confirma que en general los estudiantes tienen dificultades, entre ellas se relacionan con el valor posicional lo que redunda en la comparación entre dos o más números, el tránsito de una representación a otra y en la resolución de problemas. De ahí el interés por llevar a cabo la presente investigación.

Antecedentes del estudio

La literatura especializada da cuenta que los números decimales han sido y son protagonistas de diversas investigaciones debido a la problemática detectada en torno a tres aspectos fundamentales: sobre las ambigüedades que emergen al momento de definirlo como objeto matemático, las dificultades que presentan estudiantes de educación básica al estudiarlos y las prácticas de enseñanza que usan los profesores al momento de abordarlos en el aula de clase. Las hemos clasificado en tres tipos: epistémicas, cognitivas y didácticas.

En las de carácter epistémico, destacan los estudios de Brousseau (1981) y Centeno (1997), quienes destacan la evolución del número decimal a través de la historia. En un primer momento, surge como *noción paramatemática,* al ser utilizada inconscientemente por las sociedad –principalmente por comerciantes- cuando resolvían problemas de la vida cotidiana. Posteriormente Al-kashi es el primero en explicar una teoría de las fracciones decimales y de la noción de número decimal, él introduce las fracciones decimales concebidas como fracciones compuestas de las potencias sucesivas de un décimo, a las que llamó décimos, segundos decimales, terceros decimales, lo cual convierten al decimal en noción protomatemática, es decir, ya se usaban conscientemente. No fue hasta en 1865 cuando Stevin lo convierte en noción matemática, al presentar los elementos teóricos matemáticos que respaldarían su uso como conocimiento matemático.

En el marco de lo cognitivo, algunas investigaciones (egr. Brousseau, 1981; Centeno, 1997; Broitman, Itzcovich y Quaranta, 2003) afirman que muchos de los errores producidos por los estudiantes al trabajar con esta clase de números se deben a que extienden a este campo sus conocimientos construidos previamente en el campo de los números naturales. Konic, Godino y Rivas (2010) por su parte, identifican y caracterizan al menos cuatro tipos de dificultades:

1) El concepto de número decimal (valor de posición, conflictos con el cero).
2) La escritura y/o representación (distinción entre número y representación, equivalencias y transformaciones).
3) Propiedades (orden, densidad de los decimales en Q).
4) Las operaciones con números decimales.

Por cuanto a investigaciones de tipo didáctico, Ávila y García (2008) reportan que el estudio de los decimales es escasamente trabajado en la Educación Básica, incluso en la escuela primaria no representan un problema de enseñanza importante, debido a que los profesores consideran que unas cuantas explicaciones o actividades, como memorizar los nombres de las columnas, leer y escribir números son suficientes para darlos por vistos en la clase. Así también, Ávila (2013), plantea que cuando estudiantes de educación básica realizan pruebas estandarizadas (EXCALE) presentan un bajo desempeño en el tema *números decimales*. Gómez (2010) por su parte, afirma que las concepciones que se forman los estudiantes sobre el número decimal dependen en gran medida del enfoque y contexto de enseñanza que utiliza el profesor al abordar el tema, dado que él identifica tres tipos de contextos: contexto de la ampliación de los sistemas numéricos, contexto de la medición y contexto de las fracciones decimales.

Nuestra experiencia docente confirma esta clase de dificultades en los estudiantes, específicamente: de orden, valor posicional y dificultades con el cero, el tránsito de una representación a otra y en la resolución de problemas. Por ejemplo, cuando se les pide comparar 0.2 y 0.20, afirman que 0.20 es mayor, porque "veinte es mayor que dos". De ahí el interés por adaptar y experimentar una situación didáctica que contribuya a que niños de quinto grado de primaria construyan la noción número decimal en dos contextos de enseñanza: el de las fracciones decimales y el de la medición.

Elementos teóricos

El estudio se sustenta en la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau (1986), quien plantea pensar la enseñanza como un proceso centrado en la producción de los conocimientos matemáticos mediante la interacción del sujeto con un medio, dicha interacción refiere al concepto "situación didáctica". La TSD adopta un enfoque sistémico, que contempla las interacciones de un saber, un sistema educativo y los estudiantes con objeto de optimizar los modos de apropiación de este saber por el sujeto (Lezama, 2003). Este enfoque sistémico genera un Sistema Didáctico, denominado como el conjunto de acciones emergentes de las interrelaciones entre un docente, los estudiantes y un saber matemático.

Desde la TSD se plantean tres tipos de situaciones:

- S*ituación no didáctica:* Es aquella situación en la que no hay intención de enseñar algo, ni que el alumno aprenda, por tanto, no hay contrato didáctico.
- *Situación a-didáctica:* Es aquella en la que se efectúa una interacción entre el alumno y un medio, en este caso, representado por la situación que se le plantea al estudiante y que deberá resolver sin la intervención y ayuda del docente. Esto es, que el alumno asumirá la responsabilidad de dar solución al problema propuesto por el profesor, quién al mismo tiempo, evitará ser él quien ayude o en su defecto proporcione la respuesta.
- *Situación didáctica:* En ella se establece una relación entre el docente y el alumno respecto a las relaciones a-didácticas del sujeto con el medio, este tipo de situaciones están estrechamente relacionadas con las situaciones (a-didácticas) que el profesor diseña en torno a una intención didáctica; construcción de un conocimiento matemático específico. Es aquí donde se da lugar al contrato didáctico.

Según la tipología de las situaciones, se distinguen tres a-didácticas y una didáctica, que también se reconocen como fases de una situación. En ellas basamos el desarrollo de la SD que llevamos al aula:

- **Situación de acción (SA).** Situación a-didáctica que ubica al estudiante a interactuar con el medio a partir del uso de sus conocimientos previos. Al enfrentar al problema, analiza sus resultados, aceptando o rechazando estrategias de solución.
- **Situación de formulación (SF).** Situación a-didáctica de trabajo en grupo, en el que todos comparten sus hipóstesis construidas al enfrentarse con un problema dado. Un elemento crucial es la comunicación, el estudiante intercambia información con una o varias personas, comparte al otro/otros (estudiantes) lo que ha encontrado y este le devuelve la información para crear un modelo matemático explícito de resolución.
- **Situación de validación (SV).** Situación a-didáctica en la que se validan y comprueban los resultados obtenidos. Es aquí donde el estudiante corrobora si el modelo matemático construido que propone es efectivo o no para resolver la situación.

- **Situación de institucionalización (SI).** Es una situación didáctica en la que se formaliza el conocimiento matemático puesto en juego, en ella se deben generar conclusiones, recapitular, ordenar y sistematizar los conocimientos que estuvieron atrás de la SD. Supone establecer relaciones entre las producciones de los alumnos y el saber cultural.

Método

Desde el punto de vista didáctico la construcción del número decimal transita de la fracción decimal al número decimal, tal transición responde al proceso progresivo que aborda el estudio de tres nociones matemáticas: la fracción del tipo $n = a/10^p$, la notación desarrollada y la notación decimal. Se trata un estudio de caso y de carácter cualitativo. Se sustenta en la Metodología de la Ingeniería Didáctica, definida como un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas por un profesor-ingeniero para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático dado para un grupo concreto de alumnos (Artigue, 1995). Se desarrolla mediante cuatro fases:

1) *Análisis preliminar*: Contempla un conjunto de análisis previos al diseño de la situación. Considera tres dimensiones: el epistemológico, el cognitivo y el didáctico.
2) *Concepción y análisis a priori*: Fase en que se diseñan las situaciones didácticas y se definen las variables didácticas que permitirán controlar los comportamientos de los estudiantes durante la experimentación.
3) *Experimentación*: Puesta en escena del diseño.
4) *Análisis a posteriori y validación*: Confrontación entre el análisis a priori y el a posteriori, es decir, entre lo que se planeó y lo que se obtuvo.

Nuestro estudio versa sobre dos hipótesis:

a) La noción del número decimal se construye cuando los estudiantes comprenden a la notación decimal como expresión equivalente a la fracción decimal.

b) Los estudiantes comprenden la noción de decimal como expresión de medidas, mediante la comparación y representación de magnitudes continuas.

En la experimentación de la SD participaron ocho estudiantes (10 a 11 años) matriculados en quinto grado de una escuela primaria de la Montaña Baja del Estado de Guerrero. El estudio se llevó a cado durante cinco sesiones de 60 minutos cada una. La actividad matemática se desarrolló en un ambiente de lápiz y papel con apoyo de material tangible.

Desde una perspectiva teórica, la evolución de la construcción del número decimal, se estudia con base en cuatro modelos:

1) *Modelo implícito (M1)*. Se presenta en la SA, en él surgen nociones protomatemáticas que son utilizadas sin ser conscientes de ellas.
2) *Modelo explícito (M2)***.** Surge en la SF y en él aparecen nociones paramatemáticas, mismas que son utilizadas conscientemente como instrumentos útiles para el estudio de otros objetos.
3) *Modelo explícito justificado (M3).* Aparece en la SV, en él surgen nociones matemáticas que son objetos de conocimiento construidos, susceptibles de ser

enseñados y utilizados en aplicaciones prácticas.

4) *Modelo culturalmente validado (M4):* Es de carácter didáctico y surge en la SI. En este tipo de modelo se reconoce el objeto de enseñanza por parte del alumno y del aprendizaje del alumno por parte del profesor como un conocimiento socialmente admitido.

Diseño de la situación didáctica

La construcción del número decimal está prevista a lograrse mediante el diseño de una SD conformada por cuatro tareas. Por cuestiones de espacio se describen dos de ellas. Cada una con un objetivo específico y un número determinado de actividades.

a) Tarea 1. Ubica a los estudiantes a comparar fracciones decimales con distinto denominador. Para cada caso, en un primer momento deben conjeturar qué fracción de cada par es mayor, menor o igual. En un segundo momento deben representar las fracciones de cada par como sigue:

a) Como medida de longitud

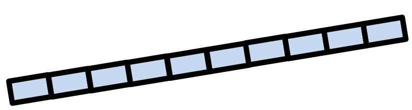
b) Como medida de superficie

Actividad para el estudiante

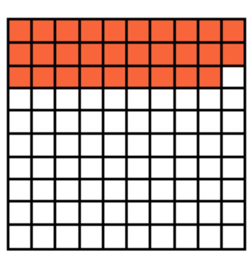
1. En cada caso, determina cuál de las dos fracciones es mayor y enciérrala.

i) $\frac{3}{10}$	*iii)* $\frac{245}{1000}$	*v)* $\frac{35}{10}$
ii) $\frac{2}{10}+\frac{9}{100}$	*iv)* $\frac{24}{10}+\frac{6}{1000}$	*vi)* $3\frac{5}{10}$

a) En quipo, representen cada par de fracciones en una recta numérica y verificar aquella que sea mayor. Para determinar las medidas apóyate de una tira subdividida en décimos y centésimos.



b) En equipo, representen los pares de fracciones decimales de cada comparación en un cuadrado subdividido en cien partes iguales y verificar aquella que sea mayor.



b) Tarea 2. Ubica a los estudiantes a identificar las diversas representaciones de los números decimales. En este caso se prevén tres: en forma de fracción decimal, notación desarrollada de la fracción decimal y en notación decimal. La introducción de la notación decimal se presenta mediante el uso de una tabla. Los estudiantes deben escribir la cantidad de unidades, décimos, centésimos y milésimos que se tiene en cada fracción decimal y ubicarlos según su valor de posición decimal.

Actividad para el estudiante

1. Se proponen tres fracciones decimales. Se van a realizar dos acciones:

a) Escribir en notación desarrollada y en lenguaje común cada fracción decimal.

En notación desarrollada	Con letra
$\frac{275}{1000} = 0 + \frac{2}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000}$	Cero unidades, dos décimos, siete centésimos y cinco milésimos.
$\frac{91}{100} =$	
$\frac{45}{10} =$	
$\frac{9}{1000} =$	

b) En la tabla siguiente, escribe la cantidad de unidades, décimos, centésimos y milésimos que hay en cada fracción decimal de la primer columna.

Fracción decimal	Unidades	Punto decimal	décimos	centésimos	milésimos	Notación decimal
$\frac{275}{1000}$	0	.	2	7	5	0.275
$\frac{90}{100}$						
$\frac{45}{10}$						
$\frac{9}{1000}$						

Discusión de resultados

La evolución hacia la noción de número decimal en los estudiantes, se discute con base en los cuatro modelos que surgen de las interacciones entre los estudiantes con el medio didáctico (SD). Se presenta por tarea y por momento, en las situaciones de acción (S-A), formulación (S-F) y validación (S-V), y la fase de institucionalización (I) a cargo del profesor. De la misma forma, por cuestiones de espacio únicamente se presentan los resultados de la Tarea 1.

a) Tarea 1

Como resultado de la comparación de entre pares de fracciones decimales surge el **M1** en todos los estudiantes, esto, cuando de manera individual eligen aquella que es mayor sin utilizar alguna propiedad. De las respuestas, se observa que al menos la mayoría de los estudiantes lo hacen incorrectamente, sin embargo, el modelo previsto tiene lugar cuando hacen uso de las relaciones >, < e = expresados en lenguaje común.

La imagen 1 muestra que surge el **M2** mientras los estudiantes representan medidas de longitud expresadas en fracciones decimales, tal representación es realizada como una forma de verificar los resultados que obtuvieron en la primer actividad (comparación de fracciones decimales). Los demás estudiantes realizaron el mismo procedimiento.

En la situación de validación, es evidente el surgimiento del **M3** cuando realizan una segunda representación de las fracciones decimales sobre un área de una superficie delimitada. Este modelo se presenta en al menos dos de los estudiantes, la imagen 2 muestra el proceder de un estudiante al momento de verificar la comparación realizada previamente.

En la situación de institucionalización se discute en grupo las relaciones de orden que se establecen con las fracciones decimales al compararlas. En este sentido, se hace presente el **M4** al momento de validar culturalmente tales relaciones.

Imagen1

Verificando la comparación de fracciones decimales en la recta numérica (M2)

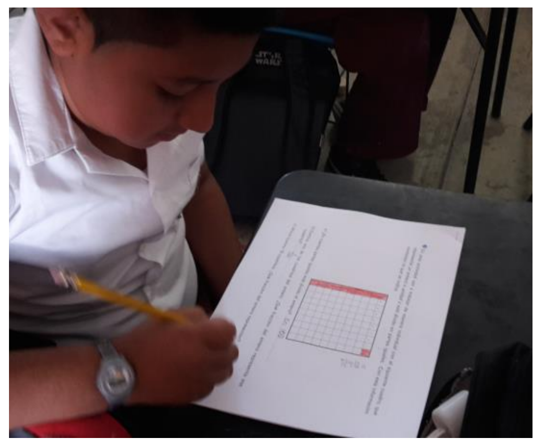


Imagen 2

. Verificando la comparación de fracciones decimales sobre áreas (M3).

Conclusiones

Como parte de las reflexiones de la experimentación y análisis de la SD asumimos que:

La enseñanza y aprendizaje de los números decimales representan un proceso complejo en la educación primaria, específicamente, cuando los estudiantes se inician en la construcción de tal noción matemática, debido a que en él surgen obstáculos asociados al propio concepto matemático (epistemológico), a la forma en que se introduce su enseñanza (didáctico) y los errores y dificultades que presentan los estudiantes al abordarlos (cognitivo). Sin embargo, actividades como describir sus características invariantes, representarlos y compararlos representan acciones factibles que favorecen su aprendizaje en este nivel educativo. En este contexto, con la SD se logró la construcción del número decimal al ubicarla en los contextos de enseñanza de la medición y de las fracciones decimales ya que permite a los estudiantes, por un lado, comprender el valor posicional decimal de las cifras del número decimal, y por otro, asignarle un uso y significado al objeto matemático al representarlos como medidas de longitud y de áreas.

También se observó que tanto el discurso matemático escolar como las prácticas extraescolares han favorecido el uso de medidas convencionales del SMD para representar longitudes, siendo que la medición es una práctica social en todo el mundo y está regida por un sistema de medición estandarizado. Entonces, cuando se trata de medir longitudes menores a la unidad se opta por usar subunidades del SMD (cm, mm) y no por usar números decimales o fracciones. En estos términos, se concluye que el SMD incide en el aprendizaje de los números decimales en dos maneras: 1) Puede resultar un obstáculo didáctico al optar por el uso de las subunidades convencionales establecidas, o, 2) Genera una comprensión de las fracciones decimales y por consecuencia de los números decimales al asociarles un uso práctico: la medición.

Agradecimientos

Para el desarrollo de la presente investigación agradecemos la participación y aportaciones del Dr. Francisco David Block Sevilla, Profesor-Investigador del Departamento de Investigaciones Educativas, dependiente del CINVESTAV-IPN.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Eds.). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Colombia: Una empresa docente.

Ávila A. y García S. (2008). *Los decimales: más que una escritura. Reflexiones sobre su aprendizaje y enseñanza.* México: INEE.

Ávila, A. (2013). Conocimientos en construcción sobre los números decimales: Los resultados de un acercamiento conceptual. *Annales de Didactique et de Ciencies Cognitives*, *18*, 29-59.

Broitman C., Itzcovich H. y Quaranta M. (2003). La enseñanza de los números decimales: el análisis del valor posicional y una aproximación a al densidad. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 6* (1), 5-26.

Brousseau, G. (1981). Problémes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des mathématiques 2*(1). Grenobrle: La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (1986). Fondaments et mèthodes de la didactique des Matemátiques. *Recherches en Didactique de Mathématiques, 7*, 33-115.

Boyer (1999). *Historia de la matemática*. España: Alianza.

Centeno, J. (1997). *Números decimales, ¿Por qué?, ¿Para qué?* España: Síntesis.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemólogica. Estudio de la función logaritmo.* (Tesis de maestría inédita). México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Departamento de Matemática Educativa.

Gómez, B. (2010). Concepciones de los números decimales. *Revista de Investigación en Educación*, 8, 97-107. Descargado de: http://webs.uvigo.es/reined/

Konic P., Godino J. y Rivas M. (2010, julio). Análisis de la introducción de los números decimales en un libro de texto. *Revista de Didáctica de las Matemáticas Números, 74*, 57-74.

Lezama, J. (2003). *Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas*. (Tesis inédita de doctorado). México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Departamento de Matemática Educativa.

Autores

Elizabeth Antero Tepec; CIMATE, UAGro. México; eliza_atavy@hotmail.com
Guadalupe Cabañas Sánchez; CIMATE, UAGro. México; gcabanas.sanchez@gmail.com

LA MATEMÁTICA ESCOLAR EN EL CONOCIMIENTO PROFESIONAL DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Luis Cabrera Chim, Ricardo Cantoral Uriza

Resumen

La Formación del Profesor de Matemáticas constituye un campo de investigación que ha tomado gran importancia en los últimos años. Se considera que es el profesor el único que puede transformar la forma como se desarrollan los procesos de enseñanza y aprendizaje. Por tanto, identificar aquellos Conocimientos Profesionales que le permiten una mayor comprensión y control de su práctica docente, constituye una línea de investigación que está involucrando a un creciente número de grupos de investigación. En este trabajo se discuten los campos de oportunidad que la Teoría Socioepistemológica puede tener respecto de esta problemática y los aportes a los resultados que se han tenido al respecto. Se propone como un campo de oportunidad los aportes de la problematización del saber matemático para resignificar a la Matemática Escolar, lo cual puede contribuir a superar la normatividad que ésta ejerce sobre la práctica docente.

Palabras Clave: Conocimiento profesional, Matemática Escolar, Problematización

Introducción

Un aspecto de gran relevancia dentro la Formación del Profesor de Matemáticas es el relacionado con aquellos conocimientos que se requieren para el desarrollo de la práctica docente. Adler, Ball, Krainer, Lin y Novotna (2005) señalan que una pregunta que guía los trabajos relacionados con línea de investigación de la formación docente es: ¿Qué es lo que los profesores de matemáticas requieren saber, y saber cómo hacer, para promover una enseñanza de calidad a través de diversos contextos? En este sentido, en el presente escrito interesa identificar y comprender aquellos aspectos y factores sobre los cuales se han puesto énfasis a la hora de desentrañar aquellos dominios o categorías de conocimiento que conforman al Conocimiento Profesional, así como el papel que juega la Matemática Escolar en estas acciones. Esto como una forma de ubicar las contribuciones que la Teoría Socioepistemológica tiene en esta línea de investigación.

Marco teórico

La Teoría Socioepistemológica plantea como uno de sus objetivos explicar y modelar el papel de *las prácticas sociales* en los procesos de construcción del saber matemático, el cual se postula como social, histórico y culturalmente situado. El saber es pues una forma de comprender y explicar las realidades en las cuales se sitúan los individuos, por tanto se encuentra vinculado a las prácticas socialmente compartidas y, a su vez, a las *prácticas sociales* (Cantoral, 2013). En otras palabras, es el resultado de una construcción social (Cantoral, 2013).

El posicionamiento anterior lleva a los trabajos que se desarrollan bajo dicha teoría a reconocer e identificar nuevas perspectivas respecto a aspectos epistemológicos y ontológicos relativos a la Matemática. Así, se han establecido y evidenciado las diferencias entre la Matemática y la Matemática Escolar. Ésta última es producto de una reconstrucción y reelaboración de la primera con fines didácticos y obedece a un proceso histórico y social particular asociado a la masificación educativa de la Matemática (Cantoral, 1995). En la Matemática Escolar los conceptos y saberes están despersonalizados y descontextualizados, y sus fuentes de significación primaria fueron sustituidos por relaciones lógico-deductivas (toman significado en función de dichas relaciones). Esto originó el planteamiento de un discurso constructivo progresivo e irreversible (Cantoral, 1995), el cual norma los actuales procesos de enseñanza y aprendizaje.

La problematización del saber permite identificar aquellas significaciones que son propias del saber, pero que se opacan dentro del establecimiento del discurso escolar, y que lo caracterizan como un saber funcional dentro un escenario específico (Montiel y Buendía, 2012). Esta problematización buscar trastocar y resignificar la Matemática Escolar (Montiel, 2010) con la finalidad de superar su efecto normativo (y en muchos casos problemático) dentro los procesos de enseñanza y aprendizaje. En general los profesores no son conscientes de esta efecto normativo y tienen dificultades para reconocerlo (Lezama y Mariscal, 2008).

El que los profesores puedan trastocar el discurso Matemático Escolar se constituye como una habilidad que debe ser propia de su formación y su Conocimiento Profesional. Este último constructo entendiéndolo como aquel conocimiento relacionado con la comprensión de su práctica profesional, el cual les permita tomar control sobre su actuar y sus decisiones con la finalidad de alcanzar los objetivos que se planteen (Carrillo, Contreras & Muñoz, 2007, Llinares, 2000, Ponte, 2012).

Aspectos metodológicos

Se analizaron seis trabajos, de distintos autores y grupos de investigación, que proponen dominios o categorías de conocimientos que se consideran integran al Conocimiento Profesional de los profesores. La Tabla 1 resume tales trabajos. Más allá de ser exhaustivos, se buscó establecer un panorama general de los mismos. Un aspecto a considerar para incluir dichos trabajos en los análisis, fue que estos partieran de fundamentos teóricos distintos. Esto con la finalidad de tener un panorama más amplio respecto a esta línea de investigación. El objetivo fue encontrar las diferencias, pero sobre todo las concordancias y similitudes, respecto a los conocimientos que integran cada uno de los dominios o categorías propuestos en estos.

Análisis de datos

Si bien los trabajos revisados formulan constructos y proponen dominios o categorías del conocimiento con ciertas particularidades y énfasis diferenciados, los siguientes puntos señalan aspectos sobre los cuales se identificaron concordancias.

1. El papel del Currículo.
2. La necesidad de comprender las particularidades de los alumnos como aprendices en su propio contexto.

3. La comprensión de la Matemática desde una perspectiva enfocada a su enseñanza, lo cual a su vez exige de un adecuado dominio de la propia Matemática.

TRABAJO	**BASE DE DESARROLLO**
Shulman (1986)	Reflexión y análisis de los conocimientos que el profesor requiere para hacer frente a su trabajo
Ball, Thames y Phelp (2008)	Análisis de las tareas relacionadas con las prácticas de la enseñanza de la matemática
Schoenfeld & Kilpatrick (2008)	Teoría de la competencia en la Matemática Educativa. Ésta proviene de una reflexión sobre los trabajo de resolución de problemas
Godino (2009)	Teoría Ontosemiótica
Davis & Simmt (2006)	El estudio de los conceptos matemáticos, bajo la perspectiva de la Ciencia Compleja
Ponte (2012)	Análisis de la práctica y el desarrollo profesional

Tabla 1: Bases sobre las que se desarrollan los trabajos sobre el conocimiento profesional analizados (elaboración propia).

El currículo es considerado un elemento de especial importancia como parte del Conocimiento Profesional del profesor. El currículo establece la organización y estructuración progresiva de los contenidos matemáticos dentro la escuela y permite le permite al profesor identificar las relaciones curriculares verticales y horizontales que tienen los conocimientos matemáticos que deben trabajar de acuerdo al nivel en el que se encuentra. Con esto, se busca que los contenidos no sean tratados de forma aislada y se contribuya a alcanzar los objetivos educativos necesarios que permitan a los estudiantes avanzar a los siguientes niveles.

Los profesores requieren comprender cómo las ideas crecen conceptualmente y cómo dicha comprensión está enraizada o requiere ser tratada de acuerdo al currículo. No sólo se requiere una comprensión curricular del nivel en el que se encuentran o de niveles posteriores, sino también de niveles anteriores. Se considera que esta comprensión permitirá determinar aquellas herramientas, materiales y enfoques más adecuados para desarrollar su práctica en pos de alcanzar los objetivos y finalidades de la educación.

Aun cuando se concuerda en la importancia del currículo, se difiere en la forma como se conceptualiza. En algunos trabajos pareciera que el currículo refiere únicamente a una secuencia de contenidos que refleja un progreso conceptual de los mismos, mientras que para otros refleja una visión respecto a los procesos y finalidades formativas y educativas propia del sistema donde se formula. Bajo esta segunda mirada, el currículo se percibe como susceptible de modificación de acuerdo a la realidad y contexto en el cual se desarrolla la práctica educativa.

Con respecto al segundo punto, resulta innegable la importancia de que los profesores comprendan cómo los estudiantes aprenden, cuáles son sus conocimientos previos y las concepciones erróneas que estos poseen, cuáles son las dificultades que tienen para aprender, cuáles son sus intereses y motivaciones, entre otros. Los profesores deben ser sensibles a cómo los estudiantes construyen o pueden dar sentido a la Matemática y cómo crear condiciones que lo logren. Para esto, es necesario que ellos se apoyen en una teoría implícita o explícita respecto al aprendizaje de las matemáticas (no necesariamente académica ni formal) la cual guíe las actividades del salón de clase y la interacción con los estudiantes.

Con respecto al tercer punto, todos los trabajos concuerdan con la idea de que el dominio de los conocimientos matemáticos por sí mismos no es suficiente para favorecer el aprendizaje de los estudiantes. No obstante, esto no demerita ni resta importancia a la necesidad de un profundo y amplio conocimiento de la propia Matemática por parte de los profesores. No obstante, también se requiere, con la misma o mayor importancia, comprenderlos desde la perspectiva de una disciplina escolar que debe ser enseñada. De este modo, en los trabajos analizados se establece que se requiere aprender a Enseñar Matemáticas. Sin embargo, la conceptualización de esta idea tiene matices y énfasis diferenciados en los trabajos.

Se comporte la idea de que los profesores no solo requieren una comprensión de los contenidos de la Matemática (aspectos clave de los contenidos, las ideas germinales, los contenidos fundamentales, entre otros), sino también la comprensión de su estructura y organización, y de la forma como las ideas y procesos son validados o rechazados dentro la disciplina. Esta comprensión resulta de importancia en cuanto le permite al profesor reconocer las formas de representación, los ejemplos, las explicaciones, las demostraciones, etc., que permitan presentar los contenidos matemáticos de forma efectiva para su aprendizaje. De este modo, se conforma un cuerpo de conocimientos que tiene una naturaleza distinta a la de la Matemática como disciplina.

En la mayoría de los trabajos analizados se han formulado dominios de conocimiento específicos que intentan englobar y caracterizar la naturaleza del nuevo cuerpo de conocimiento. En los otros, las particularidades de este nuevo conocimiento pueden identificarse en las descripciones de uno o varios dominios propuestos, o de las formulaciones base que los sustentan. Como ejemplos de esto pueden señalarse los siguientes puntos:

- Shulman propone el dominio *conocimiento didáctico del contenido*, el cual no es una mera conjunción del conocimiento del contenido a enseñar y del conocimiento de la didáctica, sino que exige una transformación que los amalgama en un nuevo conocimiento.
- Ponte habla de un *conocimiento de la Matemática para su Enseñanza*, a partir de lo cual hace una diferencia entre la Matemática y la Matemática Escolar. Entiendo esto último como producto de la transposición didáctica, pero sin establecer la necesidad de trastocarla.
- Ball, Thames & Phelps señalan que la categoría *conocimiento especializado del contenido* es propio de la actividad profesional del profesor y no compete a otras disciplinas.

- Davis & Simmt, señalan que no se trata de aprender más Matemáticas, sino de una comprensión matizada de la misma.

> *"we argue that, for teachers, knowledge of established mathematics is inseparable from knowledge of how mathematics is established. Of significance are insights into the historical emergence of core concepts, interconnections among ideas, and the analogies and images that have come to be associated with different principles"* (David & Simmt, 2006: 297).

Por otra parte, otras diferencias que pueden identificarse en los trabajos analizados refiere a que no siempre es claro cómo se concibe la naturaleza de la Matemática y, por tanto, de los procesos de construcción de sus saberes y conocimientos. En los trabajos de Davis & Simmt (2006) y Godino (2009) se concibe que los saberes matemáticos no son preexistentes al ser humano, sino que emergen de prácticas contextualizadas que las personas desarrollan. La importancia de hacer explícito este planteamiento proviene y se posibilita, hasta cierto punto, debido a que estos trabajos parten de una teoría respecto al aprendizaje o respecto a la constitución y evolución de los conocimientos. Así, este planteamiento se ve transferido de algún modo a la conformación y establecimiento del Conocimiento Profesional del Profesor, pues los resultados de investigación o el propio desarrollo de la teoría, serán referentes para enriquecerlo y moldearlo.

A diferencia de los trabajos señalados en el párrafo anterior, en los demás no parece tomarse una postura respecto a tales procesos o al menos no se hace explícita. Aun cuando estos pueden estar fundamentados y retroalimentados por la investigación, su falta de anclaje en un teoría en particular los lleva a no hacer evidente dicha postura, pudiendo éstas estar ancladas a teorías implícitas desarrolladas a partir de la práctica o de la conjunción de diferentes perspectivas (tanto teóricas-académicas como prácticas-experienciales).

El privilegiar o no una teoría de la Matemática Educativa, de la educación en general o alguna otra, como un referente para guiar, formular y establecer el conocimiento profesional del profesor, no constituye de entrada una debilidad o fortaleza, sino que responde a las condiciones y perspectivas desde la que se realizan los trabajos analizados. Como ejemplos de esto pueden señalarse los siguientes puntos:

- Shulman señala que las categorías de conocimiento que formula deben nutrirse de la investigación en el área de educación y del estudio sistemático de la docencia. Por tanto, estas categorías pueden cambiar o desaparecer, o podría requerirse formular nuevas. Esto con base en los progresos que se tengan en la investigación.
- Ponte (2012) retoma la crítica realizada por Schön a la racionalidad técnica, según la cual la investigación científica en educación no puede dar cuenta de todas las complejidades de la práctica del profesor. De este modo, en su trabajo resalta la importancia de los conocimientos producto de la práctica y la experiencia de trabajo de los docentes. Así, los conocimientos teóricos son importantes en cuanto se convierten en herramientas para superar los desafíos que se presentan en la práctica del profesor.

En resumen se puede decir que como parte de su Conocimiento Profesional, el profesor de Matemáticas requiere tener un sólido conocimiento de la disciplina, pero además se establece la necesidad de una comprensión de ésta que vaya más allá de sus contenidos. El conocimiento producto de esto tiene una naturaleza distinta al de la Matemática. Por otra parte, si bien dicho conocimiento puede y debe nutrirse de la investigación en Matemática Educativa, no puede supeditarse a ésta. Así, esto lleva a cuestionarnos cuáles son sus características y hasta qué punto puede alejarse o debe alejarse de la Matemática.

Resultados

Los trabajos analizados reconocen que el Conocimiento Profesional del profesor debe y tiene características particulares que le proporcionan una identidad y lo diferencian de otros conocimientos profesionales. No obstante, esta diferenciación parece reducirse al aspecto didáctico relativo a cómo enseñar (o en su caso potenciar el aprendizaje de) un contenido determinado y establecido. De ahí la importancia del conocimiento del Currículo, pues éste establece cómo las ideas y significados de los contenidos matemáticos van creciendo y se van robusteciendo dentro el sistema escolar. Esto se hace más evidente con el señalamiento respecto a la importancia de conocer cuáles son las representaciones o ejemplos más apropiados para que los estudiantes comprendan o aprendan tales contenidos.

En el mismo sentido anterior se plantea la necesidad de comprender las particularidades y características de los alumnos: cómo estos aprenden y cuáles son sus dificultades para significar o comprender tales contenidos a enseñar. No obstante, no se contemplan y analizan cuáles son los mecanismos que operan o subyacen a la forma como los estudiantes construyen sus conocimientos. Tampoco se identificaron señalamientos relativos al reconocimiento de los significados que los estudiantes pueden construir de los contenidos que se enseñan. Esto como parte de las características propias del contexto social y situado de la comunidad a la cual pertenecen dichos estudiantes. En otras palabras, de acuerdo con la forma como la comunidad construye y valida sus conocimientos, y las funciones que este tiene dentro ésta. Comprender esto último resulta de gran importancia desde nuestra perspectiva teórica.

Así, se postula de gran importancia que los profesores puedan resignificar la Matemática Escolar, para poder responder a situaciones como la que se señala al final del párrafo anterior. Es en esta acción que la problematización del saber matemático tiene inmensas contribuciones al Conocimiento Profesional del Profesorado. Los resultados de esta problematización pueden permitir al profesor responder cuestionamientos del tipo "¿qué enseñar?" teniendo como finalidad que los estudiantes construyan saberes matemáticos que respondan a su propio contexto social, no necesariamente bajo la estructura y significados establecidos en el currículo actual, es decir, en la Matemática Escolar. Esta última es una hipótesis teórica que deberá ser demostrada. Sin embargo, los resultados del trabajo doctoral que se desarrolla, así como otros trabajos que se desarrollan al seno de la Teoría Socioepistemológica, apoyan dicha hipótesis.

Conclusiones

Resulta importante identificar y caracterizar el campo de saberes que es propio de la práctica docente del profesor de matemáticas, el cual le permita hacer frente a lo múltiples desafíos de ésta. Una fuente de dicho saberes debe fundamentarse en la disciplina de la Matemática Educativa, sin que esto signifique supeditarse a ésta. No obstante, es bajo esta formulación que la Teoría Sociepistemológica tiene una importante contribución al Conocimiento Profesional. La problematización del saber matemático permitiría generar conocimientos que no sólo se enfoquen a cuestionamientos relativos al "¿cómo enseñar?" o

"¿qué se requiere para enseñar?" un contenido matemático. También permitirá al profesor a hacer frente a preguntas relativas al "qué enseñar" con la finalidad de que los estudiantes puedan construir saberes que les permitan responder a las particularidades que su contexto social les impone, pero también en la forma como dicha construcción se produce.

En conclusión, establecemos que los dominios y categorías de conocimiento establecidos en los trabajos analizados pueden ser enriquecidos por los resultados que se obtienen al problematizar y resignificar la Matemática Escolar. Dichos resultados también podrían llevar a la necesidad de reformular tales dominios y categorías o en su caso proponer otros. Por ejemplo, crear un dominio de conocimiento que permita resignificar abarque a la problematización del saber matemático y del saber matemático escolar, al constituirse como acciones propias de la práctica docente.

Referencias

Adler, J., Ball, D., Krainer, K., Lin, F. & Novotna, J. (2005). Reflection on an emerging field: Researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics, 60* (3), 359-381.

Ball, D., Thames, M. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes it Special? *Journal of Teacher Education, 59* (5), 389-407. doi: 10.1177/0022487108324554.

Cantoral, R. (1995). Matemática, matemática escolar y matemática educativa. Novena Reunión sobre formación de América Latina y el Caribe. En Farfán, R. (Ed.), *Memorias de la Novena Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa, 1* (Cap. Plenarias), 1-10. La Habana, Cuba: Ediciones de la UNAM, Ministerio de Educación.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. México: Gesida editorial.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. & Muñoz-Catalán, M. (2007). Un modelo cognitivo para interpretar el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas. Ejemplificación en un entorno colaborativo. *Enseñanza de las Ciencias, 25* (1), 33-44.

Davis, B. & Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teacher (need to) know. *Educational Studies in Mathematics, 61* (3), 293-319. doi: 10.1007/s10649-006-2372-4.

Godino, J. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20*, 13-31. Recuperado de http://www.fisem.org/web/union/

Llinares, S. (2000). Comprendiendo la práctica del profesor de matemáticas. En Ponte, J. & Serrazina, L. (Eds.) *Educaçao Matemática em Portugal, Espanha e Italia. Actas da Escola de Verao-1999* (pp. 109-132). Lisboa: Sociedade de Educaçao Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciencias de Educaçao.

Lezama, J. & Mariscal, E. (2008). Docencia en matemáticas: hacia un modelo del profesor desde la perspectiva socioepistemológica. En Lestón, P. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Volumen 22* (pp. 889-990). DF, México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Montiel, G. (2010). Hacia el rediseño del discurso: Formación docente en línea centrada en la resignificación de la matemática escolar. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 13* (4 – Tomo I), 69-84.

Montiel, G. & Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: Ejemplos e ilustraciones. En Rosas, A. y Romo, A. (Eds.), *Metodología en Matemática Educativa: Visiones y reflexiones* (pp. 61-88). México: Lectorum

Ponte, J. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. En Planas, N. (Ed). *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática*. Colección Crítica y Fundamentos, 41 (pp. 83-98). España: Graó.

Schoenfeld, A. & Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of profiency in teaching mathematics. En Tirosh, D. & Wood, T. (Eds.*), Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (pp. 321-354). Rotterdam: Sense Publishers.

Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher, 15* (2), 4-14. doi: 10.3102/0013189X015002004

Autores

Luis Cabrera Chim; CINVESTAV, IPN. México; lmcabrera@cinvestav.mx
Ricardo Cantoral Uriza; CINVESTAV, IPN. México; rcantor@cinvestav.mx

LA MODELACIÓN-GRAFICACIÓN PRACTICADA DESDE LA COMUNIDAD DE INGENIEROS CIVILES EN FORMACIÓN: EL CASO DEL FENÓMENO DE INFILTRACIÓN

Adriana Atenea de la Cruz Ramos, Miguel Solís Esquinca, Hipólito Hernández Pérez

Resumen

El contenido de las matemáticas en las carreras propias de la ingeniería es significativa, aunque los conocimientos matemáticos son abordados en educación básica y media resulta complicada su enseñanza y su aprendizaje en el nivel superior, impactando fuertemente en la formación de ingenieros civiles. En la revisión de los programas de ingeniería, realizada por Cajas (2013) hace evidente la ubicación de las matemáticas dentro de las ciencias básicas que preceden a las materias de las ciencias de la ingeniería y las materias profesionales. Esta importancia y dificultad de las matemáticas hace que alumnos, profesores y la sociedad en general, demande cuestionamientos tales como ¿sirve esa matemática de la escuela, en la vida diaria del ingeniero civil?

Palabras Claves: Modelación-Graficación, Superior, Ingeniería Civil, Infiltración

Introducción

En un plan de estudios de la licenciatura en Ingeniería Civil, tomemos por ejemplo el caso de la Universidad Autónoma de Chiapas (UNACH), se puede observar que están inmersas en el área de ciencias básicas específicamente las asignaturas como Geometría Analítica, Cálculo Diferencia y Cálculo Integral; sin embargo en esos planes y programas de estudio no es claro el uso, aplicación y relación de estos conocimientos con las propias de la ingeniería, y, si bien, en el currículo pudiera encontrarse una explicación de cuáles son las matemáticas importantes en la formación de un ingeniero civil aún faltaría preguntarse cuáles son las matemáticas que realmente usa el ingeniero civil en el ejercicio de su profesión o, preguntando de otra manera, cuál es la matemática presente en la *comunidad de conocimiento matemático de la ingeniería civil*.

Entonces hay matemáticas por lo menos en dos ámbitos diferentes, en el ámbito de formación de los ingenieros y las pertenecientes al ámbito mismo de los ingenieros. Aquí podemos traer a colación la dualidad del conocimiento que identifica Cordero (2013) de una matemática escolar y una matemática funcional que obedecería a dos demandas distintas, la primera a las competencias curriculares vigentes (Plan de Estudios, 2007) y la otra a los requerimientos de cada país (Cajas, 2013). Por otro lado, es fundamental establecer la promoción de actividades interdisciplinarias y transdisciplinarias aplicando métodos didácticos para que el proceso enseñanza-aprendizaje en estas áreas se lleve a cabo. Concentrarnos en el segundo ámbito nos traería como cuestionamiento cómo poder identificar la matemática funcional de la ingeniería y para llevar a cabo este estudio hemos elegido la ingeniería civil. La carencia de agua es un problema que nos aqueja a todos los seres humanos, así como la calidad del mismo. Nos centraremos en los fenómenos de la infiltración.

Marco Teórico

Los aspectos a tratar acerca de la construcción social del conocimiento matemático de la Ingeniería Civil son diversos, por lo que nos concentraremos en tres de ellos: la matematización en la ingeniería: donde se explica el porqué de la justificación matemática de los fenómenos físicos; las relaciones entre Matemáticas e Ingeniería: donde se observan las interacciones que existen entre el conocimiento científico y el matemático en la ingeniería; hacía el diseño de situaciones didácticas en Ingeniería: donde se describen algunas situaciones didácticas puestas en escena de estudiantes de la licenciatura en Ingeniería Civil que cursan la materia de Ecuaciones Diferenciales.

En un primer acercamiento se estudiará la incorporación del contenido matemático en el contexto de la ingeniería. Farfán (1997) y Romo (2009) coinciden en que el inicio de la matematización de la ingeniería tuvo lugar en l´École Polytechnique ya que fue reconocida como una de las primeras instituciones de formación de ingenieros. Farfán (1997) aborda esta temática llamándole "surgimiento de la Ingeniería Matemática" en el siglo XVIII, en él se manifiesta el proceso de institucionalización de las matemáticas en áreas propias de la ingeniería, dejando de ser una práctica tradicional. El impulsor fue Bernard Forest de Bélidor quien utilizo por primera vez la frase "La ciencia de la ingeniería" en su libro Science des Ingeniers (1720) en ese material surgen las primeras muestras que la ingeniería sea cada vez más matemática, particularmente que el lenguaje de la ingeniería se transforme en el lenguaje algebraico. Llama la atención la transformación que va sufriendo "el papel de las matemáticas en la ingeniería" sobre todo al convertirse en un conocimiento elitista.

De acuerdo con Gnedenko &Khalil (1979) las matemáticas para ingenieros no son un fin en sí mismo, sino más bien un medio que permitía estudiar temas de ingeniería así como un método que más tarde aplicarían en el trabajo práctico, pero así como el ingeniero requiere de las matemáticas para entender su problemática, ellos propusieron que los matemáticos estudiaran algunos tópicos de la ingeniería con el fin de que los ejemplos fueran de ése ámbito; logrando una mayor relación de la información presentada con los problemas reales.

Guthrie (2010) hace mención de la importancia de la educación y formación en la ingeniería ya que desde la mitad del siglo pasado la ingeniería se ha desarrollado tanto, que no puede separarse de la sociedad debido a sus fuertes necesidades. También hace recomendaciones acerca de cuál sería la educación idónea en ingeniería, es decir, que los estudiantes se formen de acuerdo a su ambiente o contexto de trabajo. Romo (2009), tiene como pregunta de investigación: ¿Qué lugar darle a las matemáticas en una formación de ingeniero? en su investigación encontró coincidentemente con Farfán en cuanto a el surgimiento de *l´École Polytechique* entre 1794 -1850; y los trabajos desarrollados por la comisión internacional de la Enseñanza de las matemáticas a principios del siglo XX. Situando su pregunta de investigación en tres instituciones: las de producción, las de enseñanza y las instituciones usuarias.

Delimitando este estudio con las categorías de construcción de conocimiento matemático como la Predicción y la Modelación-Graficación en Ingeniería Civil, encontramos que existen fenómenos naturales que son importantes ya que son propias del ejercicio de la Ingeniería. Por tanto, la resolución de problemas con información y datos recolectados de fenómenos físicos adquiere especial importancia como contexto significativo de enseñanza en los salones de clases. Cajas (2007) toma como objeto de estudio la educación de la ingeniería, sus investigaciones consideran a la ciencia como un fenómeno que transciende a la sociedad misma: a alfabetización científica y tecnológica. Esto en su gran mayoría se debe a que el saber científico no ha logrado transcender tanto a la escuela (transposición didáctica) como a la vida cotidiana. Expresa la falta de uso del saber matemático en la vida diaria, por lo que expresa que la ciencia no es utilizada en la vida cotidiana, por tanto no hay saber funcional, se encuentra entonces, que no hay matemática que refleje el uso de conocimiento científico escolar en la vida cotidiana.

Al hablar de modelación no podemos dejar de abordar las investigaciones que han aportado al estudio de la modelación, tal es la situación del trabajo Modelación-Graficación: una categoría para la matemática escolar (Suarez, 2008). De la cual se desprenden los siguientes temas que son relevantes ya la vez logra reflejar la visión que se pretende alcanzar desde el punto de vista de la Ingeniería Civil. Define la modelación como una construcción que posee una estructura propia, constituida tanto por un sistema dinámico como por la simulación, es decir, se pueden realizar diversos ajustes en su estructura con el fin de obtener un resultado deseado siendo un medio que soporta el desarrollo del razonamiento y de la argumentación. Así también, Suárez (2008), expone que la modelación sólo es considerada como una actividad que le da un sentido de aplicación a los conocimientos adquiridos en los cursos matemáticos previos cuando puede constituirse como una herramienta para la construcción misma de conocimiento matemático.

Para Arrieta (2003) la modelación es una práctica social que se ha ejercicio históricamente tanto en lo cotidiano como en lo profesional, sobre todo en el ámbito profesional cuando ha sido relacionado la mayoría de veces con fenómenos físicos, químicos o sociales (p. 85). Se destaca también las actividades que constituye el hacer, reproducir y comunicar el conocimiento matemático científico subrayando que existen separaciones y fronteras aun no definidas claramente entre la actividad matemática, científica; actividad del uso de las matemáticas y la actividad matemática escolar todos inmersos en la actividad humana (p. 96). La interacción en esta obra resulta importante ya que resalta que son las interacciones de las partes, las que caracterizan a la Socioepistemología. (p.132). Por tanto a razón de la necesidad de estudiar el proceso de adquisición y recomposición que los alumnos de la carrera de Ingeniería Civil han hecho a lo largo de su vida, a fin de construir conceptos matemáticos (Hernández, 2006).

Metodología: Ingeniería Didáctica

Para la elección de la puesta en escena se consideraron los siguientes factores: cursos tomados y semestre cursado, ya que se tenía el interés que en los equipos existieran los conocimientos fundamentales así como elementales para la ejecución de la práctica e interpretación de los resultados obtenidos. Para la realización de este trabajo de investigación, la obtención de datos es relevante, mismos que se adquirieron al utilizar el infiltrómetro en un suelo especifico, posteriormente el desarrollo de la modelación se lleva a cabo por medio de la interpolación. El método generalmente usado en la determinación de la infiltración de un suelo especifico, es el del cilindro infiltrómetro, ya que es el más adecuado debido a la posibilidad de mojar directamente una superficie mayor de suelo (bordes, regueros en contorno, aspersión). El flujo radial se disminuye por medio de un área tampón alrededor del cilindro central, y el movimiento del agua es en dirección vertical hasta que pasa a la parte inferior de la orilla del cilindro, desde donde puede producirse un flujo bidimensional, controlado por el potencial matricial del suelo. La restricción determinante en su mayoría en el uso de cilindros infiltrómetros es que su instalación en el suelo genera un cierto grado de alteración de sus condiciones naturales ya que se destruye la estructura o compactación, que provoca una variación en la cantidad de agua que penetra en el suelo. Aunado a lo anterior, la interfase entre el suelo y el lado del cilindro metálico hace posible una entrada anormal de agua, aumentando el volumen de agua que se infiltra en un tiempo específico. Otro problema que se presenta en el uso de cilindros es el aire atrapado al interior de la columna de suelo. La dificultad del aire para escapar desde el suelo bajo condiciones de fluido saturado, crea un colchoncillo interno de aire que impide el movimiento vertical del agua, resultando velocidades de infiltración menores. Se hace hincapié que en suelos alterados, como un terreno arado, no es recomendable medir la velocidad de infiltración.

Los participantes en la puesta en escena de la situación didáctica fueron: un profesor, titular de asignatura de la licenciatura de ingeniería civil, un alumno de la maestría en matemática educativa. En la primera puesta en escena participaron diez alumnos, en la segunda puesta en escena participaron 20 alumnos, en ambas situaciones, los alumnos cursaban la materia de ecuaciones diferenciales, como parte de la currícula correspondiente al tercer semestre de la carrera de ingeniería civil. Los estudiantes han aprobado cursos de: algebra superior, calculo diferencial de primer semestre; de segundo semestre: cálculo integral, algebra lineal, aunado a estas asignaturas están, geometría analítica y cinemática. El titular de la asignatura está adscrito a la Academia de Ciencias Básicas de Ingeniería y Humanísticas de la facultad de ingeniería; imparte las materias de: ecuaciones diferenciales y métodos numéricos, Los estudiantes participaron en esta secuencia como actividad, efectuándose en horario de clases, incorporándose como un practica en la que se pretende reintegrar los contenidos de naturaleza matemática y/o físico en las ciencias de la ingeniería.

La actividad experimental se desarrolla de la siguiente manera: los alumnos seleccionan un lugar a una distancia de 2 a 5 metros, de un sitio de humedad del suelo o un sitio de caracterización del suelo, colocan dos estructuras cilíndricas en el suelo y echan agua hasta unos 5 cm. de altura. Miden y anotan el tiempo que el nivel de agua tarda en bajar una distancia fija de 2-4 cm. esta medición se repite para determinar la facilidad o dificultad con la que el agua se mueve verticalmente por el suelo. Una clase se destinó para construcción y prueba del infiltrómetro de doble cilindro y posterior mente una hora para la medición. La frecuencia con que debe realizarse esta prueba es de Tres o cuatro veces al año en el sitio de estudio de humedad del suelo. Una vez en el sitio de caracterización del suelo. En todos los casos, deben realizarse tres bloques de mediciones dentro de un radio de 5 m.

La primera fase de la práctica es la construcción del infiltrómetro

1. Quitar la base de los cilindros de metal.
2. Utilizar un rotulador resistente al agua para hacer una línea que sirva de marca de referencia del tiempo, en el interior del cilindro más pequeño. La anchura de la línea debe ser de 20 a 40 mm. y a 9 cm. de la base del cilindro. Muchos cilindros suelen tener estrías o relieves que pueden servir de marcas de referencia pero aún así es conveniente hacer la marca para mayor visibilidad.

3. Medir y registrar la anchura de la línea de referencia (en mm.).
4. Medir y registrar la anchura del cilindro interno y externo (en cm.).Para que el alumnado realice medición con mayor comodidad es mejor que practique el protocolo, incluyendo la toma de tiempo, en un lugar donde se pueda obtener agua con facilidad. En un lugar arenoso, lo intervalos de tiempo de infiltración serán más cortos por lo que los alumnos tendrán la oportunidad de realizar más mediciones en un periodo de tiempo establecido.

Segunda fase: manejando materiales

El alumnado puede utilizar un cronómetro o un reloj con segundero para tomar el tiempo del flujo del agua que se introduce en el suelo. Si se utiliza un cronómetro, se comenzará a medir el tiempo cuando se añada el agua en el cilindro interno. Se registrará el tiempo calculado entre el tiempo de inicio y el de finalización del agua recorriendo una distancia establecida.

Tercera fase: desarrollo de la práctica

1. Cortar cualquier planta (hierba) de la superficie del terreno y quitar la cobertura orgánica suelta que está sobre un área mayor que lo que ocupa el cilindro más grande. Hay que tratar de no perturbar el suelo.
2. Introducir los cilindros de 2 a 5 cm en el suelo, comenzando con el más pequeño (*). Se puede utilizar un martillo para golpear el cilindro contra la superficie. Si se usa el martillo es aconsejable colocar un bloque de madera entre el martillo y el cilindro para distribuir homogéneamente la fuerza del martillazo. No golpear muy fuerte con el martillo para no dañar el cilindro.
3. Completar la sección superior de la Hoja de Datos de Infiltración del Suelo. Si se está utilizando un cronómetro ponerlo en marcha.
4. Añadir agua entre los dos cilindros. Mantener aproximadamente igual el nivel del cilindro externo al nivel del cilindro interno. Observar: el nivel de agua en el cilindro de fuera baja más rápidamente que el del cilindro de dentro. Añadir agua al cilindro interno justo por encima de la línea de referencia superior. Observar: que el cilindro de fuera no debe dejar escapar agua por abajo. Si sale agua, se comienza en otro lugar, se clava el cilindro externo más profundamente o se amontona barro alrededor de su base.
5. Cuando el nivel del agua en el cilindro interno alcance la marca superior de referencia, se registra el tiempo que indica el cronómetro o el reloj con segundero en la Hoja de Datos de Infiltración. Mientras se está tomando el tiempo hay que mantener el nivel de agua igual en ambos cilindros, teniendo cuidado de no derramar agua en el cilindro interno (el uso de un embudo puede ayudar) no dejar que se seque alguno de los cilindros.
6. Cuando el nivel de agua en el cilindro interno alcanza la marca inferior de referencia, se registra el tiempo. Ese es el tiempo de finalización.
7. Se calcula el intervalo de tiempo haciendo la diferencia del tiempo de inicio y el de finalización. Se registra este intervalo en la Hoja de Datos de Infiltración.
8. Se repiten los pasos 4 al 7 durante 45 minutos o hasta que entre dos intervalos de tiempo consecutivos haya 10 segundos. Algunas arcillas y suelos compactos pueden ser impermeables a la infiltración de agua por lo que el nivel de agua bajará muy poco en 45 minutos. En este caso, se registra el cambio de la profundidad del agua, si lo hay,

con precisión en mm. Se registra el momento en que se termina de observar, como el tiempo de finalización. La medición de infiltración consistirá en un sólo intervalo.

9. Retirar los cilindros. ESPERAR 5 MINUTOS.
10. Se mide la humedad del suelo cercano a la superficie (0 - 5 cm. de profundidad) del lugar de donde se han retirado los cilindros. Se debe seguir el Protocolo Gravimétrico de Humedad de Suelo. Sólo es necesario coger una muestra.
11. Se realizan dos mediciones más de infiltración dentro de un área de un diámetro de 5 m. Estas mediciones se pueden realizar a la vez si hay otros grupos, o bien, a lo largo de varios días (si el contenido de agua en el suelo no se ha modificado por la lluvia). No pasa nada si series múltiples tienen el mismo número de lecturas. Si se toman más de tres bloques de mediciones, se enviarán los tres mejores.

Cuarta Fase: Medición de los datos

La velocidad de infiltración se determina dividiendo la distancia a la que el nivel de agua decrece, por el tiempo que se requiere para que disminuya este nivel. Esto es lo mismo que la anchura de la banda de referencia del infiltrómetro dividida por la diferencia entre el tiempo de inicio y el tiempo de finalización de un intervalo. La Hoja de Datos de Infiltración puede utilizarse para registrar los datos y ayuda a calcular los valores que se necesitan para determinar los resultados de las mediciones. La velocidad del flujo para cada intervalo de tiempo es el valor medio durante un intervalo. La velocidad del flujo debe determinarse en el punto medio de los tiempos de intervalo. La infiltración debería disminuir con el tiempo y es importante llevar la cuenta del tiempo acumulado desde cuando se añadió el agua por primera vez en el cilindro interior. La tabla y el gráfico que aparecen a continuación demuestran cómo calcular la velocidad de infiltración y cómo plasmarla en un gráfico.

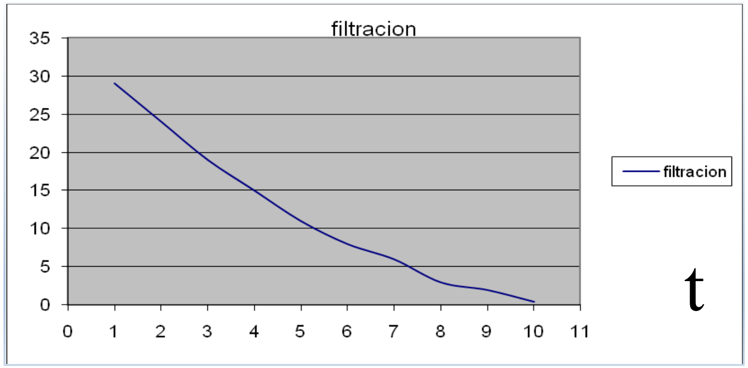
Resultados

Se analizaron los resultados obtenidos por los alumnos y posteriormente se analizó por medio de la ecuación de Horton (Aparicio, 2004) y por la fórmula de Interpolación de Newton. Primera toma de muestra

T inicial	T final	intervalo	Punto medio	acumulado	Velocidad
1.56	3.23	1.27	2.39	2.39	15.74
3.25	4.55	1.30	4.10	4.10	10.38
4.56	6.53	2.27	5.54	5.54	8.81
6.58	9.24	3.06	8.31	8.31	6.53
9.26	12.49	3.23	11.27	11.27	6.1
12.50	16.36	3.46	14.43	14.43	5.7
16.39	20.37	3.58	18.38	18.38	5.2
20.43	24.59	4.16	22.51	22.51	4.8
25.00	29.20	4.20	27.03	27.03	4.7

Tabla 1 Datos obtenidos por el equipo uno de la primera puesta en escena

Al graficar los datos se obtiene:



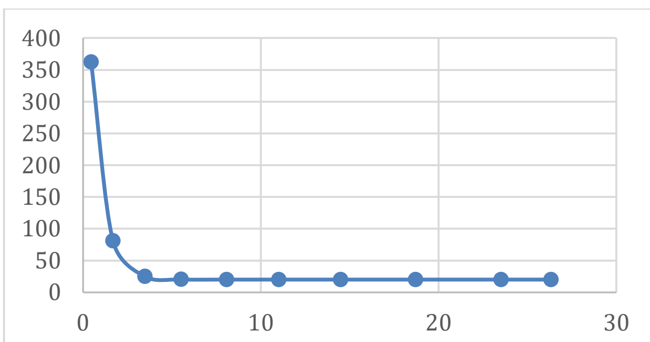
Grafica 1. Gráfica que representa el tiempo en contra de la velocidad de filtración de la tierra del equipo uno de la primera puesta en escena.

Entre las observaciones de los alumnos se encontraron las siguientes argumentaciones:

"*Qué la velocidad de filtración que posee la tierra depende directamente de la cantidad de agua que se encuentre concentrada en esta, lo cual se puede apreciar que al inicio de la práctica la velocidad de filtración encontrada fue alta, mientras que al transcurrir diferentes intervalos de tiempo, la velocidad de filtración es más lenta*" .

Posteriormente se procedió a utilizar los datos obtenidos por los alumnos para analizarlos por medio de la Ecuación de Horton, se realiza con los datos proporcionados por el equipo 1 (Tabla No. 1)

$$f_p = f_c + (f_0 - f_c)\, e^{-kt} \quad (1)$$



Grafica 2 Gráfica que representa el tiempo en contra de la velocidad de infiltración de la tierra determinado por la ecuación de Horton.

De la tabla anterior se construye a partir de la siguiente expresión el polinomio de interpolación de Newton:

$$y_n = y_0 + n\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots + n\Delta^{n-1} y_0 + \Delta^n y_0 \cdots\cdots \quad (2)$$

Donde $n = \frac{x - x_0}{h}$, el valor inicial de infiltración es $y_o = 10.31\ cm$ y los espaciamientos de tiempo o intervalo de tiempo es $h = 5\min$

Si reordenamos algunos términos para simplificar la ecuación tenemos que:

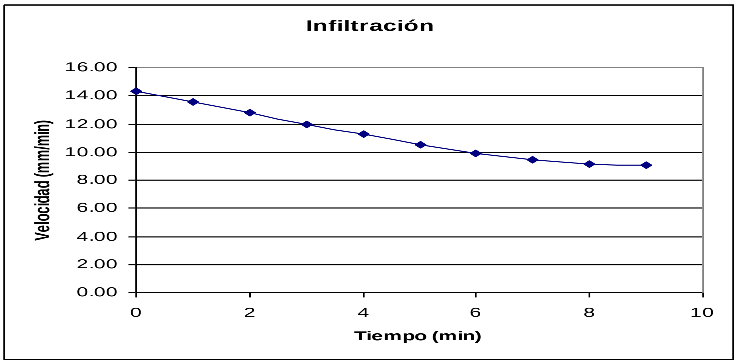
$$= 10.31 + \left(\frac{x-5}{5}\right)\left[\frac{(-3.39)}{1\,!}\right] + \left(\frac{x-5}{5}\right)\left(\frac{x-5}{5} - 1\right)\left[\frac{(1.56)}{2!}\right]$$

$$+\left(\frac{x-5}{5}\right)\left(\frac{x-5}{5}-1\right)\left(\frac{x-5}{5}-2\right)\left[\frac{(-0.45)}{3!}\right]$$
$$+\left(\frac{x-5}{5}\right)\left(\frac{x-5}{5}-1\right)\left(\frac{x-5}{5}-2\right)\left(\frac{x-5}{5}-3\right)\left[\frac{(-1.42)}{4!}\right]$$

Finalmente multiplicando todos los coeficientes de cada "X" por los términos correspondientes y reduciendo los términos semejantes se obtiene la ecuación que modela los datos de la tabla de valores antes proporcionados:

$$-0.000095\,x^4+0.00415\,x^3-0.03x^2\text{-}0.715\,x+14.26$$

Con el polinomio obtenido se construyen la siguiente gráfica.



Gráfica 3 Gráfica de Infiltración por medio del polinomio de Newton. Velocidad (mm/min) contra Tiempo (min).

De igual forma si se requiere hacer un análisis cada cuatro minutos, se utilizará el mismo polinomio de interpolación pero ahora el valor inicial de infiltración es de y_o*=10.938 cm* y los espaciamientos de tiempo o intervalo de tiempo es de *h= 4 min*

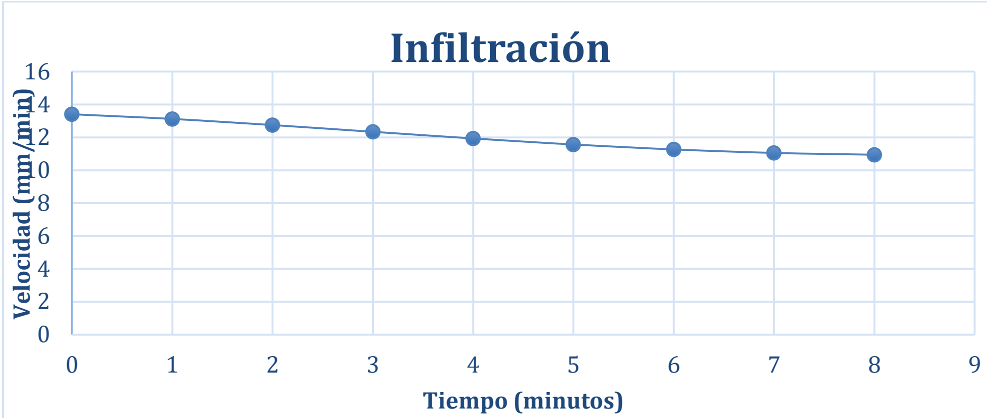
$$=10.938+\left(\frac{x-4}{4}\right)\left[\frac{(-2.712)}{1!}\right]+\left(\frac{x-4}{4}\right)\left(\frac{x-4}{4}-1\right)\left[\frac{(0.624)}{2!}\right]$$
$$+\left(\frac{x-4}{4}\right)\left(\frac{x-4}{4}-1\right)\left(\frac{x-4}{4}-2\right)\left[\frac{(0.222)}{3!}\right]$$

$$+\left(\frac{x-4}{4}\right)\left(\frac{x-4}{4}-1\right)\left(\frac{x-4}{4}-2\right)\left(\frac{x-4}{4}-3\right)\left[\frac{(-0.402)}{4!}\right]$$
$$+\left(\frac{x-4}{4}\right)\left(\frac{x-4}{4}-1\right)\left(\frac{x-4}{4}-2\right)\left(\frac{x-4}{4}-3\right)\left(\frac{x-4}{4}-4\right)\left[\frac{(-0.692)}{5!}\right]$$

Finalmente multiplicando todos los coeficientes de cada "X" por los términos correspondientes y reduciendo los términos semejantes se obtiene la ecuación que modela los datos de la tabla de valores antes proporcionados:

$$0.0000055\,x^5-0.000395\,x^4+0.01058\,x^3\text{-}0.729\,x^2-0.222208\,x+14.26$$

Con el polinomio obtenido se construyen la siguiente gráfica:



Gráfica 4. Gráfica de Infiltración por la fórmula de interpolación de Newton. Velocidad (mm/min) contra Tiempo (min).

Conclusiones

Como un método de predicción en el fenómeno de infiltración se encuentra el método de Horton usado comúnmente para ejemplificar el comportamiento de dicho fenómeno, a pesar de que este método generaliza los tipos de suelos, dando como parámetros únicamente tres clasificaciones, partiendo de factores sin gran relevancia tales como: la vegetación en términos "desnudo o cubierto de vegetación" cuando en realidad esas son solo condiciones ideales. De aquí que, reflexionando a partir de los resultados del análisis de fenómeno de infiltración por medio de la ecuación de Horton y del polinomio de interpolación de Newton, se concluye que lejos de unificar y uniformizar el tipo de suelo, el polinomio de interpolación es una herramienta que logra ejemplificar explícitamente y con mayor veracidad dicho fenómeno ya que se obtiene una gráfica de datos que manifiesta el comportamiento clave de éstos, logrando así uno de los "beneficios" de este estudio: la predicción de fenómenos físicos mediante la modelación.

Referencias

Aparicio, F. (2004). *Fundamentos de Hidrología de Superficie*. Editorial Limusa. México.

Arrieta, J. (2003). Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula. *Tesis de Doctorado. No Publicada*. CINVESTAV, México

Cajas, F. (2013).La formación de Ingenieros/as Civiles y Matemáticos/as en la Actualidad: Tendencias y Desafíos. *II seminario-taller centroamericano de armonización académica regional de las licenciaturas en Ingeniería Civil y matemática.* Gdl., México.

Cajas, F. (2007) De Parvulitos a las Ingenierías: *Alfabetización Científico- Tecnológica; Democracia y Educación*, Olmedo España y Bienvenido Argueta, Editores. Editorial de la Universidad de San Carlos de Guatemala. 239-258.

Cordero, F. (2013) Matemáticas y el cotidiano. Diplomado. *Desarrollo de Estrategias de Aprendizaje para las Matemáticas del Bachillerato, La transversalidad Curricular de las Matemáticas*. Documento interno de trabajo.

Farfán, R. (1997). *Ingeniería Didáctica: un estudio de la variación y el cambio*. Editorial Iberoamérica. México D. F.

Gnedenko, B.V., Khalil, Z. (1979). *La educación matemática de los ingenieros,*Ciencias de la Educación en Matemáticas, Volumen 10.

Guthrie, P. (2010). Beyond Systems Engineering – Educational Approaches for the 21st Century. En D. Grasso, M.B. Burkins (eds.), *Holistic Engineering Education, Springer Science BusinessMedia.*

Hernández, H. (2006). Una visión Socioepistemología de la matematización del movimiento: del binomio de Newton a la serie de Taylor. *Tesis de maestría no publicada.* Universidad Autónoma de Chiapas. México.

UNACH (2007) *Plan de estudios de la Licenciatura Ingeniería Civil*. Facultad de Ingeniería UNACH-México.

Romo A. (2007). The role of mathematical knowledge in a practical activityengineering projects at university level. *CERME 5,* 2007.

Suarez, T. (2008). *Modelación-Graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultado de un estudio socioepistemológico.* Tesis doctoral no publicada, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Autores

Adriana Atenea de la Cruz Ramos; UNACH. México; ateneadr@hotmail.com
Miguel Solís Esquinca; UNACH. México; solise@unach.mx
Hipólito Hernández Pérez; UNACH. México; polito_hernandez@hotmail.com

EMERGENCIA DE LO HIPERBÓLICO EN UN CONTEXTO DE VARIACIÓN INVERSA

Aurea Guillermo Castellanos, Daniel Ortiz May, Landy E. Sosa Moguel

Resumen

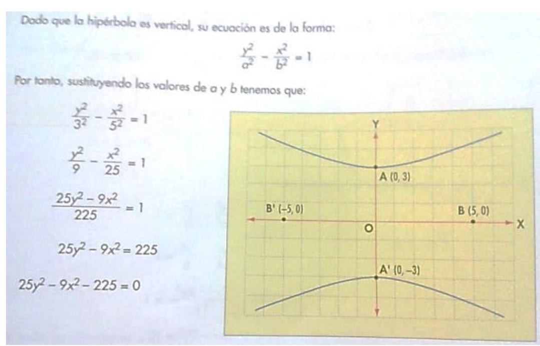
En el presente trabajo se reporta un estudio socioepistemológico acerca de lo hiperbólico a propósito del problema de aprendizaje que representa la ausencia de la interpretación de la hipérbola como modelo matemático. A partir de un análisis sistémico de las dimensiones social, epistemológica, didáctica y cognitiva se determinó que la construcción y significación del saber *hipérbola* están asociados al estudio de lo *hiperbólico* como una forma de razonamiento matemático. Así pues, la intención del trabajo es determinar las formas, razonamientos y contextos en los que emerge lo hiperbólico en estudiantes de bachillerato mediante la aplicación de un diseño didáctico basado en una situación de modelación del movimiento, bajo un contexto de variación inversa.

Palabras clave: Contextos, variación inversa, hiperbólico, socioepistemología.

Introducción

La desarticulación entre las múltiples representaciones conceptuales que subyacen en el discurso escolar sobre la hipérbola tales como: una forma geométrica estática (curva) obtenida al seccionar un cono doble por un plano, su representación gráfica asociada a la idea de lugar geométrico y sus expresiones o modelos algebraicos, suscita limitaciones cognitivas en el trabajo de los estudiantes que imposibilitan el desarrollo de su habilidad para emplear, seleccionar y moverse entre las representaciones algebraicas y gráficas (Knuth, 2000), lo cual hace a los estudiantes priorizar los cálculos algebraicos por encima de las ideas geométricas asociadas a éstos (Díaz, 2007). Asimismo, da lugar a la dificultad para realizar la representación coordinada del contenido matemático relativo a las secciones cónicas, particularmente para mirar a las figuras geométricas como objetos algebraicos, y viceversa (Arcos, 1998).

Tras el análisis de libros de texto tales como el de May, Pech y Reyna (2003), se observó que en el tratamiento de la hipérbola predomina el estudio de ésta como figura geométrica estática que se obtiene al seccionar un cono doble, haciendo énfasis en el análisis de sus "elementos" como lugar geométrico y en la determinación de la ecuación que le corresponde a partir de fórmulas (Imagen 1).


Dado que la hipérbola es vertical, su ecuación es de la forma:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Por tanto, sustituyendo los valores de a y b tenemos que:

$$\frac{y^2}{3^2} - \frac{x^2}{5^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{25} = 1$$

$$\frac{25y^2 - 9x^2}{225} = 1$$

$$25y^2 - 9x^2 = 225$$

$$25y^2 - 9x^2 - 225 = 0$$

Imagen 1. Tratamiento algebraico de la hipérbola: determinación de su ecuación a partir de sus vértices

Empero en los textos se muestra una desafiliación con el estudio de lo variable, ya que el discurso presenta rupturas entre la forma geométrico-algebraica de la hipérbola, detectándose la ausencia de sentido y significación de ésta como modelo del comportamiento de relaciones entre variables en situaciones variacionales específicas.

Un discurso escolar de las secciones cónicas que es unidireccional, es decir, que parte de la representación estática de lugares geométricos en gráficas y se hace corresponder con expresiones algebraicas canónicas, soslayan el estudio de lo variable e inhiben la capacidad de interpretación y representación de lo hiperbólico en contextos variacionales. Históricamente, el origen y desarrollo de la Geometría Analítica en general y de las secciones cónicas en particular, se basó en la conexión de este contenido geométrico con su forma algebraica a través de la idea de magnitud variable que surgió del estudio del movimiento, adquiriendo importancia práctica las cónicas para la astronomía, la mecánica y la tecnología en la época de Descartes. Dicho desarrollo se basó en la idea de Descartes de considerar a x e y en una ecuación, no como incógnitas, sino como variables, de modo que la ecuación expresaría la interdependencia entre dos variables (Delone, 1956).

Contrario a la naturaleza epistemológica de la hipérbola, se concluye que en el escenario de su tratamiento escolar antes dibujado, no se favorece el desarrollo de formas de pensamiento para establecer y representar relaciones entre variables o identificar comportamientos de curvas que permitan generar modelos hiperbólicos en situaciones de esta naturaleza, ocultándose el sentido y significado del saber. Siendo así, se reconoce el problema que representa la ausencia de interpretación de la hipérbola como modelo matemático.

Epistemológicamente, el origen de la hiperbólica y las secciones cónicas tiene lugar en el trabajo de Hipócrates de Quíos para resolver el problema de la duplicación del cubo mediante la determinación de dos segmentos x e y que interpola entre dos medias proporcionales a (longitud de la arista del cubo) y $2a$ para establecer la proporción continua: $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$. De esta relación se obtienen dos curvas parabólicas y una hiperbólica, ésta última de tipo equilátera dada por la expresión $xy = 2a^2$. La búsqueda de una interpretación geométrica que justifique dicha expresión algebraica es un detonante para el desarrollo de la hipérbola y es ofrecida por Menecmo hacia el 350 a.C. Él identificó que para la resolución del problema existe toda una familia de curvas con tal propiedad, obtenidas al seccionar conos rectos por un plano perpendicular a su generatriz, siendo de tres tipos según si el ángulo en el vértice sea agudo, recto u obtuso. La hipérbola era la curva de la sección resultante de intersectar un cono obtusángulo. (Boyer, 1986)

Prescindir del cono para el estudio de las propiedades inherentes de la hipérbola dio lugar a la noción de hipérbola como lugar geométrico, y al estudio de las aplicaciones de ésta en el movimiento de planetas (Boyer, 1986). Sin embargo, es a través de la introducción de un sistema de coordenadas por parte de Descartes que se permite la conexión de su forma geométrica a la algebraica dando lugar a la evolución y desarrollo de la hipérbola como modelo, pues como se señaló anteriormente, para él una ecuación con dos "incógnitas" representa la interdependencia entre dos variables y reescribiéndola en la forma $F(x, y) = 0$. Así, "en el plano cartesiano a cada par de valores x e y corresponde un punto y, recíprocamente, a cada punto corresponde un par de coordenadas x, y" (Delone, 1956).

Luego, la ecuación $F(x, y) = 0$ determina el lugar geométrico de los puntos del plano cuyas coordenadas satisfacen la ecuación y estará representado por una curva; y viceversa, un lugar geométrico caracterizado por una condición geométrica puede definirse mediante una ecuación que exprese tal condición en lenguaje algebraico, por medio de coordenadas.

Nótese el cambio conceptual del uso de las literales en las expresiones algebraicas, a diferencia de los griegos, en la Geometría Analítica de Descartes, éstas no representarían segmentos sino magnitudes variables. De allí que, el estudio de comportamientos variables a través de su representación como curvas en unión con su expresión algebraica, posibilitó la evolución de la noción de hipérbola como forma geométrica a modelo de relaciones entre variables. Esto último se evidencia en los contextos de uso de lo hiperbólico en el ámbito científico y profesional hoy en día, por ejemplo, para describir el comportamiento de situaciones de movimiento mecánico (como la segunda ley de Newton y la ley de la Palanca), trayectorias (cuerpos celestes y partículas subatómicas), o relaciones entre variables no geométricas (como la Ley de Boyle o la Ley de Ohm). En estos contextos puede reconocerse a lo hiperbólico en relación con la constantificación de lo variable, por ejemplo, para modelar la conservación del área (constante) de rectángulos al variar las longitudes de su base y altura.

Siguiendo esta línea de desarrollo y evolución de la hipérbola, se detecta a lo hiperbólico como el elemento articulador de sus representaciones y significaciones en su proceso de construcción social, particularmente situado en contextos de variación inversa. Por ende, asumimos que lo hiperbólico, en tanto forma de razonamiento asociada a la interpretación y representación de un comportamiento de relación inversa entre variables, permite resignificar a la hipérbola. En otras palabras, decimos que para el aprendizaje de la hipérbola habría que situarse en el estudio y entendimiento de lo hiperbólico. Por tanto, a partir de un estudio socioepistemológico pretendimos caracterizar a lo hiperbólico como una forma de razonamiento matemático en un contexto de variación inversa, por medio de investigar cómo emerge lo hiperbólico en una práctica de modelación del movimiento.

Marco Teórico

Esta investigación se enmarcó teóricamente en la Socioepistemología, puesto que el estudio de la construcción social del conocimiento relativo a la hipérbola, se basó en el análisis sistémico de las dimensiones cognitiva, didáctica, epistemológica y sociocultural asociadas a ese saber. Asimismo, se reconoce que la construcción de conocimiento matemático y su aprendizaje obedecen al contexto en que se desarrollan las personas al realizar una actividad humana socialmente compartida (Cantoral, 2013).

El aprendizaje es contextual, las personas movilizan su cognición en función de los contextos en que se sitúen. Por ejemplo, en tareas de aprendizaje matemático, los razonamientos de los estudiantes se hallan en estrecha relación con la naturaleza de la actividad planteada; las condiciones socio-culturales en las que se encuentra un individuo son determinantes en su manera de actuar y pensar (Aparicio, Sosa, Tuyub y Jarero, 2012).

En general, la perspectiva socioepistemológica no se enfoca en un saber en particular, sino que proporciona una visión más global respecto al proceso didáctico, integrado por docente, alumno y saberes validados para ser enseñados, que confluyen en una realidad particular inmersos en una cultura y tiempos específicos, lo que confiere matices a las relaciones establecidas entre los mismos (Ferrari y Farfán, 2002).

Desde una postura socioepistemológica centrada en el análisis de las prácticas, usos y contextos ligados a la construcción de conocimiento matemático, ha sido posible proponer perspectivas didácticas alternativas no sólo acerca de nociones como lo logarítmico, lo periódico, las funciones y lo variacional, etc. (Farfán y Ferrari, 2010; Buendía, 2011), por mencionar algunos ejemplos. Bajo esta perspectiva de estudio de los fenómenos didácticos, se profundiza en el entendimiento de los procesos de producción y difusión del saber matemático, incorporando no sólo referentes de la génesis conceptual o procedimental, sino también su contexto de origen social, con el fin de esclarecer ejes rectores en su estudio y proponer epistemologías alternativas para la matemática escolar.

Metodología

El desarrollo de esta investigación cualitativa y experimental, parte de una problematización socioepistemológica de lo hiperbólico, pues permite "identificar aquellas significaciones que le son propias al saber y que se diluyen, se transforman o se pierden al configurar un discurso escolar, pero que lo caracterizan como un saber funcional en escenarios específicos" (Montiel y Buendía, 2012, p. 63). De modo que, tanto la problemática de aprendizaje como el diseño del instrumento se sustentan en un análisis socioepistemológico acerca de lo hiperbólico, en específico, en el análisis de la naturaleza epistemológica y didáctica de la hipérbola, así como sus usos en escenarios no escolares.

En dicho análisis se identificó que, contrario a las rupturas en el tratamiento didáctico y aquellas cognitivas en los estudiantes, la construcción y significación de la hipérbola estuvo asociada al estudio de lo hiperbólico para representar gráfica y simbólicamente el comportamiento de relaciones inversamente proporcionales entre variables en situaciones específicas.

Con el propósito de determinar cómo emerge lo hiperbólico en los razonamientos de estudiantes de bachillerato en una situación de simulación-modelación del movimiento de un objeto, se elaboró un diseño didáctico con eje rector en la práctica de modelación y el estudio del comportamiento hiperbólico que se describe en la situación, considerando las siguientes variables identificadas en el estudio socioepistemológico:

i. el análisis de lo hiperbólico como cualidad de una curva;

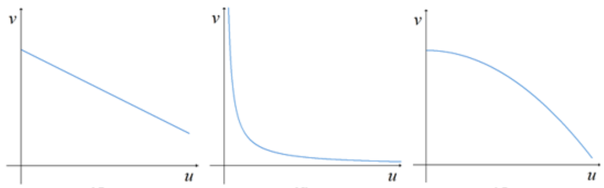
ii. la representación gráfica y algebraica de lo hiperbólico como modelo de una relación inversamente proporcional entre variables.

El diseño está compuesto por cinco tareas que se exponen a continuación:

1. *Cada una de las siguientes gráficas representa una relación entre las variables u y v.*

   a) Explica detalladamente la relación entre las variables a partir de cada gráfica.

   b) Explica ampliamente si las gráficas presentan algo común o no, en su caso indicarlo.



Gráfica A ***Gráfica B*** **Gráfica C**

2. El archivo **Movimiento1.gsp** contiene la simulación del movimiento de un objeto con diferente masa cuando éste es impulsado por una fuerza de $24N$ *(Newtons)* para ponerlo en movimiento. Analiza la simulación para realizar lo que se indica a continuación.

   a) ¿Cómo describes el movimiento observado en términos de la aceleración (a) y la masa (m)?

   b) Bosqueja la gráfica que representa la relación entre las variables masa (m) y aceleración (a) del objeto.

3. En el archivo **Movimiento2.gsp** se ilustra cómo varía la aceleración de un objeto conforme aumenta su masa al aplicarle una fuerza constante de $48\,N$ que lo pone en movimiento.

   a) Analiza la simulación y determina si un objeto con masa de $12\,Kg$ que acelera a $4\,m^2/s$ satisface la relación mostrada en la simulación entre la m y a del objeto en movimiento. Explica el porqué de tu respuesta.

   b) Determina si el punto $(6, 8)$ pertenece a la curva que modela la relación entre la m y a del objeto en movimiento.

   c) Propón una expresión algebraica que permita calcular la aceleración del objeto para cualquier masa, al aplicarle dicha fuerza.

4. Indica si alguna de las gráficas del Ejercicio 1 describe el comportamiento de esa expresión algebraica. ¿Por qué sí o no?

5. Analiza las siguientes situaciones y determina cuáles podrían modelarse con el tipo de gráficas y expresiones algebraicas de las Situaciones 2 y 3. Argumenta tu respuesta para cada una.

   a) El volumen de un gas en un recipiente según la presión aplicada sobre éste.

   b) El valor de un vehículo con respecto al tiempo después de un año de ser adquirido.

   c) La relación entre la medida de la base y la altura de rectángulos con áreas equivalentes.

   d) La altura de una persona según su edad.

Imagen 2. Tareas del diseño didáctico.

En la Tarea 1 se pretende describir el comportamiento de una relación entre variables de un escenario gráfico, esperando puedan tener un reconocimiento inicial de lo hiperbólico en forma de curva. La Tarea 2 tiene por finalidad el estudio del comportamiento hiperbólico de una relación entre variables en un contexto fenomenológico (situación de movimiento) mediante una animación que ilustra la relación entre la masa y la aceleración de un objeto que es sometido a una fuerza constante, y donde varía la masa del objeto. Las Tareas 3 y 4 se desarrollan dentro de un contexto geométrico-algebraico, enfocadas a la representación de una curva hiperbólica como lugar geométrico y su representación gráfica como relación entre variables, mediante una animación que muestra la variación de los valores de masa y aceleración de la situación anterior. Finalmente, en la última tarea se propone una asociación del comportamiento hiperbólico con modelos gráficos y algebraicos, partiendo del análisis de la relación entre variables involucradas en diversas situaciones fenomenológicas.

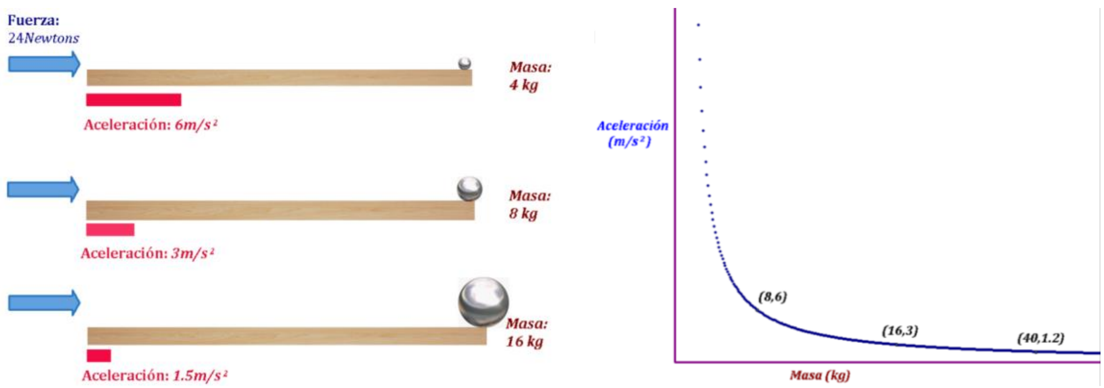


Imagen 3. Muestra de las animaciones Movimiento1.gsp y Movimiento2.gsp

La experimentación del diseño se llevó a cabo con diez estudiantes de bachillerato, organizados en cinco binas, con conocimientos elementales de Geometría Analítica y sin algún tipo de aprendizaje escolar previo sobre la hipérbola. Posterior a ello, se analizaron la ***forma*** *(geométrica, algebraica, variacional o numérica)*, las **situaciones** (gráfica, fenomenológica,…) y los **argumentos** (geométricos, algebraicos, numéricos, variacional) con que los estudiantes razonaron o concibieron lo *hiperbólico*.

Hacia una caracterización de lo hiperbólico

En la actividad se identificaron tres formas de emergencia de lo hiperbólico en los estudiantes:

- **Lo hiperbólico como una forma de variación entre cantidades:** Los estudiantes caracterizan una relación hiperbólica entre variables como una forma de variación inversa, en la que el aumento de una de ellas resulta en la disminución de la otra siempre que una el producto de éstas sea constante. Esta caracterización surge en la Tarea 2, en la que se menciona que "*mientras la masa aumenta, la aceleración disminuye",* e incluso se incluye una cuantificación por parte de los integrantes de los equipos:

Bina C: *Que mientras la fuerza ejercida sea siempre la misma, a mayor masa* (m) *menor será la aceleración* (a) *del objeto.*

Bina E:

- *Cada vez que la masa aumenta al doble, la aceleración disminuye a la mitad.*
- *Tienen una relación inversamente proporcional, mientras una aumenta (en este caso la masa), la otra disminuye (la aceleración).*
- *La aceleración por la masa es igual a la fuerza de 24N. O sea que* $(m)(a) = F$.

La resolución de la Tarea 5 también da cuenta de esta forma de lo hiperbólico, pues se distinguen los fenómenos de naturaleza hiperbólica a partir de reconocer relación de variación inversa. Por ejemplo, al identificar la presencia de una constante involucrada en dicha relación:

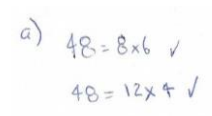
Bina C: *5.- a) ~~Si~~ No, porque para que nos de la gráfica similar a el problema 2 y 3, tienen que haber 3 valores, donde la relación de 2 de estos valores sea el resultado del 3ro.*

b) No, es lo mismo que en el inciso a.

c) Si, porque la relación entre los valores de la altura y la base nos dan el valor del área asignado.

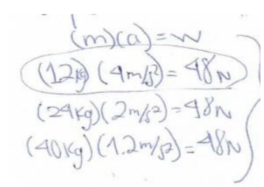
- **Lo hiperbólico como curva que describe un comportamiento variacional:** Se identifica como una gráfica simétrica que no posee propiedades lineales en la Tarea 1. Los estudiantes caracterizan a dicha curva como una representación del comportamiento de variables que gráficamente tienen la misma distancia respecto a los ejes y no los tocan. También como una gráfica asociada a un comportamiento numérico entre los valores de las coordenadas de puntos, tales que su producto es constante, y que satisfacen dicha relación o propiedad específica. Esto puede interpretarse en lo desarrollado en la Tarea 3, a) y b):

Bina C: *a) El objeto de 12 Kg si adquiere la aceleración de $4m/s^2$ si satisface la resolución mostrada porque F=m*a. Entonces si la fuerza vale 48, la masa por la aceleración debe dar 48 lo cual es correcto.*



b) Sí, el punto (6,8) sí pertenece a la curva porque cuando la masa valga 6, la aceleración debe valer 8 para que se obtenga la misma fuerza.

Bina E: *a) Sí satisface la relación porque al hacer los cálculos obtenemos que también la magnitud de la fuerza aplicada en el objeto es de 48N.*



b) (6 Kg)($8\ m/s^2$)=48N

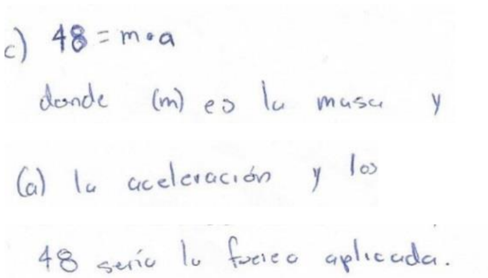
Sí pertenece a la curva

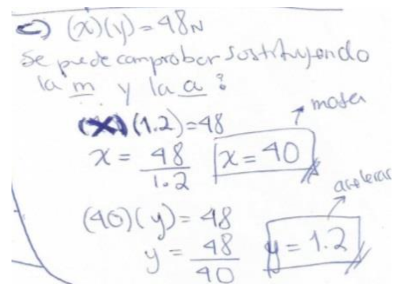
Existe una fuerte conexión entre las diferentes formas en las que emerge lo hiperbólico en los estudiantes. En algunos casos, los estudiantes incluyen argumentos variacionales y geométricos.

En una de las respuestas de la Tarea 4 se muestra otra dualidad entre las formas de lo hiperbólico: curva-algebraica, en la que los estudiantes asocian la gráfica hiperbólica a una expresión matemática que representa una relación numérica (producto constante de dos cantidades) y al mismo tiempo incluyen un argumento de variación inversa que resulta de dicha relación.

Bina C. *4.- La gráfica B.- Porque para llegar a dicho resultado, se tiene que multiplicar los valores, entonces al multiplicar esos valores, puede que uno disminuya, pero por consiguiente el otro valor aumentará para siempre obtener el mismo resultado.*

- **Lo hiperbólico como un modelo algebraico:** Se favorece bajo el contexto fenomenológico de variación inversamente proporcional de la masa y la aceleración, con base en argumentos numéricos y variacionales. En el inciso C de la Tarea 3 se nota que lo hiperbólico representa un modelo que describe el producto constante de dos cantidades que varían, es decir, un fenómeno es de naturaleza hiperbólica si se puede modelar mediante una expresión algebraica de la forma $x \cdot y = k$, con k constante.





Los estudiantes emplean también la expresión algebraica para validar si cierto par ordenado representa una correspondencia masa-aceleración apegada al sistema presentado en las simulaciones de movimiento en las Tareas 2 y 3.

Conclusiones

En este trabajo se asumió que el entendimiento de *lo hiperbólico* es fundamental para la construcción del concepto *hipérbola*. La forma más inmediata que se percibe de lo hiperbólico en las respuestas de los estudiantes fue como una *forma de variación inversamente proporcional*. Se pudo observar que para decidir si una situación es de carácter hiperbólico o no, el primer paso que realizan los estudiantes es analizar si existe una relación de variación inversa. La inclusión de las variables didácticas en el diseño influyó en el surgimiento de otras dos formas de concebir lo hiperbólico: como *curva* y como *modelo matemático* (algebraico). Estas dos últimas aparecen fuertemente ligadas y fungen de complementos de la forma variacional. Esto se ejemplifica cuando a un grupo de estudiantes no les basta que una situación incluya magnitudes que varíen inversamente, sino que se requiere de una *propiedad (numérica) que involucre la presencia de una constante* para que se caracterice como de naturaleza hiperbólica

Así, lo hiperbólico en este diseño didáctico emerge como una forma de variación que se modela mediante la expresión de un producto constante de variables y se asocia a una curva decreciente. Es verdad que las formas y razonamientos en los que emerge lo hiperbólico son influenciados por su análisis como cualidades de una curva en la simulación del movimiento, pero no se encuentran limitados por ello, ya que se presentaron razonamientos de diversa naturaleza por parte de los estudiantes, por ejemplo, geométricos y variacionales, e incluso algebraicos.

A lo largo de la actividad de los estudiantes, el contexto que rigió sus tareas fue el de variación inversamente proporcional, de modo que la caracterización de la forma hiperbólica más sobresaliente es justamente como el comportamiento de este tipo de relación entre variables. Cabe resaltar, como el estudio de la cualidad de cierto movimiento en un contexto variacional dinámico, posibilitó movilizar los razonamientos de los jóvenes para establecer una conexión entre curvas y ecuaciones hiperbólicas.

Referencias Bibliográficas

Aparicio, E., Sosa, L. Tuyub, I. y Jarero, K. (2012). Tareas y aprendizajes matemáticos en bachillerato. Un estudio de contextos. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de*

Matemática Educativa, 25, 855-862. México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Arcos, I. (1998). *Geometría Analítica, Ecuaciones y Gráficas.* Cuaderno didáctico, vol. 5. México: Editorial Iberoamericana.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Allianza.

Buendía, G. (2011). *La construcción social del conocimiento matemático escolar. Un estudio socioepistemológico sobre la periodicidad de las funciones*. México: Díaz de Santos, S.A.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento.* Barcelona, España: Gedisa

Delone, B. (1956). Analytic Geometry. En Aleksandrov A., Kolmogorov A. & Lavrent'ev M., (Eds.) *Mathematics: its content, methods and meaning*, 183-207. Moscú: MIT Press.

Díaz, M. (2007) Visualización y generalizaciones: el caso de la determinación de lugares geométricos. En Farfán, R., López, I., Martínez, G., Navarro, C., Carrillo, C., Dolores, C., *Matemática Educativa* (pp. 207-214). México: Díaz de Santos.

Farfán, R.; Ferrari, M. (2002). Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo. En C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 16,* 62-67. México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Farfán, R., Ferrari, M. (2010). Una socioepistemología de lo logarítmico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(4), 2010, 53-68.

Knuth, E. (2000). *Student understanding of the Cartesian connection: an exploratory study.* Journal for Research in Mathematics Education, 31(4), 500-508.

May, J., Pech, J. y Reyna, P. (2003). *Trigonometría y Geometría Analítica Básicas.* México: Editorial Progreso S.A. de C.V.

Montiel, G, y Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: Ejemplos e ilustraciones. En A. Rosas y A. Romo (Eds.), *Metodología en Matemática Educativa: Visiones y reflexiones* (pp. 61-68). México: Lectorum.

Autores

Aurea Guillermo Castellanos; CIMATE, UADY. México; aureaa@live.com
Daniel Ortiz May; CIMATE, UADY. México; dortizmay@outlook.com
Landy E. Sosa Moguel; CIMATE, UADY. México; smoguel@uady.mx

EL PAPEL DEL CONTEXTO EN EL APRENDIZAJE MATEMÁTICO ESCOLAR. ANÁLISIS SOBRE LA NOCIÓN FUNCIÓN

Landy Sosa Moguel, Eddie Aparicio Landa, Martha Jarero Kumul

Resumen

En este reporte de investigación se aporta evidencia empírica sobre el papel del contexto en el aprendizaje matemático, para el caso de relaciones funcionales en bachillerato. Así, en el marco de la teoría socioepistemológica y mediante estudios cualitativos y descriptivos se redimensiona el análisis de la dimensión sociocultural del conocimiento matemático, de y hacia la escuela. Con base en esto, se proporciona una reinterpretación del aprendizaje matemático como una relación epistémica contextual, y se concluye que las acciones y nociones de los estudiantes en tareas matemáticas, quedan enmarcadas en la configuración de éstas: la dimensión matemática, la naturaleza sociocultural y la componente cognoscitiva.

Palabras clave: Contexto, aprendizaje matemático, socioepistemología.

Introducción

En los estándares curriculares del bachillerato se establecen como competencias disciplinares: construir e interpretar modelos matemáticos; argumentar la solución de un problema por métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales; cuantificar, representar y contrastar experimental o matemáticamente magnitudes; interpretar tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos, entre otras (DGB, 2011), deben traducirse en prácticas de enseñanza en las que se establezcan condiciones para que los estudiantes estén en posibilidades de modelar matemáticamente fenómenos de la ciencia y situaciones de la cotidianidad, representar e interpretar relaciones matemáticas en distintos registros, argumentar, resolver problemas, codificar y manejar información de forma sistemática.

Sin embargo, se observan costumbres didácticas adheridas a formas estáticas y estructurales preexistentes de los saberes matemáticos en general y sobre el de función en particular, que determinan prácticas y discursos docentes centrados en la enseñanza explícita, el uso excesivo de analogías, secuencias lineales de contenidos, falta de filiación de la matemática con el cotidiano o su aspecto funcional, entre otras acciones de instrucción (Cua, 2011). Por ejemplo, la enseñanza de las funciones como entidades definidas por uno o varios prototipos de fórmulas o representaciones gráficas, hacen a los estudiantes identificarlas como objetos algebraicos o geométricos desde un punto de vista global o local, pero que puede ocasionar conflictos cuando los estudiantes confronten nociones como la función diferenciable en un punto y la linealidad como un fenómeno global asociado a una clase particular de funciones sobre el campo de los números reales (Maschietto, 2008).

Asimismo, este tipo de prácticas de enseñanza confluyen en limitaciones de aprendizaje en los estudiantes de nivel medio para poner de manifiesto el significado de los saberes matemáticos y movilizar procesos de pensamiento. Tal como se reporta en los resultados de la prueba de educación media superior del Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA en el 2015, solamente el 18.8% de los estudiantes evaluados en el país cuentas con los conocimientos y habilidades matemáticas que los ubiquen en los niveles de dominio III y IV, esto es, que les permitan ser capaces de analizar relaciones entre variables de un problema contextualizado, interpretar tablas y gráficas para hacer estimaciones, conversiones o analizar información para resolver problemas, plantear modelos con ecuaciones, entre otras habilidades (SEP, 2015).

Así, la prevalencia de escenarios de tratamiento escolar de la matemática en un dominio algebraico abstracto, deductivo y sin marcos de referencias que la doten de sentido, desatiende el papel de la actividad humana y segrega las experiencias en los procesos de construcción escolar del conocimiento matemático, ocultando su significación y función social. En contraposición a su versión escolar, la matemática se concibe como una actividad humana ligada a la resolución de problemas y al servicio de otras disciplinas científicas, por ende se encuentra vinculada a prácticas sociales en tanto normativas de la actividad humana individual o colectiva (Cantoral, 2013).

Por otra parte, cada vez más es aceptada y compartida la idea de que el aprendizaje y el conocimiento matemático no son ajenos a procesos eminentemente sociales y que el *contexto* en que se sitúa una persona influye en lo que en él acontece. Es decir, las experiencias, las condiciones socioculturales, los procesos de interacción y el carácter situado de la actividad matemática de una persona son determinantes en su aprendizaje matemático (Douady, 1989; Godino y Llinares, 2000, Aparicio, Sosa, Jarero y Tuyub, 2010).

Lo anterior dio paso a que desde una posición contextual del conocimiento matemático, se hayan desarrollado estudios en torno a cuestionar y describir ¿Qué papel juega el contexto en los aprendizajes matemáticos, en particular sobre la noción función? ¿Qué elementos aporta el contexto para el entendimiento sobre las formas en estudiantes construyen sus marcos de referencia conceptual?

Una mirada socioepistemológica al aprendizaje matemático

En diversas investigaciones se ha participado de un interés por examinar la naturaleza de las posibles interrelaciones entre un entramado social y la producción de conocimiento matemático. En tal dirección es posible hallar o mencionar algunos trabajos que han sido desarrollados desde una perspectiva social basada en la noción de comunidades de prácticas (Wenger, 1998), algunos otros desarrollados sobre la base de una cognición socialmente situada o prácticas sociales situadas (Lave, 1997), algunos trabajos enmarcados en procesos de enculturación (Bishop, 1988; Voigt, 1998; Radford, 2006) y unos más desarrollados bajo una visión epistemológica de prácticas sociales o Socioepistemología (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez, 2006).

Lo anterior es un reflejo de la importancia otorgada en los últimos años a la dimensión sociocultural y epistemológica del conocimiento matemático en las investigaciones, no obstante aún queda por analizar en esta dimensión sociocultural, el papel del *contexto* en los procesos de construcción y difusión institucional del conocimiento matemático, pues en efecto, por un lado las nociones matemáticas han sido resultado de una eminente simbiosis prolongada de procesos sociales e intelectuales y por otro, ha sido la función histórica constructiva y explicativa de este conocimiento el que ha conferido funcionalidad a la matemática. Se puede decir que dicho conocimiento ha estado ligado a prácticas contextualizadas y normativas, quedando enmarcado en contextos específicos de re-significación, organización y de desarrollo (Aparicio, Sosa, Jarero y Tuyub, 2010). No obstante este posicionamiento y el trabajo investigativo puesto en la dimensión sociocultural y epistemológica de la matemática, en la escuela se sigue adoleciendo de procesos de construcción de conocimiento matemático más efectivos.

Dicho así, la existencia de una disonancia entre lo supuestamente enseñado y lo aprendido en el ámbito escolar, ha motivado el desarrollo de nuestros estudios intentando explorar y caracterizar el papel del *contexto* en procesos de producción, formas de organización y comunicación (institucional o no) de saberes matemáticos, de y hacia la escuela. De estos

En ese orden de ideas, este trabajo de investigación se enmarca en la teoría socioepistemológica, la cual consiste en analizar de forma sistémica y múltiple los fenómenos didácticos asociados a la construcción social y difusión institucional del conocimiento matemático. Se reconoce que para lograr mejores explicaciones sobre la naturaleza de los procesos de construcción institucional del conocimiento matemático, deben considerarse cuatro dimensiones del saber, lo cognoscitivo, lo epistemológico, lo didáctico y lo sociocultural. Si bien tales dimensiones se pueden analizar por separado a propósito de un saber o noción matemática específica, el trabajo socioepistemológico consiste en lograr una visión articulada y sistémica de las interrelaciones entre dichas dimensiones. Un ejemplo de esta visión articulada y sistemática propuesta en la teoría socioepistemológica puede consultarse en el trabajo de Aparicio y Cantoral (2006, 2007).

Dicho así, en la Socioepistemología interesa analizar no sólo a los participantes en sí mismos, los conceptos o la relación entre ambos, sino a la actividad y práctica social, pues la atención está puesta en las formas de constituir conocimiento (Cordero, 2005). Por tanto, un trabajo enmarcado en lo socioepistemológico no se circunscribe en los conceptos o en las personas, sino en el papel de los contextos, las herramientas y las prácticas a propósito de un saber institucionalizado o en proceso de institucionalización.

Método

La investigación se desarrolló mediante tres estudios cualitativos de carácter clínico y la población participante fueron grupos de 18 jóvenes (hombres y mujeres) de segundo semestre de bachillerato, organizados en equipos de tres integrantes.

El diseño de los instrumentos para el análisis del papel del contexto en el aprendizaje matemático se basó en un análisis socioepistemológico de la noción función en general, y función lineal en particular. De allí, se consideraron como aspectos claves del diseño:

i. el establecimiento de relaciones entre magnitudes o variables en prácticas predictivas y de modelación;
ii. la dualidad objeto-proceso de las funciones y la inclusión de tareas ligadas al pensamiento y lenguaje variacional;
iii. el estudio de relaciones entre variables en diferentes representaciones y no limitado a un trabajo con conjuntos asociado a la noción de función como regla de correspondencia; y
iv. situar a los participantes en escenarios de estudio de situaciones variacionales.

Datos y resultados

Las experiencias como parte constitutivas de la actividad cognitiva

Aspectos socioculturales como las experiencias y vivencias cotidianas de los estudiantes son aspectos que movilizan y tipifican sus razonamientos al momento de resolver tareas matemáticas.

Actividad

Instrucción. Se está realizando un experimento con autos de control remoto en una carrera. En la siguiente imagen se muestra información de las posiciones de los autos en los últimos 25 metros de la carrera, antes de llegar a la meta. Resuelve la actividad para predecir la posición de un auto en un tiempo determinado de la carrera.

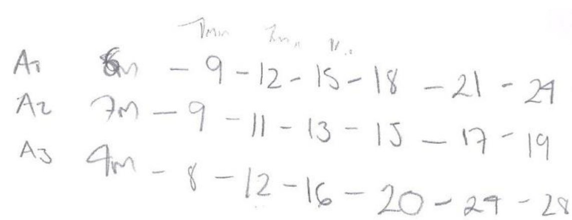
a) Indica en qué lugar o posición llegarán los autos a la meta. Explica tu respuesta.

b) Proporciona un modelo matemático que permita calcular la posición de cada auto conforme el tiempo transcurre

c) Ahora fíjate en la distancia que les falta recorrer a los autos para llegar a la meta, ¿Qué tan lejos de la meta estará el auto dos cuando hayan transcurrido tres minutos en el lapso que se ilustra de la carrera?

En la actividad anterior, las experiencias e ideas de los estudiantes asociadas a nociones como distancia y tiempo, tales como "a mayor velocidad se recorren *distancias* iguales en menor *tiempo*", suscitaron interpretar la información sobre la velocidad a través de dichas nociones y, ante la predicción requerida, movilizar recursos matemáticos para interpretar, cuantificar y modelar lo variacional en la situación. Las estrategias y argumentos que emplearon algunos de los estudiantes en sus respuestas a la Tarea a) fueron:

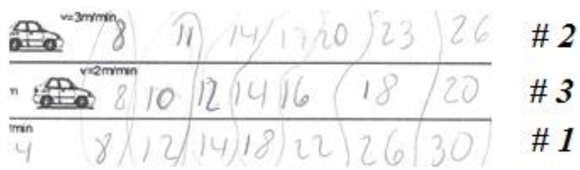
G1



Auto 3: Ganador.

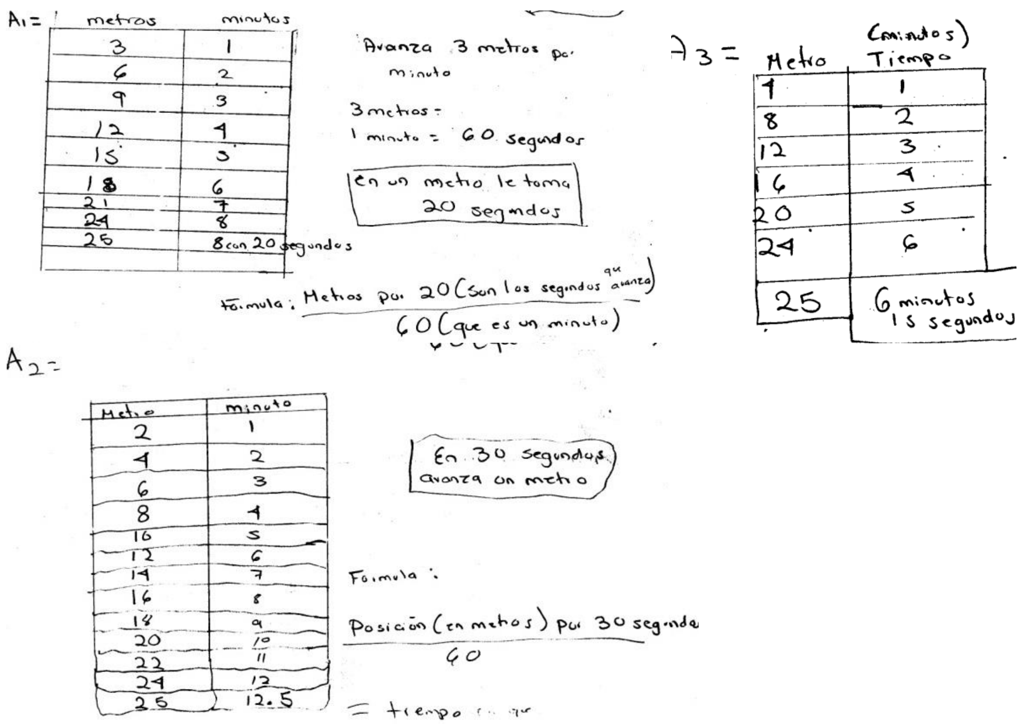
Si en 1 minuto recorre 4 metros, en 25 metros, 6.25 minutos.

G2



El A3, A1, A2 por los metros que avanza cada minuto.

G3



Llegará primero A3, A1, A2 por la velocidad.

Así, la naturaleza de la situación posibilitó que los estudiantes incorporaran sus experiencias y pusieran en juego recursos para cuantificar cambios y estimar datos, lo que les permitió no solo identificar la ley de comportamiento de las variables en la situación (variación constante), sino establecer modelos algebraicos de la distancia recorrida por los autos en cierto tiempo, tal como:

A1: $3x + 5 = y$ $\quad x: tiempo$

A2: $2x + 6 = y$ $\quad y: distancia$

A3: $4x = y$

Con base en ésta y otras situaciones de estudio de relaciones entre variables en contextos de cuantificación de lo variacional (véase Pérez, 2011; López, 2011; Sosa, Aparicio y Pérez, 2012) se puede inferir que, nociones como función o relación funcional se desarrollarán y constituirán como un conocimiento en los individuos, solo hasta que aparezca como resultado de estudiar y establecer en forma sistémica, un conjunto de relaciones en diversidad de contextos.

La actividad humana en el desarrollo de nociones matemáticas

Las actividades humanas como comparar, interpretar y argumentar otorgan sentido y significado a las acciones y nociones de los estudiantes en prácticas de predicción-modelación. La acción de interpretar se convirtió en una estrategia de los estudiantes para tratar información y decodificar patrones de variación, lo que les permitió establecer modelos algebraicos de las relaciones funcionales de una situación.

Actividad

III. A continuación se te proporciona información sobre los datos que una empresa registra mensualmente sobre sus costos de producción y sus ingresos que obtiene por las ventas que realiza. Echa un vistazo a las Tablas 1 y 2.

Tabla 1. Registro del costo de un producto por mes

1	2	3	4	...	7	8	...	12	Mes
1	4	9	16	...			...		**Costo en dólares**

Tabla 2. Registro del ingreso de las ventas por mes

1	2	3	4	...	7	8	...	12	Mes
2	6	12	20	...			...		**Ventas en dólares**

Tu tarea es explicar qué información se representa en la Tabla 3 y completar la información faltante. Es decir, completar los valores faltantes en las filas, darle un título a la tabla e indicar lo que iría en la celda debajo de la celda Mes.

Tabla 3

1	2	3	4	...	7	8	...	11	Mes
	2			...		8	...		

La tarea en esta actividad consistía en determinar expresiones algebraicas que representaran a cada tabla numérica, para ello se pidió estimar los valores respectivos al mes veinte de cada tabla. Las producciones de algunos estudiantes fueron las siguientes:

E1: *En la tabla 1 los números que faltaban se conseguían al elevar al cuadrado los números de arriba =* n^2

En la tabla 2 los valores que faltaban se obtenían multiplicando el número del mes por el mes siguiente…=$(n)(n+1)$

En la tabla 3… se obtenían de los valores obtenidos anteriormente en la tabla 1 y la 2, por ejemplo, en el mes 3 era $12-9=3$.

$vd-cd=9$, vd *=venta en dólares,* cd *=costo en dólares,* g *=ganancia*

Para el veinteavo mes: tabla #1=400; tabla #1=420 y tabla #1=20

E2:

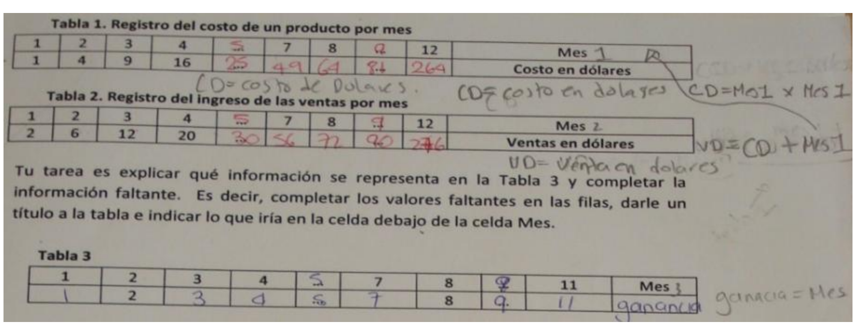


Tabla 1. Registro del costo de un producto por mes

1	2	3	4	5	7	8	9	12	Mes 1
1	4	9	16	25	49	64	84	264	Costo en dólares

CD= costo de Dolares.
CD= costo en dolares
CD=Mes1 x Mes 1

Tabla 2. Registro del ingreso de las ventas por mes

1	2	3	4	5	7	8	9	12	Mes 2
2	6	12	20	30	56	72	90	276	Ventas en dólares

VD=CD + Mes 1
VD= Venta en dolares

Tu tarea es explicar qué información se representa en la Tabla 3 y completar la información faltante. Es decir, completar los valores faltantes en las filas, darle un título a la tabla e indicar lo que iría en la celda debajo de la celda Mes.

Tabla 3

1	2	3	4	5	7	8	9	11	Mes 3
1	2	3	4	5	7	8	9	11	ganancia

ganacia = Mes

E3:
- *En la primera tabla es una sucesión de números multiplicados por sí mismos.* x^2
- *En la segunda tabla es una sucesión de números que van como que se multiplica por el número que les sigue (*$2 \times 3 = 6$, $3 \times 4 = 12$, $4 \times 5 = 20$). $(x+1)(x)$
- *La tercera tabla se muestra el número de productos por mes que se vendieron.* $x = x$ *(productos vendidos)*

Se evidencia que en prácticas de predicción y modelación, los estudiantes llevan a cabo actividades humanas como comparar e interpretar, que en articulación con la cuantificación de lo cambiante, favorecen que movilicen sus esquemas y desarrollen nociones como variación y función, hasta el punto de establecer expresiones algebraicas de relaciones funcionales. El papel de actividades humanas como las antes referidas también se verifica en situaciones de estudio del movimiento en escenarios dinámicos y gráficos (Aparicio, Torres, Sosa y López, 2011).

El contexto en tareas matemáticas

En los estudios se observó que las acciones y herramientas matemáticas activadas por los estudiantes quedan enmarcadas en el contexto más que en los saberes. El que los jóvenes estudiantes realicen de una u otra manera ciertas tareas matemáticas, queda enmarcado en la configuración de las mismas, es decir, por la *dimensión matemática*, la *naturaleza sociocultural* y la *componente cognoscitiva*.

La *dimensión matemática* es entendida como aquella que involucra acciones basadas en aspectos intramatemáticos tales como procesos, secuencias, operaciones, fórmulas, y el bagaje de conocimiento matemático (conceptos y nociones matemáticos). En las actividades anteriores, esta dimensión se hace visible en la cuantificación de lo variacional a través del cálculo de diferencias, la identificación de regularidades o comportamientos numéricos en tablas, nociones sobre proporcionalidad y variación constante.

Lo *sociocultural* en el contexto de la tarea se refiere a la presencia de prácticas asociadas a lo social: relacionar, comparar, predecir,…, así como a las experiencias, el sentido común y aquellos aspectos vivenciales del estudiantes que le permiten conferirle sentido y significado a su actividad matemática, y detonan la movilización de recursos matemáticos.

La *dimensión cognitiva*, tiene que ver con las acciones causadas por los procesos mentales del individuo, particularmente el nivel alcanzado en el desarrollo del pensamiento matemático (Chan, 2011), implica al razonamiento, la memoria y la lógica que provienen de procesos asociados a la cognición.

Conclusiones

Con los datos evidenciados en esta investigación, es posible establecer como error didáctico, el promover en la escuela la idea de que las matemáticas son a priori a prácticas sociales y externas al contexto de los individuos. Igualmente es un error ignorar que aspectos tales como extraer una noción apropiada en una situación concreta, generalizar a partir de la observación de casos, generar argumentos inductivos y usar la intuición para conjeturar, constituyen modos de pensamiento matemático que deben verse favorecidos por el discurso matemático escolar, pues tal como se evidencia en los trabajos de López (2011), Chan (2011), Pérez (2011) y Moguel (2011), el sentido de las tareas y los significados construidos están íntimamente ligados a las experiencias y al contexto en las cuales se desarrollan. En estos es notorio que los procesos de construcción de conocimiento matemático quedan vinculados tanto a la práctica de predecir y modelar matemáticamente, como a la actividad de decidir en tanto cualidad social del humano.

Se ha podido inferir de nuestros estudios, que el análisis del contexto posibilita ampliar el entendimiento sobre los procesos de construcción y difusión social e institucional de la matemática. De estos se ha identificado que el aprendizaje matemático es un proceso relacional epistémico contextual, es decir, un proceso perneado por aspectos socioculturales que se entrelazan en forma sistémica con la cognición y la posibilidad de establecer relaciones matemáticas sobre las cuales las personas logran entender o poseer un conocimiento. En dicho proceso la relación sujeto-objeto y la movilización de la cognición de quien aprende dependen ambas de las condiciones socioculturales en las que se sitúa el sujeto. Tal es el caso de lo contextual al momento de resolver tareas o actividades de índole matemático donde no solo se dota de sentido a las tareas y a la matemática misma, sino que se construyen y reconstruyen epistemologías de conocimiento (Aparicio y Cantoral 2006; Aparicio, Torres, Sosa y López, 2011).

Referencias

Aparicio, E. y Cantoral, R. (2006). Aspectos discursivos y gestuales asociados a la noción de continuidad puntual. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 9(1), 7-30.

Aparicio, E.; Sosa, L.; Jarero, M. y Tuyub, I. (2010). Conocimiento matemático. Un estudio sobre el papel de los contextos. En R. Rodríguez, E. Aparicio, M. Jarero, L. Sosa, B. Ruiz, F. Rodríguez, J. Lezama y M. Solís (Eds.), Memoria electrónica de la XIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa (pp. 167-174). Nuevo León, México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa, A.C.

Aparicio, E.; Torres, L.; Sosa, M. y López, A. (2011). Comparación e interpretación como actividades humanas en procesos de construcción de conocimiento matemático. *Revista Iberoamericana de educación matemática*, UNION, 27, 63-73.

Bishop, A. (1988). *Mathematical enculturation. A cultural perspective on mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Chan, M. (2011). *Prácticas matemáticas de estudiantes en bachillerato. Un análisis sobre su efectividad*. Tesis de licenciatura no publicada. Universidad Autónoma de Yucatán, México.

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías de conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 8(3), 365-386.

Covian, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la cultura maya*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, D.F., México.

Cua, D. (2011). *Docencia en matemáticas. Análisis sobre los efectos de prácticas educativas en bachillerato.* Tesis de licenciatura no publicada. Universidad Autónoma de Yucatán, México.

Dirección General del Bachillerato (2011). Documento base del bachillerato general. México: Secretaría de Educación Pública.

Godino, J. y Llinares, S. (2000). El interaccionismo en educación matemática. *Educación Matemática*, *12*(1), 70-92.

Lave, J. (1997). The culture of acquisition and the practice of understanding. En D. Kirshner & J. A. Whitson (Eds.), *Situated cognition. Social, semiotic and psychological perspectives* (pp. 17-35). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

López, L. (2011). *Etapas de aprendizaje asociadas al concepto función. Un estudio socioepistemológico*. Tesis de licenciatura no publicada. Universidad Autónoma de Yucatán, México.

Maschietto, M. (2008). Graphic Calculators and Micro-Straightness: Analysis of a Didactic Engineering. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *13*(3), 207–230.

Moguel, G. (2011). *Predicción y modelación matemática. Características de un punto de encuentro*. Tesis de licenciatura no publicada. Universidad Autónoma de Yucatán, México.

Pérez, I. (2011). *Unidades didácticas en el área de precálculo. Un estudio sobre la efectividad de organizadores de contenido*. Tesis de licenciatura no publicada. Universidad Autónoma de Yucatán, México.

Radford, L. (2006). Elementos de una cultura de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* Número especial. 103-129.

SEP (2015). *Difusión de resultados PLANEA media superior 2015*. México: Secretaría de educación pública. Recuperado el 10 de Agosto de 2015 de: http://planea.sep.gob.mx/content/general/docs/2015/PLANEA_MS2015_publicacion_resultados_040815.pdf

Voigt, J. (1998). The culture of the mathematics classroom: Negotiating the mathematical meaning of empirical phenomena. En F. Seeger, J. Voigt & U. Waschescio (Eds.), *The culture of the mathematics classroom* (pp. 191 – 220). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice. Learning, Meaning, and Identity.* Cambridge: Cambridge University Press.

Autores

Landy Sosa Moguel; UADY. México; smoguel@uady.mx
Eddie Aparicio Landa; UADY. México; alanda@uady.mx
Martha Jarero Kumul; UADY. México; jarerok@uady.mx

EL FENÓMENO DE OPACIDAD Y LA SOCIALIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO. LO MATEMÁTICO DE LA INGENIERÍA AGRÓNOMA

Karla Gómez Osalde, Francisco Cordero Osorio

Resumen

Se hace un planteamiento donde se pone en el centro de discusión al proceso de socialización del conocimiento como un elemento para recuperar el uso del conocimiento matemático de la gente (lo matemático), el cual ha sido olvidado a causa del fenómeno de opacidad ocasionado por el actual discurso Matemático Escolar. Con base en esta postura, se analiza el proceso de socialización del conocimiento matemático a partir de dos problemáticas propias de una comunidad de ingenieros agrónomos: 1) el añerismo en las plantas, y 2) el manejo de plagas. Ambas problemáticas delinearon lo matemático de esta comunidad de ingenieros, a través de las tres características de la socialización del conocimiento: lo orgánico, lo situacional y lo intencional.

Palabras clave: Fenómeno de opacidad, socialización del conocimiento, lo matemático

Introducción

Desde la Teoría Socioepistemológica se hace un planteamiento para caracterizar el *proceso de socialización del conocimiento matemático* como un elemento para recuperar el uso del conocimiento matemático de la gente (lo matemático), el cual ha sido olvidado a causa del *fenómeno de opacidad* ocasionado por el actual *discurso Matemático Escolar* (*dME*) (Cordero, Gómez, Silva y Soto, 2015). El proceso de socialización será el núcleo que permita la relación recíproca entre el conocimiento matemático del cotidiano y el que vive en la matemática escolar.

Se caracteriza el proceso de socialización del conocimiento matemático a partir de una Comunidad de Conocimiento Matemático de ingenieros agrónomos ($CCM_{I.Agro}$). La problematización del conocimiento desde esta comunidad delinearon lo matemático de la ingeniería agrónoma, a través de las tres características de la socialización del conocimiento: lo orgánico, lo situacional y lo intencional.

Finalmente, se plantea la formulación del binomio *opacidad-socialización* como aquello que permite hacer transparente *lo matemático* que el actual *dME* ha *opacado.*

Una relación necesaria: El fenómeno de opacidad y el proceso de socialización

Rescatar el rol del conocimiento matemático para caracterizar el proceso de socialización permitió entender con mayor profundidad la relación entre *la matemática* como obra de conocimiento científico y *lo matemático* como aquellas expresiones del conocimiento bajo situaciones específicas que reflejan pluralidades epistemológicas. Esto es, la matemática y lo matemático expresan una diferencia conceptual y vivencial: mientras la matemática se concibe desde argumentos conceptuales donde prevalecen la búsqueda de mecanismos y del orden, *lo matemático* es de carácter vivencial pues se expresa en las cualidades de las relaciones (Gómez, 2015).

Este cambio de mirada nos permitió identificar un fenómeno que ocasiona el actual *dME*: el *fenómeno de opacidad.* Este fenómeno nos alerta de la no consideración de lo matemático para la organización de la matemática escolar. Esto es, a la luz de la construcción social del conocimiento, la Teoría Socioepistemológica percibe un foco de atención que es medular para la problemática del aprendizaje de la matemática: el *dME* actual ha generado una opacidad hacia los argumentos de la vida cotidiana (Gómez y Cordero, 2013), los ha relegado a otros planos y no los considera suficiente como conocimientos matemáticos, en consecuencia la pluralidad epistemológica es ignorada.

La matemática escolar pretende socializar ciudadanos plenos que puedan, como señalan Callejo *et al*. (2010), usar como base a las Matemáticas para un mayor desarrollo personal y social en todos los componentes de la sociedad del siglo XXI. Por otro lado, el cotidiano debe ser una referencia que influya en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática escolar, de tal manera que lo que se aprenda en la escuela tenga estrecha relación con la vida cotidiana del ciudadano. Lo que entorpece esta relación es el *dME* ya que no permite la relación esperada entre el cotidiano y la matemática escolar y genera cierta *opacidad* o falta de visibilidad de los argumentos del conocimiento en ambos escenarios.

La socialización desde la Teoría Socioepistemológica

La noción de *socialización* se ha desarrollado por diferentes momentos. A finales de 1800 comienzan las preocupaciones sobre este tema. Uno de los primeros enfoques que pone en discusión la noción de la socialización fue a través del sociólogo y economista estadounidense Franklin Henry Giddings quien, en 1897, saca a la luz su libro "*The theory of socialization*", (Giddings, 1897), el cual consideraba la socialización como un proceso por el que reconoces y te adaptas conscientemente al otro.

Por otra parte, en 1911, se le atribuye a Émile Durkheim los inicios de la relación entre la socialización y la escuela, y cómo una es función de la otra ya que reconoce que es a través del proceso de socialización que se crean seres sociales. Según Durkheim (1976), la socialización es parte fundamental del proceso educativo ya que es la educación la que crea en el hombre un ser nuevo que actúa colectivamente. De esta manera deja recaer en la educación la función principal de constituir ese ser social en cada ser individual, por lo que distingue a la educación como una socialización metódica de las generaciones jóvenes con base en lo que considera la generación adulta. Es así como a lo largo del siglo XX se van desarrollando nociones de socialización que van desde la construcción de conductas, la interiorización de funciones sociales, imposición de estructuras y la ontogenia social.

Incluso en la actualidad, las caracterizaciones alrededor del proceso de socialización se han enfocado en principalmente en explicaciones de corte interaccionista (por ejemplo Grundmann y Steinhoff (2014) y Coelho (2011)), es decir, el núcleo básico para advertir la socialización es la relación de un individuo con otro(s) individuo(s); es mayormente utilizada en estudios de la educación básica (como en Morán (2012)), por lo que se enfoca con mayor fuerza a la educación como un agente socializador primario; y se centra en roles de comportamiento, de género, conductas, ideologías, valores y estados sociales que se buscan preservar (como en Kikas, Tulviste y Peets (2014); Freitas y Magalhães (2013); Vinik, Johnston, Grusec y Farrell (2013); Patiño, Bárcenas y Fernández, (2013)).

Desde una mirada Socioepistemológica, se propone hacer énfasis en el rol que juega el conocimiento matemático para el proceso de socialización y para ello se distingue que el núcleo base para explicar la socialización será a través de la relación entre una comunidad y su conocimiento. Por lo que se puede distinguir que sin la consideración del papel que juega el conocimiento que se produce en el cotidiano de una comunidad no se atenderá cabalmente este proceso.

Del análisis de estos diferentes momentos y paradigmas, hemos sintetizado las características intrínsecas al proceso de socialización del conocimiento de la siguiente manera: 1) *lo orgánico*, en el sentido de entender el rol de los agentes socializadores como la escuela y la familia para rescatar aspectos cercanos o familiares y su relación con lo individual o lo colectivo, 2) *lo situacional* en contraparte a la consideración de mecanismos universales para socializar, y 3*) lo intencional* para tomar en consideración el carácter crítico y modificable que los grupos sociales ejercen sobre el proceso mismo.

De esta manera, el proceso de socialización será el conocimiento construyéndose con la comunidad, la caracterización que se logre de este proceso deberá tomar como punto fundamental este núcleo indisociable entre el conocimiento y la comunidad que lo produce. Esto exige además de entender el uso a partir de la génesis del conocimiento matemático, también hacer visible las realidades actuales donde se resignifica constantemente.

El caso de una Comunidad de Conocimiento Matemático de Ingenieros Agrónomos

La comunidad de ingenieros agrónomos se estudia a partir de una articulación de escenarios: i) Ingenieros agrónomos en formación, en particular se realizaron observaciones a la clase de Cálculo Diferencial e Integral, correspondiente al tercer semestre de la carrera; ii) Ingenieros agrónomos en formación durante sus prácticas de campo, las cuales realizan en terrenos agrícolas como parte fundamental a lo largo de todo el plan de estudios de la carrera; iii) Análisis de artículos de la disciplina, y iv) Entrevistas a una profesional. Esta articulación fue necesaria para atender tres momentos que nos permitieron analizar la comunidad:

Primer Momento: un punto crucial fue atender la siguiente cuestión: ¿cuál es el conocimiento que problematiza la comunidad?

Segundo Momento: consecuentemente, lograr una caracterización del Proceso de Socialización del Conocimiento Matemático desde la comunidad.

Tercer Momento: finalmente, mostrar en conjunto, cómo se proyecta el binomio Opacidad-Socialización.

En el análisis de datos se parte de una Categoría de Modelación ζ(Mod) (Cordero 2006, en prensa; Suárez y Cordero, 2010; Suárez, 2014) donde se toma a la graficación como un medio que soporta el desarrollo del razonamiento y de la argumentación del conocimiento mismo y donde se resignifican los usos del conocimiento desde las prácticas cotidianas de esta comunidad específica.

La ζ(Mod) nos permitió caracterizar los usos de la gráfica asociados a las problemáticas de estudio de la comunidad: el añerismo en las plantas y el control de plagas; en ciertas situaciones específicas (Se_i). A partir del debate entre el funcionamiento y la forma en que se presenta el uso de las gráficas se plantean las resignificaciones del conocimiento matemático de esta comunidad, lo que permite un análisis transversal para evidenciar las características del proceso de socialización del conocimiento matemático:

- *Lo orgánico* del conocimiento que se socializa, es decir, le es funcional a la comunidad.

El análisis de las prácticas cotidianas de la comunidad de ingenieros agrónomos nos permite evidenciar esta característica a través de la relación orgánica entre el conocimiento del manejo de la tierra (Agricultura) con la sistematización de ese conocimiento a través de constructos disciplinares de la Ingeniería (Agronomía). Esta relación se percibe a través del desarrollo de los usos de las gráficas en dos de sus problemáticas de estudio y las cuales expresan las resignificaciones del conocimiento que va construyendo la comunidad de ingenieros agrónomos.

- *Lo situacional* del conocimiento que se socializa, es decir, la situación que propicia el desarrollo.

Lo situacional se verá expresado a través de aquellas epistemologías del conocimiento que guían las resignificaciones de los usos de las gráficas, es decir, de las epistemologías que hacen que las resignificaciones sean de esa manera y no de otra. A través de las situaciones que subyacen a las problemáticas de la comunidad, estas epistemologías nos proveen de explicaciones sobre la construcción social del conocimiento matemático.

En el caso de los ingenieros agrónomos se pudieron evidenciar dos epistemologías relacionadas al estudio del añerismo en plantas y del control de plagas: la epistemología de *lo periódico* (Buendía y Cordero, 2005; Buendía 2004 y 2011) y de *lo óptimo* (Del Valle, 2015), respectivamente. Estas epistemologías son las expresiones de *lo matemático* propio de la comunidad.

- *Lo intencional* del conocimiento que se socializa.

Lo intencional se puede evidenciar a través de las categorías del conocimiento matemático $\zeta(\mathrm{CM})$ ya que por la naturaleza del proceso de socialización no se puede centrar la atención únicamente en el objeto matemático. Por el contrario, se precisa reorganizar en categorías de conocimiento matemático que se producirán al poner en juego estas epistemologías desde *lo matemático*: *lo periódico* y *lo óptimo*. La articulación entre las problemáticas de estudio de la comunidad de ingenieros agrónomos y las situaciones específicas que desarrollan el uso de la gráfica, se proponen dos $\zeta(\mathrm{CM})$, ambas expresadas a través de una relación situación-práctica. La primera pondrá en juego la relación entre la situación de periodicidad y la práctica de predicción; mientras que la segunda se propiciará a partir de la situación de selección y la práctica de optimización. Poner en juego ambas $\zeta(\mathrm{CM})$ permitirá aportar hacia un *RdME* donde la metáfora de conocimiento sean los usos y promoverá el proceso de socialización del conocimiento matemático.

Resultados y conclusiones: El Binomio Opacidad-Socialización

El estudio del fenómeno de opacidad y la socialización del conocimiento matemático es lo que atañe a este trabajo. La propuesta es a través del estudio de las características de la socialización del conocimiento, en particular desde una comunidad de ingenieros agrónomos: l*o orgánico* expresado a través del desarrollo de usos de las gráficas bajo ciertas situaciones específicas que se generan en el estudio del añerismo en las plantas y el control de plagas; *lo situacional* se provoca a partir de las epistemologías del conocimiento matemático que subyacen a las resignificaciones de los usos: lo periódico y lo óptimo; y *lo* *intencional* que plantea la necesidad de continuar este conocimiento a través de la identificación de Categorías del Conocimiento Matemático que ponga en relación la situación de periodicidad con la práctica de predicción y la situación de selección con la práctica de optimización.

Con todo lo planteado, podemos distinguir una confrontación entre dos epistemologías de acuerdo a las dos problemáticas de estudio: a) la primera relativa a la periodicidad a partir del tratamiento de un objeto matemático que resalta una propiedad de una función específica. La segunda relativa a *lo periódico*, como una expresión de fenómenos con comportamientos repetitivos que permiten predecir en situaciones cotidianas; b) por otro lado, también distinguimos lo relativo a la optimización a partir del tratamiento de objetos matemáticos que son parte de un método para resolver una situación determinada, en contraste con la epistemología de *lo óptimo*, como una expresión de fenómenos que buscan patrones de adaptación dirigidos a algo estable.

De alguna manera, este trabajo de investigación plantea lo siguiente:

- Se propone una caracterización del proceso de socialización a partir de poner en el centro de reflexión al conocimiento matemático, lo que nos permitió sistematizar el fenómeno de opacidad.
- Ayuda a entender la matemática funcional de una comunidad de conocimiento matemático de ingeniería agrónoma a partir de las resignificaciones del uso de las gráficas en situaciones específicas del quehacer cotidiano de la comunidad.
- Permite entender cómo relacionar las epistemologías de lo periódico y lo óptimo como parte del Marco de Referencia para el rediseño del discurso Matemático Escolar relacionado con la formación de los ingenieros agrónomos.

Finalmente, conviene sistematizar estos resultados para la intervención en la Matemática Escolar a partir de un modelo operativo que permita desarrollar el proceso de socialización del conocimiento a través de procesos sociales. Lo que le es orgánico a la comunidad conviene verlo reflejado a través de un Proceso Funcional (PF) del conocimiento; lo situacional a partir de un Proceso Historial (PH); y lo que proporciona la intencionalidad, a través de un Proceso Institucional (PI) (ver Figura I).

En este sentido, para el caso de la comunidad de ingenieros agrónomos, podemos ver reflejada la relación entre el PF y el PH en el desarrollo de usos de la gráfica propio de sus prácticas cotidianas ($R_i U(G)_{Ing.\,Agro}$) y que adquieren sentido a través de la relación entre la Agricultura y la Agronomía. La relación entre el PH y el PI se expresa en las situaciones que permiten la resignificación y reflejan la naturaleza epistemológica del conocimiento de la comunidad, en este caso son: la epistemología de *lo periódico* y de *lo óptimo*. Por último, entre el PI y el PF delinean aquellas relaciones *situación-práctica* que pueden ser más cercanas a la matemática escolar: las situaciones que dan pie al conocimiento de la comunidad y las prácticas que son las argumentaciones del conocimiento. En este caso las relaciones son: la periodicidad – la predicción; y la selección – la optimización. De alguna manera reflejan la intencionalidad de construir conocimiento propio para esta comunidad, sin alejarse de la carga funcional que da sentido y razón de ser a su conocimiento.

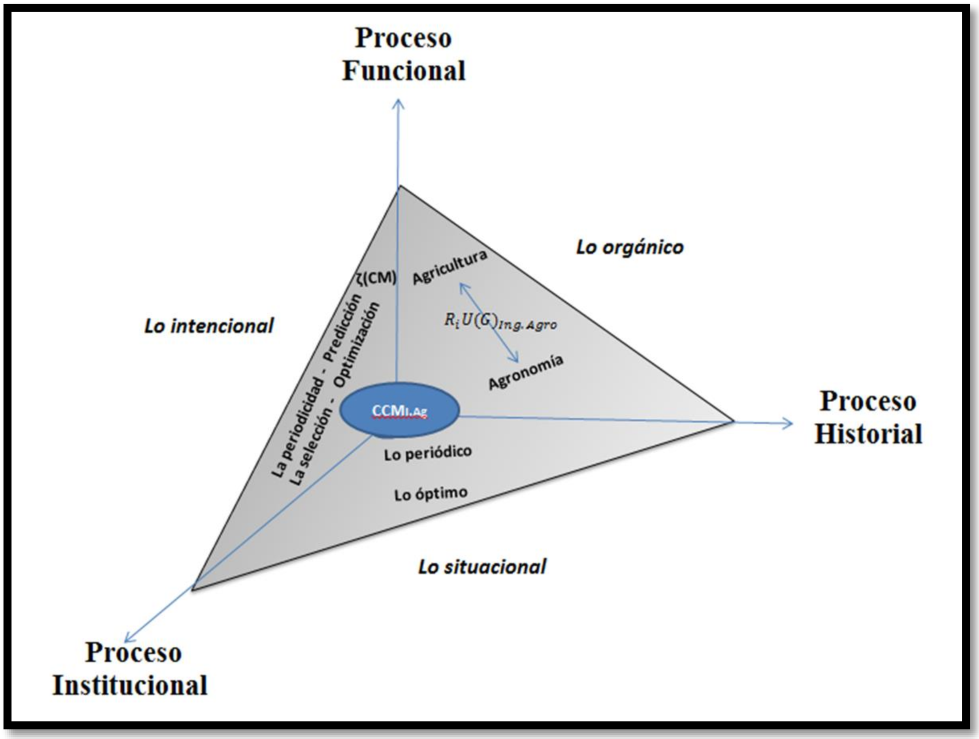


Figura I. Sistema con ejes del proceso de Socialización del Conocimiento Matemático desde una $CCM_{I.Agro}$ $(Gómez, 2015)$.

Postulamos entonces la noción de socialización como el núcleo que genera la relación recíproca entre el conocimiento matemático del cotidiano y el que vive en la matemática escolar. Esta relación, formulada a partir del binomio *opacidad-socialización*, transparenta *lo matemático* que el actual *dME* ha *opacado*.

Referencias

Buendía, G. (2011). *La construcción social del conocimiento matemático escolar. Un estudio socioepistemológico sobre la periodicidad de las funciones*. Distrito Federal, México: Díaz de Santos. ISBN: 978-84-9969-004-9.

Buendía, G. (2004). *Una epistemología de los aspectos periódicos de la función en un marco de prácticas sociales*. *Un estudio socioepistemológico* (Tesis doctoral no publicada). Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, Distrito Federal, México.

Buendía, G. y Cordero, F. (2005). Prediction and the periodical aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study. *Educational Studies in Mathematics*, *58*, 299-333.

Callejo, M., Goñi, J., Alsina, C., Civil, M., Giménez, J., Gómez-Chacón, I...., Venegas, Y. (2010). *Educación matemática y ciudadanía*. Barcelona, España: Graó.

Coelho-Dias, P. (2011). Estratégias de estudo dos alunos no âmbito dos processos de socialização. *Sociologia, problemas e práticas*, *66*, 71-94.

Cordero, F. (en prensa). Modelación, funcionalidad y multidisciplinariedad: el eslabón de la matemática y el cotidiano. En J. Arrieta y L. Díaz (Eds.), *Investigaciones* *latinoamericanas de modelación de la matemática educativa*. Barcelona, España: EditorialGedisa.

Cordero, F. (2006). La modellazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamento-apprendimento della matematica. *La Matematica e la sua Didattica*, *20*(1), 59-79.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci y Soto, D. (2015) *El Discurso Matemático Escolar: la Adherencia, la Exclusión y la Opacidad*. Barcelona, España: Editorial Gedisa. Distrito Federal, México: Cinvestav.

Del Valle, T. (2015). *Los Usos de la Optimización: Un Marco de Referencia y la Teoría Socioepistemológica* (Tesis doctoral no publicada). Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile.

Durkheim, E. (1976). *Educación como Socialización*. Salamanca, España: Ediciones Sígueme.

Freitas, H. R. M. y Magalhães, C. M. C. (2013). Metas e estratégias de socialização que Mães de crianças surdas Valorizam para seus Filhos. *Revista Brasileira de Educação Especial*, *19*(4), 545-561.

Giddings, F. (1897). *The Theory of Socialization: A Syllabus of Sociological Principles*. New York, United States of America: The Macmillan Company; London, Macmillan & co., ltd.

Gómez, K. (2015). *El fenómeno de opacidad y la socialización del conocimiento. Lo matemático de la Ingeniería Agrónoma.* (Tesis doctoral no publicada). Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, Distrito Federal, México.

Gómez, K. y Cordero, F. (2013). La institucionalidad, funcionalidad e historicidad. Elementos para el rediseño del discurso matemático escolar. En R. Flores (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 26, 1323-1330, México.

Grundmann, M, y Steinhoff, A. (2014). Communication experiences: A constitutive principle in pupils' socialization of agency. *Learning, Culture and Social Interaction*, *3*, 177–183.

Kikas, E., Tulviste, T. & Peets, K. (2014) Socialization values and parenting practices as predictors of parental involvement in their children's educational process. *Early Education and Development*, *25*(1), 1-18. DOI: 10.1080/10409289.2013.780503.

Morán, M.C. (2012). Incidencia de la jornada escolar en los procesos de socialización infantil. *Educar em Revista*, *45*, 19-36.

Patiño, N., Bárcenas, S. y Fernández, J. (2013). Estrategias mediadas por la tecnología que contribuyen al desarrollo y socialización del conocimiento en matemáticas. *Zona Próxima. Revista del Instituto de Estudios en Educación Universidad del Norte, 19,* 95-106.

Suárez, L. (2014). *Modelación – Graficación para la Matemática Escolar.* Distrito Federal, México: Díaz de Santos. ISBN: 978-84-9969-614-0.

Suárez, L. y Cordero, F. (2010). Modelación – Graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(4), 319-334.

Vinik, J., Johnston, M., Grusec, J.E. & Farrell, R. (2013). Understanding the learning of values using a domains-of-socialization framework. *Journal of Moral Education*, *42*(4), 475-493. DOI: 10.1080/03057240.2013.817329.

Autores

Karla Gómez Osalde; UADY. México; karla.gomez@correo.uady.mx
Francisco Cordero Osorio; CINVESTAV, IPN. México; fcordero@cinvestav.mx

ACTITUDES HACIA LAS MATEMÁTICAS EN ESTUDIANTES DE SECUNDARIA Y BACHILLERATO

Alejandra Mejía Saldaña, Ana María Castillo Juárez, José Gabriel Sánchez Ruíz

Resumen

Las actitudes hacia las matemáticas tienen que ver con la valoración, el aprecio y el gusto por esta disciplina enfatizando más la parte afectiva que la cognitiva El propósito de este estudio consiste en describir las actitudes hacia las matemáticas en dos grupos de estudiantes, uno de secundaria y otro de nivel bachillerato, así como mostrar las diferencias obtenidas entre ambos grupos. El estudio se justifica por la necesidad de encontrar evidencia empírica que permita ampliar nuestra comprensión acerca de cómo intervienen las actitudes hacia las matemáticas en el rendimiento académico. Se aplicó la escala ATMI para medir actitudes hacia las matemáticas a una muestra total de 371 alumnos. Se encontraron actitudes más positivas y favorables hacia las matemáticas en los estudiantes de secundaria en cada uno de los aspectos actitudinales medidos.

Palabras clave: Actitudes hacia las matemáticas, Matemáticas, Estudiantes de secundaria, Estudiantes de bachillerato.

Introducción

En la educación matemática la preocupación y el interés por conocer los factores que obstaculizan o favorecen los procesos de aprendizaje de las matemáticas han dado lugar a varios estudios sistemáticos en cuyos resultados se basan los trabajos sobre estrategias de enseñanza y aprendizaje tendientes a mejorar el rendimiento escolar. Se han estudiado aspectos cognitivos, afectivos (Gómez-Chacón, 2000, 2002; Gil, Guerrero y Blanco, 2006) y considerado varias perspectivas como lo son la percepción del estudiante, la percepción del profesor y los indicadores cognitivos (Gómez Chacón, 2009).

Aunque se reconoce que son muchos los factores que intervienen en el aprendizaje de las matemáticas, para Sánchez y Ursini (2010) ‘‘las actitudes han sido consideradas para estudiar este proceso porque… al parecer, condicionan diversos procesos psicológicos, constituyen parte del sistema de valores del individuo y parecen estar relacionadas con el rendimiento escolar’’ (p.305).

Además, se han estudiado las actitudes para tratar de explicar el rechazo o la aceptación de la disciplina de matemáticas (Gómez- Chacón, 2002) y también para comprender las creencias y sentimientos acerca de las matemáticas y para explicar el papel de los factores afectivos en su aprendizaje (Sánchez y Ursini, 2010).

La dificultad, el rechazo o el aprecio a las matemáticas serían algunos ejemplos de actitudes entendidas como predisposiciones evaluativas que condicionan al sujeto para percibir y reaccionar de un modo determinado.

La matemática educativa es una de las áreas del conocimiento en la que se han analizado de forma más sistemática las actitudes (Gil, Blanco y Guerrero, 2005) siendo destacadas como un elemento clave a tener en cuenta en el estudio del proceso de aprendizaje de las matemáticas. Se han identificado múltiples factores que intervienen y afectan el aprendizaje matemático de los estudiantes, incluyendo creencias y concepciones, motivación, variables cognitivas y emociones.

Gil, Blanco y Guerrero (2005) plantean que los alumnos creen que esta disciplina es útil, difícil y está fundamentada en reglas, lo que provoca diversas reacciones. Bajo esta creencia, la percepción de la utilidad de las matemáticas se relaciona positivamente con el rendimiento.

La investigación de las actitudes en el rendimiento de las matemáticas muestra que muchos estudiantes no tienen problemas en otras materias, sin embargo se ponen nerviosos en las clases y sienten fuerte ansiedad ante los exámenes de matemáticas (Vigil-Colet, Lorenzo-Seva y Condon, 2008). Por tanto, resulta importante promover la participación de los profesores en el logro de habilidades matemáticas que favorezcan la mejora de las actitudes y la prevención de la ansiedad. Infortunadamente en la enseñanza de las matemáticas, las actitudes de los estudiantes, no han sido suficientemente valoradas, pues aunque se asume su importancia desde un punto de vista teórico, aún hace falta considerar en la práctica los factores afectivos en las escuelas (Gómez Chacón, 2000).

Desde hace décadas hay evidencia de que los factores afectivos tienen una influencia destacable en el aprendizaje de las matemáticas (Zan, Brown, Evans y Hannula 2006), más en concreto, las actitudes constituyen uno de los factores más importantes y han sido ampliamente estudiadas (Gil, Blanco y Guerreo, 2006).

Las actitudes expresan algún grado de aprobación o desaprobación para actuar sobre el objeto de la actitud (Martínez, 2008). Por ejemplo, ante las matemáticas (objeto de actitud) un estudiante puede mostrar una actitud favorable cuando afirma que le gustan las clases, hace sus tareas, cree que es importante o muestra interés por leer libros de matemáticas. Gómez Chacón (2000) menciona que "Las actitudes hacia la matemática se refieren a la valoración y al aprecio de esta disciplina y al interés por esta materia y por su aprendizaje, y subrayan (sic) más la componente afectiva que la cognitiva; aquélla se manifiesta en términos de interés, satisfacción, curiosidad, valoración, etc..." (p. 24)

Algunos estudios muestran que una actitud positiva se correlaciona positivamente con un incremento de esfuerzo para aprender, y con el logro de dicho aprendizaje (Kloosterman, 1990; Minato, 1983; Minato y Yanase, 1984); además, que la confianza es un buen predictor de éxito en matemáticas (Randhawa, Beamer y Lundberg, 1993). En contraste, otros estudios (Ursini y Sánchez, 2008) destacan la influencia de factores sociales y culturales como condicionante de dichas correlaciones.

En México, según los resultados reportados por la Secretaría de Educación Pública del Gobierno Federal de evaluaciones académicas nacionales como las de ENLACE (SEP, 2013), la situación del bajo logro en matemáticas es particularmente preocupante, por ello consideramos que es importante describir las actitudes de los estudiantes dado su carácter multidimensional que integra componentes cognitivos, afectivo-evaluativos y conductuales, aunque para muchos autores el componente afectivo-evaluativo es el elemento esencial de la actitud (Gil, Blanco y Guerrero, 2005). Durante la primaria la relación entre la variable actitud y el rendimiento no resulta significativa. En la secundaria se presenta el momento más substancial para que los alumnos comprendan y modelen sus actitudes según su funcionamiento intelectual y en el bachillerato, las actitudes de los alumnos se vuelven más fijas y estables y, por tanto, menos afectadas por el rendimiento (Sarabia y Iriarte, 2011). Por lo anterior, el propósito de este estudio consistió en describir las actitudes hacia las matemáticas en dos grupos de estudiantes, uno de secundaria y otro de nivel bachillerato, asimismo, mostrar las diferencias obtenidas entre ambos grupos y el análisis de los resultados obtenidos al aplicar el Inventario de Actitudes hacia las Matemáticas-ATMI (Tapia y Marsh, 2004).

Preguntas de investigación

¿Qué características tienen las actitudes hacia las matemáticas de un grupo de estudiantes de secundaria y otro grupo de estudiantes de bachillerato? y ¿existen diferencias en las actitudes hacia las matemáticas entre ambos grupos de estudiantes?

Método

Participantes:

Los participantes fueron escogidos por los directores escolares de secundaria y bachillerato de acuerdo a su disponibilidad en los días que se programó y realizó el estudio. Participaron estudiantes masculinos y femeninos de los tres grados de secundaria y bachillerato (n= 371) del turno matutino del ciclo escolar 2014 - 2015, de un centro escolar de la Ciudad de Tepeaca, en el Estado de Puebla. La mayoría de los estudiantes pertenecen a un nivel socioeconómico medio. Todos los estudiantes tenían clases de matemáticas de acuerdo a su Plan de Estudios vigente que emite la Secretaría de Educación Pública para Escuelas de Nivel Secundaria y Bachillerato.

De los 371 participantes, 178 eran estudiantes del nivel de Bachillerato (87 mujeres y 91 hombres) y su edad oscilaba entre los 15 y 19 años, 193 eran del nivel de Secundaria (103 mujeres y 90 hombres) y su edad oscila entre los 12 y 17 años.

Instrumento:

Se aplicó el Inventario de Actitudes hacia las Matemáticas (The Attitude Toward Mathematics Inventory– ATMI, Tapia y Marsh, 2004) ya que es una herramienta de investigación útil para evaluar factores que influyen en las expectativas y el rendimiento en matemáticas. La seleccionamos debido a su validez de contenido, fiabilidad test, re-test y sencillez de aplicación y calificación. Este instrumento fue aplicado originalmente en países árabes y posteriormente fue traducido al idioma inglés, inicialmente constaba de 49 ítems pero posteriormente sus autores hicieron una reducción. La versión final del ATMI consta de 40 ítems que miden cuatro factores o dimensiones de las actitudes: Confianza en sí mismo (15 ítems), Valor (10 ítems), Gusto (10 ítems) y Motivación (5 ítems). Esta versión que se aplicó a los participantes se tradujo del inglés al español, cuidando el sentido de la pregunta en la versión original. En cada uno de los ítems, los estudiantes debían indicar su grado de acuerdo o desacuerdo en una escala Likert con cinco valores: totalmente de acuerdo (5), de acuerdo (4), ni de acuerdo ni en desacuerdo (3), en desacuerdo (2) y totalmente en desacuerdo (1).

A continuación se presenta, como ejemplo, un par de ítems de cada uno de los cuatro factores de la ATMI:

Factores	**Ejemplos**
Confianza en sí mismo	*Creo que soy bueno resolviendo problemas de matemáticas* *Siempre estoy bajo una terrible tensión en una clase de matemáticas*
Valor de las matemáticas	*Una sólida formación matemática podría ayudarme en mi vida profesional* *Las matemáticas son importantes en la vida cotidiana*
Gusto por las matemáticas	*Yo soy más feliz en un clase de matemáticas que en cualquier otra clase* *Yo preferiría resolver problemas matemáticos que escribir un ensayo*
Motivación	*Estoy dispuesto a estudiar más matemáticas de lo necesario* *Estoy seguro que puedo aprender matemáticas avanzadas*

En nuestro estudio se midió la consistencia y la confiabilidad del ATMI para cada factor. Se obtuvieron los siguientes coeficientes: En el factor 1 un alfa de Cronbach de 0.95, en el Factor II un alfa de 0.89, en el Factor III de 0.89 y en el Factor IV un alfa de Cronbach igual a 0.88. Los valores obtenidos indicaron un alto nivel de confiabilidad del ATMI.

Procedimiento:

Dos de los autores de este trabajo aplicaron el ATMI a todos los participantes en su horario escolar dentro de su salón de clases. Se enfatizó que la aplicación no tenía relación con la evaluación académica y, dado que su participación era totalmente voluntaria, que tenían la opción de no contestar el instrumento. Aunque no se impuso límite de tiempo los alumnos tardaban entre 15 a 20 min en responder el ATMI. Para evitar que aquellos estudiantes que no estaban interesados en dichos cuestionarios influyeran negativamente en los que sí lo estaban, se convino en que nadie saliera del aula hasta que todos hubiesen acabado. Los que iban finalizando se dedicaban a cualquier otra tarea de su interés, lo que favoreció que los cuestionarios no fueran contestados apresuradamente ni en que los alumnos fueran influidos por los que habían concluido antes.

Resultados

Para describir las actitudes hacia las matemáticas de toda la muestra de alumnos estudiada, así como en los dos grupos de participantes y comparar las características entre ellos se calcularon medidas de estadística descriptiva. En la Tabla 1 se puede observar que la actitud hacia las matemáticas más alta en la muestra total de participantes corresponde al factor 1, la confianza en sí mismo y la más negativa al factor 4, la motivación.

	Factores			
	1	2	3	4
Media	43.7	39.1	32.3	17.4
Desviación típica	7.2	5.2	7.1	3.8

Tabla 1.- Análisis estadístico de cada factor del ATMI en la muestra total.

Al disgregar la muestra en el grupo de estudiantes de bachillerato y de secundaria se encontró que los estudiantes de secundaria tienen puntajes más altos que corresponden a actitudes más positivas hacia las matemáticas que los de bachillerato, excepto en el factor 1 (confianza en sí mismo) constituido por 15 ítems, entre los cuales hay nueve que miden falta de confianza en sí mismo y los otros seis miden confianza ante las Matemáticas (Tabla 2).

	Factores			
	1	2	3	4
Media	43.8 (43.4)	38.0 (39.9)	31.4 (33.1)	16.7 (18)
Mediana	44 (43)	39 (41)	32 (34)	17 (18)
Moda	44 (39)	42 (42)	31 (36)	17 (18)
Desviación típica	6.7 (7.3)	5.5 (4.6)	7.3 (6.8)	4.0 (3.6)

Tabla 2.- Análisis estadístico del ATMI en los estudiantes de bachillerato y, entre paréntesis, los de secundaria.

Sin embargo, se observa que la media aritmética obtenida se acerca considerablemente a 44**,** lo cual sugiere una tendencia de los estudiantes a mostrar indiferencia hacia las matemáticas. Esto se infiere al considerar que el punto 3 de la escala ATMI es igual a “ni de acuerdo ni en desacuerdo” y que hay 15 ítems en el factor por lo que el puntaje máximo que se puede lograr es 45 cuando los participantes responden con 3. Esto no ocurre con los puntajes logrados en los demás factores de la escala.

Adicionalmente, se hizo un análisis de distribución de frecuencias de cada ítem del ATMI, en cuanto al número de participantes por grupo que contestó en cada punto de la escala, para mostrar las diferencias o similitudes en sus actitudes hacia las matemáticas entre ambos grupos. Se escogieron dos ítems que consideramos más significativos de cada factor actitudinal que evalúa el ATMI. Los resultados obtenidos se describen a continuación (Tabla 3).

	Factores															
	1				2				3				4			
Respuestas	Item 14		Item 17		Item 1		Item 31		Item 24		Item 29		Item 32		Item 33	
No contestó	0.56	*1.6*	0	*0*	2.25	*1*	1.69	*1*	1.69	*3.1*	6.18	*4.2*	2.81	*1.6*	2.81	*2.1*
Totalmente en desacuerdo	24.7	*31*	5.06	*2.6*	2.25	*2.1*	6.18	*2.6*	6.18	*3.6*	10.7	*8.3*	9.55	*6.2*	8.99	*5.2*
En desacuerdo	30.9	*33*	14	*15*	1.12	*1*	11.2	*4.2*	16.9	*13*	13.5	*8.8*	13.5	*8.3*	14.6	*11*
Ni en acuerdo ni en desacuerdo	21.9	*18*	29.2	*31*	7.3	*0.5*	22.5	*23*	39.3	*34*	36	*31*	34.8	*19*	37.6	*22*
De acuerdo	14.6	*11*	36.5	*28*	30.3	*32*	40.5	*44*	29.2	*32*	21.9	*29*	30.3	*44*	25.3	*40*
Totalmente de acuerdo	7.3	*5.7*	15.2	*23*	56.7	*64*	18	*26*	6.74	*14*	11.8	*20*	8.99	*21*	10.7	*19*

Tabla 3.- Distribución de frecuencias del ATMI en los estudiantes de bachillerato y, en cursiva, de secundaria.

Del factor 1, en el ítem 14 (*Cuando oigo la palabra matemáticas, tengo una sensación de desagrado*) se observa que más estudiantes de bachillerato que de secundaria manifiestan desagrado por la palabra matemáticas y una frecuencia mayor de alumnos de secundaria que de bachillerato no reporta desagrado al oír la palabra matemáticas. En el ítem 17 (*Tengo mucha confianza en mí mismo cuando se trata de matemáticas*) ligeramente más de la mitad de los alumnos de secundaria, tiene mucha confianza en sí mismo cuando se trata de matemáticas mientras que, con base en las frecuencias obtenidas cerca del 18% no tiene confianza en sí mismo al trabajar con las matemáticas y el 31% de los encuestados no estuvo ni de acuerdo, ni en desacuerdo. En los alumnos de bachillerato se observó una tendencia similar, cerca del 52% tiene mucha confianza en sí mismo cuando se trata de matemáticas, casi el 19% no tiene confianza en sí mismo al trabajar con las matemáticas y aproximadamente el 29% de los encuestados no estuvo ni de acuerdo, ni en desacuerdo.

Del factor 2, en el ítem 1 (*Las matemáticas son valiosas y necesarias*) en el grupo de secundaria casi el 95% respondió que las matemáticas son valiosas y necesarias. Aunque se observó un comportamiento similar en la distribución de respuestas obtenida en los estudiantes de bachillerato se puede decir que más estudiantes de secundaria que de bachillerato considera que las matemáticas son valiosas y necesarias y una frecuencia mayor de alumnos de bachillerato que de secundaria considera que las matemáticas no son valiosas ni necesarias. En el ítem 31 (*Las matemáticas son una materia muy interesante*) igual que en el ítem anterior, se encontró que más estudiantes de secundaria que de bachillerato considera que las matemáticas son una materia muy interesante y una frecuencia mayor de alumnos de bachillerato que de secundaria consideran que la materia de matemáticas no es muy interesante.

Del factor 3, en el ítem 24 (*Generalmente disfruto estudiar matemáticas en la escuela*) en el grupo de secundaria se encontró que casi la mitad de los participantes, un 46%, disfruta estudiar matemáticas en la escuela, cerca del 34% no estuvo ni de acuerdo ni en desacuerdo en disfrutar a la hora de estudiar matemáticas en la escuela y aproximadamente el 16% considera que no disfruta estudiar matemáticas en la escuela. En los estudiantes de bachillerato aproximadamente el 36% señala que disfruta estudiar matemáticas en la escuela, cerca del 40% no estuvo ni de acuerdo ni en desacuerdo en disfrutar estudiar matemáticas en la escuela y cerca del 23% no disfruta estudiar matemáticas en la escuela. En el ítem 29 (*Realmente me gustan las matemáticas*) los resultados evidencian que más estudiantes de secundaria que de bachillerato consideran que realmente les gusta la materia de matemáticas y una frecuencia mayor de alumnos de bachillerato que de secundaria consideran que realmente no les gusta la materia de matemáticas.

Del factor 4, en el ítem 32 (*Estoy dispuesto a estudiar más matemáticas de lo necesario*) en ambos grupos se encontraron los porcentajes más altos, incluso similares, en la respuesta que corresponde a estar dispuesto a estudiar más matemáticas de lo necesario, cerca del 20% no estuvo ni de acuerdo ni en desacuerdo en estar dispuesto a estudiar más matemáticas de lo necesario y el porcentaje más bajo en la respuesta no estar dispuesto a estudiar más matemáticas de lo necesario, aunque el porcentaje fue mayor en los estudiantes de bachillerato (35%). En el ítem 33 (*Espero estudiar tantas matemáticas como pueda durante mi educación*) fue mayor la diferencia porcentual entre los dos grupos de estudiantes en que esperan estudiar tantas matemáticas como puedan durante su educación, siendo casi del doble la diferencia a favor de los estudiantes de secundaria. El 16% contra el 23% de secundaria y bachillerato, respectivamente, no espera estudiar tantas matemáticas como pueda durante su educación.

Conclusiones

De acuerdo con Palacios, Arias y Arias (2014) las actitudes hacia las matemáticas actualmente representan un campo de gran interés e importancia para la investigación, a veces dentro de temas que comprenden conceptos más globales como el de dominio afectivo matemático. La relevancia, coincidiendo con dichos autores, es patente por el amplio número de estudios dedicados a la conceptualización y medida de las actitudes así como de las funciones con las que se les vincula, por ejemplo, mejorar el rendimiento académico o incrementar la motivación por el estudio de una asignatura determinada. Estudios como el reportado en este trabajo tienen la importancia de que ante la dificultad de realizar estudios longitudinales que permitan conocer, en una misma muestra de sujetos, los cambios en actitudes hacia las matemáticas en momentos de transición, por ejemplo, de la primaria a la secundaria o de esta al bachillerato, ofreciendo una mirada valiosa de las transformaciones que experimentan las actitudes en dos niveles escolares diferentes. Lo anterior se considera de este modo ya que en este estudio participaron estudiantes de secundaria y bachillerato de un mismo centro escolar. Aunque los resultados muestran que hay una tendencia similar en las actitudes hacia las matemáticas entre el grupo de secundaria y el de bachillerato, en la distribución de frecuencias en los 5-puntos de la escala del ATMI, los participantes de secundaria muestran respuestas correspondientes a una actitud más positiva que negativa en comparación a los estudiantes de bachillerato. Esta afirmación encuentra evidencia en los resultados que arrojaron los análisis a los ítems escogidos y presentados en este trabajo en cada uno de los factores o subescalas actitudinales del ATMI. Es decir, los estudiantes de bachillerato presentan una actitud hacia las matemáticas más neutral y menos positiva que los de secundaria. Este resultado es similar con lo que en otros trabajos (Sánchez y Ursini, 2010) se ha planteado aludiendo a la hipótesis del declive actitudinal pero que se había observado especialmente en alumnos de tercer grado de secundaria.

Para finalizar, se reconoce que también otros temas de investigación en esta línea, por ejemplo, estudiar las diferencias en la correlación entre actitudes y rendimiento en matemáticas entre los alumnos de secundaria y bachillerato, pueden constituir una importante contribución para ampliar la comprensión de las actitudes hacia las matemáticas. Esto supone trabajo futuro por desarrollar.

Referencias

Gil, N.; Blanco, N. L. y Guerrero, E. (2005). El dominio afectivo en el aprendizaje de las Matemáticas: una descripción de sus descriptores básicos. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática* 2. 15-32. España.

Gil, N.; Blanco, L. y Guerrero, E. (2006). El papel de la afectividad en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de Educación 340 (Mayo-agosto)* 551-569. España.

Gómez-Chacón, M. I. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*, Madrid, Narcea.

Gómez-Chacón, M. I. (2002). Afecto y aprendizaje matemático: causas y consecuencias de la interacción emocional. En J. Carrillo (ed.) *Reflexiones sobre el pasado, presente y futuro de las Matemáticas*. Huelva (España): Universitaria de Huelva.

Gómez-Chacón, M. I. (2009). Actitudes matemáticas: propuesta para la transición del bachillerato a la universidad. *Educación Matemática*, 21(3), 5-32.

Kloosterman, P. (1990). Attributions, performance following failure, and motivation in mathematics. In E. Fennema & G. C. Leder (Eds.), *Mathematics and gender* (pp. 96–127). New York: Teachers College Press

Martínez, P. O. J. (2008). Actitudes hacia la matemática. *Sapiens: Revista Universitaria de Investigación*, *9*(1), 237-255.

Minato, S. (1983). Some mathematical attitudinal data on eighth grade students in Japan measured by a semantic differential. *Educational Studies in Mathematics* 14(1), 19–38.

Minato, S., y Yanase, S. (1984). On the relationship between students' attitudes towards school mathematics and their levels of intelligence. *Educational Studies in Mathematics* 15(3), 313– 320.

Palacios, A., Arias, V., y Arias, B. (2014). Las actitudes hacia las matemáticas: construcción y validación de un instrumento para su medida. *Revista de Psicodidáctica*, *19*(1), 67-91.

Randhawa, B. S., Beamer, J. E., y Lundberg, I. (1993). Role of mathematics self-efficacy in the structural model of mathematics achievement. *Journal of Educational Psychology*, *85*(1), 41.

Sánchez, R. J. G. y Ursini, S. (2010). Actitudes hacia las matemáticas y matemáticas con tecnología: Estudios de género con estudiantes de secundaria. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *13(4),* 313-318.

Sarabia, A. y Iriarte, C. (2011). *El aprendizaje de las matemáticas: ¿Qué actitudes, creencias y emociones despierta esta materia en los alumnos?,* Navarra, EUNSA.

SEP (2013). Informe de resultados de enlace 2013. Consultado en http://www.enlace.sep.gob.mx/

ba/informes_para_impresion/

Tapia, M., y Marsh, G. E. (2004). An instrument to measure mathematics attitudes. *Academic Exchange Quarterly*, *8*(2). Recuperado de http://www.rapidintellect.com/AEQweb/cho 253441.htm.

Ursini, S., y Sánchez, R. J. G. (2008). Gender, technology and attitude towards mathematics: a comparative longitudinal study with Mexican students. *ZDM*, *40*(4), 559-577.

Vigil-Colet, A., Lorenzo-Seva, U., y Condon, L. (2008). Development and validation of the statistical anxiety scale. *Psicothema*, *20*(1), 174-180.

Zan, R., Brown, L., Evans, J., y Hannula, M. S. (2006). Affect in mathematics education: An introduction. *Educational studies in mathematics*, *63* (2), 113-121.

Autores

Alejandra Mejía Saldaña; BUAP. México; alegris_2104@hotmail.com
Ana María Castillo Juárez; BUAP. México; castillojuarez81@gmail.com
José Gabriel Sánchez Ruíz; UNAM. México; josegsr@unam.mx

SECCIÓN B. PERSPECTIVAS DIDÁCTICAS EN MATEMÁTICA

EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL MEDIANTE EL USO DE ESTRATEGIAS DE PREDICCIÓN

Jesús Enrique Hernández Zavaleta, Ricardo Cantoral Uriza

Resumen

Este escrito es parte de una investigación en curso que pretende dar cuenta del carácter determinista del cambio ligado a sistemas con dinámicas aparentemente azarosas, en donde las interacciones de los individuos con éstos darán indicios de una forma de construir conocimiento matemático. El problema de los tres cuerpos tratado por Leonard Euler y el problema de la expresión fenotípica de la Arabidopsis thaliana son ejemplos en donde se encuentran presentes este tipo de dinámicas. Las singularidades en las actuaciones de las personas ante este tipo de sistemas serán caracterizadas por dos niveles de constantificación asociados a la variación y la predicción. Mostraremos indicios de la existencia de un principio que se encuentra ligado a estos dos niveles.

Palabras clave: cambio, variación, predicción, constantificación, Socioepistemología.

Introducción

Desde hace tiempo la Matemática ha sido vinculada con diferentes disciplinas, comenzando por propuestas teológicas, pasando por la cultura y el arte y proponiéndose fundamental para la filosofía natural. En este sentido, a diferencia de otras áreas, ha permitido una vinculación, hasta cierto punto flexible. Hoy en día se estudian diversos fenómenos a través del paradigma de la Complejidad, para el cual la gran cantidad de elementos y variables en los fenómenos naturales da lugar a dinámicas no lineales que, en algunos casos, presentan cambios erráticos, que imposibilitan la predicción a largo plazo; estas dinámicas son conocidas como caóticas (Prigogine, 1999; Peitgen, Jürgens, & Dietmar, 2004; Shuster, 2005). Sin embargo, es posible abrir posibilidades a estados futuros| cercanos en el sistema, si se realizan las acciones necesarias y suficientes para ello. Se debe resaltar que los comportamientos de cambio y variación de estos sistemas son parte primordial para el desarrollo de esta investigación, debido a nuestro interés en las estrategias y prácticas promotoras de la predicción.

Un ejemplo particular de esta vinculación comienza con Isaac Newton, sentando las bases matemáticas para modelos de la dinámica celeste y proponiendo un programa de investigación que, desde entonces, ha guiado el desarrollo de la Física y la Matemática, conformando teorías sobre fenómenos como el calor, la luz, el sonido, la mecánica de fluidos y, posteriormente, la relatividad y la teoría cuántica, en las que el pensamiento matemático se ha vuelto parte fundamental. De esta forma el cálculo ha servido para el desarrollo de la ciencia y la sociedad, insertado en el sistema educativo como una asignatura del último año en los bachilleratos en México y como obligatoria en niveles universitarios, en la ingeniería y en carreras orientadas a la tecnología. Sin embargo, las investigaciones en Matemática Educativa han mostrado las dificultades que presentan los estudiantes para la compresión de los conceptos del análisis elemental, delimitando la problemática ligadas a aspectos como el concepto de límite y las dificultades ligadas a la necesidad de la ruptura con el pensamiento algebraico (Artigue, 1995).

Las perspectivas teóricas que tratan la problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo son variadas y tocan la intuición, el rigor, el uso de la tecnología, la formación de profesores y el estudio de aspectos socioculturales, dando pie a la creación de propuestas que intentan facilitar su aprendizaje (Cuevas & Pluvinage, 2013; Cuevas, 2014). Dentro del aspecto sociocultural la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) propone que el cálculo además de ser una asignatura en la que se combina la intuición con la precisión y el rigor, se asume al cálculo infinitesimal como un objeto cultural, tanto su enseñanza y su aprendizaje no pueden desvincularse de la práctica social que le dio sentido y significado, articulando el estudio de la variación y el cambio insertos. El programa de investigación de *Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLVar)* de la TSME considera básica la introducción de una visión sistémica que permita incorporar las cuatro componentes fundamentales de la construcción de conocimiento: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural y las componentes cognitiva y didáctica (modos de transmisión del conocimiento). Lo que permitirá una investigación orientada a las prácticas sociales que dan vida a la matemática de la variación y el cambio en los sistemas didácticos (Cantoral 2013).

El cambio se encuentra presente en el entorno de todo ser vivo, por lo que trabajar con él se vuelve fundamental para sobrevivir; por ejemplo, los procesos adaptativos de las ranas han logrado desarrollar instintos para la percepción del movimiento tomando en cuenta el tamaño de objetos que se aproximan, si es de tamaño grande, supongamos el pie de un ser humano, la rana instintivamente salta y si el objeto es suficientemente pequeño la lengua es la que se activa para la caza de alimento. Análogamente, podemos encontrar un mecanismo que trabaja en los tigres al cazar un antílope en plena carrera, el tigre debe dar el salto justo para atrapar a su presa anticipándose a su posible trayectoria. En estos ejemplos se muestra como se perciben y procesan cambios, para posteriormente analizar su variación. El ser humano, también, se encuentran vinculado con el cambio en diversas situaciones, comenzando con el crecimiento y desarrollo de su cuerpo y el de sus seres allegados; por ejemplo, en los cambios de tono de la voz, cambios de humor y en la percepción de los sabores y sonidos. En otras palabras estamos inmersos en un mundo dinámico, para el cual se requiere de estrategias que le permitan cuantificar los cambios presentes. Si todo ser vivo es capaz de percibir el cambio de forma cotidiana ¿por qué no insertar su estudio en un programa educativo?

El programa de *PyLVar* se encarga del estudio de la evolución y desarrollo del lenguaje y pensamiento alrededor del cambio y su cuantificación. Teniendo como punto original la enseñanza del Cálculo asumiéndolo de carácter dinámico y argumentando que surge como necesidad de saber cómo los fenómenos cambian; es decir, tratando de clarificar fenómenos de velocidad y de acumulación, haciendo énfasis en los diferentes procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando estructuras y lenguajes variacionales (Cantoral, 1990; Cantoral & Ferrari, 2004). Esta línea de investigación se fundamenta en el trabajo de Cantoral (1990) en donde se propone y justifica al *Prædicere* como una práctica social compartida por filósofos naturales, ingenieros, físicos y matemáticos de los siglos XVIII al XX y posteriormente Cantoral y Farfán (2003) sustentan a la predicción en los siguientes términos:

> La noción de predicción se construye socialmente a partir de las vivencias cotidianas de los individuos, pues en ciertas ocasiones necesitamos conocer el valor que tomará una magnitud con el paso del tiempo. Se requiere determinar el valor que tomará la variable dependiente antes de que la independiente pase del estado 1 al estado 2. Pero a causa de nuestra imposibilidad de adelantar el tiempo a voluntad, debemos predecir. En tal caso, no disponemos de razones para creer que el verdadero valor buscado esté distante de las expectativas que nos generan los valores en un inicio; de tal forma que ellos cambian y cambian sus cambios, y así sucesivamente. (Cantoral & Farfán, 2003, pág. 40)

Recientemente en (Cantoral, 2013) se reúnen y presentan esquemas paradigmáticos que se encuentran asociados a esta noción teniendo, en todos, identificada la aparición de la serie de Taylor reforzando la normatividad que tiene la práctica social del *Prædicere.* La predicción de igual forma que el PyLVar se construye a partir de necesidades y experiencias entorno al contexto social de los individuos, de tal modo que se ha vuelto fundamental para el desarrollo de diversos resultados y conceptos matemáticos que nos permiten anticiparnos, algunos estados, al comportamiento de fenómenos que no son predecibles a largo plazo; por ejemplo, los sistemas caóticos deterministas. Desde un punto de vista complejo suponemos la existencia principios propios de la construcción social del conocimiento que mediante sus interacciones dan lugar a la generación de estructuras de saberes cada vez más complejas. El caso que nos ocupa es la búsqueda de uno de esos principios *(P*)* que suponemos se encuentra presente en la articulación entre la predicción y las actuaciones de los individuos que intervienen en el sistema que da lugar a singularidades que hacen posible predecir.

Momentos de constantificación en la búsqueda de la predicción

Iniciaremos la caracterización del *P** vinculado a una *forma de estructurar saberes* que hemos comenzado a vislumbrar por su expresión invariante en las acciones, que llevan a cabo individuos o colectivos, para resolver una situación problemática en la que se encuentra involucrado cierto número de variables que imposibilitan su análisis, resolución y predicción. La situación en la cual iniciamos nuestro estudio es la solución propuesta por Euler (1775) para el Problema de los Tres Cuerpos (PTC) en donde logró proponer las restricciones pertinentes para dar soluciones particulares. En este caso centraremos nuestra atención en la búsqueda de acciones invariantes que nos permitan vislumbrar las singularidades propias de *P*.*

Euler (1775) propone una versión en donde se considera el movimiento de dos masas grandes y el de una tercera que se puede tomar tan pequeña como se quiera y aún en el límite, siempre se ve afectada por las fuerzas gravitacionales de las otras dos. Al considerar la tercera masa casi despreciable logra tratar el problema como uno de sólo dos masas. A este proceso se le conoce como el problema restringido de los tres cuerpos, el cual se resuelve en una y dos dimensiones en configuración colineal y de triángulo rectángulo.

En este sentido el Sol y la Tierra toman el papel de las dos primeras masas y la Luna se toma como el tercer cuerpo de tamaño despreciable, respecto a las primeras. Aunque las soluciones propuestas por Euler son solamente una aproximación a las reales, han sido de gran ayuda en el desarrollo de la Mecánica Celeste de los siglos XIX y XX; además de ser utilizadas en el estudio de movimiento de satélites y naves no tripuladas enviadas a otros planetas. La elección de tamaños de masas adecuados, permitieron a Euler mostrar casos particulares del problema, sin llegar a dar una solución general de él, que permiten vislumbrar una franja de predicción en sus soluciones, en otras palabras, esta forma de actuar lo llevó a la clase de situaciones que promueven la predicción. De esta forma identificamos un antecedente de la expresión de $P*$.

El problema de la búsqueda de la predicción comienza con la determinación de aquellas magnitudes que den una descripción suficiente de las leyes que rigen los cambios y describan satisfactoriamente el fenómeno estudiado, se trata del primer nivel de constantificación que Cantoral describe de la siguiente forma, "con esto queremos decir lo siguiente, de la gran cantidad de variables vinculadas con el fenómeno, se elige un pequeño subconjunto de ellas que efectivamente serán consideradas variables y al resto, la inmensa mayoría, las asumimos constantes" (Cantoral, 1990, pág. 103).

Es importante considerar que la adecuada selección de las variables que describen un fenómeno depende de la experiencia, del sentido e interpretación que se le quiera y del paradigma científico dominante. En todos los problemas ejemplo se enfatiza la búsqueda de dependencias funcionales del tipo:

$$F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0$$

Se debe considerar que en estos casos la relación F no se expresa necesariamente en términos de flujo, sino que también puede tomar la forma de cambios puntales discretos. En el caso del problema restringido de los tres cuerpos propuesto por Euler, este nivel se expresa al proponer una configuración adecuada (colineal y de triángulo rectángulo) para la posición de los cuerpos que le permite proponer soluciones para una y dos dimensiones. En un segundo momento se busca reconocer las condiciones iniciales que le permitan determinar los estados estables del sistema, es decir, que le permitan mediante un *Segundo Nivel de Constantificación* sobre las variaciones de las variables una predicción del comportamiento del sistema.

Es en este Segundo Nivel en donde tiene sentido establecer la existencia de diferencias entre los estados del sistema (p. e. diferencias de posición y velocidad, de energía, de estados sucesivos de la iteración en una red, etcétera). En otras palabras, existe la diferencia fundamental:

$$F(x + dx) - F(x)$$

Donde se conoce el estado *F(x)* y se desea conocer el estado *F(x+dx).* Tomando la expansión infinita en series de esta diferencia se tiene la siguiente expresión:

$$F'(x)dx + F''(x)\frac{dx^2}{2!} + \cdots$$

Dicho lo anterior Cantoral caracteriza al *Segundo Nivel de Constantificación* como sigue:

> […] un segundo grado de constantificación, mediante el cual se pueden suponer constantes o cuasi constantes la inmensa mayoría de las sucesivas variaciones de la variable, y en tal caso se puede, por así decirlo, cortar la serie infinita en algún sitio. (Cantoral, 1990, pág. 107)

En otras palabras el segundo momento consta de deshacernos de los términos que no permiten la estabilidad del sistema, éstos por lo general son los *términos no lineales*, es decir, de orden dos o superior. Estos dos niveles forman parte fundamental de la práctica del *Prædicere* y se proponen como unidad básica para la construcción de conocimiento. De esta forma podemos considerar que más allá de la elección adecuada de las variables del sistema, debemos tomar en cuenta que las condiciones iniciales y las relaciones entre los cambios de las variables son lo que permite determinar estados futuros del sistema.

Nuestra hipótesis sustenta que es en el *Segundo Nivel de Constantificación* en donde *P** encuentra una expresión contundente de tal forma que en el PTC se expresa al momento de proponer tamaños de masas adecuadas (masa infinitesimal) y en el problema de la predicción climática se expresa como los métodos utilizados para elegir las condiciones iniciales idóneas para alcanzar lapsos de predecibles más amplios. Esta investigación se orienta a la búsqueda de prácticas de referencia en donde se puedan localizar los dos niveles de constantificación y mostrar las singularidades en las actuaciones de los practicantes, que les permiten realizar predicciones sobre su modelo. Las problemáticas que emergen de la práctica interdisciplinaria han sido un instrumento en el cual, se han encontrado las condiciones buscadas, particularmente se han estudiado las producciones escritas de un grupo de biólogos, matemáticos y científicos de la computación sobre redes genéticas.

El problema de la expresión fenotípica a partir de sus interacciones genéticas

El siguiente ejemplo se refiere a las Redes de Regulación Genética (RRG) pertenecientes, principalmente, al ámbito de la matemática discreta, aunque algunas ecuaciones diferenciales pueden ser planteadas. La vinculación entre la Matemática y la Biología se hace presente de tal forma que ambas disciplinas son integradoras de una nueva epistemología que las enriquece proponiendo formas, métodos y lenguajes propios para dar solución al problema que ponen en cuestión.

Particularmente mencionaremos los resultados de la investigación reportados en (Álvarez-Buylla & Benitez, 2011) y (Benitez & Hejátko, 2013) en donde se estudian redes genéticas pertenecientes a la flor *Arabidopsis thaliana* y se propone la interacción y manipulación de la red de tal forma que les permite encontrar configuraciones estables de 5 fenotipos (formas de la flor) de los cuales uno se reporta extinto, tres son formas endémicas del sur del D.F. y del último no se ha reportado su existencia, pero se propone como producto futuro de la evolución de los fenotipos actuales.

Primer nivel de constantificación

En los artículos mencionados se propone la elección de la *Arabidopsis thaliana*, debido al pequeño número de genes que conforman su RRG, así es posible conocer la mayoría de la interacciones entre ellos. Es importante mencionar que los estados que presenta cada gen, en la red *real*, son un número grande, de tal modo que podríamos equipararlos con la gama de colores existentes; en este sentido y para propósitos de clarificar conceptos en este escrito, llamaremos a estos *genes multicolores*. Es claro que modelar todos los estados de los genes multicolor no es posible, debido a que no se tiene suficiente información sobre todos ellos, por otro lado el poder de cómputo al que tenemos acceso actualmente no es suficiente para almacenarlos y calcularlos. De esta forma los autores proponen una simplificación del modelo en la que los estados de los genes, dependiendo de su acción en la red, sea discreta bicolor o tricolor según sea el caso.

Segundo nivel de constantificación

Posterior a la elección de los estados de los genes virtuales varias han sido las consideraciones que debieron hacerse para que el modelo computacional de la RRG diera resultados acordes con la *realidad buscada*, pero uno que particularmente promovió la estabilidad del sistema fue la decisión de sincronizar la actualización de estados de la red. Esta es una asunción considerada de peso para el modelo, ya que los estado reales de la red presentan una dinámica asíncrona, los autores lo dicen de la siguiente manera:

> The state of all nodes in the network is updated simultaneously (synchronous update) in discrete time steps. This is a strong assumption because regulation of the nodes is in fact likely to occur at different rates. [...] **the synchronous update constitutes the simplest assumption. A consequence of this assumption is that only final steady states** (and not transient ones) are informative. (Benitez & Hejátko, 2013, pág. 4)

Este ejemplo ha sido retomado de las publicaciones de los autores y enriquecido por una entrevista realizada a la autora Benítez en donde habló de sus intereses principales en investigación y su forma de trabajo, que según dijo, es beneficiada por la práctica interdisciplinaria entre biólogos, matemáticos, físicos y científicos de la computación. Nuestra hipótesis sustenta que es en el *Segundo Nivel de Constantificación* en donde *P** encuentra una expresión contundente de tal forma que en el PTC se expresa al momento de proponer tamaños de masas adecuadas (masa infinitesimal) y en el problema de la expresión fenotípica como la sincronización temporal en la actualización de los estados de los genes.

Reflexiones finales

La TSME tiene como tarea fundamental el estudio de la construcción social de conocimiento matemático, bajo circunstancias y aspectos socioculturales específicos, verificando las interacciones entre la epistemología y los factores sociales. De acuerdo al esquema metodológico propuesto por Montiel y Buendía (2012) esta investigación se encuentra en la fase del análisis socioepistemológico en el que se ha comenzado a articular investigaciones como las de Covián (2005) y Yojcom (2013) para la recolección e interpretación de los datos.

En los ejemplos mostrados hemos caracterizado algunos de los mecanismos que hacen posible la expresión en acciones de *P**. Particularmente en el problema de la expresión fenotípica de la *Arabidopsis thaliana*, la práctica interdisciplinaria juega un papel trascendental. El análisis de las producciones escritas ha mostrado una estrategia que le permitió a este grupo de investigadores hacer predicciones del fenómeno trabajado.

El estudio de las producciones de grupos interdisciplinarios nos ha permitido ver diferentes facetas de expresión de *P**, en una segunda fase de la investigación se propone el análisis de escritos de investigaciones en las que se encuentran presentes situaciones que caracterizaremos como "limítrofes" respecto a la forma y posibilidad de predicción, para después poder hacer entrevistas y observaciones a los elementos de distintos grupos de investigación. De esta manera estaremos en posibilidades de proponer líneas de trabajo que incidan en el rediseño del Discurso Matemático Escolar (*rdME)* (Reyes-Gasperini, 2011; Soto, 2012).

Esta investigación se propone de corte cualitativo – interpretativo, tomando de principio la noción de comunidad de práctica propuesta por Wenger (2009); es decir, como una parte integral de nuestra vida diaria y aunque la mayoría no tienen nombre, quienes las conforman lo saben intuitivamente. Como individuos, se puede decir que somos nodos de una red en la que se pueden distinguir interacciones a corto y a largo alcance, con cierto peso que marca la distinción entre las comunidades de práctica, de las que somos parte fundamental y otras de las que solamente somos miembros periféricos.

Por otro lado comenzaremos a estudiar la posibilidad de uso brindada por la metodología de la Teoría Fundamentada (Grounded Theory) GT, para comprender los elementos emergentes de estas interacciones. Esta teoría tiene como dictum *"todo es dato"* ("*All is data"*) (Glaser, 2007), que se refiere a que tenemos la oportunidad y responsabilidad de reconocer y utilizar todas las fuentes de información disponibles en nuestro análisis como esenciales, para explicar el patrón de comportamiento de la comunidad en cuestión. Procederemos a través de series de análisis sistemáticos e inductivos, en los que se incluye una codificación y categorización de acciones, hasta que se da lugar a una explicación del fenómeno estudiado.

Debido a que las acciones relacionadas con el *P** se encuentran en el marco del PyLVar es necesario integrar al análisis de la situación de profesión un marco que permita vislumbrar sus elementos, de esta forma se utilizará la caracterización propuesta por Cabrera (2009) y Caballero (2012), fijándonos en los argumentos, códigos y estrategias variacionales que allí se expresen y sean propicios para la emergencia de una categoría principal que dé lugar a nuevos constructos teóricos. Cabe mencionar la emergencia de un reto metodológico que implica la propuesta de medios que articulen las nociones propuestas por Wenger (2009), la GT y la TSME de tal forma que nos permitan elaborar medios, lenguajes, conceptos y estructuras para comprender el *P** inserto en la comunidad con las características descritas.

Referencias bibliográficas

Álvarez-Buylla, E., & Benitez, M. (2011). Complejidad Genética, Morfogénesis y Transgénicos: Las plantas como caso de estudio. En J. Flores, & G. Martínez, *encuentros con la complejidad* (págs. 116-149). México, UNAM: Siglo XXI.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. . En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, & P. Gómez, *Ingenieria Didáctica en Educación Matemática* (págs. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamerica.

Benitez, M., & Hejátko, J. (2013). Dynamics of Cell-Fate Determination and Patterning in the Vascular. *PLoS ONE, 8*(5), e63108. doi: 10.1371/journal.pone.0063108.

Caballero, M. (2012). *Un estudio de las dificultades en el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en profesores de bachillerato.* México: CINVESTAV, Tesis de Maestría.

Cabrera, L. (2009). *El pensamiento y lenguaje variacional en el desarrollo de competencias.* México: CINVESTAV, Tesis de Maestría .

Cantoral, R. (1990). *Categorías Relativas a la apropiación de una base de significaciones para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las Funciones Analíticas. Simbiosis y Predación entre las nociones de "el Prædiciere y lo Analítico".* México: Tesis de Doctorado, CINVESTAV.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento matemático.* México: Gedisa.

Cantoral, R., & Farfán, R. M. (2003). Mathematics Education: A vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics , 6*(1), 255-270.

Cantoral, R., & Ferrari, M. (2004). Uno studio socioepistemologico sulla predizione. *La matematica e la sua didattica*, 33-70.

Covián, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la Cultura Maya.* México D.F.: Tesis de maestría, CINVESTAV.

Cuevas, C. (2014). *El cálculo y su enseñanza.* México: CINVESTAV.

Cuevas, C., & Pluvinage, F. (2013). *La enseñanza del cálculo diferencial e integral: compendio de investigaciones y reflexiones para profesores, formadores e investigadores en matemática educativa.* México: Pearson.

Euler, L. (1775). Considérations sur Probleme des Tois Corps. *Opera Omnia*, 194 -220.

Glaser, B. (2007). All is data. *The Grounded Theory Review,* 1-22.

Montiel, G., & Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación en socioepistemológica: ejemplos e ilustraciones. En A. Rosas, & R. Avenilde, *Metodología en Matemática Educativa: Visionesy Reflexiones* (págs. 61-88). México: Lectorum.

Peitgen, H.-O., Jürgens, H., & Dietmar, S. (2004). *Chaos and Fractals:New Frontiers of Science* (Cuarta ed.). Springer.

Prigogine, I. (1999). *Las leyes del Caos* (Primera en bliblioteca de Bolsillo ed.). Barcelona: Crítica.

Reyes-Gasperini, D. (2011). *Empoderamiento docente desde una visión Socioepistemológica: Estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor.* Tesis de Maestría, CINVESTAV, México.

Shuster, H. G. (23 de Agosto de 2005). *Deterministic Chaos: an introduction.* Recuperado el 4 de octubre de 2014, de http://onlinelibrary.wiley.com/book/10.1002/3527604804: http://onlinelibrary.wiley.com/book/10.1002/3527604804

Soto, D. (2012). *Los excluidos por el dME. El caso del profesor de matemáticas en formación.* Memoria Predoctoral, CINVESTAV, México.

Wenger, E. (2009). A social theory of learning . En K. Illeris, *Contemporary Theories of Learning* (págs. 209-218). New York: Routledge.

Yojcom, D. (2013). *La epistemología de la matemática maya: una construcción de conocimientos y saberes a través de las prácticas.* Tesis de Doctorado. CINVESTAV, México

Autores

Jesús Enrique Hernández Zavaleta; CINVESTAV, IPN. México ; jherza@gmail.com
Ricardo Cantoral Uriza; CINVESTAV, IPN. México; rcantor@cinvestav.mx

DESCOMPOSICIONES GENÉTICAS RELACIONADAS CON EL CONCEPTO DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Abel Medina Mendoza, Alejandro Miguel Rosas Mendoza

Resumen

Este trabajo se encuadra en un proyecto de investigación doctoral en el Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA) del Instituto Politécnico Nacional, cuyo objetivo principal es "Construir el concepto de ecuación diferencial ordinaria de primer orden mediante la descomposición genética para su aplicación en la solución de problemas de circuitos eléctricos". Desde la práctica docente se ha observado que en la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales los conceptos permanecen ocultos por fórmulas y procesos algorítmicos que dificultan la comprensión y aplicación de los mismos. Así, como antecedente presentamos investigaciones sobre la descomposición genética de conceptos claves del cálculo, como son la transformación lineal, la derivada, el diferencial de una función de varias variables, la regla de la cadena y el de ecuación diferencial; así como la teoría y metodología APOE, acordes para trabajar con conceptos matemáticos de alta abstracción como el concepto de ecuación diferencial.

Palabras clave: APOE, Descomposición genética, Ecuaciones Diferenciales.

Introducción

El objetivo de este avance de investigación en Matemática Educativa es presentar problemáticas y dificultades que se presentan para lograr la comprensión y aplicación del concepto de ecuación diferencial.

Distintas investigaciones en el campo de la Educación Matemática han revelado un conjunto de dificultades que los estudiantes han encontrado en el proceso de aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO), de las cuales se pueden citar:

Perdomo (2011), presenta una investigación relacionada con los procesos de enseñanza y aprendizaje de las EDO; donde se distinguen dos partes principales: análisis de la forma en que un grupo de estudiantes que han recibido una formación tradicional del concepto utilizan sus conocimientos matemáticos para resolver problemas y responder a cuestiones relacionadas con las EDO y, el análisis del papel que la resolución de problemas, la tecnología y la interacción juegan en el proceso de aprendizaje. El análisis de los datos obtenidos en la primera fase, permitieron constatar que el enfoque de enseñanza habitual, en el que se introduce el concepto a partir de su definición formal y los métodos algebraicos de resolución, no favorece el desarrollo de la comprensión del concepto. El análisis con el uso de la herramienta tecnológica y el modelo de trabajo en el aula, contribuyeron a crear un clima de indagación, reflexión, planteamiento de conjeturas y verificación.

Villar-Liñan y Llinares-Ciscar (1996), establecen el modo en que los estudiantes son capaces de definir el concepto de ecuación diferencial y la proximidad entre esta definición y la definición formal. Los resultados de esta investigación muestran que aunque sólo la décima parte de los estudiantes definió de forma precisa el concepto de ecuación diferencial, señalando con ejemplos diferentes EDO de variables separadas o lineales, casi la mitad de los alumnos propuso ejemplos correctos de ecuaciones diferenciales. Esto llevó a los autores a concluir que “el hecho de no definir una noción no es obstáculo para su identificación en un determinado contexto” y que “la imagen del concepto (de ecuación diferencial que tienen los alumnos) está muy ligada a expresiones formales, casos particulares y ejemplos concretos” (p. 99).

Rasmussen (2001), hace referencia a las dificultades que entraña el concepto de solución de una ecuación diferencial. Estas dificultades las asocia con el hecho de que es un espacio formado por funciones y no por valores numéricos. Esta conclusión la extrae de un estudio sobre la concepción que tienen los estudiantes acerca de las soluciones de equilibrio de una EDO, las aproximaciones numéricas y la estabilidad. Zandieh y McDonald (1999), identificaron esta misma dificultad en una investigación en la que apuntan como posible causa de estos errores conceptuales al hecho de que en muchas de las actividades que realizan los estudiantes no es necesario pensar en la variable, considerando ecuaciones de la forma $y' = f(x, y)$, como una solución o una función.

Guerrero, Camacho y Mejía (2010), también observaron que los estudiantes consideraban las funciones constantes sólo como números y no como funciones. Estos autores realizan una investigación haciendo uso del registro gráfico como medio de solución de EDO. Los resultados de esta investigación muestran que los estudiantes recuerdan las definiciones de algunos conceptos de cálculo pero les resulta imposible aplicarlas en un nuevo contexto de conocimiento, en este caso, el bosquejo de campos de direcciones y la interpretación de soluciones.

Rodríguez (2012) en su investigación tiene como objetivo que el alumno comprenda el modelo para representar, comprender y estudiar diversos fenómenos de naturaleza social, química, mecánica y eléctrica, así como la importancia de la visualización de representaciones de diversos aspectos de la Ecuación Diferencial a través del uso de tecnología. La autora realizó su investigación de tipo cualitativa. La autora concluye que el diseño de las actividades como observación, videograbaciones, realización de reactivos permitió alcanzar los objetivos previstos para el proceso de modelación matemática y la tecnología utilizada constituye un apoyo importante en la transición entre el dominio físico y matemático así como el desarrollo de competencias tecnológicas.

En el taller “Introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias a partir del análisis de fenómenos de variación” de Codes y Perdomo (2012), los investigadores presentaron un conjunto de actividades tanto para realizar de forma individual como en pequeños grupos con lápiz y papel y, con el software de cálculo simbólico Maple, para introducir el concepto de EDO. Los resultados obtenidos sirvieron para reflexionar sobre los conocimientos previos necesarios (como Algebra), para el diseño de cuestionarios y actividades de trabajo en el aula.

El análisis realizado de cada una de las investigaciones presentadas sobre las dificultades en la comprensión o aplicación del concepto de EDO, nos permitió visualizar el papel tan importante que juega la resolución de problemas, el uso de tecnología y la interacción en el proceso de aprendizaje, de igual forma que la comprensión del concepto matemático está muy ligada a expresiones formales y modelación de casos contextuales en donde el uso de registros gráficos son un medio adecuado para la solución de EDO. Lo anterior permite que los estudiantes logren comprender el concepto de EDO, aunque en un inicio lo vean muy distante.

Marco teórico

La Teoría APOE (por las siglas de Acción, Proceso, Objeto, Esquema) es una teoría de tipo cognitivo-constructivista iniciada por Dubinsky y continuada por el grupo de investigadores llamados *Research in Undergraduate Mathematics Education Community* (RUMEC); la APOE se inició en Estados Unidos y se ha extendido a otros países (entre ellos México) a partir de la formación del RUMEC, cuya investigación está centrada en cómo un sujeto construye conceptos matemáticos y adquiere habilidades para enfrentar y resolver problemas (Miranda, 2003).

Esta teoría fue desarrollada por Ed Dubinsky a partir de lo que Piaget llamaba “Abstracción Reflexiva”. Dicha “Abstracción reflexiva” es un mecanismo, introducido por Piaget para describir el desarrollo del pensamiento lógico en niños, y Dubinsky extiende esta idea al mecanismo de construcción de los conceptos matemáticos más avanzados (Campero, 2010). En la Teoría APOE el investigador puede comparar las construcciones de un estudiante sobre un concepto matemático cualquiera, con las construcciones mentales que dicho estudiante pueda haber hecho o le falten por hacer.

Campero (2010) menciona que la Teoría APOE está diseñada para trabajar con conceptos de las matemáticas universitarias, en particular conceptos que requieren grados altos de abstracción como los que trata la presente investigación.

Miranda (2003) menciona que algunos investigadores han concluido con base a las observaciones de los estudiantes, que para que alguien se apropie de un conocimiento es necesario seguir una secuencia de construcciones mentales de la Teoría APOE, como se describen a continuación:

Acciones

Son una manipulación física o mental sobre objetos. La persona las percibe como algo externo, y cada uno de sus pasos es estimulado por el anterior.

Procesos

Se pueden describir como una seria de acciones sobre un objeto, con la particularidad de que el individuo los controla de manera consciente, es decir, puede describirlas paso a paso, invertirlas, coordinar y componer una transformación con otras para obtener una nueva.

Objetos

Cuando una persona reflexiona sobre las operaciones aplicadas en un proceso particular, llega a tomar conciencia de éste como una totalidad, sobre el que puede efectuar y construir acciones o transformaciones; entonces, se dice que ese proceso ha sido transformado en un objeto.

Esquemas

Es una colección de acciones, procesos, objetos y aun otros esquemas (hay una relación dialéctica en espiral, pues los objetos pueden ser transformados por nuevas acciones, lo cual lleva a nuevos procesos, objetos y esquemas).

Miranda (2003) menciona que una vez que se ha detectado el tema sobre el que se quiere investigar, se tiene el reto de aplicar una pedagogía efectiva del concepto a enseñar, que empieza con el diseño de una descomposición genética del tema, el cual es un modelo del entendimiento en donde se proponen y muestran las posibles construcciones mentales que tiene que realizar un estudiante para llegar a apropiarse de un conocimiento, así como sus orígenes y las relaciones con otras estructuras que se deben poseer.

Azcárate y Camacho (2003) sugieren que para la elaboración de una propuesta de una descomposición genética determinada, se considera que la comprensión de un concepto matemático comienza con la manipulación de objetos físicos o mentales, previamente construidos, para formar acciones; entonces las acciones se interiorizan para formar procesos, los cuales se encapsulan para formar objetos. A su vez los objetos pueden ser des-encapsulados hacia los procesos a partir de los cuales fueron formados. Finalmente las acciones, procesos y objetos pueden ser organizados en esquemas. Las construcciones son las Acciones, los Procesos, los Objetos y los Esquemas, mientras que los mecanismos para hacer esas construcciones son las siguientes: interiorización, coordinaciones, reversiones, encapsulaciones y des-encapsulaciones. En definitiva, con los conceptos de acción, proceso, objeto, esquema y los mecanismos de construcción se describe lo que se denomina la descomposición genética de un concepto.

La descomposición genética, según Badillo (2003) es el eje de la aplicación de la Teoría APOE en estudios sobre la comprensión de objetos matemáticos porque permite estructurar el concepto matemático, orienta a la organización del contenido a enseñar y el diseño de actividades y tareas que contribuyan a la construcción de las estructuras que se busca que los estudiantes desarrollen.

La Teoría APOE en la Matemática Educativa

Para determinar los elementos teóricos y metodológicos que conduzcan a atender la problemática y considerando el impacto en investigaciones en el campo de la matemática educativa, se abordan experiencias con la teoría APOE, teniendo como eje de aplicación la descomposición genética en diferentes conceptos matemáticos.

Roa y Oktac (2010), dan a conocer el procedimiento para diseñar una descomposición genética sobre el *concepto de transformación lineal*, mostrando los pasos seguidos en su construcción y las dificultades para realizarlo. El diseño se determina por la elaboración y desarrollo del análisis teórico que plantea el ciclo de investigación de la Teoría APOE: Análisis teórico, diseño e implementación de enseñanza y observación, análisis y verificación de datos. Los resultados permitieron describir dos caminos para construir el concepto de transformación lineal, que fueron determinados por mecanismos mentales diferentes: uno por el de coordinación, el otro por el de interiorización.

De igual forma, Gutiérrez y Valdive (2012) describen la descomposición genética del *concepto de derivada* bajo la Teoría APOE. El estudio está enmarcado en uno de tipo cualitativo, la recolección y análisis de la información, y se desarrolló a través de cuatro actividades: fragmentación de la información, identificación y clasificación de las unidades de análisis, disposición y organización de la información y descripción estructurada. Lo cual permitió reflexionar sobre el cómo explicar y desarrollar la definición de la derivada en clases para activar en los estudiantes procesos tales como reflexión, abstracción, síntesis y generalización, que generan la encapsulación de la definición.

Así mismo, Suárez (2013) elabora un estudio sobre la descomposición genética del concepto *diferencial de una función en varias variables*, donde comprende el análisis de los elementos matemáticos que conforman el concepto, mencionando la importancia del concepto diferencial en las matemáticas avanzadas y en aplicaciones a otras ciencias. Donde con el estudio se busca establecer los niveles de comprensión del concepto en el marco de la teoría APOE. El tipo de investigación utilizada es cualitativa, orientada hacia la forma como los estudiantes comprenden/construyen el concepto diferencial de un función en varias variables. El autor concluye que la teoría APOE aporta una base metodológica y teórica para abordar la complejidad de la comprensión de un concepto del Pensamiento Matemático Avanzado, es decir donde interactúan los procesos mentales para representar, visualizar, generalizar, clasificar, conjeturar, inducir, analizar, sintetizar, abstraer, definir, formalizar y demostrar.

Mybert, Maharaj y Brijlall (2012), presentan un estudio en progreso que tiene como objetivo *ayudar a los estudiantes a entender y aplicar la regla de la cadena*, mediante el uso de la Teoría APOE y la descomposición genética de un conjunto de construcciones mentales, con la finalidad que los estudiantes comprendan la composición de funciones, derivadas y la regla de la cadena. El estudio se realiza bajo un enfoque cualitativo, donde se busca que el análisis de las respuestas escritas y las entrevistas del cuestionario utilizado, permitan obtener información sustancial para la identificación de construcciones mentales. Los resultados obtenidos que la composición de funciones es clave para entender la regla de la cadena, haciendo mención que la teoría APOE, a pesar que ha sido escasamente utilizada, mediante el uso adecuado de diversas actividades ayudó a entender el concepto matemático.

De gran importancia para este trabajo de investigación es la aportación de Jaimes y Chaves (s.f.), que mencionan en su trabajo “Análisis teórico de la ecuación diferencial lineal de primer orden que modela un problema de mezclas” que en el estudio de las ecuaciones diferenciales, los conceptos son evadidos por fórmulas y procesos algorítmicos que dificultan la comprensión del concepto. Desarrollan en su trabajo una descomposición genética preliminar del concepto ecuación diferencial tomando como marco teórico y metodológico la Teoría APOE. Concluyen que para construir esquemas que permiten comprender el objeto ecuación diferencial lineal de primer orden que modela un problema en general, es necesario comprender cómo se construyen estos objetos matemáticos en algunos modelos particulares, lo que enriquece al sujeto de acciones, procesos y objetos.

Método

La Teoría APOE tiene una metodología de investigación fundamentada en el ciclo metodológico de investigación de dicha teoría (análisis teórico, diseño y aplicación de instrumentos y, análisis y verificación de datos).

Análisis teórico: El objetivo central es diseñar la descomposición genética de los conceptos matemáticos de la investigación.

Diseño y aplicación de instrumentos: Una vez definida la descomposición genética original, es necesario documentarla. El objetivo central es el diseño y aplicación de instrumentos que ayuden a construir los conceptos matemáticos de la investigación y posteriormente el diseño y aplicación de los instrumentos que nos ayudarán a validar la propuesta didáctica e identificar las construcciones mencionadas en la descomposición genética.

Análisis y verificación de datos: El objetivo central es llevar a cabo el análisis de los datos empíricos obtenidos de la componente anterior. En este punto determinar si fueron adecuados los elementos considerados de la descomposición genética de los conceptos matemáticos de la investigación.

La metodología de investigación se abordará con un enfoque cualitativo, Hernández, Fernández, y Baptista (2014), mencionan que el enfoque cualitativo puede concebirse como un conjunto de prácticas interpretativas que hacen al mundo "visible", lo transforman y convierten en una serie de representaciones en forma de observaciones, anotaciones, grabaciones y documentos. Es naturalista porque estudia los fenómenos y seres vivos en sus contextos o ambientes naturales y en su cotidianidad e interpretativo pues intenta encontrar sentido a los fenómenos en función de los significados que las personas les otorguen.

La población para el desarrollo de la investigación serán los estudiantes del IV semestre de la carrera de Ingeniería en Sistemas Computacionales del Instituto Tecnológico de Comitán, el planteamiento a seguir en la metodología de investigación es:

Análisis Teórico:

- Experiencia docente (cuestionario o entrevista a docentes e investigadores sobre la enseñanza-aprendizaje de EDO de primer orden).
- Cuestionario a estudiantes sobre conocimientos previos necesarios para el tema de EDO de primer orden.
- Mapas conceptuales sobre los conceptos y modelación de EDO de primer orden (información necesaria para determinar los componentes de la descomposición genética).

Diseño y Aplicación de Instrumentos:

- Cuestionarios (de conceptos teóricos y de resolución de problemas: de manera manual y mediante el uso de una herramienta computacional)
- Entrevistas (escritas y audiograbadas) para analizar las respuestas de los cuestionarios aplicados y llegar a interpretaciones más precisas.

Análisis y Verificación de datos:

- Se realizará simultáneamente con el análisis del resultado de la aplicación de instrumentos.

Reflexiones

La revisión de investigaciones en Matemática Educativa, aunado al análisis reflexivo de estas investigaciones para el desarrollo de la competencia específica, ha permitido definir los elementos teóricos y metodológicos que conducirán el trabajo de investigación para el logro del objetivo planteado. Con lo anterior se llega a las siguientes consideraciones:

- La Teoría adecuada, por la complejidad del tema de investigación como lo sugieren algunos autores, es la Teoría APOE y porque se busca generar un estudio sobre cómo se construye dicho conocimiento.
- El modelo para el desarrollo de la competencia específica será mediante la descomposición genética del concepto de EDO de primer orden.
- La metodología que guía las actividades del trabajo de investigación, es la metodología asociada fundamentada en el ciclo metodológico de la Teoría APOE.
- El trabajo de investigación tendrá un enfoque cualitativo.

Aún no se cuenta con resultados, sin embargo con las consideraciones anteriores se está planeando el desarrollo de actividades e instrumentos que permitan la obtención y análisis de datos para finalmente valorar la descomposición genética para el logro de la competencia específica y dar solución a la problemática planteada.

Referencias

Azcárate, C., y Camacho, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, *10*(2), 135-149.

Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemáticas de Colombia* (Tesis de Doctorado no publicada). Universidad Autónoma de Barcelona. España.

Campero, J. (2010). *Propuesta didáctica en optimización dinámica: El caso del cálculo de variaciones y la teoría de control* (Tesis de doctorado no publicada). CICATA-IPN. México.

Codes, M., y Perdomo J. (2012, febrero). *Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias a partir del análisis de fenómenos de variación.* Taller presentado en el III Seminario del Grupo de Investigación en Didáctica del Análisis Matemático, Salamanca, España.

Guerrero, C., Camacho, M., y Mejía, H. (2010). Dificultades de los estudiantes en la interpretación de las soluciones de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias que modelan un problema. *Enseñanza de las Ciencias*, *28*(3), pp.341–352.

Gutiérrez, L., y Valdivé, C. (2012). Una descomposición genética del concepto de derivada. *Gestión y Gerencia*, *6*(3), 104-122.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación.* México: Mc Graw Hill Education.

Jaimes, L., y Chaves, R. (s.f.). *Análisis teórico de la ecuación diferencial lineal de primer orden que modela un problema de mezclas*. Manuscrito en preparación.

Miranda, E. (2003). La construcción de un concepto matemático. *Renglones*, *54*, 20-24.

Mybert, Z., Maharaj, A., y Brijlall, D. (2012). Reflective Abstraction and Mathematics Education: The Genetic Decomposition of the Chain Rule – Work in Progress. *US-China Education Review B*, *2*(4), 408-414.

Perdomo, J. (2011). Módulo de enseñanza para la introducción de las ecuaciones diferenciales ordinarias en un ambiente de resolución de problemas con tecnología. *Números*, *78*, 113-134.

Roa, S., y Oktac, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(1), 89-112.

Rasmussen, C. (2001). New directions in differential equations. A framework for interpreting students' understandings and difficulties. *Journal of Mathematical Behavior*, *20*, 55-87.

Rodríguez, R. (2012, mayo). *Competencias de modelación y uso de tecnologías en ecuaciones diferenciales*. Proyecto de investigación presentado en la Coorporación Universitaria para el Desarrollo de Internet A.C., Baja California, México.

Suárez, Z. (2013, octubre). *Descomposición genética del concepto diferencial de una función de varias variables.* Trabajo de investigación presentado en el Congreso de Investigación y Pedagogía, Colombia.

Villar-Liñan, M. T., y Llinares-Ciscar, S. (1996). Análisis de errores en la conceptualización y simbolización de ecuaciones diferenciales en alumnos de químicas. *Educación Matemática, 8*(2), 90-101.

Zandieh, M., y McDonald, M. (1999). Student Understanding of Equilibrium Solution in Differential Equations. En F. Hitt y M. Santos (Eds.). *Proceedings of the Twenty-one Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 253-257). Columbus, OH: ERIC.

Autores

Abel Medina Mendoza; ITCOMITAN. México; amedina105@hotmail.com

Alejandro Miguel Rosas Mendoza; CICATA-Legaria, IPN. México; alerosas2000@gmail.com

MODELACIÓN MATEMÁTICA Y LA MATEMÁTICA DE UN INVESTIGADOR EN CIENCIAS: EN POS DE LA INNOVACIÓN Y DE LA TRANSDISCIPLINA

Astrid Morales, Jaime Mena-Lorca, Alexis González

Resumen

La fortaleza y la valoración de la matemática en las ciencias (y en otras disciplinas) consiste en que ella nos permite, mediante la modelación matemática, abordar y entender problemáticas propias de las disciplina. Así, el desarrollo de las ciencias ha creado y se ha apoyado en una gran variedad de modelos matemáticos que le son funcionales. El avance de la investigación presenta la matemática de un investigador que le permite por un lado desarrollar su ciencia y por otro la matemática que necesita para enseñar su disciplina.

Palabras Claves: Modelación matemática, conocimiento matemático, conocimiento funcional

Introducción

Si analizamos los currículos de las carreras basales de formación de científicos en Chile, esto es, las licenciaturas en Biología, Química, Física, Bioquímicos y similares, comprobamos que todos estos contienen cursos de matemáticas en cuyos programas se encuentran los contenidos típicos de pre cálculo, cálculo diferencial y cálculo integral, aumentando los contenidos matemáticos en Física.

Un implícito de estos programas de ciencias es que cuando los estudiantes estén cursando las asignaturas no matemáticas necesitarán recurrir de los conocimientos de matemática, el otro es que además requieren -en su formación- lograr las habilidades y competencias que se desarrollan con la matemática. La evidencia, por el contrario, muestra que hay una distancia enorme entre la matemática que se enseña y la matemática que es requerida en ciencias disciplinares tales como las aludidas.

En el caso de la Enseñanza Media y Básica en Chile, la prueba internacional PISA es una evidencia concretade que estas habilidades y/o competencias no se logran.PISA usa (y evalúa) el concepto de cultura matemática para referirse a la capacidad de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar efectivamente la formulación, solución e interpretación de problemas en una variedad de situaciones que involucran conceptos cuantitativos, espaciales, probabilísticos o matemáticos" (OCDE, 2007, p.51).

El esfuerzo que se puede hacer para aminorar esta brecha necesita de un cambiode enfoque. Chile, el Ministerio de Educación, lo están haciendo y tratando de girar hacia las metodologías de "resolución de problemas" y también fomentando la modelación matemática.

En el caso de las licenciaturas en ciencias, hay también una tendencia a fomentar la modelación y aumentar los problemas de aplicaciones, de manera deatender a las necesidades de nuestra sociedad, la cual requiere de personas más competentes tanto en sus profesiones cuanto como ciudadanos.

En relación a la enseñanza de la matemática a nivel superior, en particular en los cursos iniciales, las investigaciones dan evidencia de la poca comprensión y la no articulación de los contenidos matemáticos que se enseñan (Artigue, 1995), en consecuencia, los alumnos que estudian tales cursos no están en condiciones deresponder preguntas que tengan cierto grado de complejidad.

Por otro lado, Moreno y Azcárate (2003) afirman que el profesor tiende a mantenerse en su papel tradicional, que la clasemagistral sigue siendo el principal medio de enseñanza, *"…y se potencian los aprendizajes memorísticos y mecanicistas alejados del deseado aprendizaje significativo"*.(p. 266). En relación al Cálculo, Artigue (1995) afirma que existe gran dificultad en lograr que los estudiantes muestren una comprensión satisfactoria de sus conceptos y métodos, y que la enseñanza tradicional se limita al aprendizaje de prácticas algorítmicas y algebraicas que son a la vez centro de la evaluación.

La fuerte tendencia que hubo en Latinoamérica en relación a introducir las ideas de desarrollo de competencias en los programas de formación profesional, no tocó a la forma de enseñar la matemática. En los programas de los cursos de matemáticas o bien simplemente no hubo, o, si los hubo, no se contaba con los docentes que pudieran abordar esta tarea y así poder cambiar la forma de fomentarel desarrollo de competencias matemáticas (usando TIC y la modelación matemática por ejemplo).

Nuestras investigaciones muestran que con el uso de software apropiadosse puede minimizar procesos operatorios o simplemente transferir esto a software con el propósito de dejar más tiempo al análisis de los objetos de estudio; estos objetos pueden complejizarse simplemente por la capacidad mayor que tienen los programas para realizar operaciones y gráficas que indican los comportamientos y las posibles soluciones a los problemas abordados.

Una pregunta pertinente,entonces no es solo qué contenidos pasar sino también que tipo de problemas se abordarían en los cursos de matemáticas de las carreras de licenciatura. La respuesta finalmente debe considerar qué modelos matemáticos son más utilizados en las disciplinas científicas, en qué forma son requeridos y el rol que cumplenen la disciplina en cuestión.

Teniendo la información anterior podemos dar, desde la enseñanza de la matemática, la base para que nuevas generaciones con tendencia a la transdisciplinariedad o con habilidades para estudiar situaciones complejas mediante el uso de TIC cuenten con gran capacidad de análisis y movilidad en el entendimiento de modelos que usan distintas disciplinas.

La matemática tiene esa propiedad y esa es su gran fortaleza, pero el problema es que, en el sentido clásico, debemos estudiar mucha matemática y posteriormente debemos estudiar muchos modelos para darle significados a esa matemática estudiada. Eso hace que un licenciado (y pasa en los colegios también) debe estudiar un montón de matemática porque le va a ser requerida en el estudio de su disciplina. Pero frente a esto surgen preguntas por ejemplo, ¿cómo va a ser requerida? ¿Haciendo operatoria algebraica de expresiones del mundo de la matemática sin significados? ¿Con el teorema A o B o C? ¿Con límites?, una alternativa frente a estas interrogantes es entender cualitativamente gráficas de funciones simples o bien complejas que no podrían abordar con el mero manejo operatorio.

Lo pertinente sería hacer programas de licenciaturas en ciencias con cursos de matemáticas que estudiarán modelos utilizados en las ciencias en la dimensión que son utilizados y así abordar la matemática que se requiere en el estudio (lo cual, de paso, valora la matemática). Este estudio se optimiza de acuerdo a los recursos de software existente. Reconociendo de esta forma que hay procesos que antes hacía el hombre y que ahora se puede alojar en un PC y además aprovechar la multiplicidad de gráficos y comparaciones que puede realizar un software de acuerdo a los requerimientos del usuario (por ejemplo soluciones de ecuaciones diferenciales, estudio de puntos de equilibrios).

Marco Teórico

La perspectiva teórica que da sustento a esta investigación es la Sociepistemología, que es la que más se ajusta al tipo de estudio que aquí se realiza. Como señala Cantoral (2013), la Socioepistemología es un marco teórico sistémico que permite tratar los fenómenos de producción y difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple -epistemológica, social, didáctica y cognitiva- permite concebir la matemática no como un saber fijo y preestablecido, sino como un conocimiento con significados propios que se construyen y reconstruyen en el contexto mismo de la actividad que realiza el hombre. Es un enfoque teórico que intenta explicar la realidad a través de la matemática, permitiendo transformarla.

Desde este enfoque, consideramos que el conocimiento se construye en la actividad realizada por los estudiantes, frente a una situación que problematice el saber y permita una "construcción de significados compartidos" por el grupo (Cantoral, 2013, p25). Asimismo, se identifican ciertas prácticas, tales como medir, predecir, modelar y convenir, entre otras, que son aceptadas por la comunidad, pues contribuyen y juegan un rol importante en la construcción de conocimiento matemático. (Cantoral, 2013, p 62).

Esta perspectiva teórica contiene una mirada crítica al discurso matemático escolar (dME), entendiendo este como la manifestación del conocimiento matemático normado por creencias de los actores del sistema didáctico acerca de lo que es la matemática y su enseñanza; y nos invita a realizar un rediseño del dME; la tarea es estudiar cómo lograr esto de la forma más adecuada. La Socioepistemología, a través de sus constructos e investigaciones, busca posicionar en el dME una matemática funcional, es decir, una que esté incorporada orgánicamente; un conocimiento que lo transforme y que transforme su realidad. Para ello se deben identificar los elementos que permitan desarrollar la funcionalidad de la matemática; se pretende establecer el modo de concretar estrategias para que el estudiante logre construir.

Si el sistema educativo avanza desde la concepción utilitariaa la funcional, se logra que el estudiante valore socialmente el conocimiento matemático (Cordero, 2006, 2010). Por esta razón, algunas de las categorías que emplearemos en la preparación de las situaciones que utilizaremos son la modelación, la predicción y la graficación, que han sido investigadas en la perspectiva socioepistemológica y que dan cuenta de que construyen conocimiento.

Compartimos lo que afirma Cordero (en prensa (a)) respecto al no diálogo entre la matemática escolar y el cotidiano. La matemática escolar también debe sistematizar explicaciones sobre *"lo matemático"*, es decir, la manera en que se expresa y vive el conocimiento matemático en diferentes escenarios del conocimiento y plasmado en sus practicas del día a día, es decir, el *cotidiano con adjetivo* (Cordero, en prensa (a)).

Entendemos la necesidad de poner nuestro foco de atención en esta problemática puesto que en el cotidiano existe matemática a nivel funcional. Es en las comunidades de conocimiento donde podemos obtener evidencia de esto y traer elementos para aportar al rediseño del discurso matemático escolar. En particular, atender el aspecto de la graficación y la argumentación gráfica como un elemento conector (de lenguaje) entre las disciplinas que construyen conocimiento y que puede ser llevado a la matemática escolar para obtener un mejor estatus. De esta manera se puede colaborar en aquel diálogo entre la matemática escolar y el cotidiano, muy necesario en estos tiempos en que los estudiantes están inmersos en otro paradigma.

En relación a la modelación matemática existen varias aproximaciones. Hay una visión de modelación en los trabajos de Borromeo (2006), Blum y Borromeo (2009) que contrasta significativamente con la concepción de modelación de los trabajos de Cordero (2006) y Morales, Mena, Vera & Rivera (2012), por ejemplo, lo mismo ocurre con la concepción de matemática y de argumentación gráfica dadas en los trabajos de Morales et al (2012), Cordero et al (2010), Cordero (2006), Morales y Cordero (2014) que difieren de la idea de la matemática y así de las gráficas utilizadas en los trabajos de Borromeo (2006, 2009) y Artigue (1995) por ejemplo.

La postura que adoptamos bajo el alero de la Socioepistemología es que el proceso de modelación ayuda a construir –por primera vez– algún o algunos objetos matemáticos, y por lo tanto ese objeto matemático queda resignificado en una situación específica, de esta forma el conocimiento matemático es *funcional*.

La Socioepistemología considera que la matemática no preexiste y que el ser humano la construye en cuanto le es funcional.

Una creencia frecuente es que la modelación es una aplicación de la matemática; sin embargo, en general, cuando se crean modelos y se enfrenta a su desarrollo teórico, muchas veces no se dispone de la matemática que se requiere, y debe desarrollársela para poder avanzar; tenemos muchos ejemplos de esto en el desarrollo de las ciencias, especialmente en la física. Dado que muchos modelos ya existen y la matemática se ha depurado y desarrollado más allá de haber sido inicialmente parte de un modelo, la presentación de esa matemática actual ha borrado los significados y la funcionalidad; en efecto, ella ahora se presenta como algo que obedece a la propia Matemática y no a un conocimiento que ayudó a abordar y/o resolver una problemática. Así, lo que proyecta la enseñanza es que primero "se creó" la matemática y después esta se aplicó. Esta creencia, llevada a la enseñanza de la modelación o a usar los modelos como vehículo para fortalecer la enseñanza de la matemática conlleva a primero enseñar matemáticas y a buscar después la aplicación de tal conocimiento. Contrariamente a tal idea, postulamos –a nivel de gráficos, por ejemplo (cf. Morales et al 2012)– que la modelación es, en sí misma, una construcción de conocimiento matemático.

Las evidencias que indican que la modelación es importante en la enseñanza de la matemática han logrado poner este tema en los grupos de discusión de CERME, ICME, PME, ICTMA y en las últimas cinco RELME. La mayoría de los artículos en educación matemática o didáctica de la matemática relativos a modelación, en forma implícita presentan una crítica a la forma de enseñar, indicando que esta no logra en los estudiantes habilidades que les permitan abordar los procesos de modelación que les son requeridos en otras áreas (Cf. Arrieta 2003; Cordero 2006; Aravena, Caamaño y Giménez, 2008).

Lamentablemente, del proceso de modelación matemática realizado por los científicos en su momento, en la actualidad solo se muestra el producto, el modelo matemático, y las ideas que sustentan este modelo han desaparecido, sólo quedan expresiones matemáticas sin significado.

Por otra parte, los avances en tecnología han permitido que los estudiantes, mediante sensores y graficadores, lleguen más rápidamente a las puertas de enfrentar lo que los científicos tuvieron que dilucidar con menos herramientas. Lo importante en este caso es utilizar adecuadamente estos artefactos, ya que ellos podrían ser distorsionadores e inducir a errores (Trouche, 2002). Situación similar se produce con la gran cantidad de información que hay en la Web, parte de la cual incluso justifica los modelos en forma equivocada para transformarlos solo en una aplicación de la matemática.

Para evitar lo anterior, en nuestro proyecto contamos con expertos de otras disciplinas que le darán a las situaciones los significados propios de su ámbito.

Hemos visto (Morales, Mena, Vera & Rivera, 2012) en un proceso de modelación que usa tecnología, el rol de las gráficas y cómo otras representaciones y argumentos en torno a ellas jugaron un papel gravitante para lograr un modelo matemático. Creemos necesario estudiar estos elementos con mayor profundidad, elementos que la generalidad de los profesores de matemática no reconoce, no promueve y naturalmente no considera en las evaluaciones de sus cursos. Una de las razones para esto es que la “lógica” argumentativa y la simbología que utiliza el alumno en la construcción del conocimiento (y/o modelo) no se ciñe necesariamente a la estructura matemática (Crespo, 2010). Estudios de este tipo los podemos ver en Morales et al. (2012) y Borromeo (2006, 2009).

La concepción de modelación en Socioepistemología cuestiona qué se entiende por conocimientomatemático y por lo tanto cuestiona también el producto final que se busca, el modelo matemático; esto hace una gran diferencia entre las diferentes posturas, ya que por ejemplo, el proceso de Matematización del ciclo de Blum (2009) tiene que ver naturalmente con qué es aquello que llamamos matemática.

Método

Como parte de nuestro proyecto de modelación matemática, requeríamos trabajar con investigadores en las distintas disciplinas a los cuales los situamos en su rol de docentes de la disciplina que investiga; trabajando con modelos matemáticos que les son funcionales y que ocupan en su docencia. Varias sesiones de trabajos fueron grabadas y posteriormente analizadas por otro investigador del grupo, el que caracterizó el uso de la matemática en la enseñanza de la ciencia de especialidad del científico.

También se analizó el uso de la matemática en los trabajos de investigación del área. Para esto último se analizan los textos de Bioquímica que a juicio del investigador especialista los denomina como texto “más matemáticos” del área.

De esta forma por un lado logramos captar la matemática y la modelación en dos dimensiones o usos: como necesaria para enseñar y como necesaria para sustentar las investigaciones y la divulgación de resultados entre los pares.

Presentaremos ahora los resultados de un estudio de casos, el de un bioquímico, en el área de fisiología.

El texto estudiado fue facilitado y sugerido porun especialista como soporte de la enseñanza, es uno texto que relaciona la matemática con la fisiología, nos centramos en el problema de la autorregulación.

Las expresiones matemáticas por si mismas no nos dan cuenta de su uso y menos de su construcción, de manera que el analisis de video y libro fueronanalizadosde acuerdo a la perspectiva Sociepistemológica. El análisis apriori nos permite caracterizar y clasificar las frases y desarrollos expresados en los videos como indicadores de construcción. Así como la argumentación gráfica evidenciada.

Podemos manifestar que este sería un estudio de caso, del cual usamos entrevistas que fueron grabadas y analisis de texto del especialista.

Conclusiones

La primera conclusión es que el marco teórico, la Socioepsitemología, nos permite dar cuenta de la matemática que desarrollan distintas comunidades, en este caso los Bioquímicos.

La segunda es que nuevamente hemos logrado evidenciar que la argumentación gráfica construye conocimiento. Lo interesante de este caso que se puede separar claramente lo que es construcción matemática y la construcción de conocimiento disciplinar de fisiología.

Otro aspecto interesante el uso de las gráficas en términos cualitativos, sin necesidad de recurrir a las expresiones algebraicas típicas.

El manejo gráfico del fisiólogo era de varias variables expresado solo en el plano. Las variaciones de la función estudiadas eran expresadas de distintas maneras con variables que no estaban indicadas en el gráfico bidimensional

Con las propiedades anatómicas y dependencia de los organismos involucrados se levantan nuevas gráficas dependiente de la original que dan cuenta del procesos fisiológicos acoplados

Agradecimientos

Este trabajo fue financiado parcialmente por FONDECYT1151093

Referencias Bibliográficas

Aravena, M., Caamaño, C., Giménez, J. (2008). Modelos matemáticos a través de proyectos. *Revista*

Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11(1), 49-92.

Arrieta Vera, J. L. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula* . (Tesis doctoral no publicada). Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, Distrito Federal, México.

Artigue, M. (1995). *La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y Didácticos: Ingeniería didáctica en educación matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Borromeo, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *38*(2), 86-95.

Blum, W.; Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught and Learnt?. *Journal of Mathematical Modelling and Application 1*(1), 45-5.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J., Martínez, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(4), 83-102. Número Especial

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa: Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona, España. Editorial Gedisa.

Cordero, F. (2006). La modellazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamento-apprendimento della matemática. *La Matemática e la sua Didattica*, *20*(1), 59-79.

Cordero, F.; Cen, C. y Suárez, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: Una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(2), 187-214.

Crespo, C.; Farfán, R.; Lezama, J. (2010). Argumentaciones y demostraciones: una visión de la influencia de los escenarios socioculturales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(3), 129-158.

Cordero, F. (en prensa (a)). *Modelación, funcionalidad y multidisciplinareidad: el eslabón de la matemática y el cotidiano*. En J. Arrieta y L. Díaz (Eds.). Investigaciones latinoamericanas de modelación de la matemática educativa. Barcelona. España: Editorial Gedisa

Gómez Osalde, K. M. (2015). *El fenómeno de opacidad y la socialización del conocimineto. Lo matemático de la Ingeniería Agrónoma*.(Tesis doctoral no publicada). Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, Distrito Federal, México

Morales, A., Mena, J., Vera, F., Rivera, R. (2012). El rol del tiempo en un proceso de modelación utilizando videos de experimentos fisicos. *Enseñanza de las Ciencias Revista de Investigación y experiencias didácticas. 30*(3), 237-25.

Morales, A. y Cordero, F. (2014). La Graficación-Modelación y la Serie de Taylor. Una Socioepistemología del Cálculo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(3), 319-354.

Moreno, M., Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Revista Enseñanza de las Ciencias 21*(2), 265-280

OECD (2007). PISA 2006 – Science Competencies for Tomorrow's World, vol 1&2 . Paris: OECD

Organisation for Economic Co-operation and Development [OCDE] (2007). PISA 2006: Science

Competencies for Tomorrow´sWorld Executive Summary , 55. Retrieved October 13, 2008, from

http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/15/13/39725224.pdf.

Trouche, L. (2002). *Une approche instrumentale de l'apprentissage des mathématiques dans des*

environnements de calculatrice symbolique. En D. Guin et L. Trouche (Eds.). Calculatrices Symboliques. Transformer un outil du travail informatique : un problème didactique (pp.187-214). Grenoble, France: La Pensée Sauvage.

Autores

Astrid Morales; PUCV. Chile; ammorale@pucv.cl
Jaime Mena-Lorca: PUCV. Chile; jmena@pucv.cl
Alexis González; PUCV. Chile; alexisgonzalezparra@gmail.com

CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS SOBRE EL APRENDIZAJE DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS EN EL NIVEL SECUNDARIA

Marlene Vianney Guzmán Castro, Leticia Sosa Guerrero

Resumen

El objetivo es caracterizar el conocimiento de las fortalezas y debilidades asociadas al aprendizaje que pone en acción el profesor al planear, ejecutar y hacer la propuesta de mejora sobre el tema de adición y sustracción de expresiones algebraicas para segundo grado de educación secundaria. Para ello utilizamos el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) y, de él, el subdominio de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM). Empleando el estudio de caso como método y la observación no participante, se lleva a cabo la recolección de datos, para su posterior análisis. El caso está constituido por dos profesoras (M1 y M2) alumnas de un curso de Desarrollo Profesional. Las profesoras observadas conocen y aplican el conocimiento del KFLM, mostrando evidencia en dos de los escenarios, además de dar tratamiento didáctico desde la planeación.

Palabras clave: conocimiento especializado, características de aprendizaje, expresiones algebraicas.

Introducción

En México, el Plan de estudios 2011 de Educación Básica es el documento rector que define el perfil de egreso y los aprendizajes esperados que constituyen el trayecto formativo de los estudiantes. Éste reconoce que la equidad en la Educación Básica instituye uno de los componentes irrenunciables de la calidad educativa, por lo que toma en cuenta la diversidad que existe en la sociedad y se encuentra en contextos diferenciados.

A su vez, dentro de las condiciones esenciales para la implementación del currículo, la transformación de la práctica docente, el logro de los aprendizajes y la mejora de la calidad educativa considera doce principios pedagógicos, entre los cuales menciona centrar la atención en los estudiantes y en sus procesos de aprendizaje, para lo cual es necesario reconocer la diversidad en la escuela, manifestada en la variedad lingüística, social, cultural, de capacidades, de ritmos y estilos de aprendizaje de la comunidad educativa. También reconoce la planificación como un elemento sustantivo de la práctica docente para potenciar el aprendizaje de los estudiantes, la cual requiere del conocimiento de lo que se espera que aprendan los alumnos y de cómo aprenden.

Este énfasis en los ritmos, estilos de aprendizaje y el cómo aprenden los estudiantes, nos llevan a reconocer al proceso de planificación y ejecución de un contenido temático como uno de los problemas que el profesor debe afrontar dentro su práctica. En este sentido nos resulta importante investigar cómo los profesores ponen en acción el conocimiento sobre las características de aprendizaje inherentes al contenido matemático y cómo lo adaptan a la instrucción para satisfacer las necesidades del estudiante.

Partimos sobre el supuesto de que el profesor, en su mayoría, planifica y ejecuta teniendo en cuenta solo los aspectos que están bajo su control y no los que están bajo el control del alumno. Al respecto, podemos adoptar el comentario de Resnick y Ford (1998) a la práctica docente, ellos mencionan que muchas veces suponemos cómo realizan los niños los cálculos, pero nuestras suposiciones se basan en nuestros propios métodos, o bien en alguna noción de lo que creemos que deberían hacer. Por otro lado Donado (2014) señala que la escasa utilización de estrategias de enseñanza utilizadas por la mayoría de los docentes en el aula, genera la adquisición rápida para unos y la aprehensión forzosa o lenta para otros. Lo anterior implica un impacto en la planeación y una incidencia directa en el rendimiento estudiantil.

Por lo tanto desde una perspectiva práctica, es de nuestro interés identificar y clasificar el conocimiento que pone en acción el profesor, focalizándonos en el conocimiento de las fortalezas y debilidades asociadas al aprendizaje del alumno en su interacción con el contenido matemático.

Lo anterior puede permitirnos establecer algunas conclusiones del impacto del conocimiento en su práctica, y vislumbrar una oportunidad de enriquecimiento de los cursos de formación continua a los que los profesores se están sometiendo.

En ese sentido, nuestra pregunta de investigación es: ¿Qué conocimiento de las fortalezas y debilidades asociadas al aprendizaje pone en acción el profesor al plantear, ejecutar y hacer la propuesta de mejora del tema de adición y sustracción de expresiones algebraicas para segundo grado de educación secundaria?

Asimismo, para dar respuesta a esta pregunta nos hemos planteado como objetivo general: Caracterizar el conocimiento de las fortalezas y debilidades asociadas al aprendizaje que pone en acción el profesor al planear, ejecutar y hacer la propuesta de mejora sobre el tema de adición y sustracción de expresiones algebraicas para segundo grado de educación secundaria.

Marco Teórico

En las últimas décadas ha habido cambios importantes en lo que se considera el conocimiento profesional del profesor de matemáticas en la integración entre la línea disciplinar y la línea didáctica (Carrillo, Contreras y Flores, 2013). A partir de que Shulman (1986) publicara sus ideas sobre el “paradigma perdido en la investigación sobre la enseñanza”, los estudios sobre la enseñanza dejaron atrás el comportamiento del profesor para enfocarse en su pensamiento (Garritz y Trinidad-Velazco, 2004).

El autor plantea que para ubicar el conocimiento que se desarrolla en las mentes de los profesores habría que distinguir tres tipos de conocimiento: Conocimiento del Contenido (Content Knowledge); Conocimiento Didáctico del Contenido (Pedagogical Content Knowledge, PCK) y Conocimiento Curricular (Curricular Knowledge).

Esta distinción convierte a este trabajo en seminal para futuras propuestas de modelos de conocimiento y habilidades del profesor desde diferentes ópticas (Escudero, Flores y Carrillo, 2012). Sin embargo, aunque desde el punto de vista de la investigación el PCK tiene una gran acogida, se reconoce su dificultad de reconocerlo en la práctica, por lo que resulta preciso operativizarlo para ser estudiado (Sowder, 2007).

Recientemente, investigadores en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Huelva han propuesto un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK). Este modelo considera el carácter especializado del conocimiento del profesor de manera integral en todas sus subdimensiones. El MTSK, consta de seis subdominios (Figura 1), tres referentes al MK: conocimiento de los temas (KoT), conocimiento de la estructura matemática (KSM) y conocimiento de la práctica de la matemática (KPM); y otros tres referentes al PCK: conocimiento de las características de aprendizaje de matemáticas (KFLM), conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) y conocimiento de los estándares de aprendizaje de matemáticas (KMLS) (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013).

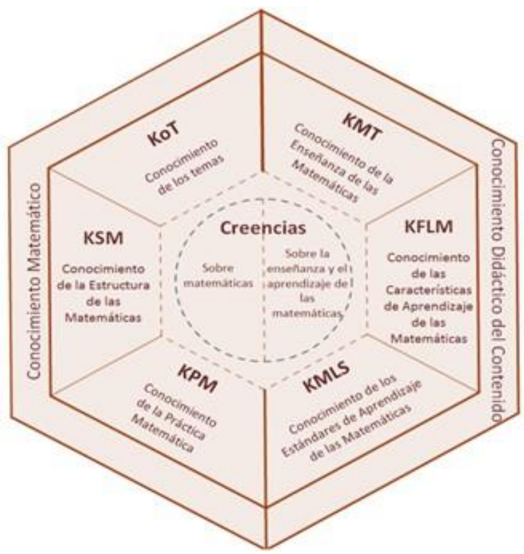


Figura 1. Dominios del MTSK

Cada uno de los subdominios es de vital importancia para el desarrollo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas. Sin embargo, en nuestra investigación nos centramos en el estudio el KFLM. Este subdominio engloba el conocimiento que tiene el profesor sobre las características de aprendizaje del alumno inherentes en su interacción con el contenido matemático, Santana y Climent (2015) mencionan que puede ser un conocimiento que tenga como plataforma, los fundamentos de teorías sobre el aprendizaje matemático o la reflexión del profesor sobre su experiencia. Toma forma a través de las cuatro categorías (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013) siguientes:

- Formas de Aprendizaje, se refiere al conocimiento que tiene el profesor acerca de las posibles vías de aprehensión asociados a la naturaleza misma del contenido matemático.
- Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje, reconoce el conocimiento que tiene el profesor sobre los errores, obstáculos y dificultades asociados a la matemática en general y a temas concretos, además del conocimiento de las ventajas o potencialidades que podrían aprovecharse para el aprendizaje.

- Formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático, engloba el conocimiento que tiene el profesor acerca de los procesos y estrategias de los estudiantes, tanto los típicos como los no habituales, y a los conocimientos sobre el posible lenguaje o vocabulario usado comúnmente al abordar un determinado contenido.
- Concepciones de los estudiantes sobre matemáticas, considera el conocimiento que tiene el profesor sobre las expectativas e intereses que tienen los estudiantes con respecto a las matemáticas.

En esta dirección, y teniendo como punto de partida las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje consideramos pertinente conceptualizar qué entenderemos por error, obstáculo y dificultad.

Según Matz (1980, citado en Ruano, Socas y Palarea, 2008), los errores son intentos razonables pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación.

Por otro lado, Brousseau (1983), define obstáculo como el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, su éxito, pero que, ahora, se revela falso, o simplemente inadaptado. Se manifiesta por sus errores, no al azar ni fugaces sino que son reproducibles, persistentes, ligados por una concepción característica, coherente sino correcta, antigua. Resiste el rechazo, tiende a adaptarse y modificarse para no desestabilizarse. Sobre el origen distingue tres: ontogenético, didáctico y epistemológico.

En cuanto a dificultad, a lo largo de la literatura parece difícil independizar el concepto dificultad del término error, sin embargo a partir de la clasificación hecha por Socas (2011), para describir la procedencia del error podemos identificar una clasificación de los factores a los que están asociadas: a la complejidad de los objetos de las matemáticas, a los procesos de pensamiento matemático y de desarrollo cognitivo del alumno, a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas y las relacionadas con los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas.

Metodología

Debido a la complejidad inherente a la realidad educativa, a las características de nuestro problema de investigación y a los objetivos que nos hemos planteado, consideramos que la metodología que más se adecúa al estudio es la cualitativa. Además, por la especificidad y la acotación que el problema representa, consideramos pertinente abordarlo a través de un estudio de caso, que nos lleve a una extensiva y profunda descripción del conocimiento que manifiesta el profesor en los escenarios propuestos.

El estudio de caso puede clasificarse en estudio intrínseco, instrumental o colectivo (Stake, 1999):

- Estudio intrínseco de casos: cuando el caso viene dado, no nos interesa porque en su estudio aprendamos sobre otros casos o sobre algún problema en general, sino porque necesitamos aprender sobre ese caso en particular. Tenemos un interés intrínseco en el caso.
- Estudio instrumental de casos: cuando el estudio de casos es un instrumento para conseguir una visión de un tema o una teoría.

- Estudio colectivo de casos: estudios grupales o individuales, llevados a obtener una imagen más completa.

De acuerdo a esta clasificación, el estudio que nos ocupa es de tipo instrumental.

Sobre el caso:

Las docentes fueron elegidas de un programa de maestría profesionalizante por cumplir con las siguientes características:

a) Conocimiento del contenido matemático específico a expresiones algebraicas, así como, su relación con distintos contenidos ya sean previos o posteriores.

b) Conocimiento de procesos de enseñanza integrados (conocimiento de teorías de aprendizaje, errores, obstáculos, dificultades asociados al aprendizaje de expresiones algebraicas).

c) Conocimiento del plan de estudios 2011.

La primera profesora (M1), en servicio, es Licenciada en Sistemas Computacionales; actualmente se desempeña como profesora de telesecundaria y cuenta con 10 años de experiencia. La segunda profesora (M2), es Licenciada en Educación con Especialidad en Matemáticas, egresada de una Escuela Normal, cuenta con experiencia en prácticas profesionales y algunos meses como profesora de primaria.

Técnica de análisis y recolección de datos:

Una vez seleccionados las profesoras procedimos a estudiar su práctica docente, a través de la observación no participante o pasiva; es decir, con un nivel de distanciamiento en las actividades del salón de clase.

Como plataforma de trabajo para el rescate de datos, se tomó como punto de partida un compendio de información ligada a la estructuración de una planeación definitiva, un video de la ejecución y una propuesta de mejora, los tres eventos acompañados de una reflexión personal y un ensayo que engloba los fundamentos base, cabe mencionar que este banco de información es producto de un trabajo colaborativo de M1 y M2.

Una vez que la sesión en las cuales se aborda el tema de adición y sustracción de expresiones algebraicas fue grabada en video y con el fin de captar la totalidad del escenario y las interacciones entre la profesora y los estudiantes, nos dimos a la tarea de generar la trascripción con el fin de operativizarlo, para su posterior análisis.

Para el análisis se hace necesaria la elaboración de un instrumento de identificación que nos permitiera concentrarnos en solo aquellos fragmentos de información que hacen alusión al conocimiento del profesor sobre las fortalezas y debilidades asociadas al aprendizaje de adición y sustracción de expresiones algebraicas, para su posterior categorización.

Reflexiones

Tanto en la etapa de planeación como de propuesta de mejora, las profesoras hacen uso del conocimiento obtenido a través de la experiencia, así como del interiorizado en la formación continua con el fin de anticiparse a los posibles errores que los alumnos pueden llegar a presentar. Inclusive no sólo anticiparse sino aprovechar el error y a partir de sus conocimientos darle un tratamiento didáctico adecuado con una intervención oportuna.

Por otro lado en la etapa de ejecución la dinámica de la clase no permite visualizar los errores y las potencialidades de aprendizaje que surgen en el transcurso de ésta, conduciendo a la evaluación para su detección.

La propuesta de mejora planteada puede ser mejorada si se hace una detección previa de las debilidades de aprendizaje provenientes del conocimiento previo de los alumnos, además, de enriquecerla con actividades que generen evidencia en el transcurso de la ejecución con el fin de detectar errores y usar su potencialidad como fuente de aprendizaje en el acto.

Referencias

Brousseau, G. (1983). Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *2*(4), 165-198.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8*, 2985-2994. Middle East Technical Universitiy: Ankara, Turquía.

Carrillo, J., Contreras, L.C. y Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M.C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina y I. Segovia, I. (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro*, (pp. 193-200). Granada: Editorial Comares.

Cohen, Manion y Morrison (2007). *Research Methods in Education*. Six Edition. United Kingdom: Taylor y Francis e-library.

Donado, M. (2014). Estrategias de enseñanza en docentes y estilos de aprendizaje en estudiantes del programa de psicología de la Universidad Simón Bolívar, Barranquilla. *Journal of Learning Styles*, 2(3), 124-139.

Escudero, D, Flores, E. & Carrillo, J. (2012). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Sosa, E. Aparicio & Flor M. Rodríguez (Eds.), *Memoria de la XV Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (pp. 35-42). México DF: Cinvestav.

Garritz, A., & Trinidad-Velasco, R. (2004). El conocimiento pedagógico del contenido. *Educación química*, *15*(2), 98-102.

Resnick, L. y Ford, W. (1998). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Barcelona: Paidós.

Ruano, R., Socas, M. y Palarea, M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA, Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 2(2), 61-74.

Santana, N. y Climent, N. (2015). Conocimiento Especializado del Profesor para la utilización de Geogebra en el Aula de Matemáticas. *Números*, 88, 75-91.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Socas, M. (2011). La enseñanza del álgebra en la educación obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 77, 5-34.

Sowder, J.T. (2007). The mathematical education and development of teachers. En Frank K. Lester JR. *Second Handbook of Research on Mathematical Teaching and Learning*, (pp. 173-185). Charlotte, NC: Information Age.

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Segunda Edición. Madrid: Morata, S.L.

Autores

Marlene Vianney Guzmán Castro; UAZ. México; marlene.gu@hotmail.com

Leticia Sosa Guerrero; UAZ. México; lsosa@mate.reduaz.mx

CONSTRUCCIÓN DE UN ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO IDÓNEO EN ÁLGEBRA LINEAL: EPISTEME VERSUS CURRÍCULO

Patricia Vásquez Saldías, Arturo Mena Lorca, Jaime Mena Lorca

Resumen

En este trabajo se presenta un estudio realizado con el marco teórico "Espacio de Trabajo Matemático" en el cual se estudian los elementos que influyen en la práctica de aula del profesor relativos a los contenidos propios de Álgebra Lineal, en Chile. Se ha realizado una 'triangulación' entre lo que se establece en los Estándares Orientadores del país, el currículo escolar nacional y los programas de las asignaturas de álgebra lineal de una institución formadora de profesores chilena. Entre otros aspectos, hemos observado que hay una desconexión entre aquellos tres elementos, que se traduce en que los profesores fomentan en sus alumnos la construcción de un Espacio de Trabajo Matemático personal cuyo plano epistemológico carece de elementos suficientes para una construcción coherente.

Palabras clave: Espacio de Trabajo Matemático, álgebra lineal, profesionalización docente, instrumentalización.

Introducción

Un ambiente de trabajo

El marco teórico elegido sitúa la actividad matemática de un individuo en un *Espacio de Trabajo Matemático, ETM*, que será descrito con precisión más adelante. Con el objeto de situar la problemática en el marco, damos aquí una noción general.

El ETM es un ambiente organizado para permitir el trabajo de personas que resuelven problemas matemáticos (Kuzniak, 2011). Si se trata del trabajo en cuanto aprendiz (de cualquier nivel), hablamos de *ETM personal* que el individuo construye. Ahora bien, un profesor de la asignatura debe además construir un ETM adecuado para el aprendizaje de sus alumnos: un *ETM idóneo*, el cual debe ser considerado tanto para el caso de estudiantes de pedagogía en Matemáticas –quienes deberán erigir uno para su ejercicio profesional– como para los docentes de la asignatura en las instituciones formadoras de profesores.

Problemática del Álgebra Lineal

En el siglo XIX se da inicio a la construcción del álgebra lineal propiamente tal. El concepto de espacio vectorial aparece en 1931, como caso de A-módulo (Dorier, 2000); los motivos que originaron su aparición fueron unificar, generalizar, simplificar y formalizar lo que hoy llamamos álgebra lineal (Cf. Robert, 1986a, 1986b).

Es bien sabido que los conceptos abstractos de espacios vectoriales (subespacio, dependencia lineal, generadores, suma de subespacios, aplicación lineal, ortogonalidad...) permiten tener mayor claridad sobre los procesos que se realizan comúnmente en álgebra lineal, como por ejemplo, la resolución de ecuaciones. Sin embargo, para que esta mayor claridad se alcance, el estudiante de la asignatura debe poder conectar esos conceptos abstractos con los que conoce previamente. Para futuros profesores, es justamente esa conexión en su ETM personal la que le permitirá desarrollar un ETM idóneo, es decir, aquel que utilizará en su enseñanza.

Los estudios muestran que lo anterior, como suele ocurrir ante materias novedosas y poco accesibles, los estudiantes de álgebra lineal a menudo encuentran el tema demasiado abstracto, formal y desconectado de los conceptos anteriormente estudiados, y procuran recurrir a un ambiente más familiar y entonces su estudio se torna puramente algorítmico (Robinet, 1986), lo que es una suerte de contradicción con aquellos propósitos de unificar, generalizar, simplificar y formalizar que el álgebra lineal persigue.

Por lo demás, es bien posible que el profesor de la asignatura, la imparta en el habitual estilo formal, que hurga escasamente en la visualización y que no recurra a problemas de modelización, por ejemplo. Así, la materia permanece inaccesible y su transposición distará de tener los elementos que deberían incluirse en su constitución. Una hipótesis razonable es entonces que, cuando un alumno de pedagogía en Matemáticas vuelva a tomar el tema en su práctica docente, tenderá a repetir lo que aprendió cuando era estudiante secundario (OCDE 2004) y no estará en condiciones de hacer las conexiones que la teoría de espacios vectoriales le ofrece.

Nos proponemos entonces dar ejemplos explícitos de uso de visualización y modelación y, además, mostrar cómo es que la multiplicidad de aspectos del álgebra lineal (algebraicos, geométricos, analíticos...) provee de medios para lograr la deseada interconexión de esos aspectos.

Formación de un profesor de Matemáticas en Chile

Actualmente, en Chile, un profesor de matemáticas de educación media se forma en universidades, cada una de las cuales determina el currículo de formadores de manera independiente. En el caso de Matemáticas, la formación depende sensiblemente de la facultad (de educación, de Matemáticas, de ciencias) en la cual se radica el programa; así, la relación entre los contenidos disciplinares de Matemáticas y los de carácter pedagógico varía de manera ostensible.

Por otra parte, el Ministerio de Educación del país, MINEDUC, establece programas uniformes para todas las materias de las enseñanzas primaria y secundaria de la nación.

Desde hace al menos una década los informes venían evidenciando que la formación de profesores no atendía a los requerimientos del estado en cuanto a las competencias implícitas necesarias para impartir el currículo del sistema educacional chileno, en particular, en el área de Matemáticas (por ejemplo, OCDE, 2004).

Debido a lo anterior, el Estado está llevando a cabo lo que se conoce como Programa Inicia. Este programa considera Estándares de desempeño para la formación de profesores de todas las disciplinas, una Prueba a los egresados para cautelar esos estándares, e instrumentos de apoyo a la formación de profesores.

El caso del Álgebra lineal

En los Estándares orientadores para egresados de carreras de Pedagogía en Educación Media (CPEIP, 2012), se explicitan, justamente, estándares y también indicadores *ad hoc*.

El Estándar 3 de esa publicación indica que el egresado de Pedagogía en Matemáticas de Enseñanza Media debe ser capaz de conducir el concepto de función, sus propiedades y sus representaciones, en particular en el caso de las funciones lineales. El indicador 4 manifiesta que se debe conocer las dificultades que presentan los estudiantes en lo referente a las relaciones de proporcionalidad y ofrece estrategias para superarlas, para lo cual presenta dos ejemplos: el primero muestra una relación que no es de proporcionalidad "directa" y el segundo da a conocer una propiedad que verifican las funciones lineales y que los alumnos asumen verdadera cualquiera sea la función. Por otra parte, observamos en los programas del MINEDUC (2012) que las actividades para demostrar que los alumnos comprenden las proporciones directas e inversas, se centran en representar las funciones en una tabla, en el registro gráfico y desde allí observar sus propiedades. Las situaciones presentadas, se relacionan con diversas situaciones en el plano de la proporcional directa e inversa, pero las actividades de tipo geométrico se sugieren en el primer año de enseñanza media.

Ahora bien, en los programas de estudio de álgebra lineal, las funciones lineales se presentan en $\mathbf{R}^n$, y no se trata de manera particular estas funciones en el caso unidimensional. En cuanto a los sistemas de ecuaciones lineales las actividades se centran en plantear esos sistemas y resolverlos sin usar matrices; solo en el caso de dos incógnitas las ecuaciones lineales se deben representar gráficamente.

Marco teórico

El marco teórico del Espacio de Trabajo Matemático, ETM, (Kutzniak 2011, Kuzniak, & Richard 2014) se concibe la reflexión matemática como el fruto de una interacción entre un individuo y los problemas de un dominio determinado en un ambiente organizado por y para el matemático (i. e., quien estudia matemáticas) mediante la articulación de dos planos: el *epistemológico*, vale decir, el de la disciplina, y el *cognitivo*. Cada plano está constituido por tres componentes o polos: el epistemológico por el *representamen*, el *referencial*, y el *artefacto*; el plano cognitivo está conformado correspondientemente por la *visualización*, la *construcción* y la *prueba*. Para describir la articulación de los planos se considera un conjunto de génesis que permiten relacionarlos: *semiótica*, *instrumental* y *discursiva*. (Kuzniak 2011, Kuzniak, & Richard 2014).

Hay tres tipos de ETM: de *referencia*, definido según la relación con el saber, e idealmente sobre criterios matemáticos; *idóneo*, destinado a la enseñanza de este saber en una institución dada con una función definida, y *personal*, que configura un individuo, a partir de la formación que recibe y para su propia comprensión y aprendizaje, según se enfrenta el problema con los propios conocimientos matemáticos y capacidades cognitivas. (Kuzniak, 2004)

En este caso nos interesa el ETM idóneo del profesor, el cual, dependiendo de su formación y de la institución que lo acoge realizará transposiciones de los contenidos que quiere enseñar, y en sus propuestas didáctica propenderá a que sus alumnos activen las distintas génesis y realicen las respectivas circulaciones (Montoya-Delgadillo, Mena-Lorca y Mena-Lorca, 2014).

A su vez el ETM personal del profesor se modificaría también por los elementos que recibe de la cultura educativa en matemáticas, de la institución que lo acoge (la forma en que se imparte el currículo, las tradiciones en evaluación, etc.) y, naturalmente, por los elementos que guían la enseñanza de la matemática en los colegios (currículo, orientaciones para la enseñanza... Cf. MINEDUC, 2012).

Para realizar esta investigación, hemos procurado "triangular" tres instituciones que contribuyen a configurar el ETM idóneo de un profesor de matemáticas de enseñanza media en Chile: en primer lugar, el currículo nacional para estudiantes de enseñanza media actualmente en vigencia (MINEDUC, 2012); en segundo término, los estándares definidos por el Ministerio de educación para ese currículo; y, en tercer lugar, los programas de las asignaturas de álgebra lineal de una institución formadora de profesores del país. (De acuerdo a lo señalado, la primera es determinante en el ETM personal, pero incide también, según decíamos, en el ETM idóneo; la segunda y la tercera son elementos constitutivos del ETM idóneo).

Método

El estudio comienza con la triangulación que se señaló antes.

A continuación, se harán entrevistas realizadas a profesores de matemáticas noveles, encuestas a estudiantes de pedagogía, y entrevistas a profesores que enseñan álgebra lineal en la institución antes mencionada.

En este avance reportaremos solo acerca de la triangulación entre las instituciones señaladas, realizada en una perspectiva teórica de expertos, que procura discernir qué elementos constituirían nudos epistemológicos en los que se centran a la vez, por una parte las dificultades que se encuentra para realizar las conexiones entre los temas estudiados en la formación inicial y aquellos que se deben enseñar en el desempeño profesional, y, por otra, la posibilidad misma de realizar aquellas conexiones. Los resultados obtenidos permitirán levantar las preguntas que se harán tanto a los profesores en formación como a los formadores. A su vez, la información obtenida de estos informantes hará posible el levantamiento de una propuesta de aula y su correspondiente análisis a priori, como un primer paso de una ingeniería didáctica *ad hoc*.

Resultados

El análisis teórico epistemológico realizado en la triangulación nos da los siguientes como primeros elementos:

1. Respecto del currículo escolar, no se encuentra el álgebra lineal en forma explícita; en particular no se pide la enseñanza de funciones lineales; hay elementos del álgebra lineal, pero no en el ambiente de espacios vectoriales como tales, sino más bien la idea de la linealidad (asociada a la geometría euclidiana, en tanto el álgebra está apoyada en los enteros y los racionales) a saber: proporcionalidad; sistemas de ecuaciones homogéneos y no homogéneas; isometrías en plano euclidiano habitual.
2. En los estándares se explicitan con mayor precisión los contenidos del currículo en la dimensión de algebra lineal propiamente tal (es decir, no solo en la implícita en las homotecias, por ejemplo), apoyadas en la geometría vectorial, y funciones lineales propiamente tales (y no solo en las implícitas en el crecimiento proporcional y en el estudio de las rectas en el plano, pongamos por caso).

3. La relación entre los Estándares y programas de estudio de la institución formadora considerada en el estudio es más cercana; la diferencia más ostensible radica simplemente en la multitud de posibilidades de 'aterrizar' los conceptos en casos particulares de $\mathbf{R}^n$.

Conclusiones

Del análisis realizado se visualiza que a un profesor novel, le resultaría muy difícil configurar un idóneo en cuyas propuestas estén presentes de manera integrada la formación inicial y los estándares. Sin embargo, indagaciones preliminares permiten esperar una conexión real de los contenidos que posibilitaría a los nuevos profesores apoyarse en su formación para realizar mejores propuestas didácticas.

En coincidencia con otras investigaciones realizadas por los investigadores, los profesores propenden a fomentar principalmente la génesis instrumental y las circulaciones se remiten al plano de descubrimiento (Montoya, Mena-Lorca y Mena-Lorca, 2014); ello se debe a que, en términos teóricos, el profesor no dispone de un referencial que permita que su perspectiva no se remita a la sola instrumentalización. En este caso, la situación está además en consonancia con lo que plantea Dorier (2000) en cuanto a que es necesario transitar por lo algebraico, lo geométrico y lo analítico, entendiendo que lo analítico viene de la concepción de espacio vectorial en su plenitud.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado parcialmente a través del Proyecto de investigación del Fondo Nacional Desarrollo Científico y Tecnológico FONDECYT 1151376, Chile.

Referencias

CPEIP (2012). *Estándares orientadores para carreras de pedagogía en educación media*. Recuperado el 07 de junio de 2015 de http://www.cpeip.cl/usuarios/cpeip/File/librosestandaresvale/libromediafinal.pdf

Dorier, J. L. (2000). *Recherche en Histoire et en Didactique des Mathématiques sur l'Algèbre linéaire – Perspectives théorique sur leurs interactions.* Les cahiers du Laboratoire Leibniz, N° 12. Grenoble: Laboratoire Leibniz-IMAG.

Kuzniak, A. (2004). *Paradigmes et espaces de travail géométriques*. Note pour l'habilitation à diriger des recherches. Paris: IREM de Paris 7.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses Genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 9-24.

Kuzniak, A. & Richard, P. (2014). Espacios de Trabajo Matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *17*,(4-I), 181-197.

MINEDUC(2012). Curriculum Nacional. Recuperado el 07 de junio de 2015 de http://www.curriculumnacional.cl/

Montoya, E., Mena-Lorca, A., y Mena-Lorca, J. (2014). Circulaciones y génesis en el espacio de trabajo matemático. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *17*,(4-I), 181-197.

OCDE (2004). *Revisión de políticas educacionales. Chile.* París: Organización para la Cooperación y Desarrollo Económicos.

Robert, A. (1986a). Didactique de l'enseignement supérieur : une démarche en première année de DEUG, *Actes de la IVème École d'Été de Didactique des Mathématiques.*

Robert, A. (1986b). Une démarche dans l'enseignement supérieur, *Cahier de didactique des mathématiques 28*, IREM de Paris VII.

Robinet, J. (1986) : Esquisse d'une genèse des concepts d'algèbre linéaire, *Cahier de Didactique des Mathématiques 29*, IREM de Paris VII.

Autores

Patricia Vásquez Saldías; PUCV. Chile; patricia.vasquez@ucv.cl
Arturo Mena Lorca; PUCV. Chile; arturo.mena@ucv.cl
Jaime Mena Lorca; PUCV. Chile; mena.jaimemena@gmail.com

LOS MATERIALES MANIPULATIVOS EN LA ENSEÑANZA DE LAS OPERACIONES BÁSICAS CON RACIONALES

Sara Henao-Saldarriaga, Catalina Navarro-Sandoval, Flor M. Rodríguez-Vásquez

Resumen

Desde una perspectiva experimental los juegos son una herramienta que movilizan conocimiento matemático mediante el uso de materiales manipulativos, pero más aún posibilitan trasformar las concepciones negativas frente a las matemáticas, causantes de fracasos escolares. Esta propuesta, en curso, pretende intervenir y trasformar las ideas negativas que subyacen en los estudiantes de primero de secundaria al momento de aprender matemáticas. Para ello se rediseñarán y se pondrán en escena los juegos de bingo y dominó en los cuales se trabajarán las operaciones aritméticas en el conjunto de los racionales.

Palabras claves: perspectiva experimental, materiales manipulativos, números racionales, juegos.

Introducción

El campo de la *Educación Matemática* en las últimas décadas ha investigado diversas problemáticas que se presentan en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, parte de estas investigaciones se han dedicado a estudiar una *visión experimental* de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que pone en evidencia el papel constructivista en el aprendizaje, lo cual conduce a aceptar que los estudiantes descubren y adquieren habilidades y conocimientos matemáticos mediante las actividades sociales en las que aprenden (Arce y Pabón, 2012). En consecuencia, desde esta perspectiva la enseñanza de las matemáticas se aleja de la metodología tradicional en la que predomina la trasmisión de información por parte del docente quien es el proveedor de conocimiento y habilidades matemáticas y los estudiantes sus receptores pasivos.

De igual modo, las investigaciones se han interesado por el diseño de contextos matemáticos significativos y auténticos que posibiliten integrar las producciones de los estudiantes con las estructuras y conceptos matemáticos que se van a aprender, en este sentido, es fundamental que los contextos en donde se encuentren los conceptos matemáticos representen la diversidad, complejidad y la ambigüedad de las problemáticas que enfrentan los estudiantes fuera del ambiente escolar.

En esta dirección, Arce y Pabón (2012) señalan que desde una *perspectiva experimental* uno de los contextos que ha cobrado más fuerza en los últimos años es el trabajo asociado con materiales y recursos manipulativos, admitiendo que la manipulación, el trabajo con modelos visuales, esquemas y diagramas pueden constituirse en un vínculo entre las nociones intuitivas de los estudiantes y los conceptos y procedimiento de las matemáticas formales, es así como mediante el uso de los recursos manipulativos se generan actividades similares a las que los matemáticos realizan, constituyéndose esto último en una característica principal del trabajo con la experimentación. En este sentido, el papel de los estudiantes es análogo al del científico, puesto que el aula de clase es un laboratorio en el que se formula, prueba, construyen modelos, lenguajes, conceptos, teorías, que deben compartirse con los demás pares y escoger cuales de los resultados son útiles y acordes a la cultura. De aquí que saber matemáticas no se reduce a memorizar definiciones y teoremas, como generalmente se trabaja en la escuela (Ramírez y Tamayo, 2012), sino que es necesario darle un papel fundamental a la formulación de preguntas que surgen en la solución de una actividad matemática.

En esta dirección, el aula de clase se constituye en un escenario para el trabajo experimental en matemática, en el que se vinculan las estructuras matemáticas y las nociones intuitivas de los estudiantes. Ahora bien, los juegos hoy en día, han cobrado una fuerza inusitada dentro de la perspectiva experimental, en tanto que exigen la manipulación de materiales que sirven como vínculo para el aprendizaje de las matemáticas y más aún logran trasformar las ideas negativas que surgen en los estudiantes alrededor de esta disciplina.

En esta investigación (en curso) se propone una variación de los juegos bingo y dominó (ver apartado de propuesta) como una estrategia que moviliza el aprendizaje de las operaciones básicas de los racionales, y como herramienta que permite cambiar las concepciones negativas que tienen los estudiantes frente a la clase de matemáticas, conduciendo a los jóvenes a avanzar en sus estudios escolares y a adquirir un conocimiento que tiene sentido para ellos.

El objetivo de esta propuesta es transformar las ideas negativas que surgen en los estudiantes de primero de secundaria al momento de aprender matemáticas, pues generalmente la cultura ha promovido que el campo de las matemáticas es exclusivamente para personas inteligentes, siendo demasiado difícil su comprensión, además de aburridas. Estas y otras ideas circulan en el ámbito escolar y han sido las causantes de diferentes fracasos escolares (Ramírez y Tamayo, 2012), de aquí la necesidad de diseñar estrategias que trasformen las anteriores concepciones.

Antecedentes

Este trabajo surge a partir de la experiencia realizada por Ramírez y Tamayo (2012). En esta investigación los autores ponen de manifiesto la necesidad de diseñar estrategias de enseñanza que logren impactar en las ideas negativas emergentes en la cultura alrededor de las matemáticas. Bajo este criterio los investigadores proponen utilizar los juegos como un medio que permite dinamizar la clase y promover conocimiento matemático.

Ramírez y Tamayo (2012) parten de la idea de que diversas investigaciones han señalado que la enseñanza y aprendizaje de las propiedades y operaciones aritméticas mediante una manera formal, deductiva y secuencial, han causado dificultades en los estudiantes, puesto que exige que estos memoricen definiciones, propiedades y algoritmos para las operaciones, sin ningún sentido práctico de ello; conduciendo al desinterés de esta área de conocimiento.

Igualmente, ponen de manifiesto que un alto porcentaje de estudiantes durante su escolaridad, no disfrutan el proceso de aprender matemáticas, esto debido a que los docentes abordan el estudio de esta área de conocimiento mediante una presentación fría, inmutable, lejana, difícil, sin lugar para la creación y eventualmente alejadas de la realidad.

En consecuencia, los estudiantes no se interesan por aprender verdaderamente los conceptos e ideas, sino memorizan de momento para obtener éxito en una prueba.

En busca de una nueva metodología de enseñanza que involucre los aspectos formales de la matemática y a su vez aspectos lúdicos que motiven a los estudiantes, los citados investigadores proponen los juegos como un medio para vincular ambos aspectos, pues el diseño de actividades con juegos posibilita que los estudiantes aprendan conceptos e ideas matemáticas, al tiempo que se divierten y sienten placer mediante la ejecución del juego. En esta vía, argumentan que la discusión que se genera en la resolución de un juego permite que los estudiantes se acerquen a procesos de construcción del conocimiento matemático, logrando de esta manera fomentar actitudes positivas hacia el quehacer matemático. Asimismo Marín y Zomeño (2007) aseguran que el juego es necesario para el desarrollo cognitivo y afectivo del niño, pues favorece la maduración y el pensamiento creativo.

Ahora bien, los investigadores mediante los juegos del bingo y el dominó lograron que los estudiantes trabajaran propiedades y operaciones como la amplificación, simplificación de fracciones, el orden entre números enteros, decimales o fraccionarios, la aplicación de la ley signos, la conversión de un número decimal a fraccionario y viceversa, las operaciones de suma y diferencia, y la solución de polinomios aritméticos y fraccionarios, entre otras. Es importante mencionar que se realizaron algunas modificaciones a los juegos con el propósito de alcanzar los objetivos propuestos, entre estas se encuentra el cambio del conjunto de los naturales al conjunto de los racionales, enteros y decimales, además de algunas reglas que se aumentaron.

La relevancia de este trabajo radica en que la mayoría de las investigaciones sobre la incorporación de juegos en clase de matemáticas argumentan que son un medio para promover conocimiento matemático, olvidando que también impactan en las ideas negativas que pueden tener los estudiantes acerca de la matemática. En esta dirección, Caferino y Cú (2011) señalan que los juegos se constituyen en un medio de comunicación y enseñanza de las matemáticas, pero a su vez posibilita que los estudiantes se sientan motivados en la clase. Igualmente, Arredondo, Grisales, y Quintero (2010) ponen de manifiesto que el trabajo con juegos permite que los estudiantes comprendan las estructuras matemáticas. Sin embargo, en todas estas investigaciones no se estudia el hecho de que los juegos podrían impactar y trasformar las ideas negativas de los estudiantes frente a las matemáticas, de aquí la importancia de desarrollar esta propuesta sustentada en la perspectiva instrumental.

Contextualización y formulación del problema

En la actualidad existe un creciente interés en el campo de la Educación Matemática por buscar y diseñar nuevas propuestas de enseñanza que permitan vincular las estructuras matemáticas con los conocimientos informales de los estudiantes, ello se sustenta en la idea de promover unas matemáticas más humanas y menos formales pero, a partir de las cuales el conocimiento matemático cobre sentido para los estudiantes (Font, 2008).

Sin embargo, las numerosas investigaciones no han logrado impactar de manera contundente la enseñanza en las aulas de clase, a modo de ejemplo se puede citar el trabajo alrededor de la enseñanza de las operaciones aritméticas en el campo de los racionales, la cual continua centrada en los aspectos formales, exigiendo al estudiante la memorización de definiciones propiedades, algoritmos para las operaciones, olvidando los procesos experimentales, inductivos y de lúdica mediante el uso de materiales manipulativos.

En esta dirección, una enseñanza sustentada en los procesos formales de la matemática se constituye en un obstáculo en el aprendizaje de la misma, puesto que no permite que los estudiantes les otorguen un sentido práctico a las matemáticas, convirtiéndose en un campo científico lejano a su cotidianidad, difícil y aburrido. De esta manera, se expone la necesidad de diseñar propuestas de enseñanza que trasformen la idea de unas matemáticas sin sentido para los estudiantes, y más aún aburridas y difíciles. Con base en lo anterior la presente propuesta espera dar respuesta a la siguiente pregunta *¿De qué manera los materiales manipulativos en las clases de matemáticas pueden contribuir a la trasformación de las ideas negativas frente al aprendizaje de esta disciplina, en el trabajo con las operaciones aritméticas en los racionales?*

Para dar respuesta a esta pregunta se realizará una variación a los juegos bingo y dominó, en los cuales se estudiarán las operaciones aritméticas en el conjunto de los racionales, de tal manera que el uso de materiales manipulativos implicados en los juegos posibilite la trasformación de las ideas negativas frente al aprendizaje de las matemáticas.

A continuación se discuten algunos referentes teóricos que sustentan el trabajo con los materiales manipulativos, específicamente se retoman elementos de la *perspectiva instrumental* propuesta por Artigue (2002). Asimismo se enfatiza en la importancia de los juegos en la enseñanza de las matemáticas.

Marco conceptual

Perspectiva instrumental

Numerosas investigaciones en el campo de la Educación Matemática se han preocupado por integrar las herramientas (materiales manipulativos, dispositivos electrónicos, las nuevas tecnologías de la información y comunicación) en el proceso de la enseñanza de las matemáticas, al respecto Artigue (2002) propone como una vía la teoría de la *instrumentación.*

Los orígenes de la citada teoría residen en los trabajos de Rabardel (1995) alrededor de su propuesta sobre la ergonomía cognitiva, y de las ideas de Vygotsky de cómo las herramientas influyen en el aprendizaje (Drijvers & Gravemeijer, 2005). En esta dirección, Rabardel (1995) señala una diferencia entre el artefacto o herramienta y el instrumento, argumentando que un artefacto es dado a un participante con la intención de desarrollar una cierta actividad, sin embargo puede no tener sentido para él si no sabe cómo utilizarlo. Ahora bien un instrumento es un artefacto en el que el participante es consiente del uso que se puede dar, es decir crea medios para usar la herramienta con un propósito específico. De este modo, es posible hablar de instrumento en la medida que exista una relación significativa entre artefacto y el participante que lo usa para desarrollar un cierto tipo de tarea.

En el campo de la Educación Matemática, la finalidad es que los estudiantes resuelvan ciertas tareas mediante el uso de herramientas que podrían convertirse en instrumentos a través de un proceso de apropiación que posibilite a la herramienta mediar la actividad. Durante la transición entre artefacto e instrumento, los estudiantes elaboran esquemas mentales que organizan los métodos de resolución de problemas, los conceptos que hacen parte de la estrategia y los medios para usar la herramienta.

La aproximación instrumental acepta la distinción entre *artefacto* e *instrumento*, pero introduce la categoría de *génesis instrumental*, la cual da cuenta del proceso de surgimiento de un *instrumento.* De esta manera, la *génesis instrumental* involucra tanto el desarrollo de esquemas mentales, como la emergencia y evolución de esquemas de utilización por parte del estudiante. Ahora bien, durante el surgimiento de un *instrumento* es posible identificar dos procesos *instrumentación* e *instrumentalización.* El primero da cuenta de la apropiación del artefacto y de sus propiedades por parte de los usuarios, mientras que el segundo se refiere a la construcción de esquemas de uso por parte de los estudiantes.

En este sentido, se espera que los juegos de bingo y dominó se constituyan en herramientas que podrían convertirse en *instrumentos* que medien el proceso de aprendizaje de las operaciones aritméticas en el campo de los números racionales.

Importancia del juego en la enseñanza de los números racionales

Investigadores en el campo de la Educación Matemática (Ramírez y Tamayo, 2012) señalan la importancia de buscar nuevas propuestas de enseñanza que permitan vincular tanto las estructuras formales de las matemáticas que se enseñan, como aspectos lúdicos que contribuyan a la gratificación y agrado por partes de los estudiantes al momento de aprender. Logrando de este modo disminuir el fracaso escolar y las ideas negativas frente a las matemáticas.

Una posible vía que permite conectar los aspectos formales de las matemáticas con la lúdica son los juegos diseñados o rediseñados con reglas y propiedades que involucren los conceptos que se enseñan. Desde esta perspectiva, los estudiantes se involucran en actividades que exigen razonar matemáticamente, pero a su vez se divierten solucionando tareas de su vida diaria.

En esta dirección, los juegos no solo se constituyen en herramientas que motivan el aprendizaje de las matemáticas, sino que establecen un desafío para la acción personal y el trabajo en equipo (Ramírez y Tamayo, 2012), puesto que la discusión generada en la dinámica del juego posibilita la construcción de conocimiento matemático y permite un ambiente afectivo y social, en el que la formación integral del estudiante evoluciona.

Desde una perspectiva didáctica es posible afirmar que la evolución de las matemáticas siempre ha estado ligada al juego y la lúdica, esto se sustenta en el hecho de que la mayoría de resultados encontrados en este campo han sido producto de resolver acertijos y problemas ingeniosos.

A continuación se presenta el diseño y las modificaciones realizadas a los juegos de bingo y dominó.

Propuesta

Se retomó el trabajo de Ramírez y Tamayo (2012) en el cual se estudiaron diferentes propiedades de los números racionales y decimales, mediante los juegos de dominó y bingo. Las modificaciones realizadas a los juegos por estos autores se retoman en este trabajo, sin embargo las fichas y las operaciones planteadas en cada juego difieren del trabajo planteado por Ramírez y Tamayo (2012).

Dominó

La estructura de los dominós clásicos consta de 7 veces el 0, 7 veces el 1, y así sucesivamente hasta llegar a 7 veces el 6, completando 28 fichas de dominó mediante todas las combinaciones posibles de 7 resultados, tomados de dos en dos, y adicionando las 7 fichas dobles. A continuación se presenta el dominó de fraccionarios propuesto por una comunidad de práctica virtual, el cual conserva las mismas propiedades del dominó clásico.

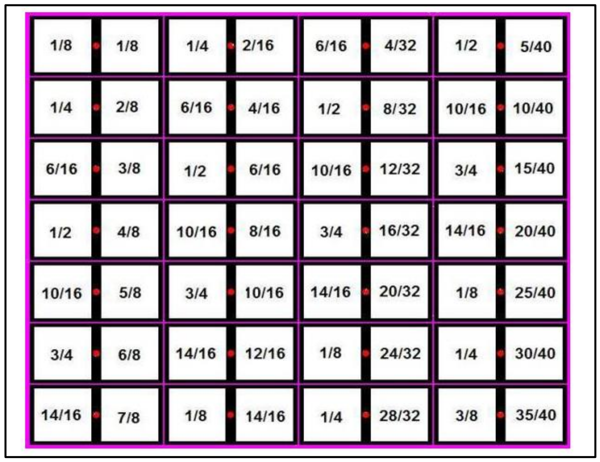


Figura 1: dominó de fracciones, sacado de https://anagarciaazcarate.wordpress.com/category/dominos/

El juego está propuesto para estudiantes de sexto grado de primaria o primer año de segundaria. Las reglas del juego son exactamente las mismas que la del dominó usual, sin embargo se adicionaran otras con el fin de estudiar las operaciones de suma y resta de racionales.

El juego tiene como propósito general un polinomio aritmético con números racionales, el cual debe solucionarse para encontrar el ganador quien será el que mayor número obtenga en su polinomio. Para ello se seguirán las siguientes normas.

- El juego lo inicia la persona con mayor puntaje con los dados, puede utilizar la ficha que más le convenga para su juego.
- La persona que deje menor cantidad libre que la cantidad que hay libre en el otro extremo del juego, se suma esa cantidad en su polinomio, para el caso contrario deberá restarla.
- La persona que no tenga fichas para jugar, debe restarse $\frac{5}{2}$ en su polinomio.
- La persona que deje una cantidad igual a la del otro extremo se suma una unidad a su polinomio.
- El juego inicia con un cantidad para cada jugador de una unidad en su polinomio algebraico (16/16 0 5/5).

Bingo

El juego de bingo que se propone consta de 15 tarjetas (ver figura 2) en las que se encuentran operaciones con números racionales, los resultados que se obtienen de estas operaciones son números del 1 al 15.

Cada estudiante deberá crear su cartón mediante tablas de 3x3 en la que escribirá algunos números del 1 al 15 con bolígrafo para evitar trampas. Las reglas del juego se presentan a continuación

- El juego inicia con todo el grupo de estudiantes.
- Cada estudiante tiene un cartón de bingo.
- El docente es quien dirige el juego y escoge algunos estudiantes para sacar sucesivamente y sin reposición tarjetas.
- Cada vez que un estudiante saca una tarjeta, se escriben las operaciones a efectuar en el tablero, dejando un tiempo para su solución.
- Los alumnos van marcando en sus tarjetas de bingo los resultados que se obtiene al efectuar los cálculos.
- El ganador es la persona que rellene su cartón de bingo.

El juego está propuesto para estudiantes de sexto grado de primaria o para primer grado de segundaria.

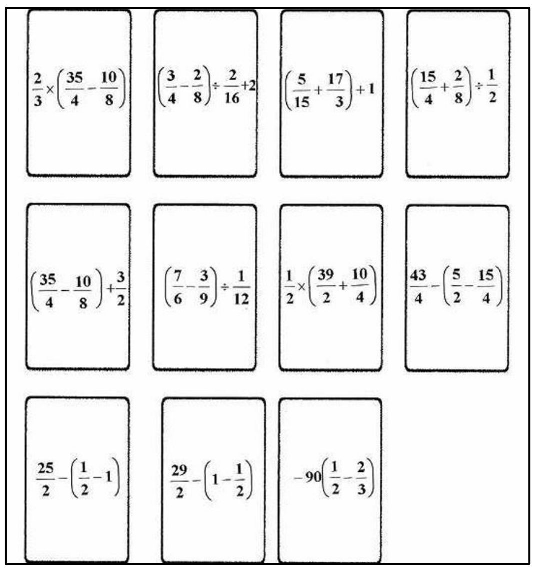


Figura 2: bingo de racionales, sacado de https://anagarciaazcarate.wordpress.com/category/dominos/

Metodología

Esta propuesta adopta un carácter de *investigación cualitativa*, puesto que permite estudiar la naturaleza de los fenómenos que ocurren en la clase de matemáticas, la estructura dinámica de estos, y posibilita la explicación descriptiva de los comportamientos y manifestaciones que ocurren dentro de dichos fenómenos (Martínez, 2006). En esta dirección, la propuesta queda enmarcada dentro de la investigación de carácter cualitativo, la cual pretende fomentar escenarios en los se presente la interacción permanente entre pares y estudiante - docente.

De esta manera y en correspondencia con los intereses de la propuesta, se adopta un enfoque cualitativo de investigación, donde el método de *estudio de caso descriptivo* se presenta como el más adecuado. Para el caso de este trabajo se realizará en un primer momento una encuesta alrededor de las concepciones que tiene los estudiantes de primero de secundaria sobre la clase de matemáticas y sobre la propia disciplina. En un segundo momento se pondrá en práctica los juegos de bingo y dominó con el propósito de intervenir en las concepciones de los estudiantes. Finalmente se realizará una encuesta con el objeto de estudiar las concepciones que emergen después de la actividad realizada, en particular interesa las asociadas a las matemáticas.

Resultados

Esta propuesta pretende mostrar que la *perspectiva instrumental* se constituye en un marco teórico adecuado para el trabajo con materiales manipulativos, en tanto que describe el proceso que permite a un *artefacto* convertirse en un *instrumento*, el cual media los procesos de aprendizaje matemático. Ahora bien, los juegos como el bingo y el dominó son materiales que podrían convertirse en *instrumentos* que posibilitan la apropiación de las operaciones aritméticas en el conjunto de los racionales.

En este sentido, el uso de actividades lúdicas que involucran materiales manipulativos no solo contribuye a dinamizar la clase, sino que movilizan conocimiento matemático, en tanto que los materiales se constituyen en *instrumentos* que apoyan los aprendizajes de los estudiantes. De otra parte, el uso de juegos como el bingo y dominó podrían trasformar las concepciones negativas de los estudiantes de primero de secundaria frente a las matemáticas, ya que generan un escenario de diversión y placer entre pares. Finalmente, este tipo de propuestas son una vía para disminuir el fracaso escolar y el desinterés por el conocimiento matemático.

Referencias

Arce, J., y Pabón, O. (2012). *Laboratorio de Matemáticas como estrategia de acompañamiento al diseño y uso de recursos pedagógicos en la formación de profesores de matemáticas*. Instituto de Educación y Pedagogía Universidad del Valle.

Arredondo, J., Grisales, A., y Quintero, M. (2010). El juego de la casa de cambio como una estrategia didáctica en la construcción de un sistema de enumeración posicional. *Revista semestral digital*, *1*, 14-28.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematics Learning, 7,* 245–274.

Caferino, L., y Cú, G. (2011). Materiales lúdicos para aprender y jugar con números con signos. *Revista de la asociación mexicana de metodología de la ciencia y de la investigación, 1,* 62-77.

Drijvers, P., & Gravemeijer, K. (2005) Computer algebra as an instrument: examples of algebraic schemes. In D. Guin., K. Ruthven and L. Trouche (Eds). *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators: Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument* (pp. 163-196), Springer.

Font, V. (2008). *Tendencias actuales en la enseñanza de las matemáticas*. Disponible en http://www.slideshare.net/cartoni21/tendencias-actuales-en-la-enseanza-delamatematica. Consultado el 5/09/2011.

Marin, L., y Zomeño, T. (2007). *Propuesta didáctica de enseñanza a través del juego en las actividades acuáticas*. Disponible en http://www.um.es/univefd/prodidac.pdf. Consultado el 12/01/2015.

Martínez, P. (2006). El método de estudio de caso estrategia metodológica de la investigación científica. *Pensamiento y gestión*, *20*, 165-193.

Rabardel, P. (1995) *Les hommes et les technologies -approche cognitive des instruments contemporains.* Paris: A. Colin.

Ramírez, A., y Tamayo, C. (2009). La enseñanza de los racionales y sus propiedades a través de juegos como dominó y el bingo. *Memorias encuentro colombiano de matemática educativa*, San Juan de Pasto.

Autores

Sara Henao Saldarriaga; CIMATE, UAGro. México; saramarcelahenao@gmail.com
Catalina Navarro Sandoval; CIMATE, UAGro. México; cnavarros@uagro.mx
Flor Rodríguez Vásquez; CIMATE, UAGro. México; flor.rodrigez@uagro.mx

PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL Y EL ENFOQUE POR COMPETENCIAS EN EL BACHILLERATO

Luis López Acosta, Ricardo Cantoral Uriza, Gisela Montiel Espinoza

Resumen

En este escrito se presentan los avances de un proyecto de investigación que se enmarca en la teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa y dentro del paradigma de las Investigaciones basadas en el Diseño, con el que se pretende generar un marco de referencia para articular los aspectos metodológicos y didácticos relativos a la línea de investigación Pensamiento y Lenguaje Variacional y el enfoque de competencias para postular lineamientos que den luz sobre posibles orientaciones para el diseño de la instrucción encaminado al logro de los objetivos planteados dentro de la RIEMS.

Palabras clave: Pensamiento y Lenguaje Variacional, Investigación basada en el Diseño, Enfoque por Competencias.

Introducción

La entrada en vigor de la Reforma Integral para la Educación Media Superior (RIEMS) en México, trajo sin duda retos significativos con respecto a las prácticas educativas de su sistema pues, como en toda reforma, se promulgan filosofías y perspectivas que se pretenden sean asumidas por todos los actores involucrados en el mismo. En particular, bajo la RIEMS se considera a la educación como un proceso mediante el cual las personas adquieren conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes que les permitirán desarrollarse de manera individual y social. El objetivo principal de esta es que las personas participen de manera integrada y efectiva en la construcción de su propia realidad, el encuentro de su identidad particular y la transformación social (Secretaría de Educación pública, 2008).

Para lograr sus objetivos, la RIEMS recurre al modelo educativo denominado *Enfoque por Competencias*, el cual pretende contrarrestar la visión academicista y acumulativa que permea las prácticas educativas asignando un valor prioritario a los conocimientos puestos en uso (Cabrera, 2009). En dicho modelo existen competencias asociadas a campos disciplinares (competencias disciplinares) como el de matemáticas, el cual comprende ocho competencias específicas que se espera sean desarrolladas por los estudiantes al finalizar su formación. Asimismo, entre uno de los aspectos que se consideran esenciales dentro del marco de la RIEMS, para guiar la praxis educativa, está la determinación de condiciones relacionadas con la construcción de escenarios, actividades y materiales de aprendizaje implementados por el profesor. Al respecto se menciona, entre otras condiciones, que la planeación de la intervención no puede ser arbitraria, ni fragmentada, sino más bien debe tener una estructura lógica, coherente y organizada. En este sentido las actividades propuestas por los docentes adquieren gran relevancia en el aprendizaje pues este es adquirido a través de actividades con sentido y en su interacción con los alumnos antes, durante y posterior a la actividad, donde promueve en ellos un proceso de reflexión (Secretaría de Educación pública, 2008).

No obstante lo anterior, trabajos como el de Cabrera (2009), han mostrado que la RIEMS presenta importantes carencias en cuanto a un marco didáctico metodológico que conduzca la praxis educativa. Esto es, se presentan lineamientos genéricos, como los descritos, que no expresan particularidades sobre aspectos metodológicos que permitan organizar la actividad áulica. Por ejemplo, no se especifica de qué forma se pretende que sean abordados los contenidos matemáticos expresados en planes y programas de estudio para el desarrollo de las ocho competencias disciplinares en matemáticas. Del mismo modo, no se explicitan qué tipo de lineamientos específicos orientarán la construcción de escenarios que promuevan el desarrollo de dichas competencias, a pesar de que, como se ha mencionado antes, se hace hincapié sobre su relevancia. En consecuencia, bajo estas ideas, cumplir cabalmente con lo propuesto resulta sumamente complicado.

Por otro lado, en el trabajo desarrollado por Cabrera (2009) se proporciona evidencia para considerar que los elementos metodológicos y didácticos propuestos bajo el enfoque del Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLVar) son una opción viable para el trabajo en el aula y, en consecuencia, para el desarrollo de competencias disciplinares matemáticas. En dicho trabajo se da sustento para afirmar que el desarrollo del PyLVar en el estudiante constituye un elemento formativo de gran importancia y, por tanto, una posible competencia a integrar al Marco Curricular Común de la RIEMS. Sin embargo, este mismo autor, en un trabajo posterior, señala la importancia de precisar en caracterizaciones más refinadas que permitan determinar o caracterizar la presencia y el desarrollo del PyLVar en el bachillerato, pues distingue una ausencia en la definición de etapas o estadios que permitan potenciar su desarrollo (Cabrera, 2014).

De este modo, considerando la evidencia sobre la pertinencia y potencialidad del PyLVar para el desarrollo de las competencias disciplinares en matemáticas del bachillerato, en los trabajos de Cabrera, así como una revisión sobre algunos estudios dentro de la línea de investigación PyLVar ha permitido identificar el hecho de que gran parte de ellos se han centrado en explorar, por ejemplo, las estrategias y construcciones que profesores o estudiantes ponen en juego ante situaciones variacionales (Mirón, 2000; Aparicio, 2003; Reséndiz, 2004; Díaz, 2005; Caballero, 2012); o bien, en propuestas que permitan la resignificación de nociones específicas tales como la derivada, función, integral, entre otras. (González, 1999; Testa, 2004; Dolores, 2007; Muñoz, 2010; Cabañas, 2011; Buendía, 2011). Por lo tanto, consideramos importante realizar estudios que pretendan generar propuestas para el desarrollo del PyLVar en los que se aporten elementos concretos que permitan organizar la intervención en el aula para el alcance de las competencias, Es decir, lineamientos sobre la articulación entre el tratamiento de las nociones matemáticas y las competencias, ya que, con este tipo de información el discurso del enfoque por competencias se beneficiaría significativamente pues se cubriría la ausencia de esos marcos de referencia, didácticos metodológicos señalados por Cabrera para promover las competencias.

Es por ello que en esta investigación, nos interesa la búsqueda de elementos que permitan construir un marco de referencia que permitan articular los aspectos metodológicos y didácticos relativos al PyLVar, y el enfoque de competencias para postular lineamientos que den luz sobre posibles orientaciones hacia el diseño de la instrucción para así, cubrir los objetivos planteados dentro de la RIEMS. Siguiendo esta línea, consideramos que una posible vía es realizar experimentaciones de diseños de intervención basados en los resultados de la línea de investigación PyLVar para obtener información que nos permita ir construyendo dicho marco de referencia.

Socioepistemología y el Pensamiento y Lenguaje Variacional

Debido que el enfoque por competencias busca "superar una perspectiva formativa que valora el aprendizaje de conceptos y procedimientos *per se* desde una mira enciclopedista, a una que valora el uso que se hace del conocimiento" (Cabrera, 2014, p.5), consideramos pertinente recurrir al marco soioepistemológico de la Matemática Educativa como una forma de generar tratamientos alternativos, pues este intenta centrarse en los usos de conocimiento matemático ante situaciones específicas (Cantoral, 2013). En este sentido, la Teoría Socioepistemología se interesa por provocar el tránsito del *conocimiento* al *saber* para lo cual los objetos matemáticos requieren fundamentalmente ser relacionados con el uso que les da sentido y significación.

En síntesis, diríamos desde el programa socioepistemológico que los conocimientos desde el punto de vista de su contenido conceptual y su contenido factual, para ser objetivables, requieren del uso que le da sentido al conocimiento, de herramientas y argumentos que tipifican al usuario y a las situaciones de aprendizaje, escolares o no, pero ligadas a la vida real donde se ponga en uso el conocimiento, es decir, se constituya en saber (Cantoral, 2013, p. 145).

Asimismo, otro referente esencial en el desarrollo del trabajo es el *Pensamiento y Lenguaje Variacional*, como se ha mencionado, el cual posee un carácter ambivalente pues, por un lado, corresponde a una línea de investigación, dentro de la Socioepistemología, que se encarga de "estudiar fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social" (Cantoral, 2010, p. 8). Y por el otro, es considerado también como aquel conjunto de elementos, estrategias, técnicas y lenguajes variacionales que constituyen una forma de razonamiento que permite enfrentar o conducirse ante problemas o situaciones variacionales (Cabrera, 2014).

La articulación del PyLVar visto tanto como línea de investigación como una forma de pensamiento basado en la predicción, ha permitido obtener resultados prometedores en el aprendizaje de los contenidos relacionados con la variación y el cambio a través del diseño de situaciones de aprendizaje. En particular, un avance significativo al respecto corresponde al trabajo de Caballero (2012), en el cual se muestra una caracterización y especificación de los elementos que caracterizan la puesta en juego del PyLVar en los procesos de construcción de saberes matemáticos en situaciones variacionales (véase figura 1), resultados desconocidos al momento del trabajo de Cabrera (2009).

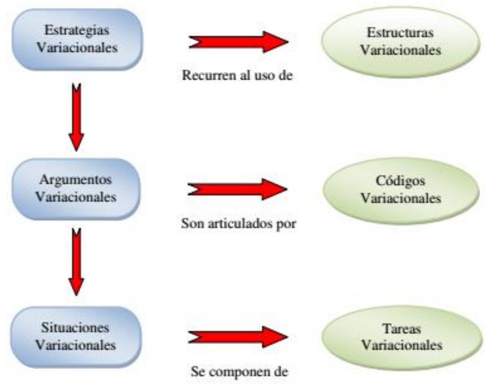


Figura 1. Modelo de interacción de elementos del PylVar (Caballero, 2012; p.39)

Entre tales elementos se encuentran las *estrategias variacioneles, argumentos variacionales variacionales* y las *situaciones variacionales.* De estos tres elementos, las estrategias variacionales, se consideran de suma importancia pues se presume que son estas las que permiten generar el pensamiento variacional, "pues resultan ser el punto de partida para el análisis y reflexión acerca del cambio y sus efectos" (Caballero, 2012; p.39). Consisten en formas particulares de razonar y actuar ante situaciones variacionales con la finalidad de reconocer y estudiar cualitativa o cuantitativamente los cambios de las variables involucradas. Algunas de las estrategias variacionales reconocidas hasta ahora son la Comparación, la Seriación, la Estimación y la Predicción (Salinas, 2003; Caballero, 2012).

Este marco de ideas hasta el momento consideramos nos permitirá generar conjeturas importantes a considerar para el diseño de propuestas de intervención que busquen promover el desarrollo del PyLVar. Por ejemplo, se presume que las estrategias variacionales presentarán un aspecto medular para la organización de situaciones de aprendizaje.

La investigación basada en el diseño

La investigación que nos encontramos realizando es de tipo cualitativo, pues como se ha mencionado, la intención general del estudio es obtener algunos elementos teóricos y metodológicos que permitan generar conjeturas para organizar una instrucción que promueva el desarrollo de competencias disciplinares de matemáticas en el bachillerato, a partir de la experimentación de diseños. De este modo, el objetivo es construir diseños de intervención fundamentados en las revisiones teóricas sobre el PyLVar, de modo que sean experimentados en un contexto real de aula de bachillerato para evidenciar sus alcances y limitantes en cuanto a la construcción de conocimientos ligados al enfoque por competencias.

Por lo anterior, el estudio se enmarcará dentro del paradigma de la *Investigación basada en el Diseño* (*Task Design* o *Design Research*), sobre el cual al momento nos encontramos realizando una revisión sobre las distintas metodologías que se proponen dentro de la comunidad de matemáticos educativos a nivel internacional. A continuación presentamos las primeras ideas de dicha revisión.

Hemos encontrado que en las últimas décadas la comunidad internacional de matemáticos educativos ha mostrado un creciente interés en la discusión y consideración de metodologías más robustas y fundamentadas con respecto a la investigación basada en diseños. Algunos autores mencionan que los reportes de investigación de estudios sobre diseño de tareas rara vez proporcionan suficientes detalles sobre la lógica de las tareas y sobre aspectos que permitan a otros el empleo de las mismas (Sierpinska, 2003; en Whatson y Ohtani, 2015). Es por ello que, a partir del 2008, se han estado organizando grupos temáticos de discusión en diversos espacios sobre el diseño y análisis de tareas, en los que los diseñadores exponen y demuestran el uso de sus principios respecto al diseño de tareas, (Whatson y Ohtani, 2015). Todo ello con la intención de generar marcos de referencia que permitan analizar de manera fundamentada y sistemática, el papel que juega el diseño de tareas en aspectos como los procesos de enseñanza de la matemática, el diseño de actividades para libros de texto, así como en el desarrollo de los aprendizajes matemáticos dentro de una perspectiva progresiva y controlada.

Algunas perspectivas proponen la construcción y análisis de diseños de forma situada, puesto que se asume que la relación entre los procesos individuales y sociales son tan fuertes que no se les podría separar. Al respecto, Cobb (2003), considera que la investigación basada en el diseño implica tanto el desarrollo de diseños de instrucción para apoyar a determinadas formas de aprender, así como determinar metodologías para estudiar sistemáticamente esas formas de aprendizaje dentro del contexto definido, es decir, un análisis situado del aprendizaje. El diseño de ambientes de aprendizaje en el aula es uno de los dos principales aspectos del investigación basada en el diseño, el segundo se refiere al análisis del aprendizaje matemático situado dentro del contexto social del aula, por lo tanto, la investigación basada en el diseño debe contemplar los siguientes criterios (Cobb, 2003; p.11):

1. Los resultados de los análisis deben alimentar de nuevo a mejorar los diseños de instrucción.
2. La metodología debe permitir la documentación del aprendizaje matemático colectivo de la comunidad de la clase durante los largos períodos de tiempo abarcados por los experimentos de diseño.
3. El análisis debe permitir la documentación del desarrollo individual del razonamiento matemático de los estudiantes a medida que participan en procesos comunales dentro del salón.

Bajo estas premisas, se propone un ciclo que caracteriza la investigación basada en el diseño (Brown, 1992; Cobb et al., 2001; Collins, 1999, en Stephan, 2003) (Ver figura 2), que en síntesis corresponde a un proceso iterativo que comprende el diseño de secuencias de instrucción, la experimentación y revisión de las mismas en el contexto del aula y, con base en lo anterior, se analiza el aprendizaje de la clase para que el ciclo de diseño, revisión y aplicación reinicie nuevamente (Gravenmeijer, Bowers y Stephan, 2003).

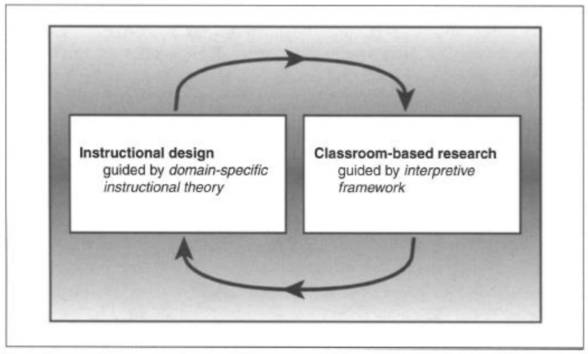


Figura 2. Fases en el ciclo de diseño.

Como puede observarse en esta perspectiva, se enfatiza la idea de aprendizaje situado, es decir, el aprendizaje de la comunidad dentro del aula y no únicamente el aprendizaje individual. Por tanto, se propone un análisis de los procesos individuales y sociales dentro del salón de clases al experimentar diseños. Cobb y Yackel (1996, en Stephan, 2003) desarrollaron un marco interpretativo para analizar ambos procesos descritos (Ver figura 3).

Social Perspective	Individual Perspective
Classroom social norms	Beliefs about own role, others' roles, and the general nature of mathematical activity in school
Sociomathematical norms	Mathematical beliefs and values
Classroom mathematical practices	Mathematical conceptions

Figura 3. Un marco interpretativo para analizar el aula de clases

Complementariamente, una de las nociones centrales de la investigación basada en el diseño es la de *Trayectoria Hipotética de Aprendizaje* que se acuño a partir del trabajo de Martin Simon a finales de los noventa, el cual describió como sigue (Gómez y Lupiáñez, 2007):

Una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) consiste en los objetivos para el aprendizaje de los estudiantes, las tareas matemáticas que se usarán para promover el aprendizaje de los estudiantes, y las hipótesis acerca del proceso de aprendizaje de los estudiantes (Simón, 1995; p.133).

De esta manera, la THA constituye el momento inicial y parte fundamental del ciclo de la investigación basada en el diseño, pues presenta los elementos metodológicos para la instrucción. Según Gravenmeijer, Bowers y Stephan (2003), una THA aborda cuatro consideraciones específicas que la distingue de un proceso tradicional del diseño de la instrucción, las cuales se relacionan con el énfasis respecto a la naturaleza socialmente situada de la misma, el punto de vista de la planificación como un ciclo iterativo, el enfoque en las construcciones de los estudiantes en lugar de contenido matemático y, la posibilidad de ofrecer al profesor una teoría fundamentada que describe cómo un cierto conjunto de actividades de instrucción podría desarrollarse en un entorno social determinado (el aula de clase).

Las ideas descritas en este apartado con respecto a la investigación basada en el diseño solo corresponden a un primer acercamiento sobre este tópico, pues aún nos encontramos en la revisión de otras metodologías que fundamenten tanto la construcción de diseños de intervención, así como lo relativo a sus puestas en escena. Por ejemplo, dentro de esta revisión también analizaremos la ingeniería didáctica, caracterizada por una perspectiva sistémica para la construcción de diseños de intervención, ampliamente utilizada y retomada en trabajos socioepistemológicos por tal característica. Con esta revisión, pretendemos contar con elementos para tomar decisiones sobre qué tipo de metodología sería la más apropiada para nuestros objetivos.

Reflexiones finales

En términos generales, queremos resaltar la importancia de este tipo de estudios que pretendan "tender puentes" entre la investigación y los proyectos educativos, pues es a través de la evidencia empírica, el medio por el cual el quehacer educativo puede construir argumentos objetivos sobre prácticas que son o no favorables para propiciar el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes. En este sentido, contar con elementos que permitan justificar y sistematizar los procesos educativos creemos que beneficiarían sensiblemente al sistema.

Un aspecto importante a discutir es la pertinencia de considerar al PyLVar como una competencia, tal y como lo propone Cabrera (2009), puesto algunas implicaciones de este hecho serían cuestionarse sobre ¿qué pasaría con el PyLVar si el enfoque educativo cambia? Dicho en otros términos ¿el PyLVar está subordinado a un enfoque educativo? Nuestra postura al momento considera que, por el contrario, el PyLVar en sus dos estatus, como línea de investigación y como forma de pensamiento es y será siempre un marco de referencia que permitirá dar sentido a la praxis educativa para alcanzar sus objetivos, independientemente de un enfoque educativo. Por lo tanto, creemos conveniente discutir este aspecto.

Asimismo, como se mostró en el apartado de la investigación basada en el diseño consideramos importante el construir marcos metodológicos más robustos que permitan hacer explícito el rol del diseño tanto desde su concepción y validación interna como de lo que provoca en su puesta en escena. Con esto esperamos generar conjeturas con respecto a las consideraciones relativas respecto a la construcción de diseños de intervención basados en el PyLVar que nos permitan proponer elementos para la organización de la intervención en las aulas y así, cumplir con el discurso del enfoque por competencias del bachillerato en Matemáticas.

Referencias

Aparicio, E. (2003). *Sobre la noción de continuidad puntual: Un estudio de las formas discursivas utilizadas por estudiantes universitarios en contextos de geometría dinámica*. Tesis de Maestría no publicada. México:Cinvestav.

Buendía, G. (2011). *La construcción social del conocimiento matemático escolar. Un estudio socioepistemológico sobre la periodicidad de las funciones*. México: Díaz de Santos.

Caballero, M. (2012). *Un estudio de las dificultades en el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional en profesores de bachillerato.* Tesis de maestría no publicada, México:Cinvestav.

Cabañas, G. (2011). *El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. Un estudio socioepistemológico*. Tesis de Doctorado. México:Cinvestav.

Cabrera, L. (2009). *El Pensamiento y Lenguaje Variacional y el desarrollo de Competencias. Un estudio en el marco de la Reforma Integral de Bachillerato*. Tesis de maestría no publicada, México:Cinvestav.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada Socioepistemológica. En L. Díaz (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 17, pp. 1-9.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento.* México: Gedisa.

Chimal, R. (2005). *Una mirada socioepistemológica a la covariación*. (Tesis inédita de maestría). México:Cinvestav.

Cobb, P. (2003). SupportingStudents' Development of Measuring Conceptions: Analyzing Students' Learning in SocialContext. *Journal for Research in Mathematics Education. Monography*. 12, 1-16.

Díaz, L. (2005). Profundizando en los entendimientos estudiantiles de variación. *Revisa Latinoamericana de Matemática Educativa. 8*(2), 145-168.

Dolores, C. (2007). *Elementos para una aproximación variacional a la derivada*. Guerrero, *Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación*. Tesis de maestría no publicada, México:Cinvestav.

Gómez, P. y Lupiáñez, J. (2007). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *PNA*, 1(2), p79-98.

González, R. (1999). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas. Un estudio de resignificación de las situaciones didácticas.* México:Cinvestav.

Gravenmeijer, K., Stephan, M. y Bowers, J. (2003). SupportingStudents' Development of Measuring Conceptions: Analyzing Students' Learning in SocialContext. *Journal for Research in Mathematics Education. Monography*. 12, 51-66.

Mirón, H. (2000). *Naturaleza y posibilidades de aprendizaje en un ambiente tecnológico: Una exploración de las relaciones $f \leftrightarrow f'$ en el bachillerato interactuando con calculadoras gráficas*. Tesis de Doctorado. México:Cinvestav.

Muñoz, G. (2010). Hacia un campo de prácticas sociales como fundamento para rediseñar el discurso escolar del cálculo integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. *13*(4-II), 283-302.

Reséndiz, E. (2004). *La variación en las explicaciones de los profesores en situación escolar*. (Tesis Doctoral). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Salinas, C. (2003). *Un estudio sobre la evolución de ideas variacionales en los cursos introductorios al Cálculo.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México

Secretaria de Educación Pública (SEP) (2008). Reforma Integral de la Educación Media Superior: La creación de un sistema Nacional de Bachillerato en un marco de diversidad (Documento de trabajo). Recuperado el día 8 de junio del 2015 del sitio Web de la Dirección General de Bachillerato: http://www.dgb.sep.gob.mx/

Stephan, M. (2003). SupportingStudents' Development of Measuring Conceptions: Analyzing Students' Learning in SocialContext. *Journal for Research in Mathematics Education. Monography*. 12, 17-35.

Testa, Z. (2004). *Procesos de resignificación del valor numérico de la función derivada segunda: Un estudio en el sistema escolar Uruguayo*. Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. Unidad Legaria. México, D.F.

Whatson, A y Ohtani M. (2015). *Task Design In Mathematics Education an ICMI study 22.* Alemania:Springer.

Autores

Luis López Acosta; CINVESTAV, IPN. México; lalopeza@cinvestav.mx
Ricardo Cantoral Uriza; CINVESTAV, IPN. México; rcantor@cinvestav.mx
Gisela Montiel Espinoza; CINVESTAV, IPN. México; gmontiele@cinvestav.mx

EL ROL DE LOS CONSTRUCTOS DEL COTIDIANO Y LA MATEMÁTICA NO ESCOLAR

Julio Yerbes González, Francisco Cordero Osorio

Resumen

Dentro de la Matemática Educativa existen diversas teorías y perspectivas que pretenden disminuir la brecha entre la matemática escolar y la matemática del "cotidiano", es así que se han dado a la tarea de caracterizar a esas "matemáticas no escolares" que viven en el cotidiano de la gente, las cuales conforman un referente para incidir en el aula de matemáticas. La perspectiva teórica que abraza esta investigación es la Socioepistemología, donde se establece una postura para estos constructos, así el interés de la investigación está en distinguir estos constructos, para ello se considera pertinente configurar un estado de arte.

Palabras Clave. Cotidiano, Matemáticas no escolares

Introducción

La investigación que se presenta en el siguiente escrito se encuentra en proceso. Discutimos a continuación los avances que se tienen hasta el momento. La investigación se enmarca dentro de un Programa Socioepistemológico cuya tesis es que existe "*un sujeto olvidado"*, por ejemplo para ciertas investigaciones dentro de este Programa, el sujeto olvidado puede ser el *conocimiento matemático de la gente*, por mencionar algunas, Gómez, (2015); Parra, (2015); Pérez, (2012) y Torres, (2013). En los trabajos mencionados anteriormente el énfasis está en la recuperación del sujeto, para ello se aportan elementos para crear marcos de referencia con los usos del conocimiento matemático del cotidiano de la gente en determinadas comunidades, donde es posible apreciar una matemática funcional, que transforma la realidad de los individuos.

Sin embargo, este Programa no es el único dentro de la Matemática Educativa que ha considerado los conocimientos fuera del aula de clases, existen diversas teorías en las cuales se habla de un cotidiano, y de ciertos conocimientos matemáticos que ahí se encuentran y son ajenos al aula, dentro de estos enfoques la postura que se establece es que deben ser considerados parte del conocimiento matemático escolar. Por tanto, se reconoce que dentro de la disciplina, existe una pluralidad de constructos que pretenden dar cuenta del cotidiano de los individuos y de las matemáticas que ahí usan.

Es así, que se puede trazar la intencionalidad de la presente investigación, en la cual se pretende distinguir, demarcar y esclarecer el constructo "*cotidiano con adjetivo*" y la *"matemática funcional"* que tiene lugar dentro del Programa Socioepistemológico en el cual se enmarca la investigación, con respecto a los diferentes constructos del "*cotidiano*" y de las "*matemáticas no escolares*", que se encuentran en los otros programas que existen en la disciplina. En este sentido, es que se considera pertinente generar un estado del arte para vislumbrar las diferentes posturas que existen en la disciplina acerca de dichos constructos.

Una de las finalidades de la educación matemática

Desde tiempo atrás se considera que la educación impartida en las escuelas debe formar ciudadanos que tengan los conocimientos suficientes y necesarios para desarrollarse como personas plenas en sus labores cotidianas, sin embargo existen investigaciones como la de Carraher, Carraher y Schliemann, (1997) citado en Cordero, (2013) que dan cuenta de que existe una enorme brecha entre la matemática escolar y la matemática que la gente usa, para evidenciarlo intercambiaron los problemas de matemáticas de un niño de la calle y de un niño de la escuela, lo impactante fue que ninguno de los dos pudo resolver los problemas propuestos. Esto permite vislumbrar que la matemática escolar no está preparando a las personas para los problemas de su cotidiano.

La investigación citada anteriormente marca la pauta de una problemática, pues deja ver que existe un divorcio entre la matemática escolar y la matemática que se encuentra en el cotidiano de la gente. En esa misma línea, Cordero (2013), critica las propuestas innovadoras de los programas oficiales que llegan a las aulas de clase, los cuales presumen que van a mejorar los aprendizajes de los estudiantes, en estas se introducen nuevos conceptos, por ejemplo "el conocimiento de cotidiano" (para lo que nos atañe), en las clases de matemáticas, es así que se derivan consignas como "llevar la matemática a la realidad del estudiante" y todavía más impactante crear "ambientes de la matemática de todos los días". Sin duda la propuesta en sí, parece ser sensata, pero choca con la realidad educativa, debido a que, como no se concibe al conocimiento matemático como una construcción social, no permite cuestionar la función social de la matemática en lugar de la matemática misma.

Debido a lo anterior, es que en Cordero (2013), se explicita que no es trivial establecer relaciones entre las matemáticas y el cotidiano, esto porque ambos conceptos tienen grandes dimensiones, en cuanto a la matemática, se debe a la dialéctica que se pretende establecer entre la obra matemática y su aprendizaje. Mientras que el cotidiano, como individuos formamos parte de él, es decir, lo vivimos, lo que hace difícil concebirlo como un conocimiento en la escuela, en el trabajo y en lo mundano.

Sin embargo el Programa Socioepistemológico no es el único dentro de la Matemática educativa que ha considerado pertinente caracterizar las matemáticas no escolares, otras perspectivas teóricas, han propuesto caracterizaciones de las *"matemáticas no escolares"* y del *"cotidiano"*, es así, que surge la necesidad de realizar un estado de arte con la intención de darle un estatus a estos constructos que se trabajan en el Programa Socioepistemológico, para ello se pretende determinar aquellos elementos que tienen en común o bien que los hacen diferentes, algunos de esos elementos se reflejan en las preguntas que guían la investigación.

Por tanto, con la finalidad de orientar el análisis de los diferentes constructos, es que en esta instancia de la investigación nos cuestionamos acerca de, ¿Cuáles son las diferentes caracterizaciones de las matemáticas no escolares dentro de la Matemática Educativa?, ¿Cómo proponen afectar el aula de matemáticas las diversas matemáticas no escolares? estas preguntas tienen la propósito de aportar elementos que nos permitan a futuro responder la pregunta central de la investigación, ¿Cuál es el estatus del constructo del cotidiano que maneja este Programa Socioepistemológico?

Matemáticas no escolares. Caracterizaciones

En la investigación se reconoce que existe múltiples perspectivas teóricas dentro de la Matemática educativa, por los tiempos que se tienen para el desarrollo de esta investigación es que se tomó la decisión de enfocarnos en las perspectivas teóricas de mayor influencia en la disciplina, para efectos de este reporte de avance de investigación, se presenta una primera caracterización de los constructos que se problematizan dentro de la Etnomatemática, la Mathematics Education, la Realistic Mathematics Education y una perspectiva de la divulgación de la Matemática.

En lo que acontece a la Etnomatemática se propone a la "*matemática aplicada"*, la cual es aquella practicada por los grupos culturales, tribus etc, y la distingue de la *matemática académica*, la cual es constituida por las matemáticas que se enseñan y se aprenden en la escuela, D'Ambrosio (1985), dentro de esta misma perspectiva teórica, Blanco, (2008), menciona que se debe considerar "*el conocimiento matemático informal o extraescolar del estudiante, para partir de allí hacia la formalización de los objetos matemáticos*", y recientemente, D'Ambrosio explicita que:

> Las matemáticas son cuerpos de conocimiento que se elaboran a partir de prácticas cualitativas y cuantitativas, tales cómo hacer comparaciones, ordenaciones, clasificaciones, inferencias, y de los sistemas de códigos de medidas, de peso y de cantidades [números], qué han sido acumulados, a través de las generaciones, en determinados ambientes naturales y culturales (D'Ambrosio 2014, p.102).

Por otro lado, Corbalán (2001), enmarcado en el estudio y la divulgación de las matemáticas, propone que a través de la resolución de problemas, es posible graduar unas "gafas invisibles" que les permitan a los alumnos percibir las matemáticas de su alrededor (*matemáticas cotidianas*), para después aplicarlas cuando haya una oportunidad; continuando con la caracterización, Freudenthal (1968), en los inicios de la perspectiva teórica que desarrolla la Realistic Mathematics Education, define a las *"matemáticas útiles"*, las cuales señala que se deben enseñar, "*estas deben ser como una actividad, el proceso de matematizar la realidad y si es posible matematizar las matemáticas*". También existe otra acepción de las *"matemáticas cotidianas"*, esta es propuesta por Arcavi, (2002) dentro de la Mathematics Education, donde señala que existen diversas matemáticas cotidianas, y dependen del contexto de donde emerja la matemática, además menciona que la matematización constituye una "*potente idea para que puede utilizarse como puente entre las matemáticas cotidianas y las matemáticas académicas*", la idea es que el estudiante pueda usar diferentes estrategias propias de experiencias previas, que le permitan resolver problemas de tal suerte que se evolucione hacia unas matemáticas más formales.

Lo anterior da cuenta de que existen diversas perspectivas que pretenden disminuir la brecha entre lo escolar y lo no escolar. Dentro de éstas se encuentra un *Programa Socioepistemológico*, en el cual se enmarca este trabajo, en dicho programa se considera que para poder hacer un rediseño del discurso matemático escolar, es necesario crear y robustecer marcos de referencia con una *matemática funcional* desde el *cotidiano* disciplinario, del trabajador y del ciudadano Cordero (en prensa). Conviene precisar que estaremos entendiendo dentro del Programa al cotidiano, como sigue:

> Lo cotidiano se considera como una epistemología particular que se ancla a un escenario específico que se expresa en argumentaciones y sistemas de usos en términos de un Mantenimiento de Rutina y de Crisis mientras el conocimiento se encuentra en uso (Zaldívar, 2014, p. 16).

A esto, es que en Zaldívar y Cordero (2014), se expresa que la categoría del cotidiano a la cual nos referimos dentro del este Programa, expresa el conocimiento que transcurre en el mantenimiento de rutinas, que permiten mantener estructuras de conocimiento concretas y funcionales, lo que implica una relación sólida y concreta, que permita de una forma transformar a los individuos y transformar su realidad.

Dentro de este cotidiano que se caracteriza en este Programa es que tiene cabida pensar en una *"matemática funcional",* la cual tiene presencia en el actuar del cotidiano, donde los

> Usos son resignificados en situaciones específicas donde la mayoría de las veces la matemática no es el objeto de estudio, sino más bien, para la Matemática Educativa, el objeto de estudio es la transversalidad de los usos del conocimiento matemático en los diferentes escenarios: la escuela, el trabajo y la ciudad, (Cordero en prensa)

A partir de las lecturas realizadas, se obtuvieron las caracterizaciones descritas en este apartado, sin embargo para poder dibujar el estado del arte y establecer mejor la distinción que pretendemos para poder darle un estatus al Cotidiano y a la Matemática Funcional dentro de este Programa Socioepistemológico, es que se está realizando una línea del tiempo donde se permita ver el desarrollo que han tenido los diferentes constructos que caracterizan a las matemáticas no escolares (Figura 1).

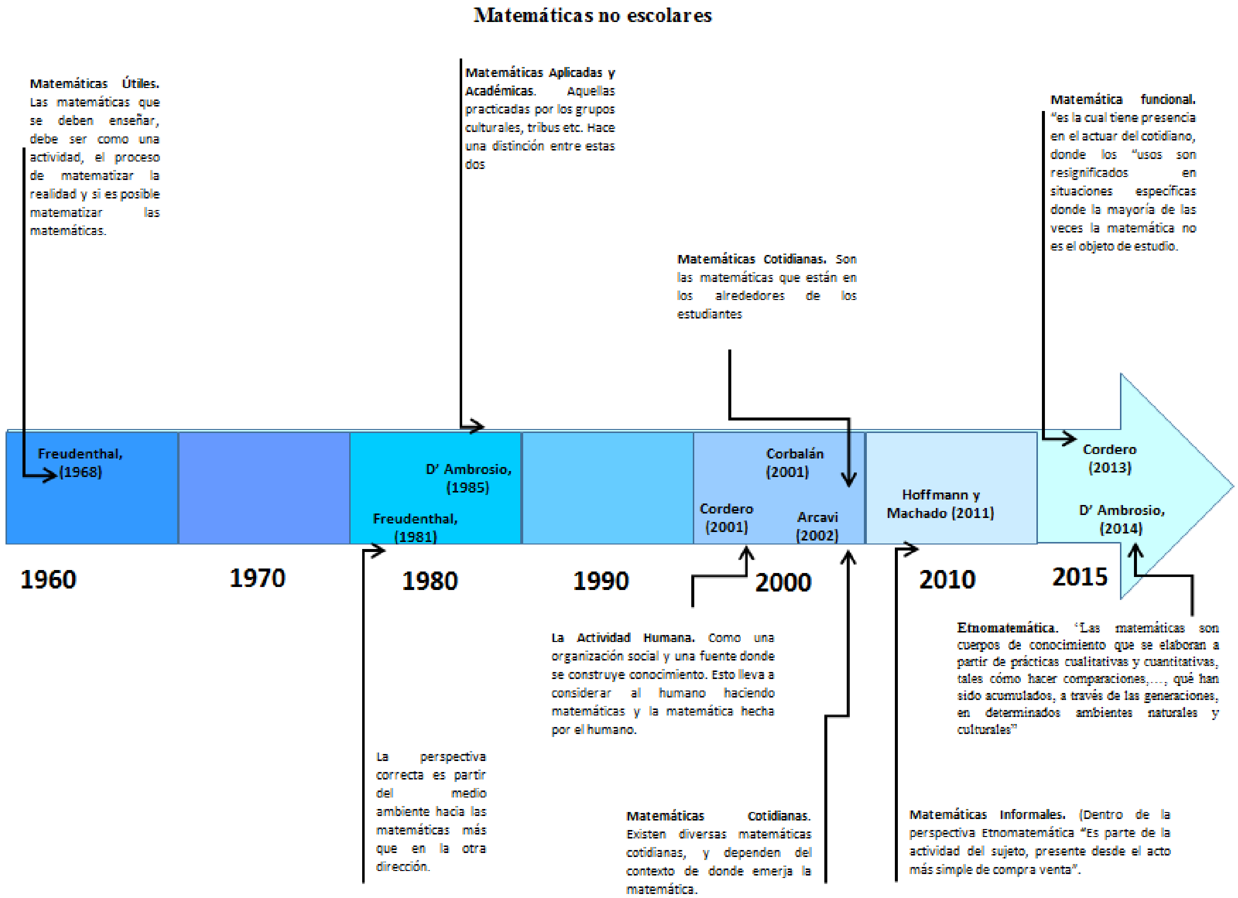


Figura 1. Línea del tiempo donde se comienza a dibujar el desarrollo de los constructos de las matemáticas no escolares

Comentarios finales

Es así, que debido a la información presentada en el apartado anterior, a estas instancias de la investigación, podemos realizar los siguientes comentarios de lo que se tiene hasta ahora, de las revisiones que se han realizado de estas cuatro perspectivas, se han encontrado dos aspectos que se consideran relevantes para el estudio, el primero, es que el "cotidiano" que estas perspectivas se trabajan, carece de una caracterización explícita, es decir se puede inferir que la caracterización o definición que utilizan es la coloquial, para dicho constructo.

Por otro lado, se también se puede concluir que se sigue pensando que las matemáticas encontradas en ese "Cotidiano" caracterizadas como "Matemáticas no escolares", deben servir de base o como punto de partida para llegar a la matemática formal o a los objetos matemáticos, por lo que se sigue pensando de manera tradicional, es decir, para que un estudiante aprenda matemáticas, debe conocer los objetos matemáticos, situación diferente es la que se plantea en este Programa Socioepistemológico, debido a lo que busca es darle un estatus a esa matemática funcional del Cotidiano de la gente, de tal suerte que esa sea enseñada en las escuelas, con la finalidad de que el estudiante se transforme y transforme su realidad.

Referencias

Arcavi, A. (2002). The Everyday and the Academic in Mathematics. En Breneer, M.E. & Moschkovick, J.N. (Eds.), *Everyday and Academic Mathematics in the Classroom* (págs. 11-29). Reston, Virginia: The National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]

Blanco, H. (2008). La integración de la etnomatemática en la etnoeducación. En G. García (Ed). *Memorias del noveno encuentro colombiano en matemática educativa*. (9) 33-39 Bogotá, Martha Bonilla.

Corbalán, F. (2001). Matemáticas cotidianas. *Sigma. Revista de matemáticas,* 19(1), 43-50.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4*(2). 103-128.

Cordero, F. (2013). Matemáticas y el Cotidiano. Diplomado Desarrollo de estrategias de aprendizaje para las matemáticas del bachillerato: la transversalidad curricular de las matemáticas Módulo III. Documento interno. Cinvestav –IPN.

Cordero, F. (en prensa) Modelación, Funcionalidad y Multidisciplinariedad: El Eslabón de la Matemática y el Cotidiano. En Díaz y Arrieta (Eds). *Investigaciones latinoamericanas en Modelación Matemática Educativa*. México: Gedisa.

D'Ambrosio. U. (1985). Ethno Mathematics and Its Place in the History and Pedagogy of Mathematics. En For the Learning of Mathematics, 5, 44-48.

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematicas so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics*, 1, 3-8.

Gómez, K. (2015). *El fenómeno de opacidad y la socialización del conocimiento. Lo matemático de la ingeniería agrónoma*. Tesis de doctorado no publicada. CINVESTAV-IPN. México.

Hoffmann, E. y Machado, I. (2011). O saber matemático na vida cotidiana: um enfoque etnomatemático. *Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*. 4(2), 3-30.

Parra, T. (2015). *Los usos de la cantidad en una comunidad de conocimiento matemático Hñähñu. Del trueque y la curación al comercio de papel amate.* Tesis de doctorado no publicada. CINVESTAV-IPN. México.

Pérez, R., (2012). *Usos de la oralidad numérica Ñuu savi*. Tesis de maestría no publicada. CINVESTAV-IPN. México.

Torres, L. (2013). *Usos del conocimiento matemático. La simultaneidad y la estabilidad en una comunidad de conocimiento de la ingeniería química en un escenario de trabajo.* Tesis de maestría no publicada. CINVESTAV-IPN. México.

Zaldívar, D. (2014). *Un estudio de la resignificación del conocimiento matemático del ciudadano en un escenario no escolar*. Tesis de Doctorado no publicada, CINVESTAV-IPN. México.

Zaldívar, D. y Cordero, F. (2014). Un estudio de la construcción social del conocimiento matemático en el cotidiano. En P. Leston (Ed). *Acta latinoamericana de matemática* *educativa*. 27, 1511-1519. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Autores

Julio Yerbes González; CINVESTAV, IPN. México; jjyerbes@cinvestav.mx
Francisco Cordero Osorio; CINVESTAV, IPN. México; fcordero@cinvestav.mx

PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL EN LA PRÁCTICA MÉDICA. EL CASO DE "LA LECTURA" DEL ELECTROCARDIOGRAMA

Gloria Angélica Moreno-Durazo, Ricardo Cantoral Uriza

Resumen

Retomamos investigaciones sobre Pensamiento y Lenguaje Variacional, que proponen como punto de partida para el análisis del cambio a las "estrategias variacionales" de: comparación, seriación, predicción y estimación, a fin de llevar a cabo un análisis sobre la práctica profesional del médico. Este profesional de la medicina será partícipe de una situación de variación que pone en funcionamiento las estrategias variacionales en su interpretación del electrocardiograma. Con esta investigación se pretende extender los resultados de la línea de investigación a terrenos aún no explorados como lo es el estudio de los sistemas complejos, las dinámicas propias de los sistemas fisiológicos de los seres humanos.

Palabras clave: Electrocardiograma, estrategias variacionales, socioepistemología.

Introducción

El Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLVar) es una línea de investigación desarrollada en Cinvestav-IPN, cuyo objetivo es el estudio de las formas culturales de apropiación del *cambio* con fines *predictivos*. Derivado de los proyectos desarrollados a lo largo de dos décadas, se han podido caracterizar *estrategias* y *argumentos variacionales* indispensables para la predicción. En consecuencia se han desarrollado una serie de secuencias didácticas para la mejora educativa tanto en el aula y la escuela, como en la vida misma.

El PyLVar no reduce sus objetivos de investigación al ámbito de lo cognitivo (lo covariacional), lo didáctico (modelación funcional) o lo epistemológico (matemática de las magnitudes variables) separadamente, sino que las agrupa en el ámbito de lo social de manera sistémica. A esta articulación teórica se le ha denominado Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (Cantoral, 2013).

Para la línea de investigación de PyLVar el objetivo central de las formas culturales de apropiación, exige de una estructuración de las *prácticas*, que acompañan a los *objetos matemáticos*. Esto precisa de la *anidación de prácticas*, relativas al estudio del cambio y la variación. Entendemos por *cambio* a la modificación de estado de un cuerpo, sistema u objeto, mientras que la *variación* resulta ser una cuantificación de ese cambio. Por tanto, estudiar *lo variacional* implica identificar aquello que cambia, cuantificar sus cambios y analizar cómo varían los cambios, lo que permite realizar predicciones sobre fenómenos, exige por tanto de un sistema de referencia, un origen y de unidades de medida.

Asimismo, asumimos que el cambio y la variación se encuentran en las vivencias y experiencias cotidianas de los individuos y de los grupos sociales, a partir de las cuales la predicción se construye socialmente mediante el desarrollo de prácticas en las que intervienen el cambio y la variación (Cantoral, Farfán, Lezama, Martínez, 2006). Estas prácticas pueden ser encontradas en áreas del conocimiento humano como Física, Química, Biología, Ecología, Medicina o Ingeniería, entre muchas otras. Su estudio permite comprender con mayor profundidad la *construcción social de conocimiento matemático*, pues en dichos escenarios el conocimiento matemático se ubica de manera funcional en las prácticas profesionales.

De manera cotidiana podemos decir que toda persona se enfrenta a una gran diversidad de cambios, tanto en su cuerpo como en la naturaleza, por ejemplo las veces que palpita o late el corazón por cada minuto en situación de reposo, o la temperatura corporal sentado bajo el sol, o bien la producción de glóbulos blancos a lo largo de la vida, la producción de cortisol asociada a niveles de estrés y así una gran cantidad de ejemplos como estos. Lo que nos interesa, en este proyecto de investigación, es saber con suficiente grado de certeza cómo se cuantifican y analizan esos cambios, sobre qué respaldan sus juicios los profesionales de la medicina al realizar todo tipo de prácticas predictivas. Respecto a ello, nuestro propósito es mostrar, mediante el estudio documental de la interpretación de un electrocardiograma, una articulación entre las investigaciones ligadas al *cambio* y la *variación* con temas relativos al funcionamiento de mecanismos regulativos propios del cuerpo humano y las perturbaciones externas a él.

En investigaciones recientes (Caballero, 2012) se presenta un modelo de interacción de los elementos del PyLVar, estructuras, estrategias, argumentos, códigos, tareas y situaciones variacionales. Se menciona la funcionalidad de las que denomina estrategias variacionales, caracterizadas por ser el punto de partida para el análisis del cambio pues permite identificar aquello que cambia en una situación, cuantificarlo y analizar sus formas de cambio. Las investigaciones de Salinas (2003) reconocen a la comparación, seriación, estimación y predicción como estrategias variacionales específicas en problemas de optimización; las cuales fueron posteriormente retomadas por Caballero (2012).

Retomando estas investigaciones, proponemos que estas estrategias variacionales se ponen en funcionamiento en la llamada "lectura sistemática del electrocardiograma", la cual consiste en el análisis de aspectos relativos al origen del ritmo cardiaco, la frecuencia cardiaca, morfología de las ondas, los segmentos y los intervalos que caracterizan el electrocardiograma (Pérez-Lescure, 2011; Castellano, Pérez, Attie, 2004), acciones previas a la toma de decisión por parte de los profesionales de la medicina.

Pensamiento y Lenguaje Variacional en la lectura sistemática del electrocardiograma

Al momento, los estudios sobre el PyLVar en ámbitos multidisciplinarios se han ocupado del examen del cambio y la variación bajo sistemas determinísticos propios de las ciencias físicas: abundan estudios sobre la caída libre o el plano inclinado, la dinámica y la cinemática de cuerpos o las distintas modalidades de las dinámicas poblacionales con crecimiento exponencial. En todos ellos, el estado futuro del sistema dinámico depende sólo de las condiciones de partida (estado inicial y condiciones de frontera determinados por una única ley de movimiento). En este escenario, la predicción es alcanzada mediante modelos matemáticos cuya resolución precisa de la convergencia de la serie de Taylor en un dominio dado. Pues el estado futuro, digamos $f(x+h)$, depende los valores de partida: $h, f(x), f^{'}(x)$, etc., mediante la expresión:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f^{'}(x)h}{1!} + \frac{f^{''}(x)h^2}{2!} + \frac{f^{'''}(x)h^3}{3!} + \cdots$$

El problema que ahora abordamos es el de ampliar los escenarios de significación de la predicción en situaciones de cambio y variación hacia escenarios no determinísticos, eventualmente escenarios relativos al caos. Para ello elegimos un caso de la medicina interna cuyos pacientes se ubican en lo que llamamos "situación limítrofe" (Moreno, 2014; Moreno, Cantoral, 2015); situación sobre la que la predicción clásica (determinística) no opera de la manera descrita anteriormente. La matemática de este problema está siendo aún caracterizada en nuestro grupo de investigación, sin embargo, hemos avanzado en las técnicas de interpretación y toma de decisión, en situación limítrofe, de un médico quien asume, que un pequeño cambio en la dosis, a una cierta frecuencia, producirá, probablemente (esas es su predicción), un efecto positivo que conducirá al paciente hacia una ligera mejoría, hacia un estado cuasi-estable.

En esta ocasión, mostramos el papel que juega la lectura y la interpretación del electrocardiograma (ECG) como recurso válido para la toma de decisiones con variación acotada; el cual consiste en la representación gráfica de los fenómenos eléctricos que tienen lugar en el corazón. El médico general debe, durante la interpretación del ECG, reconocer las variaciones normales debidas a los cambios de polaridad en las células cardiacas y diferenciarlas de aquellas que pueden presentar patología. De esta manera, decimos que el profesional de la medicina realiza un análisis que involucra al cambio y su cuantificación, mediante el uso de estrategias variacionales adecuadas, basado en protocolos y la experiencia propia, es decir, es partícipe, en situación de gravedad extrema de una situación de variación específica. Además, sabemos que el médico reconoce en los gráficos del ECG el dinamismo de los procesos que lo generan, por tanto, lo acepta en su práctica profesional como una herramienta de predicción. Esto último, a diferencia de lo que sucede con los estudiantes o profesores en la educación obligatoria ante el análisis de funciones y gráficas en las que la representación pictórica puede ser para estos un elemento estático.

Este análisis sobre el ECG como herramienta predictiva para los profesionales de la medicina es visto desde la socioepistemología, en particular, desde la línea de investigación del PyLVar. Para ello, recurrimos al análisis de documentos como método de recolección de datos, se revisaron documentos sobre el ECG con la intensión, en una primera instancia, de acercarse a la comunidad de estudio, los médicos internistas; posteriormente, se relacionan la técnica de lectura del ECG con elementos del PyLVar. De esta manera, mediante la revisión documental, en relación a esta herramienta predictiva en medicina y la línea de investigación de pensamiento y lenguaje variacional, se plantea la siguiente articulación.

El electrocardiograma

Explicamos a continuación los elementos básicos del funcionamiento del corazón, el cual está separado por aurículas y ventrículos, ambos separados en lado derecho y lado izquierdo (ver figura 1, a)), a través de éstos se puede irrigar de sangre a todo el sistema mediante su contracción-relajación; el lado derecho del corazón es el encargado de transportar la sangre pobre en oxígeno a los pulmones para su oxigenación y el lado izquierdo del corazón es el encargado de transportar la sangre rica en oxígeno a todo el cuerpo.

Estos fenómenos de *contracción* y *relajación* alternadas son provocados por los cambios de polaridad en las células cardiacas mediante el intercambio de iones de sodio, potasio y calcio; es decir, al ocurrir el intercambio de estos iones en el interior y exterior de la célula se producen los procesos de despolarización y repolarización del conjunto de células, que mediante un sistema de conducción alcanza todo el músculo del corazón; el cual inicia en el nodo sinusal, llega al nodo auriculo-ventricular (AV), sigue por las ramas izquierda y derecha del haz de Hiz hasta llegar a las fibras de Purkinge (ver figura 1, b)).

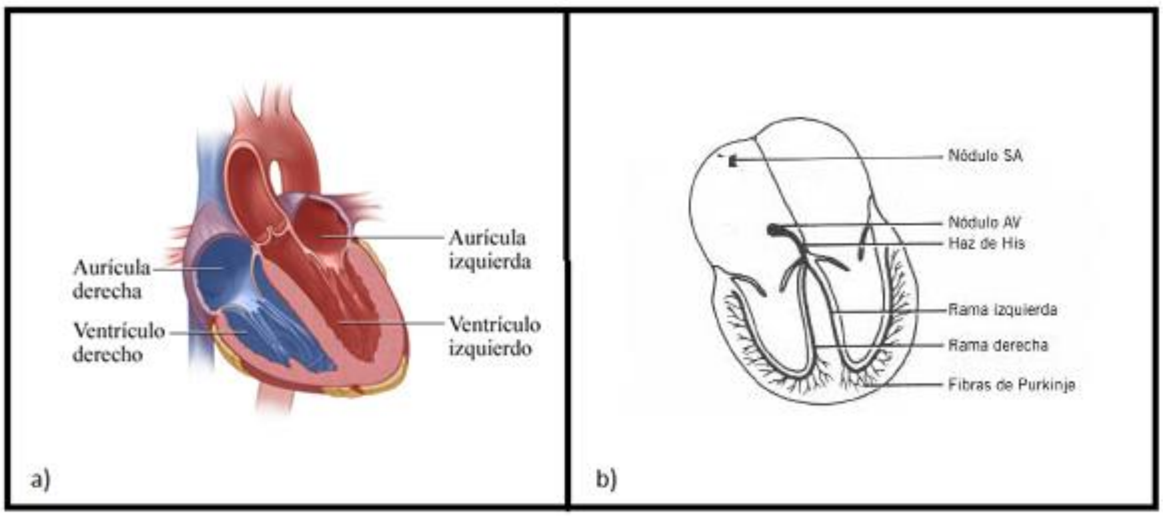


Figura 1. a) Cavidades cardiacas. b) Sistema de conducción eléctrico del corazón.

Para el registro de los procesos de despolarización y de repolarización se construye un sistema de referencia que permita medir la diferencia de potencial en las células cardiacas, este sistema de referencia lo constituyen generalmente doce puntos de observación, los cuales permiten "ver" el corazón desde distintos ángulos en el plano horizontal y vertical. En la figura 2 se muestra el sistema de referencia para cada plano, los puntos de observación o derivaciones son generadas por electrodos ubicados en lugares estratégicos. Por ejemplo, para el caso del plano frontal (figura 2, a)) las derivaciones son generadas por electrodos que se colocan en las extremidades, DI mide la diferencia de potencial considerando al electrodo del brazo derecho y el del brazo izquierdo, DII considerando al electrodo del brazo derecho y la pierna izquierda, DII considerando al electrodo en el brazo izquierdo y en la pierna izquierda; las derivaciones unipolares aVL, aVF, aVR se generan con el electrodo de la mano izquierda, pierna izquierda y mano derecha, respectivamente.

Respecto al plano horizontal los puntos de observación V1, V2, V3, V4, V5, V6, tienen la misma naturaleza de los unipolares, es decir, se mide la diferencia de potencial entre un punto con carga casi cero y el electrodo correspondiente (figura 2, b). Al respecto de este sistema de referencia, que permiten analizar el funcionamiento del corazón en distintos ángulos, existen investigaciones donde se muestra la necesidad de su construcción para la interpretación de fenómenos de cambio.

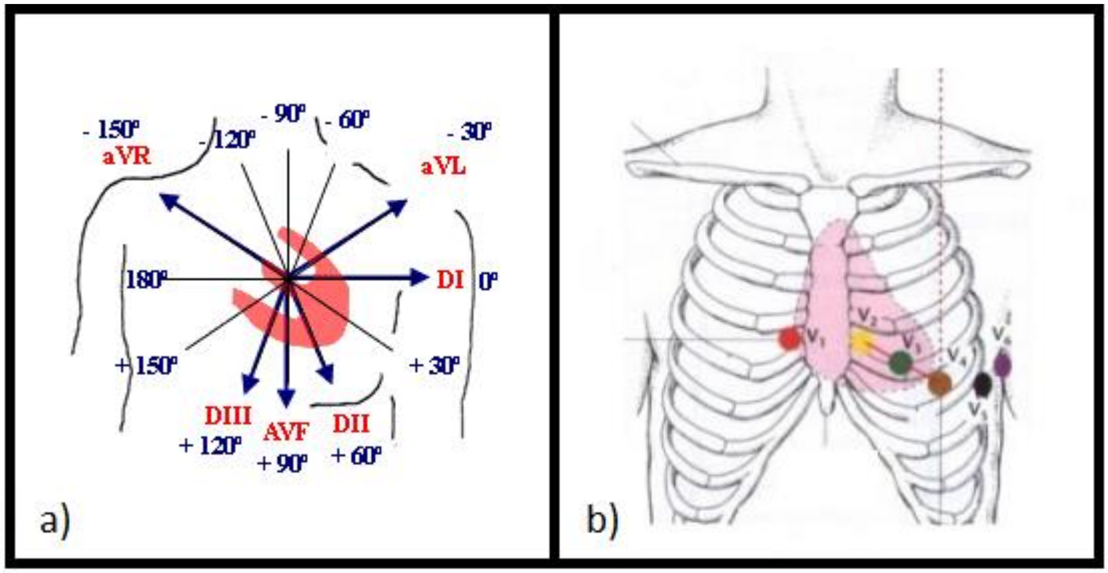


Figura 2. a) Derivaciones del plano frontal. b) Derivaciones de plano horizontal

Estrategias variacionales en la lectura del electrocardiograma

El uso de las estrategias variacionales de comparación y de seriación es elemental en el estudio de la variación, mientras que las estrategias de estimación y predicción se consideran más avanzadas pues requieren, además del estudio de las variaciones, procesos cognitivos de abstracción, síntesis y el uso de esa información para la anticipación (Caballero, 2012). En ese sentido, mostramos enseguida situaciones en la interpretación del ECG donde se hace uso de la comparación y la seriación, entendiendo que la predicción y la estimación se ven reflejadas en el proceso de diagnosis y el tratamiento que se proporciona a los pacientes.

La despolarización auricular se representa en el ECG con la onda P, la despolarización de los ventrículos se representa con el complejo QRS y la repolarización ventricular está representada con la onda T; figura 3, a). Estos fenómenos son representados en el ECG desde las doce derivaciones, figura 3 b). Para identificar el "signo" de la onda (positiva cóncava hacía abajo y negativo cóncavo hacia arriba) y la "magnitud" de la onda se debe *comparar* el ángulo que forman cada una de las derivaciones con el vector resultante de los procesos eléctricos, despolarización y repolarización, en cada cavidad cardiaca. Por ejemplo, para conocer la magnitud y signo de la onda P se compara el ángulo que forma el vector resultante de la despolarización de las aurículas y cada derivación; si este ángulo es mayor que 90° la onda será negativa, si es menor que 90° será positiva y si el ángulo es 90° se traza una línea isoeléctrica (línea sin concavidad).

Identificamos también en el cálculo del eje cardiaco, el cual proporciona una visión global de la actividad eléctrica del corazón, la estrategia variacional de comparación. Este cálculo surge de la identificación de las derivaciones en las que el voltaje registrado en el complejo QRS es mayor y donde el gráfico del complejo QRS es isodifásico, es decir, hay una "compensación" entre las magnitudes de la onda positiva (onda R) y de la negativa (onda S). Esto es, se tiene que *comparar* el complejo QRS en todas las derivaciones y elegir la que cumpla con las características señaladas, con base en ellas se hace el cálculo del eje cardiaco.

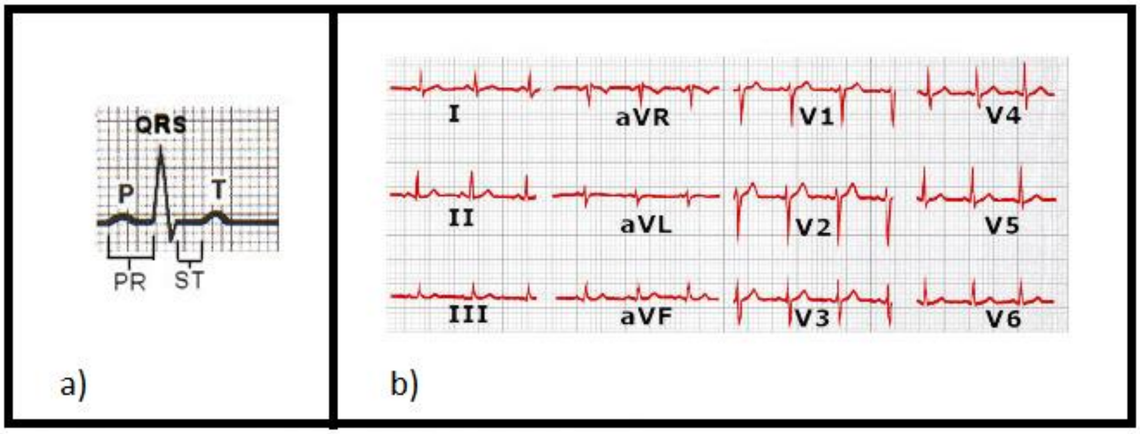


Figura 3. a) Ciclo completo de los procesos de despolarización y repolarización. b) Procesos de despolarización y repolarización en las doce derivaciones.

Por otro lado, el electrocardiograma provee al médico de herramientas para la toma de decisiones, por ejemplo, si las ondas P (despolarización auricular) dura más tiempo de lo normal o el voltaje que registra es mayor a ciertos valores predeterminados se puede inferir crecimiento auricular izquierdo y derecho, respectivamente; situación en la que identificamos la *comparación* de valores estándares con los obtenidos en el ECG.

Respecto a la estrategia variacional de *seriación* la identificamos, por ejemplo, cuando el médico analiza el segmento PR, el cual empieza en la onda P y termina al inicio de la onda Q o la onda R, en la búsqueda de posibles bloqueos auriculo-ventriculares. Una de las características en el ECG del bloqueo auriculo-ventricular de segundo grado Mobitz I es el alargamiento progresivo del intervalo PR hasta que una onda P se bloquea, es decir, no se sigue de un complejo QRS (Castellano, Pérez, Attie, 2004); sostenemos que para identificar este alargamiento progresivo el médico debe analizar varios ciclos completos en algunas derivaciones, lo que caracteriza precisamente a la seriación que a diferencia de la comparación requiere del análisis de más de dos estados.

Reflexiones finales

Hemos mostrado cómo se relacionan las estrategias variacionales de seriación y comparación con la práctica profesional del médico, cuando éste interpreta un ECG. Con ello vinculamos estudios en la línea de investigación de Pensamiento y Lenguaje Variacional con nuevas proyectos de investigación que pretenden extender los resultados de esta línea, que se ha desarrollado en tópicos de Análisis Matemático clásico, hacía el estudio de sistemas complejos como lo son las dinámicas propias de los sistemas fisiológicos de los seres humanos. Sobre las estrategias de predicción y estimación las asumimos como elementos intervinientes en el diagnóstico y tratamiento en pacientes con base en los argumentos que provee la interpretación del ECG.

Este análisis nos ha permitido avanzar en dirección de la investigación sobre el estudio de un principio que asociamos al pensamiento matemático, que hemos denominado en nuestro grupo de investigación como *principio estrella* (P*); sostenemos a este principio como un mecanismo directamente relacionado con la predicción, intermedio entre las prácticas predictivas y la normatividad de la práctica social del Praedicere.

La relación entre el análisis que mostramos en este documento y la investigación sobre la participación del P* en la práctica del médico internista está en función de los efectos que tienen las variaciones en el corazón para el mantenimiento o provocación de un estado de cuasi-estabilidad en los seres humanos, ya que estas variaciones pueden ser provocadas no solo por motivos propios del funcionamiento del corazón o alguna enfermedad cardiaca sino del sistema en general. Como siguiente momento de la investigación, estamos interesados en comprender el efecto de una perturbación en el corazón, como lo es el marcapasos artificial, en su cuasi-estabilidad.

Por último, consideramos que investigaciones como la nuestra favorecen en el ámbito didáctico a la inclusión de elementos sobre "lo variacional" en otros escenarios, por ejemplo, el escenario médico como el que aquí reportamos. Sobre ello, el contenido de los libros de texto de Cálculo Diferencia e Integral cuando aluden a ejemplos realistas, presentan enunciados provenientes de una matematización de la física clásica bajo los enfoques determinísticos (caída libre, tiro parabólico o movimiento rectilíneo uniforme). En otros casos, si bien emplean modelos no determinísticos como el crecimiento en Biología, estos son reducidos a una aritmética de lo exponencial como la bipartición o más en general e^x. En nuestra opinión, es fundamental impulsar la investigación en Matemática Educativa para tratar con la matemátización de fenómenos no determinísticos que sean cercanos a la realidad de todo ciudadano del siglo XXI, pues ello coadyuva al desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional.

Referencias bibliográficas

Caballero, M. (2012). *Un estudio de las dificultades en el desarrollo del lenguaje y pensamiento variacional en profesores de bachillerato*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. DF: México.

Cantoral, R., Farfán, R., Lezama, J., Martínez, G. (2006). Socioepistemología y representación: Algunos Ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educati*va, Número Especial, 83-102.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento matemático*. Gedisa: Barcelona.

Castellano, C., Pérez, M., Attie, F. (2004). *Electrocardiografía clínica.* Elsevier: Madrid.

Moreno, G. (2014). *Anteproyecto doctoral "Socioepistemología: Matemáticas y Medicina. Elementos para el estudio de principio estrella: $p*$".* Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, IPN.

Moreno, G., Cantoral, R. (2015). Socioepistemología: Medicina y Matemáticas. Elementos para el estudio de principio estrella. En F. Rodríguez y R. Rodríguez (Eds.). *Memoria de la XVII Escuela de Invierno en Matemática Educativa. La Profesionalización Docente desde los Posgrados de Calidad en Matemática Educativa 17*, 59-66. Oaxaca: CIMATES

Pérez-Lescure, J. (2011). Taller de lectura sistemática del electrocardiograma pediátrico o cómo interpretar un electrocardiograma y no perecer en el intento. *Revista Pediatría Atención Primaria Suplemento 20*, 225-233.

Salinas, S. (2003). *Un estudio sobre la evolución de ideas variacionales en los cursos introductorios al cálculo.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. DF: México.

Autores

Gloria Angélica Moreno Durazo; CINVESTAV, IPN. México; gamoreno@cinvestav.mx

Ricardo Cantoral Uriza; CINVESTAV, IPN. México; rcantor@cinvestav.mx

CÓMO LLEGUÉ A SER PROFESOR DE MATEMÁTICAS; NARRACIONES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA DE OMETEPEC, GUERRERO

Magdalena Rivera Abrajan, Lourdes Soto Velásquez, Raúl Salas Vega

Resumen

En este reporte presentamos un avance de una investigación de corte cualitativo que tiene por objetivo estudiar la configuración de la identidad profesional de siete profesores de Matemáticas en servicio, de la ciudad de Ometepec, Guerrero, que en el momento de la investigación se encontraban en proceso de profesionalización. Entendemos a la identidad profesional como colecciones de historia profesional sobre personas. Los datos se obtuvieron de las narrativas profesionales de los profesores y se analizaron a través del análisis tematizado que permitió identificar aquellos temas que fueron cruciales para llegar a ser los profesores que actualmente son. Los temas encontrados fueron Idealización, El papel del trabajo, Actitud frente a ser profesor, El papel de la escuela en su formación, Ruptura de vocación, Proyecto de vida, Aptitud para ser profesor de matemáticas, Percepción propia o de los demás.

Palabras claves: Identidad profesional, Profesor de Matemáticas, Configuración, Narrativas, Experiencias.

Introducción

La formación del profesor de matemáticas es un proceso que involucra elementos en interacción, elementos *formales* como: contenidos y enfoques de los planes y programas de estudio, políticas académicas y normas universitarias; y elementos *informales* como: tipos de conocimiento, competencias, actitudes, valores, contextos del aprendizaje, roles, intereses, etc. (Oliveira 2004, Walshaw, 2004, Brown y McNamara, 2005, 2011). Así, se habla de la cantidad y naturaleza de los conocimientos matemáticos que necesitan saber los futuros profesores para enseñar o de las orientaciones pedagógicas que debe conocer para realizar una planeación o realizar la evaluación de los estudiantes (Ball, Lubienski y Mew-born, 2001). Sin embargo, los profesores se enfrentan a la práctica profesional no sólo con su conocimiento matemático y didáctico, sino también con lo “que son”, es decir, quiénes son, cómo se ven a sí mismos como maestros en su relación con sus futuros estudiantes y frente a los problemas (Ponte & Champa, 2008).

Palmer (1997) argumenta que la buena enseñanza no puede reducirse a la técnica ya que proviene de la identidad y la integridad del profesor. El autor sostiene que la complejidad de la enseñanza tienen tres fuentes importantes: contenido, estudiantes y profesor. Las dos primeras comúnmente estudiadas, la tercera, que considera la más importante y poco estudiada, habla acerca de la parte subjetiva de la persona donde el cómo soy se vuelve elemento primordial del cómo enseño. Por lo tanto, conocerse a sí mismo es tan crucial para la buena enseñanza como conocer a los estudiantes y el tema.

Los estudios sobre la identidad de los profesores es uno de los campos donde más investigaciones, relacionadas con la identidad en el ámbito educativo se han realizado, muchos de los estudios tratan de dilucidar aquellos factores o elementos que están involucrados en la configuración de la identidad de profesor de Matemáticas (Walshaw, 2004; Brown y McNamara, 2011). Una características de la mayoría de las investigaciones es que estudian la identidad en escenarios de una instrucción formal, es decir, han tenido o están siendo formados para ser profesores Matemáticas, sin embargo, una realidad en la educación mexicana es que muchos de los profesores de Matemáticas configuran su identidad en situaciones y contextos en las que las condiciones de entrenamiento, desarrollo y estabilidad para los profesores de Matemáticas no son optimas (Palmér, 2010).

La presente investigación es de carácter exploratorio y toma como línea de desarrollo el estudio de la configuración de la identidad del profesor de matemáticas, con especial atención a las experiencias que han sido fundamentales para la misma.

La pregunta que guía esta investigación es ¿Cómo los relatos reflexivos de un profesor de Matemáticas acerca del proceso que lo llevo a ser profesor, proporcionan evidencia de su identidad profesional?. El objetivo es analizar las narrativas que 7 profesores de Matemáticas de secundaria hacen acerca de las circunstancias que los llevaron a ser profesores de Matemáticas de Secundaria, identificando, por medio de un análisis tematizado, aquellas experiencias fundamentales que nos permitirán comprender la configuración de la identidad profesional docente.

Marco conceptual

La identidad e identidad profesional

En los últimos años, la identidad se ha convertido en un importante campo de la formación docente, esta importancia se asocia a la idea de que la configuración de la identidad del profesor se muestra como la encarnación tanto del conocimiento de las matemáticas y de la enseñanza de las mismas aunado a factores tales como valores, hábitos, normas, disposiciones y, en general, formas de ser un maestro (Ponte & Chapman, 2008) .

Wenger (1998) menciona que la identidad incluye nuestras experiencias y conocimientos, nuestra percepción de nosotros mismos, las percepciones de los otros sobre nosotros, y nuestras percepciones de los demás. Estas percepciones se construyen en nuestra experiencias, a medida que interactuamos con los demás y regula nuestra participación en el grupo. Estas experiencias nos llevan a desarrollar creencias, compromisos e intenciones, ajustada a una comunidad en particular.

Por su parte, Berger y Luckmann (1966) se refieren a la identidad profesional como un proceso de socialización con la profesión, a través del cual el individuo asume los roles, valores y normas del grupo profesional.

Para Sfard y Prusak (2005) la identidad de una persona son las historias y relatos que las personas construyen sobre los demás, las historias son la identidad porque dan cuenta de las decisiones y acciones anteriores de los individuos y proporcionan orientación para sus decisiones presentes y futuras. Por lo tanto, las identidades no solo son representadas, sino también construidas, a través de las historias que la gente dice acerca de si mismos y de sus experiencias. En este sentido, la identidad profesional se pueden detectar a través de texto y el discurso.

Philipp (2007) afirma que los profesores saben, creen, sienten, participan y pertenecen, lo que sugiere que la identidad docente surge como una construcción sociocultural que incluye todos estos aspectos de la vida de los docentes.

Nosotros consideramos la identidad del profesor de Matemáticas como un conjunto de relatos significativos sobre si mismos y en relación a los demás, a través de las cuales se representa como profesor de Matemáticas y sus experiencias adquieren sentido, la identidad profesional de un profesor de matemáticas se expresa en su participación en los procesos de interacción y la colaboración con otros profesores al reflexionar sobre su propia actividad y sobre sí mismos como maestros.

Método

Participante y contexto

En el marco del programa de la Licenciatura en Matemática Educativa de la Unidad Académica de Matemáticas se les ofrece a profesores de Matemáticas en servicio, con perfil diferente o con carreras truncas, a cursar dicha licenciatura otorgándoles una profesionalización y el perfil deseado para las instituciones educativas de nivel secundaria. Los siete profesores participantes se encontraban en el último semestre de la carrera, cinco de ellos son del municipio de Ometepec, Guerrero y dos de localidades cercanas (Tabla 1).

Autodefinición	**Observaciones**
Juana. 3 años de ser profesora de Matemáticas**.** Me considero una persona que lucha por lo que quiere ser hasta lograrlo, como persona soy de carácter fuerte, pero también me gusta servir a quienes me necesitan, como maestra trato de cumplir con el programa de estudios, con mis alumnos estoy dispuesta siempre a ayudarlos aunque ya no sean horas de clases, con mi compañeros me gusta respetarlos para que me respeten.	La profesora Juana trabajó durante 12 años como prefecta y hace apenas tres como profesora de Matemáticas. Desde pequeña soñó con ser maestra de Matemáticas. Trabaja en la Escuela Secundaria Técnica “16 de Octubre”.
Mariela. 3 años de ser profesora de Matemáticas**.** Soy una persona sociable que me gusta convivir, amo a mi familia, soy responsable, soy idealista y siempre busco el lado bueno de las cosas, aunque la mayor parte del tiempo me reservo muchos comentarios, me gusta leer, escuchar a los demás, sin emitir juicios.	Sus padres son profesores, los considera su ejemplo y la motivaron a ser profesionista. Trabaja en la Escuela secundaria técnica “20 de Noviembre”

María del Carmen. 15 años de ser profesora de Matemáticas**.** Me consideró una persona que cada día que amanece aprende cosas nuevas y siempre busco lo positivo a la vida. Responsable, paciente, tolerante, capaz de vencer cualquier obstáculo.	Su gusto hacia las Matemáticas fue a partir de la secundaria, al tener una profesora que enseñaba y explicaba con dedicación y paciencia. Trabaja en la Escuela Secundaria General "Lázaro Cárdenas"
Martín. 18 años de ser profesor de Matemáticas**.** Me defino como un hombre poco serio y responsable. Trato de ser metódico y ordenado en mi trabajo, en la escuela, casa o familia, me gusta respetar, soy muy tolerante, paciente, me cuesta trabajo ser sociable. Intento conseguir mis objetivos con firmeza y esfuerzo.	Estudió Matemáticas porque le parecieron un reto, al tener compañeros de clases que obtenían excelentes calificaciones y él no. Trabaja en la Escuela Secundaria Técnica "16 de Octubre"
Reina. 11 años de ser profesor de Matemáticas**.** Soy de carácter fuerte pero también soy muy sociable, me gusta hacer amistad con personas desconocidas, además soy responsable de mis actos, trato de ser como persona mejor cada día, diario aprendo algo.	Su proyecto de vida era ser ingeniero civil pero por asuntos familiares estudia para ser profesor de primaria. Se le presenta la oportunidad de laborar como administrativo en una escuela secundaria y es ahí mismo donde inicia a cubrir la asignatura de Matemáticas. Trabaja en la Escuela Secundaria General "Cuauhtémoc"
Víctor. 17 años de servicio. Como profesor soy el amigo, guiador de los conocimientos significativos. Me gusta participar, proponer mis ideas y sobretodo cumplir con todo.	Se formó la idea de ser profesor de Matemáticas a raíz de querer imitar a su maestro de clases que le parecía muy bueno dando clases. Trabaja en la Escuela Secundaria General "Cuauhtémoc".
María Luisa. 20 años de servicio. Con mis alumnos me siento identificada, mi acercamiento hacia ellos me ha permitido tener mayor comunicación, permitiéndome apoyar a los alumnos que de alguna manera, tienen problemas de aprendizaje.	Es contador público. Trabaja en la Escuela Secundaria Técnica "Juan del Carmen" Xochistlahuaca, Guerrero**.**

Tabla 1 Perfiles de los profesores participantes

Recolección y análisis de datos

En las ciencias sociales y la investigación educativa ha sido reciente un aumento en el uso de diferentes formas de investigación narrativa, ya que, entre otras cosas, la narrativa no sólo expresa importantes dimensiones de la experiencia vivida, sino que, más radicalmente, media la propia experiencia y configura la construcción social de la realidad, no es sólo una metodología; es una forma de construir la realidad (Bruner, 1986).

Por la conceptualización de identidad que asumimos en esta investigación y para acceder a los relatos que constituyen la identidad de los profesores de matemáticas recurrimos a la técnica autobiográfica profesional, donde se les pide a los profesores que escriban una narración de cómo llegaron a ser profesores de Matemáticas de secundaria. Además, se les pidió su apoyo para la realización de entrevistas a profundidad posteriores a medida que el estudio lo necesitara.

Para el análisis cualitativo de los datos se transcribieron textualmente las narraciones de los profesores y recurrimos a la tematización de las narrativas, según Ely et al. (1991, p.150) un tema puede ser definido como contenido de significado que recorre todas o la mayoría de las evidencias, o como un contenido que, a pesar de ser minoritario, es portador de una fuerte carga emocional o factual.

Para la tematización de las narrativas se realizaron comparaciones de los datos narrativos que disponíamos, sometiendo iterativamente a un proceso de identificación y de análisis de los temas por partes de los autores.

Las temas identificados fueron:

- Idealización.
- El papel del trabajo.
- Actitud frente a ser profesor.
- El papel de la escuela en su formación.
- Ruptura de vocación.
- Proyecto de vida.
- Aptitud para ser profesor de matemáticas.
- Percepción.

Reflexiones finales

En este punto de nuestra investigación solo podemos presentar algunas reflexiones muy generales sobre la configuración de las identidades profesionales de los profesores, con base en la tematización encontrada.

Las identidades profesionales están compuestas por narrativas cambiantes sobre sí mismo, a través de las cuales uno se representa, representa a los demás y sus propias experiencias adquieren sentido, particularmente, los profesores de matemáticas que no son formados para ello, experimentan circunstancias que los llevan a la confrontación de quienes son, que quieren ser y sus metas profesionales futuras, tomando decisiones radicales en su vida personal y profesional.

Los profesores participantes cuando construyeron sus relatos en torno a las experiencias que los lleva a ser los profesores de Matemáticas, lo hacen desde una mirada del presente que rescataba y reconstruía fragmentos del pasado. Su ahora estaba mediado por el recuerdo (la reconstrucción) de lo vivido y era desde esos episodios, en este caso vinculados con sus experiencias y relaciones personales y profesionales desde donde hilvanaban los significados que daban sentido al aprendizaje de su profesión a la configuración de su identidad como profesores de Matemáticas.

Un elemento importante en la asunción del rol de profesor es la parte académica, donde a pesar de los años que han estado como profesores y del reconocimiento de los demás como profesores de Matemáticas ellos no se sienten profesor de Matemáticas, por no tener los estudios adecuados para tal fin, por lo que el regreso a la escuela y la culminación de sus estudios es un elemento que ellos consideran necesario para ser profesores de Matemáticas.

Referencias

Ball, D. Lubienski, S. & Mewborn, D. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problems of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching*, 433-456. Washington, DC: AERA.

Berger, P. y Luckmann, T. (1966). *The social construction of reality: A treatise in the sociology of knowledge*. New York: Anchor Books.

Brown, T y Mcnamara, O. (2005). *New teacher identity and regulative government: the discursive formation of primary mathematics teacher education.* New York: Springer

Brown, T. y McNamara, O. (2011). *Becoming a mathematics teacher. Identity and identifications.* New York: Springer.

Bruner, J. (1986). *Actual minds, possible worlds*. London: Harvard University Press.

Ely, M. Anzul, M. Friedman, T. Garner, D. y Steinmentz, A. (1991). *On writing qualitative research: Living by words*, Londres: The Falmer Press.

Oliveira, H. (2004). Percursos de identidade do professor de Matemática: O contributo da forrnacáo inicial. *Quadrante*, 13(1), 115-145.

Philipp, R. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 257–315. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Ponte, J. & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. *Handbook of International Research in Mathematics Education*.

Palmer, P. (1997) *The courage to teach: Exploring the inner landscape of a teacher's life*. San Francisco Ca.: Iossey-Bass.

Sfard, A. & Prusak, A. (2005). Telling identities: In search of an analytic tool for investigating learning as a culturally shaped activity. *Educational Researcher*, 34(4), 14–22.

Walshaw, M. (2004). Pre-service Mathematics teaching in the context of schools: an exploration into the constitution of identity. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 7, 63-86.

Wenger, E. (1998). *Communities of Practice: Learning, Meaning, and Identity,* 2–3. Cambridge: University Press.

Autores

Magdalena Rivera Abrajan; UAGro. México; magrivab@hotmail.com
Lourdes Soto Velásquez; UAGro. México; love.soto@hotmail.com
Raúl Salas Vega; UAGro. México; rasve@hotmail.com

IMPLEMENTACIÓN DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO FUNCIONAL TRIGONOMÉTRICO

María del Pilar Beltrán Soria, Gisela Montiel Espinosa

Resumen

En este documento presentamos el avance de una investigación cuyo objeto de estudio es el desarrollo del pensamiento funcional trigonométrico. La investigación se basa en la puesta en escena de una secuencia didáctica, fundamentada principalmente en la Socioepistemología, retomando situaciones-problema que demandan del razonamiento covariacional en una actividad de modelación matemática. El diseño tiene el principio instruccional de la resignificación de las propiedades de la función trigonométrica, y el presente avance reporta la fundamentación, el diseño y los datos obtenidos.

Palabras claves: Pensamiento funcional trigonométrico, resignificación, función trigonométrica, investigación basada en el diseño.

Introducción

Esta investigación se está llevando a cabo en el Instituto de Educación Media Superior del Distrito Federal, cuyo programa de Matemáticas busca que:

> …el estudiante perciba la matemática como una ciencia construida a través de los siglos, como algo más que conocimientos acumulados o aplicaciones prácticas, es decir, que el estudiante construya la matemática, que la descubra que invente y que discuta, que construya un método de análisis y razonamiento, que desarrolle su creatividad y explique sus resultados; además de presentar a la matemática no como una serie de reglas fórmulas y algoritmos que el estudiante deba aprender de memoria para luego aplicarlas en la resolución de problemas. (IEMS, 2006, página 3)

La experiencia didáctica reportada en (Beltrán, 2013) mostró la viabilidad de este enfoque, a partir del diseño y organización de una secuencia didáctica basada en una *anidación de prácticas*. Más aún, la investigación mostró que los estudiantes que participaron en dicha experiencia lograron construir, en el sentido de Confrey y Maloney (2007), la funcionalidad trigonométrica a partir de la matematización del movimiento de un péndulo. Desde el diseño didáctico original (Montiel y Buendía, 2013) se busca intencionalmente la resignificación de la función trigonométrica, con el estudio de este movimiento particular, al seno de la matemática escolar, es decir, de aquello que da uso y sentido a la función.

Con esa misma intencionalidad proponemos ahora implementar una nueva secuencia didáctica para estudiar el desarrollo del pensamiento trigonométrico en estudiantes de nivel medio superior, profundizando particularmente en el *acercamiento variacional* al estudio del movimiento, en donde se reconozca que el comportamiento trigonométrico se caracteriza y se distingue de otros comportamientos (algebraicos o trascendentes) por su variación y sus variaciones sucesivas, esto es, por cómo cambia y cómo cambian sus cambios. Para esta secuencia se retoma el problema de Moore (2014), sobre la rueda de la fortuna:

"The Ferris wheel problem. Consider a Ferris wheel with a radius of 36 feet that takes 1.2 minutes to complete a full rotation. April boards the Ferris wheel at the bottom and begins a continuous ride on the Ferris wheel. Sketch a graph and determine a formula that relates the total distance traveled by April and her vertical distance from the bottom of the Ferris wheel (assume this is at ground level)"

Pero a diferencia de éste no nos preguntamos si el estudiante tiene ya desarrollados los razonamientos cuantitativo y covariacional, sino cómo pueden desarrollarse durante la secuencia, considerando los elementos de la funcionalidad-trigonométrica que proponen Montiel y Buendía (2013). Incorporamos, además, elementos didácticos de Moore y Laforest (2014) y de Ôzgun-Kara, Edwards y Meagher (2013), así como del trabajo de Beltrán (2013).

Fundamento teórico

Funcionalidad Trigonométrica

Se trata de una propuesta teórica que describe los elementos de desarrollo del pensamiento matemático relacionado con la noción escolar de función trigonométrica, construida particularmente para las funciones seno y coseno; y establece que el estudiante construye dicha funcionalidad cuando:

i. Estudia lo trigonométrico desde un *acercamiento variacional al movimiento oscilatorio*, en donde se reconozca que el comportamiento trigonométrico se caracteriza, y se distingue de otros comportamientos (algebraicos o trascendentes) por su variación y sus variaciones sucesivas, esto es, por como cambia y cómo cambian sus cambios.

ii. Identifica una unidad mínima de análisis del comportamiento, que le permite predecir. Al trabajar con objetos periódicos, lo que favorece la predicción es una distinción entre el *se repite* y el cómo *se repite.*

iii. Reconoce *lo acotado* del comportamiento en el análisis de los datos respecto del experimento.

iv. Hace uso de la *unidad de medida* adecuada a la experiencia y la reconoce, en la relación tiempo-distancia, en la representación gráfica de los datos obtenidos del experimento.

Uso de gráficas

Retomamos el planteamiento de Buendía (2012) sobre el *uso de la* gráfica, para referirse a ésta como un objeto matemático que es necesario conocer para lograr su construcción, su utilización como modelo o su interpretación. La autora afirma que la gráfica antecede a la función misma, y que no es necesario conocer la complejidad o precisión propias de la estructura matemática para poner un conocimiento en uso. Articulamos este planteamiento con los usos *Elemento interactivo y Estructura matemática* que reportan Lacasta y Pascual (1998). Para estos autores, el uso como elemento interactivo se da cuando el gráfico funciona como medio de control de la comunicación y de determinación de otro objeto. Este funcionamiento tiene lugar cuando la respuesta a un problema se obtiene mediante la relación efectiva con el gráfico. Por otro lado, el uso como estructura matemática le da a los marcos gráfico y algebraico un uso equilibrado poniendo en juego nuevos saberes.

La articulación asumirá la graficación como una forma de construcción y tratamiento del universo de formas gráficas asociadas a las funciones, en donde se represente, transforme, genere, comunique, documente y refleje información gráfica, numérica, geométrica, algebraica y/o analítica. La visualización en actividad de graficación se entenderá entonces como la producción del que construye (el universo de formas gráficas y la información que de la actividad se desprenden) y el conjunto de argumentos orales y escritos que conforman la explicación y solución a una situación problema. Ejemplo de estas articulaciones las encontramos en las *operaciones gráficas* que proponen Cantoral y Montiel (2014).

Método

Se prepararon hojas de trabajo con la secuencia didáctica, dividida en tres actividades, que incluían el espacio suficiente para los procedimientos, los dibujos, las respuestas y los argumentos verbales solicitados para dar respuesta a las preguntas de cada actividad. Al finalizar una actividad se les presentaban las hojas de la siguiente.

La experiencia se llevó a cabo dentro de un curso de Precálculo en la Preparatoria Iztapalapa 1 del IEMS, para que esta actividad fuera parte del curso se decidió tomar como base el libro Matemáticas Preuniversitarias de Salinas, Alanís, Pulido, Santos, Escobedo y Garza (2007), en el cual se presentan situaciones que buscan la construcción de nuevos significados a ciertas nociones matemáticas relacionadas con el estudio del movimiento y cambio, por lo que se integra coherentemente con la secuencia didáctica.

Población y escenario escolar

La implementación de la secuencia se llevó a cabo con 23 estudiantes de dos grupos, en el año 2014, y con 28 estudiantes de dos grupos, en el año 2015. Ambas experiencias se llevaron a cabo durante el curso de Matemáticas IV, al que le antecede el curso de Matemáticas III donde se abordan funciones y ecuaciones cuadráticas.

La secuencia didáctica

El diseño de la secuencia se organizó en actividades, cada una con tareas distintas.

1. **Actividad 1**.Construcción de círculos con diferentes radios y medición de los arcos de circunferencia con hilo o estambre (Fotografía 1), para obtener una relación con la cual calcular la longitud de los arcos subtendidos por distintos ángulos centrales (Fotografía 2)
2. **Actividad 2**. Construcción gráfica, con espaguetis, de la distancia de cualquier punto sobre la circunferencia al eje horizontal
3. **Actividad 3**. Resolver el problema de la rueda de la fortuna (tomado de Moore, 2014). Esta actividad explora la relación, en el moviemiento de una rueda de la fortuna de 9 metros de radio, entre la distancia recorrida de un pasajero con su altura al suelo en el transcurso de un paseo que tarda 1.2 minutos en dar una vuelta completa. A continuación, una descripción general de las tareas que solicita la actividad:
   - **T1.** Se solicita que representen 4 diferentes situaciones mediante dibujos cuando se ha dado una fracción de vuelta

- **T2.** Se pide que se marque la distancia recorrida (arco de circunferencia) y la distancia al suelo, suponiendo que la parte inferior de la rueda se encuentra a cero metros del suelo, en diferentes colores sobre los dibujos de la parte 1.
- **T3.** Se pide obtener el ángulo central al que se encuentra la persona que ha dado las fracciones de vuelta dibujadas.
- **T4.** Se pide contestar una serie de preguntas usando los datos del problema y los dibujos realizados. Las preguntas se relacionan al número de vueltas y las distancias al suelo alcanzadas y el número de veces que se alcanza cada distancia durante el paseo.
- **T5 y T6.** Se pide ubicar aproximadamente los puntos donde se alcanza la altura máxima, donde toca el suelo y donde alcanza los 9 metros de altura en un plano con el eje horizontal indicando las vueltas y el eje vertical la distancia al suelo.
- **T7.** Se pide trazar un círculo a una escala conveniente que representa la rueda de la fortuna y una recta que represente el suelo.
- **T8.** Se pide usar el círculo de la parte 7 para obtener en algunas fracciones de vuelta distancias recorridas y distancias al suelo.
- **T9.** Se pide graficar dr contra ds, y se pide llenar una tabla donde se sacan razones de cambio de ds/dr, para los datos de la parte 8.
- **T10.** Se pide llenar una tabla que va cada 15° donde se indique la parte de vuelta, la distancia recorrida, la distancia al suelo y la razón de cambio, para finalmente graficarla en un plano.

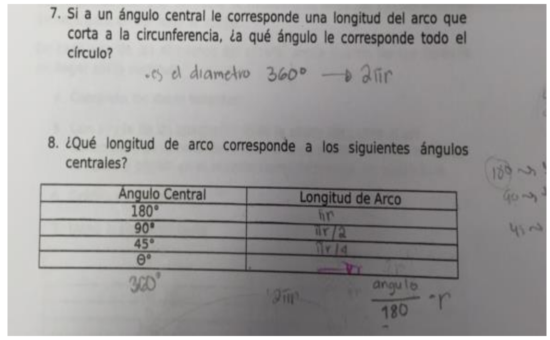
Experiencia de aula, para la recolección de datos

Contamos con un total de 9 horas de registro en video y las hojas de trabajo de los 4 grupos. Presentamos en este extenso una primera descripción de la experiencia, por actividad, con algunas de las evidencias más representativas de la dinámica de trabajo que pretendíamos lograr con la secuencia. Actualmente nos encontramos organizando los datos, para hacer el análisis de cada una de las actividades, a la luz de nuestros referentes teóricos. Aunado a ello, la evidencia empírica nos mostró la necesidad por incorporar referentes teóricos como el *razonamiento proporcional*, para el análisis de ciertos momentos de la secuencia.

Actividad 1

Los estudiantes lograron obtener una forma de medir la longitud de arco, guiados por tareas que incluían manualidades (Fotografía 1) y cálculos (Fotografía 2).

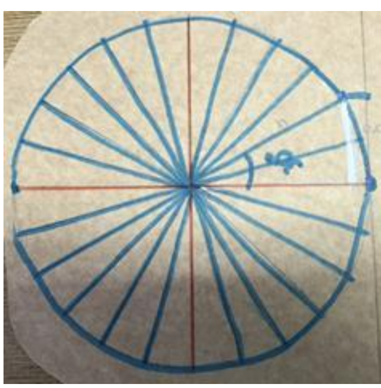
Fotografía 1

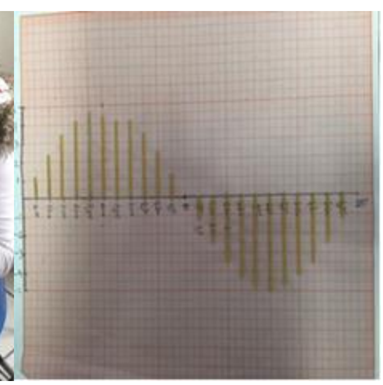


Fotografía 2

Actividad 2

Los estudiantes construyeron la gráfica cortando espaguetis del tamaño de la distancia de cada punto sobre la circunferencia al eje horizontal como lo indica la Fotografía 3, posteriormente los pegaron en una hoja milimétrica como aparece en la Fotografía 4, cuando tenían la gráfica y obtuvieron la medida de los espaguetis con una regla, se les preguntó ¿cómo calcularían ese valor sin necesidad de medirlo con la regla?, posteriormente se les solicitó que identificaran un punto sobre la circunferencia y dibujaran un triángulo con uno de sus lados como el radio y otro la altura hacia el diámetro del círculo, como se muestra en la Fotografía 3. Se les preguntó, ¿qué tipo de triángulo se forma?, ¿qué nombre reciben sus lados? y se realizó un recordatorio de razones trigonométricas, con lo que obtuvieron las diferentes distancias a partir de la razón seno.

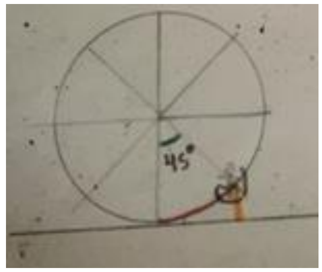




Fotografía 3 **Fotografía 4** **Fotografía 5**

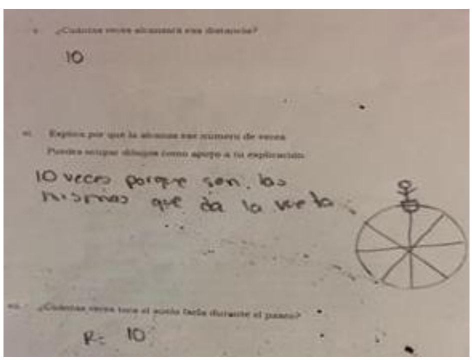
Actividad 3

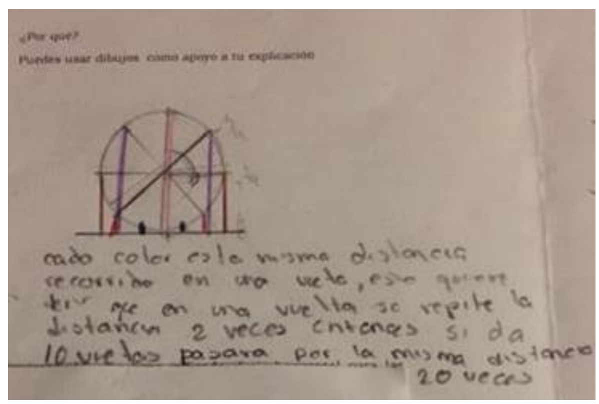
En la actividad 3 los estudiantes primero dibujaron diferentes situaciones que representaban dónde se encontraba una persona en la rueda de la fortuna en diferentes posiciones y se les solicitó marcar de diferentes colores las distancias recorrida (arco del círculo) y las distancias al suelo, así como el ángulo central correspondiente en cada caso, como se observa en la Fotografía 6. Posteriormente se les hicieron una serie de preguntas como, si el paseo dura 12 minutos ¿cuántas vueltas daría una persona en el paseo?, ¿qué distancia recorre en una vuelta?, ¿qué distancia recorre en todo el paseo?, ¿Cuál es la mayor distancia al suelo que alcanza durante el paseo una persona?



Fotografía 6

Posteriormente se les hacen preguntas como ¿cuántas veces alcanza la mayor distancia al suelo durante el paseo y por qué?, ¿cuántas veces toca el suelo durante el paseo y por qué?, se les pregunta además, si así como alcanzan varias veces esas distancias, ¿las otras alturas se repiten? y ¿por qué?, Fotografía 7 y 8.

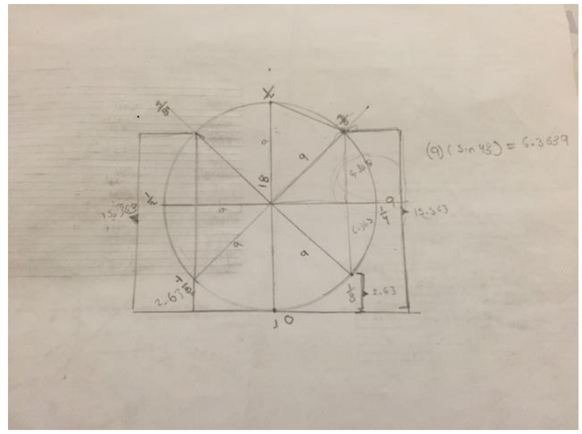




Fotografía 7 **Fotografía 8**

Finalmente se le pide realizar diferentes gráficas con los datos que primero aproximan y posteriormente calculan, Fotografía 9, los estudiantes desarrollaron diferentes formas de calcular las distancias, algunos con la razón coseno, como aparece en la fotografía.

Fotografía 9



Fotografía 10

Resultados. Hacia el análisis de los datos

Los estudiantes que llegaron al final de las actividades y presentaron sus resultados son un total de 35 y de sus registros e interacciones podemos identificar ya los elementos de la funcionalidad trigonométrica.

- Acercamiento variacional al movimiento, los estudiantes dan evidencia de este acercamiento cuando analizan cómo va cambiando la distancia recorrida durante una vuelta y observan que cada determinado ángulo la distancia recorrida aumenta proporcionalmente hasta completarla; por otro lado al analizar cómo cambia la distancia al suelo observan que no se da este mismo comportamiento, sino que aumenta hasta llegar a 18 y posteriormente disminuye. Por lo que al sacar la razón de cambio obtienen valores positivos y valores negativos y son capaces de explicar el por qué tanto en la gráfica obtenida como lo que le sucede a una persona en el juego de la rueda de la fortuna.
- Periodicidad, cuando los estudiantes identifican que en una vuelta de la rueda de la fortuna hay distancias que se repiten dos veces por vuelta y distancias que se obtienen una sola vez, por lo que en todo el paseo algunas se repiten en número de vuelta que dura el paseo, como la distancia máxima y mínima al suelo y el resto se repiten el doble del número de vueltas que se dan en un paseo.
- Lo acotado, al momento en que los estudiantes se dan cuenta que las distancias al suelo a las que se pueden encontrar durante el paseo en la rueda de la fortuna van de 0 a 18 metros del suelo.
- Unidad de medida, para identificar un instante en el recorrido de una vuelta, inician por indicar en qué parte de vuelta se encuentra la persona y después le asocian un ángulo central a esa parte de vuela en grados y algunos lo identifican con la fracción de π recorrida.
- Sin embargo, para hacer el análisis de cada uno en las actividades-tareas que propone la secuencia utilizaremos el modelo de anidación de prácticas de Cantoral (2013), en los niveles de *acción* y *actividad*, para identificar la(s) *práctica(s) socialmente compartida(s)* que se logra(n) con este diseño.

Reflexiones finales

En el estudio de esta intervención didáctica se trabajó con estudiantes del cuarto semestre con un diseño que demandaba la participación interactiva de los estudiantes, se pudo observar que un cambio de centración de los objetos (la matemática escolar) a las prácticas facilitó el desarrollo de una forma particular de pensamiento matemático y la participación interactiva de los estudiantes, con los saberes matemáticos, a partir de su quehacer, sus producciones, sus argumentaciones, sus explicaciones. Aquellos estudiantes que decidieron realizar las actividades lograron mostrar sus resultados a partir de sus explicaciones y argumentaciones, basadas éstas en su participación durante la experiencia. Sin embargo, hubo estudiantes que no trabajaron las actividades como se presentaron, si no que copiaron lo que hicieron sus compañeros. Estos estudiantes no lograron presentar resultados por falta de argumentos, eso provocó que algunos de ellos pidieran una nueva oportunidad y trabajaran en un periodo posterior al semestre, logrando finalmente lo que se buscaba. Consideramos que el cambio de actitud y dinámica de clase dependen de ese cambio de centración, de los objetos a las prácticas; es decir, que el rediseño del discurso matemático escolar provoca cambios en las relaciones didácticas, pedagógicas y escolares del sistema didáctico. Esto, planteamos, puede configurar lo que Cantoral (2013) denomina aula extendida y, en ese sentido, es posible el rediseño del discurso matemático escolar desde el aula, bajo ciertas condiciones.

Referencias

Beltrán, S. (2013). El papel de la modelación en el desarrollo del pensamiento funcional trigonométrico en estudiantes del nivel medio superior. Tesis de maestría no publicada, Instituto Politécnico Nacional, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada Unidad Legaria. México.

Buendía, G. (2012). El uso de las gráficas cartesianas. Un estudio con profesores. *Educación Matemática*, 24(2) 9-35. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40525862001

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2014). *Precálculo, un enfoque visual*. México: Pearson Educación.

Confrey, J. y Maloney, A. (2007). A theory of Mathematical modeling in technological settings. En Artigue, M., Hodgson, B. R. (Eds.), *Modelling andaplications in Mathematics Education Vol*. (10), 57-67. U.S.: Springer.

Instituto de Educación Media Superior (2006), Programa de estudio de Matemáticas. (p.29). México, D.F.: IEMS.

Lacasta, E. y Pascual, J.R. (1998). *Las funciones en los gráficos cartesianos*. Madrid: Editorial Síntesis S.A.

Montiel, G. y Buendía, G. (2013). Desarrollo del pensamiento funcional trigonométrico. En G. Buendía, M. Ferrari y G. Martínez (Eds), Resignificación de funciones para profesores de matemáticas, 169-205. México: Ediciones Díaz de Santos.

Moore, K. C. (2014). Quantitative reasoning and the sine function: The case of Zac. *Journal for Research in Mathematics Education*, 45(1), 102-138.

Moore, K. C., & LaForest, K. R. (2014). The circle approach to trigonometry. *Mathematics Teacher 107*(8), 616-623.

Ôzgun-Kara, A., Edwards, M. & Meagher M. (2013). Spaghetti sine curves. Virtual Enviroments for reasoning an sense making. *Mathematics Teacher 107*(3), 180-187.

Salinas, P., Alanís, J.A., Pulido, R., Santos, F., Escobedo, J.C., & Garza, J.L. (2007). *Matemáticas Preuniversitarias: Significado de nociones y procedimientos*. México, D.F: Trillas.

Autores

María del Pilar Beltrán Soria; CICATA-Legaria. IPN. México; pilar.beltran@iems.edu.mx
Gisela Montiel Espinosa; CIVESTAV. México; gmontiele@cinvestav.mx

EXPERIENCIAS EMOCIONALES ASOCIADAS A LAS MATEMÁTICAS DE ESTUDIANTES DE NIVEL MEDIO SUPERIOR EN SITUACIÓN DE RECURSE: UN ESTUDIO CON ENTREVISTAS DIARIAS

María E. Valle-Zequeida, Gustavo Martínez-Sierra

Resumen

En este trabajo se reporta los avances de una investigación cualitativa, que tiene por objetivo conocer las experiencias emocionales relacionadas a las matemáticas de estudiantes de nivel medio superior cuando están en un curso inter semestral de recuperación. El trabajo se realizó con 12 alumnos inscritos a un curso inter semestral de Matemáticas II. La recolección de datos fue a través de entrevistas diarias durante el tiempo que duró el curso. Para el análisis de las narrativas de los estudiantes, nos basamos en la teoría de de la estructura cognitiva de las emociones (Ortony, Clore, y Collins, 1996) en donde se especifican las condiciones desencadenantes de cada emoción y la valoración que se le da a cada una de éstas. Algunos de los hallazgos obtenidos fueron que la técnica de entrevistas diarias ofrece una visión más amplia al integrar la variable del tiempo en los resultados y permite observar la dinámica de las experiencias emocionales de los alumnos durante el proceso del curso.

Palabras Clave: Experiencias emocionales, Situación desencadenante, Entrevistas diarias

Introducción

Desde hace más de tres décadas, dentro de la matemática educativa han surgido investigaciones donde se pone en relieve un componente más allá de lo puramente cognitivo que influye en los estudiantes y en su desempeño académico. Este componente de gran importancia en el aprendizaje de las matemáticas es el dominio afectivo (McLeod, 1992; Gómez- Chacon, 2000; Goldin, 2000, 2006). Las aportaciones presentadas en McLeod (1988) fueron la punta de lanza para el estudio del dominio afectivo en la matemática educativa. McLeod estableció tres indicadores del dominio afectivo: creencias, actitudes y emociones. Más tarde DeBellis y Goldin (1997) propone otro más que son los valores. (Tomado de Gomez-Chacon, 2002)

Dentro del componente afectivo, las emociones son las menos exploradas, en Lewis (2013) se menciona que una de las razones por lo que no se ha hecho es que parece más difícil construir una sólida base teórica para las emociones que para otros constructos afectivos. Por otra parte, aquellas que han abordado el descriptor “Emoción”, en su mayoría se han centrado en la intensidad de las emociones en actividades matemáticas no rutinarias, quedando sin explorar las actividades rutinarias que a menudo suceden en las aulas. De esta manera se resalta la necesidad de investigación centrada en las emociones para conocer las experiencias matemáticas rutinarias (Hannula et al. 2010). Además, en las investigaciones sobre emociones se ha notado que es necesario ir más allá de la visión simplista de distinguir entre emociones positivas (placer, serenidad) y emociones negativas (miedo, asco, tristeza, la ira). (Hannula, Pantziara, Wæge y Schlöglmann, 2010)

De esta manera, en éste trabajo realizamos un estudio cualitativo donde se abordó el componente afectivo "Emociones" en actividades rutinarias con alumnos de nivel medio superior. Se utilizó la teoría de la estructura cognitiva de las emociones (Ortony, Clore y Collins, 1988) la cual nos proporcionó una estructura teórica consistente para la interpretación de las experiencias emocionales de los alumnos. En este trabajo consideramos la siguiente pregunta:

¿Cuáles son las experiencias emocionales relacionadas a las matemáticas, de alumnos de nivel medio superior que se encuentran en un recurse de matemáticas?

La teoría de la estructura cognitiva de las emociones

Las teorías cognitivas de la emoción atribuyen importancia a la interpretación que las personas hacen ante determinadas situaciones. En los modelos cognitivos sobre la emoción se destaca que la emoción surge fundamentalmente como consecuencia de la valoración. Las emociones son detonadas por situaciones desencadenantes y a las interpretaciones cognitivas asociadas a ellas. La teoría Cognitiva de las Emociones de Ortony, et al. (1988) (Teoría OCC en adelante) proporciona un enfoque sistemático y detallado sobre la generación de las emociones. En ella se analiza la influencia de la cognición a la experiencia emocional pues su enfoque está basado en el supuesto de que las emociones ocurren como resultado de interpretaciones cognitivas. La emoción en sí es una experiencia subjetiva que los seres humanos pueden comunicar con palabras, lo que implica que las emociones son fenómenos reportables a través del lenguaje. El modelo de la teoría OCC supone que hay tres aspectos del medioambiente que determinan nuestras cogniciones. El supuesto es que hay tres aspectos principales del mundo o de cambios en el mundo, que uno puede tomar en consideración, a saber, acontecimientos, agentes y objetos. Cuando nos concentramos en los acontecimientos, lo hacemos porque estamos interesados en sus consecuencias, cuando nos concentramos en los agentes, lo hacemos en razón de sus acciones y cuando nos concentramos en los objetos, estamos interesados en ciertos aspectos de ellos, o propiedades que se les atribuyen, en tanto objetos (Ortony et al., 1998, p. 22) eventos, agentes y objetos.

En este sentido las emociones se consideran un tipo de reacción, que comienza con una fuerte reacción positiva o negativa a las consecuencias de un evento, a las acciones de un agente o algunos aspectos de un objeto. "[las emociones son] reacciones de valencia a eventos, agentes u objetos, la naturaleza particular de las cuales viene determinada por la manera como es interpretada la situación desencadenante" (Ortony et al, 1998, p. 13).

En Ortony et al. (1998) se establece como criterios de valoración: metas para evaluar los acontecimientos; normas para evaluar la acción de los agentes; y actitudes para evaluar los objetos. Las tres grandes clases de emociones son: 1) Emociones basadas en acontecimientos: elaboran consecuencias ante acontecimientos deseables o indeseables respecto de las metas. 2) Emociones de atribución: atribuyen responsabilidad a los agentes sobre sus acciones en función de normas. 3) Emociones de atracción: basadas en actitudes con respecto a los objetos. (Véase Tabla 1)

Clase	**Grupo**	**Tipos (*ejemplo de nombre*)**
Reacciones ante los acontecimientos	VICISITUDES DE LOS OTROS	Contento por un acontecimiento deseable para alguna otra persona (*feliz-por*)
		Contento por un acontecimiento indeseable para alguna otra persona (*alegre por el mal ajeno*)
		Descontento por un acontecimiento deseable para alguna otra persona (*resentido-por*)
		Descontento por un acontecimiento indeseable para alguna otra persona (*quejoso-por*)
	BASADAS EN PREVISIONES	Contento por la previsión de un acontecimiento deseable (*esperanza*)
		Contento por la confirmación de la previsión de un acontecimiento deseable (*satisfacción*)
		Contento por la refutación de la previsión de un acontecimiento indeseable (*alivio*)
		Descontento por la refutación de la previsión de un acontecimiento deseable (*decepción*)
		Descontento por la previsión de un acontecimiento indeseable (*miedo*)
		Descontento por la confirmación de la previsión de un acontecimiento Indeseable (*temores confirmados*)
	BIENESTAR	Contento por un acontecimiento deseable (*jubilo*)
		Descontento por un acontecimiento indeseable (*congoja*)
Reacciones ante los agentes	ATRIBUCIÓN	Aprobación de una acción plausible de uno mismo (*orgullo*)
		Aprobación de una acción plausible de otro (*aprecio*)
		Desaprobación de una acción censurable

		de uno mismo (*autorreproche*) Desaprobación de una acción censurable de otro (*reproche*)
Reacciones ante los objetos	ATRACCIÓN	Agrado por un objeto atractivo (*agrado*) Desagrado por objeto repulsivo (*desagrado*)

Tabla 1. Tipos de emociones de acuerdo con la teoría de la estructura cognitiva de las emociones Ortony et al. (1988).

Metodología

La investigación es cualitativa centrada en conocer las experiencias emocionales que tienen un grupo de alumnos en situación de recurse en la asignatura de matemáticas II.

Contexto

El trabajo se realizó en una escuela preparatoria del Distrito Federal en México denominado Instituto de Educación Media Superior (IEMS) creado con la finalidad de satisfacer la demanda de educación Media Superior en las zonas de bajos recursos y falta de oportunidades educativas y laborales. En esta institución no hay calificaciones, es decir cuando los alumnos concluyen los cursos se les pone la leyenda "cubre" cuando el alumno está apto para pasar al siguiente semestre o en su defecto "no cubre" cuando aún le falta algunas cosas por aprender. El curso regular tiene una duración de un semestre y es la primera opción para cubrir la asignatura. El inter semestre es un periodo de dos semanas entre los cursos regulares y pueden inscribirse aquellos estudiantes cuyos avances revelen que el estudiante aún requiere apoyo para desarrollar los aprendizajes necesarios para seguir con las asignaturas subsecuentes, en este curso los alumnos deben de hacer algunas actividades de manera autónoma que la maestra les asigna de acuerdo a las competencias que no han cubierto para que puedan cubrirlas.

Participantes

Las entrevistas se llevaron a cabo con 12 estudiantes que cursaban un curso inter semestral de matemática II. Las edades oscilan entre los 17 y 19 años. Los alumnos inscritos a este curso se consideran de bajo rendimiento en matemáticas y en algunos casos, se permitió su inscripción aún sin posibilidades de cubrir la asignatura con la finalidad de dar continuidad en su trabajo académico.

Recolección de datos

Para esta investigación se recurrió a la técnica de entrevistas diarias que ofrecen un seguimiento de las experiencias emocionales durante el tiempo que duró el curso. De esta manera al finalizar cada sesión del curso, la maestra realizaba una entrevista a los alumnos; estas entrevistas fueron grabadas. El curso tuvo nueve sesiones y no en todos los casos los alumnos dieron entrevistas.

Las preguntas realizadas durante las entrevistas fueron las siguientes: 1)Di tu nombre completo y la fecha del día de hoy, 2)¿Por qué asististe hoy al inter semestre?/ ¿Por qué no asististe a la sesión pasada?, 3)¿Qué actividades realizaste el día de hoy en el inter semestre de matemáticas?, 4)¿Por qué realizaste esas actividades?, 5)¿Qué emociones o sentimientos experimentaste hoy en el inter semestre de matemáticas?, ¿qué te hizo sentir así?, 6)Cuenta las experiencias positivas y negativas que hayas vivido hoy en la clase de matemáticas, ¿por qué fueron experiencias positivas y negativas?7) ¿Te sentiste motivado o desmotivado hoy en la clase de matemáticas?, ¿por qué te sentiste así?

Análisis de datos

La totalidad de las entrevistas diarias fueron transcritas. Inicialmente leímos todas las transcripciones con la finalidad de acercarnos al lenguaje de los alumnos, tomando notas de aspectos que consideramos importantes para discutir en las sesiones de trabajo durante el análisis. Posteriormente en las narrativas de los estudiantes se identificaron extractos en donde expresaban situaciones desencadenantes de emociones. Siguiendo la tipología de emociones de la teoría OCC se hizo una clasificación de estos extractos, identificando en ellos tres aspectos: 1) situaciones desencadenantes, 2) las frases emocionales y 3) la valoración de las situaciones desencadenantes. En donde la valoración se toma con respecto a una estructura integrada de metas (lo que se desea lograr), normas (diferentes leyes, reglas, regulaciones y rendimientos morales, legales y convencionales) o actitudes (son disposiciones a que las cosas agraden o desagraden). Estas clasificaciones se discutieron en varias sesiones llevadas a cabo por los autores de este trabajo y otros colegas.

A continuación presentamos a manera de ejemplo, narrativas que surgieron de algunas de las entrevistas de un alumno (Eduardo) y el procedimiento que seguimos durante el análisis de estas. Para fines de organización, en los extractos de las narrativas que se presentan, se utiliza la convención de ***negrita y cursiva*** a aquellas frases en las narrativas donde se exprese situaciones que generen emociones, y *cursivas* a aquellas frases o palabras que expresen emoción. Además cada extracto esta etiquetado con la inicial del nombre del alumno, el día y secuencia en la que fueron expresados, de esta manera el extracto ED3-2 corresponde a la entrevista de Eduardo del día 3 y a la situación desencadenante numero dos encontrada en las narrativas.

Experiencias emocionales de Eduardo

Día 3

El extracto ED3-1 se asoció a emociones negativas de decepción, el *no entender* interfiere en la meta de cubrir el curso. En el extracto ED3-2, se menciona experiencias positivas de satisfacción y negativas de decepción y miedo, podemos observar que la meta de cubrir el curso para Eduardo está en función de ***entender***. El extracto ED3-3 está asociada a emociones positivas de satisfacción, ***el resolver dudas***, lo acerca más a su meta final de cubrir el curso.

> ED3-1: Las emociones y sentimientos que tuve fueron**...** *me sentí un poco presionado* ***porque no entendía bien las actividades*** [decepción] que se tenían que realizar.
>
> ED3-2: Las experiencias positivas fueron que del teorema de Pitágoras ***ya no me quedaron más dudas*** sobre eso, me quedó más claro. Y negativas fueron que las actividades que estoy realizando actualmente ***se ven un poco difíciles y no entiendo muy bien sobre el tema***.

> ED3-3: *Me sentí motivado* ***porque resolví todas las dudas*** que tenía sobre el teorema de Pitágoras. No me sentí para nada desmotivado

Día 4

En el extracto ED4-1 vuelve a aparecer emociones positivas por ***aprender***, pero además menciona que eso sucedió a pesar de que los problemas están difíciles, lo cual sugiere que la satisfacción es mayor.

En los extractos ED4-2 y ED4-3 se mencionan emociones positivas de satisfacción; estas se desencadenan por la situación de ***aprender***. De manera general el día de Eduardo en el curso estuvo lleno de emociones positivas, y es que no encontró obstáculos en la meta de cubrir el curso. Asumimos que para Eduardo ***entender*** **y** ***aprender*** no son sinónimos, ya que el primero corresponde a ***entender*** el discurso de la maestra en su explicación de los temas y ***aprender*** a un proceso subsecuente a este.

> ED4-1: Las emociones y sentimientos que experimenté fueron de... *me sentí bien****, a pesar de que los problemas están difíciles***, ***sí logré entenderle más o menos*** como se hacen.

> ED4-2: Las experiencias fueron positivas porque *aprendí sobre las líneas paralelas* y ***aprendí sobre los problemas que se están dejando***. Negativas no tuve ninguna experiencia.

> ED4-3: *Me sentí motivado* porque estoy ***aprendiendo*** algo nuevo

Día 5

En los tres extractos, él alumno expresa emociones positivas de satisfacción, ante la situación de *haber entendido los problemas*. El extracto ED5-2 logre ***aprender más o menos*** se asocia a emociones de satisfacción, sin embargo menos intensas que si lo aprendiera completamente.

> ED5-1: Las emociones o sentimientos que experimenté fueron que *me sentí bien****, no se me hizo tan difícil y logré entenderle al problema.***

> ED5-2: Experiencias positivas fue que ***logré aprender más o menos cómo se resuelven*** este tipo de problemas y no tuve experiencias negativas.

> ED5-3: Me sentí ***motivado porque sé que estoy aprendiendo algo nuevo*** y no me sentí desmotivado.

Así como mostramos en este ejemplo, fueron analizadas cada una de las narrativas expresadas por los estudiantes.

Avances de resultados

La investigación aún está en proceso y para en este trabajo presentamos las experiencias emocionales que tuvieron tres de los doce participantes. En la tabla 2 mostramos las experiencias que tuvieron durante los nueve días que duro el curso, no todos los alumnos fueron los nueve días y por consecuencia no dieron entrevistas; para este caso en la celda correspondiente se ha puesto un guion. En la parte superior de la tabla se expresan las emociones en su forma abreviada y en la inferior están detalladas las emociones y las situaciones desencadenantes correspondientes. De esta manera, la abreviatura "S1" corresponde a una emoción de tipo *satisfacción* y la situación que la desencadena en *aprender o comprender*

Día	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Eduardo	S7	S7,S2	S2,S2	S1,S7	S7,S3	S7, S2	S2, S3, S7	S8, S2 E4	S1, S2
		D9	D1						
Día	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Iván	AG4	S2,,S1	__	__	S1, S4	S1, AG4	S2,AG 4	__	S1,S2, AG4
	M4	D1			D1				D10
Día	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Marijose	E4, AL3	S1, S1	__			S1, S1, S1	S1		S3, S5, S8
				D1,D1, C5	D1,D1, D1		D1, D1	D1, D4, D1	

Situaciones desencadenantes

Agrado (AG)
AG4 [hacia aprender matemáticas] cuando aprendo matemáticas
Esperanza (E)
E4 Cuando termino actividades pienso (cubriré la materia/voy a avanzar/pasaré a otro nivel)
Satisfacción (S)
S1 Entender /comprender
S2 Poder resolver los (ejercicios/problemas/actividades/dudas/examen)
S3 Terminar los (ejercicios/problemas/actividades/temas)
S4 (Avanzar/pasar a otro nivel)
S5 Poder estudiar
S7 Aprender
S8 Que el examen no se haga difícil

Congoja (C)
C5 (Estar enferma/sentir algún malestar físico)
Miedo (M)
M4 Estar en el curso inter semestral
Decepción (D)
D1 No (entender /comprender)
D4 No poder (resolver /hacer) (los ejercicios /problemas/actividades)
D9 Que aún no me queden claro los temas
D10 Que se me haga difícil
Alivio (AL)
AL3Lograr terminar (los problemas/actividades/ejercicios/ecuaciones) cuando pensé que no lo haría

Tabla 2. Experiencias emocionales de algunos de los alumnos del inter semestre

Algunas cosas que podemos observar en el caso de Eduardo, es que las emociones que tuvo oscilaban entre decepción y satisfacción. Las situaciones que generan experiencias emocionales son "poder resolver dudas", "Aprender", "Entender", "No aprender".

También observamos que la valoración que le asigna a las situaciones desencadenantes de emoción está en términos de la meta *Aprender*. El caso de Iván es muy parecido al de Eduardo ya que predominan las emociones de tipo satisfacción y decepción, sin embargo no en todos los casos la situación que desencadena estas emociones en Iván son las mismas que en Eduardo. De manera general observamos que también las situaciones desencadenantes de emociones en Iván son en términos de las meta *Aprender*. Por otra parte Marijose presenta una experiencia emocional más diversa, además en diferentes momentos del día se presentó una misma situación que desencadeno emoción en ella. La valoración que Marijose da a las situaciones desencadenantes está en términos de la meta *Entender*.

Conclusiones

De los hallazgos encontrados, observamos la técnica de entrevistas diarias ofrece una visión más amplia al integrar la variable del tiempo en los resultados y permite observar la dinámica de las experiencias emocionales de los alumnos durante el proceso del curso. Pese a que no hemos concluido con el proceso de análisis de todas las narrativas, podemos mencionar que en las experiencias emociones presentadas predominan las emociones del tipo *Satisfacción* y *Decepción* y que la valoración que los alumnos le dan a la mayoría de las las situaciones que desencadenan emociones en ellos están en términos de la meta "Aprender" y "Entender". Además, de los ejemplos presentados dos de ellos corresponden a alumnos que no cubrieron el curso, de esta manera observamos que no existen características específicas entre las experiencias emocionales de los alumnos que establezcan diferencias o similitudes entre los alumnos que cubrieron a los que no cubrieron el curso.

Referencias bibliográficas

DeBellis, V. a., & Goldin, G. a. (2006). Affect and Meta-Affect in Mathematical Problem Solving: a Representational Perspective. *Educational Studies in Mathematics*, *63*(2), 131–147.

Hannula, M. S. (2006). Motivation in Mathematics: Goals Reflected in Emotions. *Educational Studies in Mathematics*, *63*(2), 165–178.

Hannula, M. S., Pantziara, M., Wæge, K., & Schlöglmann, W. (2010). Introduction multimethod approaches to the multidimensional affect in mathematics education. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 28–33). Lyon, France.

Goldin, G. A. (2000). Affective pathways and representation in mathematical problem solving. *Mathematical Thinking and Learning*, *2*(3), 209–219.

Gómez-Chacón, M. (2000) Matemáticas emocional: Los afectos en el aprendizaje Matemático. Narcea. España.

Gómez-Chacón, M, (2002) Afecto y Aprendizaje Matemático: Causas y consecuencias de la interaccione emocional. En J. Carrillo (ed.) Reflexiones sobre el pasado, presente y futuro de las Matemáticas. Universidad de Huelva: Huelva.

Lewis, G. (2013). Emotion and disaffection with school mathematics. *Research in Mathematics Education*, *15*(1), 70–86.

McLeod, D. B., & Adams, V. M. (Eds.) (1989). *Affect and Mathematical Problem Solving: A New Perspective*. New York: Springer Verlag.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization, En Douglas A. Grows (ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, Macmillan, NCTM New York, pp. 575-596.

Ortony, A., Clore, G.L. & Collins, A. (1988). *The cognitive structure of emotions*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Autores

María E. Valle-Zequeida; CIMATE, UAGro. México; mevzy@hotmail.com
Gustavo Martínez-Sierra; CIMATE, UAGro. México; gmartinezsierra@gmail.com

PROPUESTA PARA EL REFORZAMIENTO DE CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS BÁSICOS APOYADA EN ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA

Sofía Elena Galván Hernández, Carmen Sosa Garza

Resumen

El contar con universidades que ofrezcan una educación de calidad es indispensable para el desarrollo de nuestro país, por lo que es importante que formen profesionistas de éxito en un amplio sentido de la palabra. Por otra parte los aspirantes traen consigo ciertas deficiencias que no fueron cubiertas en sus anteriores años de estudio, pero es injusto que debido a eso no consigan entrar a la universidad, por ello algunas universidades implementan programas de inducción, con los cuales se busca dar una oportunidad a los estudiantes apoyándolos en su nivelación. El presente trabajo pretende diseñar una propuesta de material para la asignatura de Matemáticas del semestre cero de la Facultad de Ingeniería de la UAQ, el cual estará enfocado en la matemática recreativa, la resolución de problemas, la formalización y el uso de recursos tecnológicos, con el fin de apoyar a la nivelación del desempeño académico de los estudiantes.

Palabras clave: Semestre cero, Nivelación académica, Estrategias de enseñanza.

Introducción

La universidad es un hecho necesario en toda sociedad, ya que la generación de conocimientos, su diseminación y utilización, es un factor clave para el desarrollo y competitividad de las naciones. La Conferencia Mundial sobre Educación Superior organizada por la UNESCO en 1998 afirma que "la educación superior y la investigación forman hoy en día la parte fundamental del desarrollo cultural, socioeconómico y ecológicamente sostenible de los individuos, las comunidades y las naciones" (UNESCO, 1998).

La educación superior tiene como objetivo principal formar individuos competentes y capaces de responder a las necesidades y preocupaciones de la sociedad (Ibáñez, 2004; Irigoyen, Jiménez, & Acuña, 2004). Por ello las instituciones de educación superior tienen un interés doble por conocer el nivel académico con que llegan los estudiantes que egresan del bachillerato. Por un lado, se desea seleccionar a los jóvenes que están más capacitados para estudiar una carrera profesional y que tienen mayores probabilidades de éxito académico, por el otro, se quiere diagnosticar las habilidades y conocimientos con que llegan con el fin de detectar deficiencias en su formación académica y tomar las medidas correctivas pertinentes (Backhoff & Tirado, 1992).

En teoría se desea que al llegar a la universidad los estudiantes cuenten con las habilidades y conocimientos necesarios para el éxito en su carrera universitaria, pero la práctica demuestra que muy rara vez el alumno llega a la Universidad dominando las materias establecidas en los programas del Bachillerato (Rodríguez & Zuazua, 2002). La formación matemática con que los estudiantes acceden a la universidad resulta, en la mayoría de los casos, un factor decisivo en el éxito o fracaso del primer año de sus estudios (Huidobro, Méndez, & Serrano, 2010). Es por ello que es de vital importancia poner atención en esta problemática. Una solución a corto plazo que proponen algunas universidades para remediar las deficiencias académicas con que llegan los estudiantes, es la implementación de cursos propedéuticos o mediante otras medidas correctivas como la implementación de un semestre remedial.

Por otra parte, en México, como en otras naciones, las matemáticas ocupan un lugar central en los planes de estudio de los distintos niveles de educación. Los currículos de matemáticas tienen como propósito desarrollar las habilidades de razonamiento en los estudiantes para que sean capaces de resolver problemas en forma creativa, y no el de aplicar algoritmos y procedimientos rutinarios. Es decir, se desea que los estudiantes desarrollen las habilidades y actitudes que faciliten la adquisición del conocimiento de la disciplina (Larrazolo, Backhoff, Rosas, & Tirado, 2010). Muchas son las estrategias de enseñanza que se han ido trabajando con el propósito de apoyar al desarrollo de habilidades, tales como la introducción de tecnologías en el aula (como el uso de ordenadores, calculadoras electrónicas, entre otras), la resolución de problemas, la matemática recreativa, entre otras.

El presente trabajo tiene como hipótesis que los aspirantes a la facultad, en el caso particular de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro, que no lograron el promedio de 7 que se tiene como requisito, pero quedaron dentro de un rango de 6.0-6.9, traen consigo una serie de carencias que no cubrieron en sus años anteriores de estudio y es por ello que se espera que los alumnos bajo dichas circunstancias mejoren, logrando así su nivelación académica y por tanto el ingreso a la universidad.

El objetivo que se pretende con este trabajo es realizar un material enfocado en la matemática recreativa, la resolución de problemas, demostraciones, justificaciones y el uso de algunos recursos tecnológicos, como el uso del software Geogebra, el cual se incorpore a la asignatura de matemáticas del semestre cero con el fin de apoyar a la nivelación de su desempeño académico.

Marco teórico

Sobre las competencias matemáticas

En varios países se ha experimentado un cambio en las formas de concebir y organizar la educación de las matemáticas, adoptando un enfoque que se denomina “competencias matemáticas”. Esto ha provocado varias reformas curriculares en los distintos niveles educativos (Espinoza L. , 2009). Pisa (OCDE, Marco de la Evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias Matemáticas y Lectura, 2006) define la competencia matemática como:

> *“Competencia matemática es la capacidad que tiene un individuo de identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados y utilizar e implicarse en las matemáticas de una manera que satisfaga sus necesidades vitales como un ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo.”*

A continuación se presenta las competencias que propone PISA (OCDE, Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencia y Solución de Problemas, 2003):

a) Pensar y razonar
b) Argumentación
c) Comunicación
d) Construcción de modelos
e) Formulación y resolución de problemas
f) Representación
g) Empleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico
h) Empleo del material y herramientas de apoyo

Se observa que las competencias matemáticas se relacionan en gran medida con la teoría de resolución de problemas y a nuestro parecer también existe una notable relación con la matemática recreativa, por su carácter reflexivo, analítico, y a su vez por fomentar la creatividad, el reto y motivación necesarias para el desarrollo del razonamiento y habilidades matemáticas en los estudiantes.

Matemática recreativa

Se entiende como matemática recreativa a todo aquel conjunto de actividades, juegos y pasatiempos matemáticos que regularmente se plantean más como “curiosidades” que como conocimientos matemático verdadero (Espinoza, González, & Monge, 2002). Las recreaciones matemáticas, en comparación con los juegos, se acercan más a los habituales problemas de matemáticas ya que tienen un carácter individual, el cual los acerca más a los habituales problemas de matemáticas (Calderón, 2006). Además las actividades recreativas son divertidas, curiosas, en algunas ocasiones relacionadas con fenómenos cotidianos, pueden ofrecer resultados inesperados, y se realizan con materiales fáciles de conseguir, lo que muestra la accesibilidad que tienen para la implementación de dichas recreaciones en el aula de clases.

Algunos ejemplos de actividades recreativas son los acertijos mentales, numéricos y geométricos, paradojas y juegos recreativos, rompecabezas geométricos y aritméticos, criptogramas, cuadrados mágicos, sudokus, el tangram, origami, entre otros.

Conseguir estimular a los estudiantes para que tengan una actitud positiva y receptiva ante las matemáticas es un factor importante en el proceso educativo y a ello puede contribuir la realización de actividades de ciencia recreativa, de ahí que esta sea una de las ventajas principales del empleo de recreaciones en el aula. Otras de las ventajas de la matemática recreativa es que despierta el interés y deseo en los estudiantes por conocer más acerca de la ciencia que estudian, también puede contribuir a mejorar las actitudes de los alumnos y profesores en el proceso enseñanza-aprendizaje (García, 2011). Calderón (2006) afirma que la idea principal que gira alrededor del uso de recreaciones y juegos en el proceso enseñanza- aprendizaje de las matemáticas es: *“aprender matemáticas de manera creativa, divertida, interesante y motivante.”* La ventaja de mayor relevancia para nosotros en este trabajo es el hecho de que la matemática recreativa es un recurso didáctico para el aprendizaje, fortalecimiento y desarrollo de capacidades, habilidades y conocimientos matemáticos.

Las competencias que desean desarrollarse o fortalecerse con la Matemática recreativa son: Pensar y razonar, Comunicación, Construcción de modelos, Formulación y resolución de problemas y Representación.

Uso de la tecnología

En la actualidad la sociedad nos demanda nuevas formas de enseñar y aprender, donde las tecnologías de la información y comunicación (TIC) proporcionen espacios más motivantes y creativos, que favorezcan la construcción de conocimientos y aprendizajes más significativos (Cova, Arrieta, & Judith, 2008).

Algunas de las ventajas más significativas del uso de la Tecnología en el aula de clases es el aumento de la atención, motivación y participación de los estudiantes, el apoyo a la comprensión de los temas, la enseñanza y aprendizaje de los objetivos planteados, el aumento de la satisfacción, motivación y autoestima del docente, el desarrollo de la creatividad, facilita el trabajo colaborativo y el autoaprendizaje, entre otras. Además el docente que usa la tecnología en la enseñanza dispone ahora de más recursos para usar y compartir en clase y dispone de más oportunidades para investigar, realizar actividades colaborativas y correcciones. Por su parte el uso de la computadora dentro o fuera del aula de clases va constituyendo una eficaz herramienta de trabajo, un valioso recurso informativo y un interesante soporte para la enseñanza.

Dentro de las TIC, el software educativo, tales como Geogebra, Derive, Minitab, entre otros, es considerado un medio virtual interactivo que favorece el proceso de enseñanza-aprendizaje. Cova, Arrieta y Judith (2008) lo definen de forma general como *"cualquier programa computacional que sirve de apoyo al proceso de enseñar, aprender y administrar."* Domingo y Marqués (Domingo & Marqués, 2011) mencionan que el uso de software educativo representa una actividad más compleja que las clases tradicionales pero sus ventajas en la motivación, creatividad, diversidad de formatos de información, entre otras, los convierten en herramienta de alto impacto, ayudando en el fortalecimiento de las capacidades y habilidades de docentes y estudiantes.

Las competencias que desean desarrollarse o fortalecerse con el uso de la tecnología son: Pensar y razonar, Argumentación, Representación y Empleo del material y herramientas de apoyo.

Resolución de problemas

La resolución de problemas es una parte esencial de la formación matemática de los estudiantes, ya que les permite experimentar la potencia y utilidad de la matemática en situaciones de la vida cotidiana, y por otro lado permite el desarrollo del pensamiento lógico-matemático (Díaz, 2010).

Para investigadores como Gaulín (Gaulín, 2001), un problema no es un ejercicio rutinario para practicar, sino más bien son situaciones donde es necesaria la reflexión, la búsqueda, la investigación, para resolver un problema no es suficiente aplicar un algoritmo o una fórmula, se debe pensar y definir una estrategia, por lo que no hay una respuesta automática y rápida cuando se tiene un problema. Un problema puede servir para explorar una nueva idea, consolidar un problema, reforzar conocimientos anteriores y puede ir antes o después de la teoría. Para él la resolución de problemas es una herramienta magnífica que da la oportunidad a los estudiantes de desarrollar habilidades intelectuales, habilidades de autonomía, de pensamiento, estrategias, las cuales les ayudarán a poder enfrentarse a situaciones complejas que puedan presentárseles en el mundo que viene.

En particular en este trabajo se considera el hecho de que al adquirir el alumno estas habilidades será capaz de resolver satisfactoriamente los problemas que se le presenten en el desarrollo de su carrera profesional debido a las deficiencias que traen consigo de sus años anteriores de estudio y más aún le serán de gran ayuda en su desempeño profesional.

Las competencias que desean desarrollarse o fortalecerse con La Resolución de problemas son: Pensar y razonar, Argumentación, Comunicación, Construcción de modelos, Formulación y resolución de problemas y Empleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico.

La formalización

La demostración en la clase de matemáticas presenta una gran diversidad de formas, apareciendo en los distintos niveles educativos a través de variados tipos de argumentación. El pensamiento deductivo se va construyendo lentamente a lo largo de las etapas escolares, sin embargo esto no significa que se logre realmente su construcción de manera sólida (Crespo, 2005).

Según Martínez (Martínez, 2001) la finalidad que tiene la demostración en clase de matemáticas es que apoye a los alumnos para que sean capaces:

- Usar modelos, propiedades y relaciones para elaborar y comprobar conjeturas	- Juzgar la validez de un argumento
- Formular contraejemplos	- Justificar sus respuestas y modelos resolutivos
- Seguir argumentos lógicos	- Construir argumentos válidos

A su vez a través de las demostraciones y argumentaciones lógicas es posible evitar el aprendizaje mecánico de fórmulas y la aplicación de las mismas de forma rutinaria. La consideración de las demostraciones como un tipo más de problemas a resolver hace que los alumnos comprendan que sólo se trata de procedimientos necesarios para la resolución de problemas y no vean a la demostración como algo únicamente para los matemáticos. Además los distintos tipos de argumentación permiten que los alumnos adquieran el dominio de formas de razonamiento que no solamente apliquen en las demostraciones en el aula sino que les permitan enriquecer su manera de razonar ante problemáticas que les surjan durante o después de su carrera profesional (Crespo, 2005).

Por otra parte es importante recalcar que todos los símbolos utilizados en matemáticas son necesarios para la perfecta construcción de ideas, de manera que la sustitución de alguno de ellos por otro diferente, cambiaría totalmente el significado. Es decir, todas y cada una de las “palabras” matemáticas tienen un significado concreto y de ahí la importancia de conocer el lenguaje matemático y utilizarlo de forma correcta tanto por parte del docente como de los alumnos (Martín, Paralera, Romero, & Segovia, 2009).

Además se sabe que el estudio de las asignaturas de matemáticas requiere un esfuerzo continuo de los alumnos que se enfrentan a ellas con grandes deficiencias de conocimiento con respecto a la lecto-escritura del lenguaje matemático, lo que dificulta el proceso de enseñanza-aprendizaje de las mismas, ya que implica la imposibilidad de comprensión de conceptos básicos y necesarios de la asignatura. Los estudiantes son capaces de resolver problemas mecánicamente pero no saben razonar, y ello a consecuencia de que no saben "leer". A su vez el desconocimiento del lenguaje matemático, unido al desinterés por aprenderlo, impide a los estudiantes expresar sus conocimientos de una forma clara y precisa, por ello es necesario hacer entender a los estudiantes que la única forma correcta de comunicación en Matemáticas es el lenguaje matemático (Martín, Paralera, Romero, & Segovia, 2009).

Las competencias que desean desarrollarse o fortalecerse con el uso de una mayor formalización son: Pensar y razonar, Argumentación, Comunicación, Construcción de modelos, Formulación y resolución de problemas y Empleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico.

Método

La realización de dicho proyecto se dividirá en etapas.

- Etapa 1: Se pretende realizar el Protocolo de Tesis para tener la pauta para iniciar el proyecto de tesis.
- Etapa 2: Se analizará el temario del curso de Matemáticas del semestre cero con el fin de decidir que herramienta didáctica se utilizará en cada tema, tales como la matemática recreativa, la resolución de problemas, las demostraciones y justificaciones, el planteamiento de actividades en el campus virtual o el uso de software.
- Etapa 3: Se recolectará información para los antecedentes y marco teórico de la tesis.
- Etapa 4: Se revisarán actividades didácticas realizadas con anterioridad por diversos autores con el fin de tener bases para el diseño de las actividades.
- Etapa 5: Se procederá a escribir el marco teórico, antecedentes y justificación del proyecto de tesis.
- Etapa 6: Se diseñarán las actividades para el material que se propondrá para el semestre cero.

Resultados esperados

Como resultado de este trabajo se obtendrá un material completo para el curso de Matemáticas del semestre cero enfocado en la matemática recreativa, la resolución de problemas, el uso de las demostraciones, justificaciones y el uso de algunos recursos tecnológicos, como el uso del software Geogebra, el cual quedará abierto para su aplicación posterior en el curso de matemáticas de dicho semestre remedial, para observar y poder medir la eficiencia y/o debilidades de dicho material.

Se espera que con dicho material se logre apoyar a la nivelación académica de los estudiantes y a su vez se desea impulsar el desarrollo o fortalecimiento de habilidades y competencias necesarias para un buen desempeño académico y de utilidad para cualquier carrera así como para su vida cotidiana.

Reflexiones

Como reflexión se observa que el semestre cero es una opción para cubrir algunas de las deficiencias de los estudiantes que buscan un lugar en la carrera de su elección, así mismo este semestre los apoya a reafirmar su interés en la carrera que seleccionaron y en el caso de los estudiantes que deciden cambiar su elección, el haber cursado el semestre cero les puede ser de gran ayuda en cualquier carrera que ellos decidan cursar.

Con este trabajo se desea que, además del contenido de la materia de Matemáticas del semestre cero, se impulse el desarrollo de habilidades y competencias en los estudiantes, las cuales se piensa que son necesarias para un buen desempeño académico y no solamente de utilidad para la carrera de su elección sino también para su vida cotidiana.

Consideramos que al contar con bases sólidas, habilidades y competencias, el estudiante se vuelve más independiente y esto promueve el autoaprendizaje por parte de ellos, por ejemplo se considera que un estudiante al tener un problema y no contar con las bases necesarias para su resolución, al poseer habilidades y competencias se sentirá con la capacidad de afrontarlo, de analizarlo a profundidad, de plantear diferentes estrategias, de emplear la creatividad para sugerir caminos por los cuales intentar llegar a la solución, resultando todo esto de gran ayuda para resolver el problema que se le había presentado en un principio.

Referencias

Backhoff, E., & Tirado, F. (1992). Habilidades y conocimientos básicos del estudiante universitario hacia estándares nacionales. *Revista de la Educación Superior, Vol. XXII, No. 3. México: Asociación*.

Calderón, D. (2006). La calculadora electrónica, la matemática lúdica y la matemática recreativa como apoyo para el aprendizaje de las matemáticas en el bachillerato. *Tesis (Mtro. en Docencia de las Matemáticas) - Universidad Autónoma de Querétaro. Facultad de Ingeniería* .

Cova, Á., Arrieta, X., & Judith, A. (2008). Revisión de modelos para evaluación de software educativos. *Redalyc*, *7*(1), 94-116.

Crespo, C. C. (2005). La importancia de la argumentación matemática en el aula. *Revista de la Sociedad Argentina de la Educación Matemática*, 23-29.

Díaz, D. (2010). Sistema de ecuaciones y resolución de problemas: Una propuesta de enseñanza y aprendizaje. *Memorias III REPEM*.

Domingo, M., & Marqués, P. (2011). Aulas 2.0 y uso de las TIC en la práctica docente. *Comunicar*, 169-175.

Espinoza, G., González, G., & Monge, A. (2002). De la matemática recreativa a la matemática formal: Una herramienta didáctica para la enseñanza de la geometría en sétimo año.

Espinoza, L. (2009). *Análisis de las competencias matemáticas en NB1. Caracterización de los nivbeles de complejidad de las tareas matemáticas.* Universidad de Santiago de Chile: Proyecto FONIDE.

García, R. (2011). Ciencia recreativa: un recurso didáctico para enseñar deleitando. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias 8 (Núm. Extraordinario), 370-392., 2011*.

Gaulín, C. (2001). Tendencias actuales de la resolución de problemas. *Revista SIGMA. No. 19*, 51-63.

Huidobro, J. A., Méndez, M. A., & Serrano, M. L. (2010). Del Bachillerato a la Universidad: las Matemáticas en las carreras de ciencia y tecnología. *Aula Abierta 2010, Vol. 38, núm. 1. pp. 71-80 ICE. Universidad de Oviedo*.

Ibáñez, C. (2004). La planeación del currículo universitario basado en competencias conductuales. . *En: J.J. Irigoyen & M. Jiménez, Análisis funcional del comportamiento y educación* , 141-158.

Irigoyen, J., Jiménez, M., & Acuña, K. (2004). Análisis de la comprensión desde una perspectiva funcional. *En: J.J. Irigoyen & M. Jiménez, Análisis funcional del comportamiento y educación*, 141-158.

Larrazolo, N., Backhoff, E., Rosas, M., & Tirado, F. (2010). Habilidades básicas de razonamiento matemático de estudiantes mexicanos de educación media superior. *Congreso Iberoamericano de Educación*.

Martín, A., Paralera, C., Romero, E., & Segovia, M. (2009). Mejora de la compresión del lenguaje matemático mediante una acción tutorial. *XVII Jornadas ASEPUMA.*

Martínez, Á. (2001). *La demostración en matemática. Una aproximación epistemológica y didáctica.* Almería: Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

OCDE. (2003). Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencia y Solución de Problemas.

OCDE. (2006). Marco de la Evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias Matemáticas y Lectura.

Rodríguez, R., & Zuazua, E. (2002). Enseñar y aprender matemáticas: del Instituto a la Universidad . *Revista de Educación del MEC, nº 329 (2002), pp. 239-256.* .

UNESCO. (1998). Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (1998). . *Conferencia Mundial sobre Educación Superior.* . Paris: UNESCO.

Autores

Sofía Elena Galván Hernández; UAQ. México; sofy_egh18@hotmail.com
Carmen Sosa Garza; UAQ. México; carsosagmail.com

ESTADO ACTUAL DE LA INVESTIGACIÓN ALREDEDOR DE LA SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER

Fabián Wilfrido Romero Fonseca, Rosa María Farfán Márquez

Resumen

La investigación que se presenta tiene por objetivo abordar la Serie Trigonométrica de Fourier (STF) de manera sistémica, desde una perspectiva Socioepistemológica. Pretendemos hacer un diseño de ingeniería didáctica para resignificar la STF partiendo de un análisis preliminar exhaustivo. En este avance de investigación ofreceremos los antecedentes del proyecto, con el fin de dar una visión general de los resultados de investigación realizados en matemática educativa alrededor de la STF.

Palabras clave: Serie Trigonométrica de Fourier; Ingeniería Didáctica; Socioepistemología.

Introducción

La enseñanza del cálculo en el nivel superior ha sido motivo de múltiples investigaciones en Matemática Educativa, dentro del cálculo la STF es uno de los temas primordiales, pues este fue un punto de quiebre en el desarrollo del análisis matemático, y en la evolución del concepto de función como lo conocemos hoy en día.

Por otra parte la STF es el estadío más avanzado de las funciones trigonométricas (Montiel, 2005), por lo que es necesario que estás estén construidas como objeto en los estudiantes, es decir, que puedan ser susceptibles de manipulación, para lo cual es necesario el tránsito entre los diferentes registros de representación, donde el registro gráfico y el numérico cobrarán gran importancia, lo que nos permite formular una posible hipótesis de investigación: para significar la Serie Trigonométrica de Fourier se requiere de un ambiente fenomenológico distinto a la determinación del estado estacionario, para lo cual se precisa que las funciones trigonométricas estén construidas como objeto matemático entre los estudiantes.

Con este diseño de intervención se espera cerrar un ciclo de investigaciones dentro de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa proporcionando un producto de la investigación para el trabajo en el aula basado en la construcción social del conocimiento y con ello proponer un rediseño para el discurso matemático escolar vigente.

Marco Teórico y Antecedentes

Las STF es un tema fundamental en cursos avanzados de ingeniería, en estas asignaturas se busca que las matemáticas brinden una base sólida para la formación de los futuros ingenieros (Rodríguez, 2009). Además la STF ha “tenido gran influencia en el desarrollo de la teoría de funciones reales de una variable real, comparable sólo con las series de potencias en la teoría general de funciones” (Farfán, 1986, pág. 1). En el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, diversos estudios se han preocupado por el abordaje de la STF, estas investigaciones se han fundamentado en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, las cuales han seguido una aproximación sistémica para la construcción social del conocimiento, mediante la articulación de cuatro componentes: la naturaleza epistemológica, la dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y la dimensión didáctica (Cantoral, 1999).

El trabajo que se presenta corresponde a los antecedentes para un diseño de Ingeniería Didáctica enfocado al abordaje de la STF, por lo que gracias a la cantidad numerosa de trabajos alrededor del objeto se busca dar cuenta, de manera integradora, de los siguientes aspectos acerca de la STF: El problema de la cuerda vibrante como antecedente de la STF (Farfán, 1986; Ulín, 1984), la determinación de la fenomenología intrínseca del objeto matemático "determinación del estado estacionario" (Farfán, 1994; 2012; Marmolejo, 2006); y las nociones físicas y matemáticas relacionados con la STF como lo son la actividad de modelación (Morales, 2003), la noción de calor (Morales, 2010), la visualización matemática de la STF (Rodríguez, 2009), la hipótesis de periodicidad (Vásquez, 2006), la convergencia de la STF (Moreno, 1999).

Diversos estudios en Matemática Educativa se han preocupado por el abordaje de las series de Fourier con la finalidad de mejorar los procesos de aprendizaje vía la enseñanza y que así las matemáticas brinden una base sólida para la formación de los futuros profesionales (Rodríguez, 2009). Es así como esta investigación se interesa, principalmente, por aquellos acercamientos a las series de Fourier que den cuenta de su génesis y de las nociones que se encuentren alrededor del trabajo con las mismas.

Acerca del estado estacionario:

Este apartado está enfocado en las investigaciones que dieron cuenta de la génesis de la serie de Fourier relacionado con la determinación del estado estacionario, así como el problema de la conducción de calor como ambiente fenomenológico que dio paso al surgimiento de las series de Fourier, como lo reporta Farfán (1994; 2012).

Un primer acercamiento al trabajo de Fourier lo hace Ulín (1984) en sus tesis de maestría *"Análisis histórico-crítico de la difusión de calor: el trabajo de Fourier"* donde discute la solución del problema de transmisión de calor entre cuerpos disjuntos haciendo una analogía con el problema de la cuerda vibrante en su caso discreto, luego realiza el mismo análisis haciendo el salto hacia lo continuo, concluyendo que hacer el salto de lo discreto a lo continuo resulta "tan complejo" porque el análisis que se requiere en cada uno es completamente distinto, hecho que provoca que sea imposible separar el modelo matemático del problema físico.

Al respecto Farfán (1986) nos muestra que D. Bernoulli, al resolver el problema de la cuerda vibrante, utiliza argumentos físicos para decir que la forma inicial de la cuerda se puede expresar como una serie trigonométrica. En contraparte:

> "Fourier nos muestra que la solución matemática es acorde con la situación física, pero la demostración se inserta en la matemática misma sin alusión a argumentos que no pertenecen a ella. Así se da la separación entre la Física y las matemáticas que desde la antigüedad caminaban estrechamente ligadas una de la otra". (Farfán, 1986, pág. 67)

Es decir, se da una ruptura entre el modelo matemático y el problema físico, aunque el primero siempre responde al segundo, las argumentaciones utilizadas son propias del área de las matemáticas. Para esto Fourier hace uso de un alto dominio de todo el aparato algebraico, razón por la cual Morales (2003) considera a Fourier un "modelador experto" y analiza su obra titulada *Memoire sur les Températures du Globe Terrestre*, para comprender los razonamientos de este científico y las implicaciones físicas y matemáticas que tiene el estudio del calor, donde se hace notar que:

> …"la trasposición didáctica a la que inevitablemente los conceptos son sometidos antes de su inclusión en la escuela, ha dividido el trabajo de Fourier en algunos aspectos puramente físicos y otros puramente matemáticos hasta desproveerlo de todos los aspectos desde los cuales estos aspectos surgieron, convirtiéndolos en algunos casos en herramientas puramente matemáticas". (Morales, 2003, pág. 58)

Se vislumbra así el hecho de que las herramientas brindadas por la escuela no son suficientes para hacer una modelación matemática como la que requiere cualquier fenómeno relacionado con las series de Fourier, es decir con la determinación del estado estacionario.

En su investigación, Morales (2010) analiza la ambigüedad en el concepto de calor y da una caracterización del pensamiento físico-matemático, en lo que resalta "El pensamiento físico usa en repetidas ocasiones al pensamiento matemático, únicamente para darle formalidad o para comunicarlo, pero no lo usa para argumentar" (Morales, 2010, pág. 177). Esto indica que no hay una retroalimentación de la matemática hacia el problema físico, pero esto se debe a que comprender el concepto de calor representa una tarea cognitiva de alto nivel, tal y como se ha reportado:

> …"este concepto físico no es producto de la primer experiencia sensible; baste decir que la humanidad conoce, requiere y manipula el calor desde tiempos remotos, en tanto que su estudio científico inicia en el siglo XIX, poco después de la publicación de la *Mecánica Celeste* de Laplace. Es decir, se ha estudiado la naturaleza del espacio que circula el globo terrestre antes de dar cuenta de un fenómeno vital para la vida humana. Ello no es gratuito, la abstracción requerida para la adquisición del concepto físico involucrado representa una tarea cognoscitiva de las más complejas". (Farfán, 2012, pág. 270)

Por lo que el ambiente fenomenológico en el que surgió no parece ser el medio propicio para llevar la serie de Fourier al aula, ya que este resulta ser más complejo que la serie misma, esto en contradicción con lo que expone Muro (2000) en su tesis de maestría busca significar la serie de Fourier mediante una contextualización (Matemática en Contexto) cercana al ingeniero químico, la transferencia de masa, donde se apoya en la hipótesis de que la matemática en contexto es un medio ideal para la enseñanza de las matemáticas.

Acerca de las series y su convergencia:

Farfán (2012) plantea que la consideración del estado estacionario marca una ruptura epistémica, ya que se traslada el problema de calcular la suma de una serie a determinar su convergencia, ante esto Flores (1992) basado en su análisis epistemológico alrededor del trabajo de Cauchy sobre los criterios de convergencia, hace un montaje experimental con el objetivo de saber si operar con los términos de una serie es un mecanismo natural para conocer su convergencia, a lo cual concluye que "No es natural operar con los términos de una serie [numérica] para determinar si esta converge o diverge" (Flores, 1992, pág. 208).

Por su parte, Albert (1996) encuentra que para superar algunos obstáculos epistemológicos relacionados con las series como el infinito, serie infinita, convergencia de series, entre otros; se debe acercar al contexto del profesional, para dar significado al objeto matemático, esto se desprende también de la investigación de Farfán (2012) pues indica que deben estudiarse diversos ambientes fenomenológicos cercanos al contexto del profesional.

Ante el problema del flujo de calor Marmolejo (2006) indica que primero se debe conocer la condiciones de contorno que permiten que un proceso de transferencia de calor tenga lugar y que esto conduce necesariamente a un estado estable (estado estacionario), esto lo vislumbró a través de la experimentación con estudiantes utilizando una simulación (por computadora) del problema del calentamiento de una barra metálica e indica que esto podría dar paso a comprender la convergencia de la serie de Fourier.

Otros aspectos relacionados con las series de Fourier:

En esta sección interesan aquellas investigaciones que tratan de nociones u objetos matemáticos relacionados con las series de Fourier, como lo son la periodicidad, la visualización de la STF y la convergencia de la misma.

Vásquez (2006) se interesa por el rol que desempeña la hipótesis de periodicidad para la STF, por lo que da cuenta de cómo el carácter periódico, presente en el discurso matemático escolar, para el cálculo de una serie de Fourier no estuvo presente en su génesis histórica, ya que en la *Théorie Analytique de la Chaleur* las generalizaciones son para intervalos de longitud finita y no sobre todo $\mathbb{R}$, además al hacer un montaje experimental indica que:

> …"la periodicidad es una argumentación que no se ha construido en los alumnos. . . El procedimiento que siguen para la resolución de problemas no toma en cuenta la periodicidad; esto es, la periodicidad no es obstáculo para resolver un problema, ya que si la función es periódica o no, ellos calculan la serie de Fourier. Sin embargo, en los cuestionarios la hipótesis de periodicidad surge de manera casi natural". (Vásquez, 2006, pág. 62)

Con esto se presenta la hipótesis de periodicidad como un obstáculo de tipo didáctico, que no afecta el cálculo de la STF, pero si a la argumentación de los estudiantes respecto a poder calcular la serie de cualquier función, esto debido al discurso matemático escolar predominante.

Por otra parte, Rodríguez (2009) se enfoca principalmente, en la visualización matemática presente en el trabajo de Fourier.

> …"independiente del contexto físico en el que se halla el trabajo de Fourier, él "visualiza matemáticamente", trata de dar un sentido y significado al análisis de sus resultados, en un principio justifica

> físicamente pero posteriormente la justificación se sitúa en el plano matemático". (Rodríguez, 2009, pág. 34)

Con base en esta idea Rodríguez aplica un diseño experimental, enfocándose principalmente en la visualización matemática, observa que los estudiantes a quienes aplicó el diseño tienen carencias en la comprensión de la noción de función, con ausencia de interacción entre los diferentes registros (gráfico y algebraico), específicamente trabajan las series de Fourier de forma algorítmica, sin reflexión en el proceso, la memoria es su principal herramienta de aprendizaje, recomienda que un diseño de situación debe considerar el trabajo en los diferentes registros de representación, pues esto favorecería la comprensión de los objetos matemáticos y potenciar el pensamiento matemático en el estudiante (Rodríguez, 2009).

Siguiendo esta idea el trabajo de Moreno (1999) utiliza un ambiente físico-geométrico que le permite superar el obstáculo epistemológico llamado principio de permanencia de Leibniz, el cual permitió al estudiante "construir una función periódica discontinua, como límite de las sumas parciales de la serie trigonométrica dientes de sierra" (Moreno, 1999, pág. 97), además de visualizar, apoyado en el uso de tecnología, la convergencia de la serie. El estudio de Díaz-Barriga (1993) estudia la transformada rápida de Fourier y cómo esta es resultado de la generalización natural de las series de Fourier en donde se puede hacer uso de la trasformada de Fourier en las aplicaciones a la vida real.

Finalmente, Montiel (2005) hace un estudio socioepistemológico de la función trigonométrica donde se nota que la STF es el último estadío de las funciones trigonométricas y que para significar la STF y su convergencia se tiene la necesidad de que de manera previa se signifique la función trigonométrica como herramienta predictiva, además de que las características de las funciones seno y coseno (periódicas y acotadas) y sus variaciones poseen las mismas características, las convierten en una herramienta muy poderosa dentro de la matemática misma y para la modelación de fenómenos de naturaleza periódica.

La Ingeniería Didáctica como Metodología de la Investigación

La Ingeniería Didáctica (ID) es una metodología de investigación que se basa en el diseño y experimentación de secuencias didácticas de manera controlada, donde los resultados de la secuencia se validan de manera interna mediante una comparación entre un análisis a priori y un análisis a posteriori (Artigue, 2014). El sustento teórico de la ID proviene de la Teoría de Transposición Didáctica y de la Teoría de Situaciones Didácticas, al considerar estas dos teorías al analizar el fenómeno didáctico, la primera con un alcance global y la segunda con un alcance local, se ve la necesidad de hacer un análisis de tipo sistémico alrededor del fenómeno didáctico (Farfán, 2012), en nuestro caso la STF.

Grosso modo la metodología que seguirá este trabajo comprende las siguientes fases:

- Un *análisis preliminar* que incluye tres componentes: la didáctica, es decir, cómo vive la STF en el sistema educativo (libros de texto, planes y programas de estudio, clases magistrales, entre otros); la *epistemológica*, pues esta provee de historicidad a la STF, por lo que se estudiará desde el problema de la cuerda vibrante hasta el estudio de la propagación de calor de Fourier; y la componente *cognitiva* de la población que será sometida a la ingeniería.

- La segunda fase constituye el *diseño de intervención,* en esta parte se deciden las variables macro y micro didácticas que van a considerarse, basándose a en el análisis a priori.
- Por último, la *aplicación del diseño* y el *análisis de los resultados*.

Es importante recalcar que la Teoría Socioepistemológica agrega una cuarta componente al análisis preliminar, la *social y cultural*, donde interesan los procesos de construcción social del conocimiento, esta componente permea todas las demás, lo cual robustece la ID en su análisis preliminar, cuya precisión es de suma importancia para el diseño (Farfán, 2012).

Reflexiones

Cabe destacar que este avance de investigación representa únicamente los antecedes del proyecto y que estos, en su mayoría, han sido análisis preliminares de ingenierías didácticas acerca de aspectos relacionados con la STF, pero estudiados de manera aislada, uno de los fines de este trabajo es el de integrar todos los avances que se han tenido a nivel de investigación relacionados con la STF, para así poder hacer un diseño de ingeniería didáctica de intervención para el aula enmarcado dentro del enfoque de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, por esta razón a partir de los antecedentes podemos asegurar lo siguiente:

- La escuela, considerando los diferentes niveles, no provee de las herramientas físicas y matemáticas necesarias para comprender la noción de calor ni el concepto de estado estacionario en los ambientes fenomenológicos ligados a la STF.
- Partir del ambiente fenomenológico, determinación del estado estacionario, es una tarea cognitiva más compleja que la serie misma, lo cual contradice la hipótesis de la Matemática en Contexto, donde se debe partir del ambiente fenomenológico para significar la STF.
- Se deben buscar de otros ambientes que permitan significar la STF, pero que no requieran de la noción de estado estacionario.
- Una situación que se base en la modelación de movimientos circulares superpuestos podría permitir superar uno de los obstáculos epistemológicos ligados a la STF: el principio de permanencia de Leibniz.
- La hipótesis de periodicidad no estuvo presente en la génesis de la STF y no es necesaria para que los estudiantes la construyan, sino que podría ser un resultado derivado de su construcción.
- Es necesario trabajar en diferentes registros de representación, donde el gráfico y numérico cobran gran importancia.
- Para la correcta significación de la STF, es necesario que previamente las funciones trigonométricas seno y coseno se hayan construido en el estudiante como objeto matemático, es decir un objeto susceptible de manipulación.

Con el fin de proponer un diseño de intervención para el aula es necesario vislumbrar todas estas consideraciones en el análisis a priori, pues esto integraría las diferentes ideas que se han logrado gracias a la investigación sobre la STF, y a partir de esto construir el diseño de intervención.

Referencias

Albert, J. A. (1996). *La convergencia de series en el nivel superior. Una aproximación sistémica.* Tesis doctoral, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa, México D. F.

Artigue, M. (2014). Didactic enhineering in mathematics education. En *Encyclopedia of Mathematics Education* (págs. 159-162). Springer Netherlands.

Cantoral, R. (1999). Approccio socioepistemologico alla ricerca in Matematica Educativa: un programma emergente. *La Matematica E La Sua Didattica , 3,* 258-270.

Díaz-Barriga, E. (1993). *La transformada rápida de Fourier: Un estudio de la matemática en un contexto que recupera significados.* Tesis de maestría, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa, México D. F.

Farfán, R. M. (1986). *Acerca de la representación de una función "arbitraria" en serie trigonométrica (Ensayo Histórico).* Tesis de maestría, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa, México D. F.

Farfán, R. M. (1994). *Construcción de la noción de convergencia en ámbitos fenomenológicos vinculados a la ingeniería.* Tesis doctoral, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa, México D. F.

Farfán, R. M. (2012). *Socioepistemología y ciencia. El caso del estado estacionario y su matematización* (Primera ed.). Barcelona, España: Editorial Gedisa S. A.

Flores, R. (1992). *Sobre la construcción del concepto de convergencia en relación al manejo heurístico de los criterios.* Tesis de maestría, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa, México D. F.

Marmolejo, R. (2006). *Estudio de la noción de estado estacionario en el ámbito fenomenológico de la transferencia de calor.* Tesis de maestría, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa, México D. F.

Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la función trigonométrica.* Tesis doctoral, CICATA-IPN, México D. F.

Morales, F. (2003). *Acerca de la actividad de modelación: las temperaturas de la tierra.* Tesis de maestría, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa, México D. F.

Morales, F. (2010). *Causas y efectos de la ambigüedad en el tratamiento didáctico de la noción de calor. Una caracterización del pensamiento fisicomatemático.* Tesis doctoral, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa, México D. F.

Moreno, J. A. (1999). *Estudio de la noción de convergencia de series trigonométricas en un ambiente de simulación.* Tesis de maestría, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa, México D. F.

Muro, C. (2000). *Significación de la serie de Fourier en el contexto del proceso de transferencia de masa.* Tesis de maestría, UAEH, Hidalgo.

Rodríguez, M. (2009). *Una matemática funcional para el ingeniero. La serie trigonométrica de Fourier*. Tesis de maestría, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa, México D. F.

Ulín, C. (1984). *Análisis histórico-crítico de la difusión de calor: el trabajo de Fourier.* Tesis de maestría, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa, México D. F.

Vásquez, R. (2006). *Sobre el papel de la hipótesis de periodicidad en las series de Fourier.* Tesis de maestría, Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa, México D. F.

Autores

Fabián Wilfrido Romero Fonseca; CINVESTAV, IPN. México; fwromero@cinvestav.mx
Rosa María Farfán Márquez; CINVESTAV, IPN. México; rfarfan@cinvestav.mx

UN ESTUDIO DESDE LA SOCIOEPISTEMOLOGÍA DEL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL

Mario Adrián Caballero Pérez, Ricardo Cantoral Uriza

Resumen

En este artículo partimos de una necesidad del individuo de *predecir* estados futuros ante *situaciones de cambio*. Nos preguntamos, ¿cómo se estructura el pensamiento humano para llevar a cabo predicciones ante situaciones de variación continua? Para ello recurrimos a las nociones de *causalidad* y *tiempo* de la psicogénesis con el propósito de investigar el rol que ellas juegan en el estudio del cambio. Postulamos ahora, en el marco de una investigación de corte socioepistemológico, un elemento adicional: la necesidad de la construcción de un *sistema de referencia* y de un *sentido de temporalidad* como condición para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, es decir, para el tratamiento del *cambio* y la *variación*. Para llevar a cabo esta articulación realizamos una revisión bibliográfica de los reportes experimentales piagetianos, utilizando la visión sistémica de la Socioepistemología.

Palabras Clave: Variación, predicción, causalidad, tiempo.

Introducción

En este artículo partimos de una necesidad del individuo de *predecir* estados futuros ante *situaciones de cambio*. Para ello recurrimos a las nociones de *causalidad* y *tiempo* de la psicogénesis, con el propósito de investigar el rol que ellas juegan en el estudio del *cambio*. Postulamos ahora, en el marco de una investigación de corte socioepistemológico, un elemento adicional: la necesidad de la construcción de un *sistema de referencia* y de un *sentido de temporalidad* como condición para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, es decir para el tratamiento del *cambio* y la *variación*.

Como sabemos, el estudio del *cambio* y la *variación* es un elemento indispensable en la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo, debido a lo cual ha sido tema de interés en diversas investigaciones. Una regularidad en las dificultades detectadas radica en *la centración en los objetos matemáticos*, lo que provoca que los conceptos y procedimientos se conciban como entidades abstractas, preexistentes y externas al estudiante, soslayando la *construcción social del conocimiento matemático* (Caballero y Cantoral 2014). Esta investigación parte de una premisa distinta, fundamentada en la teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, donde el énfasis está en las *prácticas* que hacen posible esta *construcción social* (Cantoral, 2013).

En otras palabras, no es el objeto matemático nuestro punto de interés, pues no nos bastará con observar un correcto "uso" de estos ante una actividad, sino que el énfasis estará en cómo las personas tratan con la variación por medio del desarrollo de prácticas, que particularmente en el Cálculo se encuentran ligadas al estudio y predicción de situaciones de variación, pues este posee un carácter dinámico dado que surge de la necesidad de cuantificar cómo las cosas cambian (conceptos de variable y de función), la velocidad con la que se dan los cambios (la derivada), y la forma en cómo se acumulan los cambios (la integral) (Cantoral, 1990).

Esta naturaleza dinámica es considerada y desarrollada por la línea de investigación Construcción Social del Pensamiento Matemático, que cuenta con una serie de estudios relativos al desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLVar), donde el énfasis está puesto en las formas de "actuar y argumentar" sobre el *cambio* y la *variación*:

> El PyLVar es tanto una línea de investigación como una forma de pensamiento, que se caracteriza por proponer el estudio de situaciones y fenómenos en los que se ve involucrado el *cambio*, y donde la necesidad de predecir estados futuros motiva el estudio y análisis de la *variación*. Lo anterior permite significar los conocimientos matemáticos más allá de la sola manipulación simbólica, por medio de ideas variacionales que dieron vida y desarrollaron esos conocimientos (Caballero y Cantoral, 2013).

En (Caballero, 2012) se menciona que una de las tendencias en trabajos sobre PyLVar ha sido el diseño de actividades que propicien el desarrollo de *estrategias variacionales*, pero los resultados muestran que la influencia de la enseñanza previa, sustentada en *la centración en los objetos matemáticos*, repercute en que los estudiantes no cuentan con las herramientas necesarias para hacer un estudio de la variación, tales como la comparación de estados o la estimación de comportamientos, por lo cual recurren al uso de definiciones o propiedades que no son recordadas correctamente, e incluso construyendo teoremas no válidos. De modo que, aunque el propósito sea una descentración de los objetos, esta enseñanza centrada en ellos representa un obstáculo para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional.

Consideramos que un elemento esencial para superar este obstáculo es propiciar la predicción de fenómenos, ya que requiere de estudiar aspectos variacionales para anticipar estados futuros mediante comparaciones, estimaciones y la construcción de modelos de explicación. El estudio de los procesos de cambio exige identificar aquello que cambia en una situación específica, cuantificar sus cambios y analizar cómo estos varían (el cambio del cambio), lo que permite identificar el *carácter estable del cambio*. Esto es, en todo fenómeno de variación existe algo que permanece estable cuando lo demás varía. Por ejemplo, en la caída libre lo identificamos como la *fuerza de gravedad*, que se conserva a pesar del cambio en otros parámetros.

De modo que al identificar el *carácter estable del cambio* es posible predecir, no obstante, falta indagar cómo se lleva a cabo esta identificación, qué elementos se ponen en juego para ello. En ese sentido nos preguntamos ¿cómo se estructura el pensamiento humano para llevar a cabo predicciones ante situaciones de variación continua? Respecto a esto, Caballero y Cantoral (2014) realizan un análisis preliminar a las nociones de *causalidad* y *tiempo* desde los trabajos de Jean Piaget, donde se muestra que el estudio del *cambio* exige de la construcción de *explicaciones causales* y de argumentos de tipo temporal. En el presente trabajo proponemos una articulación de estos elementos en relación al PyLVar que nos permite dar respuesta a la pregunta planteada, y que se expresa en la construcción de un *sistema de referencia* y el establecimiento de una *temporalidad* para el tratamiento de los fenómenos de variación continua.

Para llevar a cabo esta articulación realizamos una revisión bibliográfica de los reportes experimentales piagetianos (Piaget, 1971; 1977; 1978), para lo cual tomamos como referente teórico a la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, que postula que el conocimiento matemático tiene su origen en el conjunto de prácticas humanas que son aceptadas y establecidas socialmente (Cantoral, 2013), llamadas *prácticas sociales*, las cuales se entienden como normativas de la actividad humana. Al enfocar nuestra atención en las prácticas sociales, la socioepistemología nos permite analizar el pensamiento y lenguaje variacional de las personas, y las prácticas ejercidas ante situaciones de variación por los grupos humanos. En Cálculo algunas de las prácticas identificadas son la comparación, seriación, estimación y predicción (Caballero, 2012), que surgen de la necesidad de predecir estados futuros. Para la revisión bibliográfica se analizó cómo los conceptos de *causalidad* y *tiempo* permiten tratar con el cambio y la variación.

Estudios sobre lo causal desde el PyLVar

En la naturaleza nada permanece constante, todo se encuentra en un estado continuo de transformación y cambio, que percibimos y en el que estamos inmersos. Ante tal situación surge la necesidad de anticiparse a los estados futuros de la naturaleza, lo que ha llevado a la construcción de conocimiento matemático para entender este carácter dinámico. En la Física esto se ha sustentado en corrientes *deterministas*, paradigma bajo el cual nada surge de la nada, todo tiene antecedentes, y nada desaparece sin dejar huellas (Álvarez, 2006), todo tiene una causa y efecto, es decir, existe una *causalidad* en la relación entre los acontecimientos.

Desde la perspectiva psicogenética sobre la *causalidad*, el establecimiento de dicha relación se sustenta en las *explicaciones causales*, que consisten en los procesos mentales que permiten la explicación de las causas que originan algún hecho, mostrando qué transformaciones se produjeron entre los estados observados (Piaget, 1977). Si bien un fenómeno puede parecer complejo, la identificación de transformaciones permite establecer estas explicaciones. No obstante, estas no se obtienen a través de simples observaciones de regularidades, la *explicación causal* debe estar incluida en un sistema explicativo del cual se deduce la relación. Por ejemplo, imaginemos un resorte que es sujetado de uno de sus extremos a una vara. Se tiene también esferas de diferentes pesos y tamaños que son colocadas en el otro extremo del resorte, y se pregunta ¿cuáles esferas provocan que el resorte se alargue más? Ante esta pregunta se pueden considerar una variedad amplia de variables, desde el material del que están hechas las esferas o el resorte, la altura a la que se coloca, su longitud, el tamaño de las esferas o su peso, entre otras.

Una *explicación causal* a este problema consiste, entonces, en relacionar los efectos observados (el alargamiento del resorte) con las diferentes variables consideradas, con la finalidad de determinar cuáles tienen un efecto significativo en el alargamiento. En un principio se puede pensar que entre más grande sea la esfera mayor será el alargamiento, pero pronto se descubre que dichas variables no se encuentran en una relación causal, dado que una esfera de menor tamaño puede provocar un alargamiento mayor que una esfera más grande. Lo que se encuentra en relación causal en dicho evento es **el peso** de las esferas, relación que es encontrada por medio de la experimentación, y al hacerla explícita deviene en una *explicación causal*.

De manera que al hablar de las relaciones causales, estas no se encuentran explícitas en la naturaleza, sino que se trata de ciertas regularidades extraídas de la experiencia (Varela, 2005), que dan una racionalidad a los fenómenos observados mediante la construcción de *explicaciones causales*. En ese sentido, sostenemos que el estudio de *lo variacional* exige de *explicaciones causales*, ya que "ante un fenómeno de variación continua, en donde se busca la *predicción* de estados futuros, se deberá identificar las transformaciones realizadas (aquello que cambia) y las relaciones entre las variables involucradas (la variación que se presenta)" (Caballero y Cantoral, 2014, p. 310), de modo que por medio de *lo causal* es posible conocer la *variación* de un fenómeno, y en un sentido más amplio, identificar *el carácter estable del cambio* al medir o cuantificar el *cambio* expresado en las variables, los cambios de los cambios, etc.

Dicha cuantificación no puede ser arbitraria, debido a pequeñas perturbaciones que pueden existir en un fenómeno (Bunge, 1962) y que a la larga puede llevar a modificaciones esenciales. Es necesario llevar la situación estudiada a un sistema explicativo a partir del cual construir la relación causal incluso aunque las perturbaciones sucedan. En el caso de los fenómenos de variación dicho sistema explicativo convenimos en llamarlo *sistema de referencia*, pues es con base en este que se establecerá la relación causal (la forma de variación). En otras palabras, el estudio variacional de un fenómeno es realizado a partir de un *sistema de referencia*, que postulamos incluye los siguientes elementos:

Variables: Bajo la premisa de identificar lo que cambia, se eligen las variables que se consideran significativas, analizando las relaciones entre ellas. Esta elección influirá en el estudio variacional del fenómeno, pues con diferentes variables se puede llegar a establecer diferentes relaciones.

Cuantificación: Una vez elegidas estas variables se debe disponer de mecanismos para cuantificar los cambios. Estos pueden ser de diferente índole: herramientas para una medición cuantitativa (regla graduada o reloj), sobreponer las magnitudes de dos objetos para mostrar diferencias en una medición cualitativa, o bien, estimaciones subjetivas de las magnitudes. Una constante en lo anterior es *la comparación*, entendiéndola como una *estrategia variacional* (Caballero y Cantoral, 2013). Esto debido a que se compara la medida conocida de un objeto con otro del que desconocemos su medida, y con base en ello determinamos si son iguales (el caso de la regla graduada) o diferentes.

Elemento de comparación: En el punto anterior postulamos que para cuantificar el *cambio* se recurre a una *comparación*, pero esta no es arbitraria, sino que debe tener un referente a partir del cual establecer dicha comparación. Por ejemplo, al medir longitudes podemos recurrir a una regla graduada, de modo que la longitud del objeto es comparada con la longitud establecida de la regla. En ese sentido, la regla graduada funciona como aquel referente para establecer la comparación. En cambio, si usamos un objeto distinto como el tamaño de la mano, el referente pasa a ser la mano. Por tanto, hablaremos de un *elemento de comparación* a partir del cual establecemos la cuantificación del cambio.

Con base en lo anterior, una *explicación causal* dependerá de la elección de los elementos esenciales de una situación específica, que convenimos en llamar *sistema de referencia*, con base en el cual se establecen relaciones que permitan explicar la ocurrencia de los hechos observados (*lo variacional*) mediante una cuantificación del cambio a partir de la comparación de magnitudes en el sentido de *estrategias variacionales*.

El rol del tiempo en el PyLVar

El estudio del *tiempo*, en cuanto a su concepción y construcción presenta dificultades debidas a su naturaleza, pues suele ligarse al estudio de fenómenos y sucesos que ya no existen, o que aún no suceden, y por tanto no pueden ser reproducidos a voluntad. Esto ocasiona que el tratamiento de las comparaciones y estimaciones de la duración de un suceso sea un tema delicado, debido a que en dichas situaciones “nos vemos obligados a reconstituirlas en lugar de poder percibirlas en un todo simultaneo, o volver hacia atrás y reajustar la atención, como en las comparaciones perceptivas espaciales o incluso cinemáticas” (Piaget, 1971, p. 76). El problema por tanto, estriba en comprender cómo se reconstituyen los eventos percibidos, y las operaciones empleadas.

Para Piaget (1971) estas operaciones surgen como el producto de una relación entre aquello que ocurre (desplazamientos, frecuencias, trabajo efectuado, etc.) y la velocidad con que sucede (total de distancia recorrida, medida de la frecuencia, cantidad de trabajo realizado, etc., en relación a la duración del evento). Bajo esta visión, la duración de un evento, y por tanto la noción misma de *tiempo*, se encuentra ligado al propio observador, pues será él quien, mediante la utilización de instrumentos, herramientas o la propia percepción, determinará esa velocidad.

De manera que al tener el *tiempo* un desarrollo basado en el tipo de relación que el sujeto establece, los errores iniciales en su construcción provienen de que en las relaciones planteadas la velocidad comienza por descuidarse, lo que lleva a juzgar la duración solamente por los resultados observados (Piaget, 1971; 1978), soslayando el desarrollo mismo del evento. Para ejemplificar las relaciones que el sujeto puede establecer, consideremos una situación de movimiento de dos objetos que siguen trayectorias paralelas, que parten de puntos diferentes en el mismo instante con velocidades diferentes, y deteniéndose simultáneamente.

Inicialmente la velocidad de los móviles se mantiene constante en el razonamiento del niño, lo que hace que se fije solamente en la distancia recorrida y juzgue que el móvil que avanzó más lejos tardó más *tiempo* que el otro. Este tipo de razonamiento es acorde con las dificultades que Piaget manifiesta acerca del desarrollo del *razonamiento causal*, pues se centra únicamente en los resultados finales sin analizar la manera en cómo se desarrolla el evento (Caballero, 2012), lo que caracteriza la ausencia de *explicaciones causales*. Es así que en el ejemplo anterior, la duración se encuentra anclada al total de trabajo realizado (distancia recorrida) y no al comportamiento del movil (su velocidad). En ese sentido, no existe una diferenciación entre *lo espacial* y *lo temporal*, pues se centra en el estado final del movimiento, aislándolo de su forma de realización.

De modo que la identificación y medición de las variables involucradas, al igual que en las relaciones causales, no es suficiente en el estudio del *tiempo*, se requiere establecer relaciones entre ellas. Para ello intervienen operaciones ligadas a la construcción de *explicaciones causales*, denominadas *reversibilidad* y *seriación*.

Los fenómenos temporales tienen la característica de que dejan de existir a medida que suceden, por tanto se requiere reconstruir esos eventos. Se entiende por *reversibilidad* esta reconstrucción que permite analizar el desarrollo a pesar de que ya no es observable. Esta operación le da una característica al *tiempo* que lo diferencia de nociones espaciales, ya que si el espacio describe el orden de los eventos simultáneos, el *tiempo* describe el orden de sucesión de los eventos que no son permitidos simultáneamente (Piaget, 1971).

De manera que al estudiar el *tiempo* se identifican estados intermedios en un acontecimiento que dan cuenta de su forma de realización. No obstante, dichos estados no suceden aleatoriamente, sino que tiene un cierto orden que se establece bajo una lógica basada en la *explicación causal*, y que permite realizar una *seriación* de los acontecimientos. Esta idea asociada a *lo causal* lleva implícita una dirección de sucesión, ya que la relación causal entre eventos se constituye sobre la base de que la causa antecede al efecto, por lo que se puede considerar que las *explicaciones causales* son una estrategia de los individuos para organizar la experiencia de acuerdo con un orden temporal. En ese sentido, la *predicción* de fenómenos de variación continua, si bien no siempre involucra el *tiempo* como una variable explicita, este se encuentra implícitamente involucrado a través del concepto mismo de proceso de cambio, donde el papel del *tiempo* es el de identificar o establecer la lógica de sucesión de dicho proceso.

Para ejemplificar lo anterior consideremos las actividades de llenado de recipientes presentados en Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, y Hsu, (2002), donde se pide anticipar la gráfica de la relación altura – volumen de algunos recipientes de formas distintas. El objetivo es identificar los niveles de razonamiento covariacional al correlacionar los cambios en las alturas con los cambios en el volumen. Para ello se identifican o postulan estados intermedios en el crecimiento de las alturas, lo que permite correlacionar dichos estados con el crecimiento del volumen.

En dichas actividades el *tiempo* no está presente como variable explícita, sin embargo, en la *seriación* al crecimiento de las alturas encontramos inmersa esta noción, dado que se establece un orden de sucesión al crecimiento. Dicho orden no es arbitrario, se construye con base en una *explicación causal*, que consiste en que una altura mayor corresponde a un estado posterior (volumen mayor), en tanto que una altura menor corresponde a uno anterior (volumen menor).

Es así que mediante la *reversibilidad* y *seriación* se logra construir las relaciones temporales de un evento, que a su vez se encuentran ligadas la experiencia introspectiva y a la experiencia física, es decir, dependen del sujeto y de la relación que establezca con el evento observado (Piaget, 1971). Estas operaciones nos llevan a considerar el *tiempo* no únicamente en el sentido de una medida o variable de una relación funcional, sino en un *sentido de temporalidad*. Con esto nos referiremos a que el estudio del *tiempo* consiste en una división del fenómeno en estados sucesivos, cuya secuencia se determina por la *explicación causal* entre dichos estados.

Este *sentido de temporalidad* en relación al PyLVar permite analizar el comportamiento de un fenómeno de variación continua y argumentar sobre la *variación* mediante el análisis de los procesos de cambio de un estado a otro. Para ello, una vez identificado o postulado estados intermedios, se recurre a las *estrategias variacionales* (Caballero y Cantoral, 2013) para estudiar el comportamiento variacional de un estado a otro, las cuales requieren del sistema de referencia para su uso. Por lo tanto, ambos constructos son complementarios, de ahí que promueve el estudio del *cambio* y la *variación*.

Reflexiones finales

En este escrito hemos realizado un análisis desde la Socioepistemología a las nociones de *causalidad* y *tiempo* bajo la perspectiva de los trabajos de Piaget, y los hemos relacionado con las ideas del pensamiento y lenguaje variacional. Por un lado, con base en el estudio de la construcción de *explicaciones causales* postulamos la necesidad de construir un *sistema de referencia* para el estudio de la *variación* en una situación específica, el cual está constituido por una selección de variables, la cuantificación del *cambio* y elementos de comparación. Este sistema funciona como un marco explicativo sobre el comportamiento variacional de un fenómeno al permitir identificar aquello que cambia, cómo y cuánto cambia.

Por otra parte, del desarrollo de la noción de *tiempo* encontramos que se encuentra inmerso en los fenómenos de variación, pero no solamente en el sentido de variable o medida sino en un *sentido de temporalidad* que permite establecer un orden de sucesión de estados a partir de los cuales se analiza los procesos de cambio. Es decir, el pensamiento humano ante situaciones que involucran variación, establece una *temporalidad* a dichas situaciones para poder estudiar los procesos de cambio involucrados.

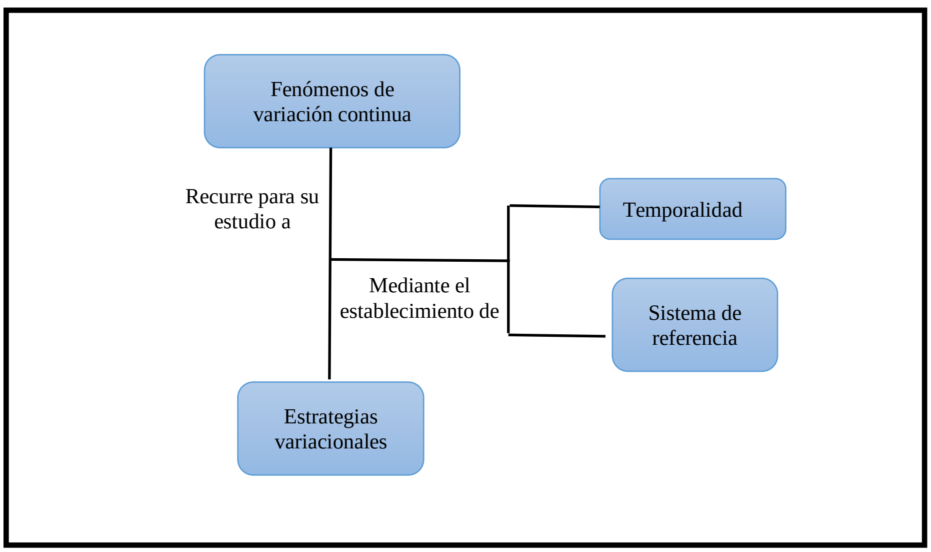


Figura 1: Articulación del sistema de referencia y temporalidad en el estudio del cambio.

Ambos constructos, *sistema de referencia* y *temporalidad*, sostenemos se articulan en el pensamiento humano ante el desarrollo de prácticas predictivas (Figura 1), y por tanto en la identificación del *carácter estable del cambio*. Esta articulación se sustenta en que el estudio de la variación precisa del uso de *estrategias variacionales* (Caballero, 2012), pero esto mediante la conjugación de la *temporalidad* y el *sistema de referencia*, ya que el primero permite establecer una sucesión de estados que permite hacer explícito el proceso de cambio involucrado, y el segundo estudiar esos procesos de cambio.

Hasta el momento hemos propuesto esta articulación con base en los estudios piagetianos, que sostenemos nos permite explicar cómo el pensamiento humano se estructura ante la predicción de fenómenos de variación continua. En la siguiente etapa de la investigación se realizará el diseño de actividades de variación que nos permitan corroborar la articulación propuesta mediante el análisis de las respuestas de estudiantes de bachillerato de México. Estas actividades se contempla diseñarlas con base en los tópicos del currículo de bachillerato, incluyendo contextos dentro de la matemática, física, entre otros. Para ello se tomará como eje central el estudio del cambio y la variación por sobre los objetos matemáticos.

Referencias

Álvarez, J. (2006). La causalidad en la física: Johannes Kepler. *Boletín de la sociedad Mexicana de Física*, 20(3), 23 – 32.

Bunge, M. (1972). *Causalidad: El principio de causalidad en la ciencia moderna*. Buenos Aires: Editorial Universitaria de Buenos Aires.

Caballero, M. (2012). *Un estudio de las dificultades en el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional en profesores de bachillerato*. Tesis de Maestría no publicada. México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Caballero, M. y Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elementos del Pensamiento y Lenguaje Variacional. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 26, 1007 – 1015.

Caballero, M. y Cantoral, R. (2014). Pensamiento y Lenguaje Variacional: Un estudio sobre mecanismos de construcción del conocimiento matemático. *Memorias de la XVII Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, 17, 307 – 314.

Cantoral, R. (1990). *Categorías Relativas a la apropiación de una base de significaciones para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las Funciones Analíticas. Simbiosis y Praedación entre las nociones de "el Prædiciere y lo Analítico*". Tesis doctoral no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. DF: México.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 17, 1-9.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento matemático*. Gedisa Editorial.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., y Hsu, E. (2002). Appliying covariational reasoning while modeling dinamic events: A framework and a study. *Journal for research in mathematics educations* 33, 35 -278.

Piaget, J. (1971). The Development of Causality. En J. Piaget (Eds.), *The construction of reality in the child* (pp. 247 – 361), United States of America, Ballantine Books.

Piaget, J. (1977). Causality and Operation. In J. Piaget y R. Garcia (Eds.), *Understanding Causality* (pp. 1 – 10), United States of America: Norton Library.

Piaget, J. (1978). *El desarrollo de la noción de tiempo en el niño*. México: Fondo de Cultura Económica.

Varela, O. (2005). Causalidad y Mecánica Cuántica. *Versiones*, 4, 119 – 124.

Autores

Mario Adrián Caballero-Pérez; CINVESTAV, IPN. México; macaballero@cinvestav.mx
Ricardo Cantoral Uriza; CINVESTAV, IPN. México; rcantor@cinvestav.mx

USO DEL CONOCIMIENTO MATEMATICO DEL INGENIERO TOPÓGRAFO Y FOTOGRAMETRISTA[1]

Luz Adriana Segura Camargo, Carolina Carrillo García, José Iván López Flores

Resumen

En este escrito se presentan los avances de una investigación que tiene por objetivo caracterizar desde el marco teórico de la Socioepistemología, el uso del conocimiento matemático en distintos escenarios (en formación, profesional e investigador) de un campo específico como lo es la Ingeniería Topográfica y Fotogramétrica (ITF). El trabajo se encuentra en una etapa inicial en la cual se ha realizado un análisis de los trabajos precedentes. Se reporta el planteamiento del trabajo, el marco teórico y la metodología tentativa, así como la reflexión de los antecedentes que fundamentan esta primera etapa de la investigación.

Introducción

A través del tiempo, las sociedades han conformado instituciones, con la finalidad de articular el saber científico y matemático con la cultura de la sociedad, buscando propiciar en la población una visión científica del mundo (Cantoral, 2001). En nuestro Sistema Educativo actual, y en la sociedad en general, se considera a las matemáticas como una disciplina importante que aporta conocimientos con aplicación en diversas áreas. Usualmente se relaciona a las matemáticas con el desarrollo tecnológico, siendo éste uno de los pilares de la Sociedad del Conocimiento, por lo que su aprendizaje y enseñanza se han constituido en asuntos de mayor interés e importancia particularmente en la educación superior (ANUIES, 2004). Sin embargo, el aprendizaje de las matemáticas presenta una de las mayores dificultades para los estudiantes de nivel universitario y esta situación se agrava, si se juzga a partir del papel que juega la matemática en el sistema escolar, ya que se le ha conferido una suerte de "mecanismo natural de selección" (Cantoral, 2001).

Diversas instituciones de nivel superior formadoras de ingenieros en nuestro país tienen como misión similar: "Formar de manera integral profesionistas capaces de desarrollar estrategias y acciones para el desarrollo del país, con habilidades, actitudes y valores que les permitan un desempeño pleno en el ejercicio profesional" (ver misiones de instituciones como la Unidad Profesional Interdisciplinaria en Ingeniería y Tecnologías Avanzadas del Instituto Politécnico Nacional (UPIITA-IPN), la Escuela Superior de Ingeniería Química e Industrias Extractivas (ESIQIE-IPN), la facultad de ingeniería de la Universidad Autónoma de México (UNAM), la Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería y Ciencias Sociales y Administrativas (UPIICSA-IPN), el Instituto Tecnológico de Zacatecas (ITZ) y la Universidad Autónoma de Zacatecas (UAZ)); es decir, promueven formalmente la generación de competencias, pero ¿Qué sucede cuando los ingenieros en formación no encuentran el sentido de desarrollar las competencias matemáticas? En mi experiencia

[1] Este proyecto se desarrolla con apoyo del Conacyt-México. Becaria: 626199.

como profesora en nivel superior, ésta fue una reflexión que surgió y suele ser una de las interrogantes que los profesores de matemáticas de los diversos niveles educativos suelen enfrentar en su quehacer didáctico, "¿Profe, esto para qué me va a servir?". En los niveles básicos se intenta formar a los estudiantes para ser ciudadanos con un conocimiento fundamental pero amplio y variado de la ciencia, en palabras de la SEP se pretende "contribuir con el desarrollo de las competencias para la vida" pero sin olvidar que también pretende prepararlos para el nivel educativo superior, en este sentido pudiera haber contenido curricular que únicamente les sea de utilidad al cursar una carrera universitaria. Sin embargo, al ingresar al nivel superior el conocimiento programado para su enseñanza se esperaría que su aplicación fuera menos cuestionada pero la experiencia y diversas investigaciones (Camarena, 2010; Zúñiga, 2004; Camacho-Ríos, 2011; Covián, 2013; Willcox y Bounova, 2004) señalan que esto no es así.

En el panorama escolar, en el ámbito de la formación, un futuro ingeniero dedica cerca del 80% del tiempo de estudio a las ciencias básicas, a las ciencias de la ingeniería y a la ingeniería aplicada (Cantoral, 2001), pero no siempre logra acreditar las asignaturas y peor aún no logra adquirir un aprendizaje tal que pueda usarlo fuera de un escenario escolar. Por otro lado, en muchas instituciones escolares mexicanas de nivel superior los cuerpos colegiales del área de matemáticas están conformados por profesores que no han sido formados para desempeñarse en la docencia (Montiel y Castañeda, 2009), provocando quizá que, tanto profesores como estudiantes de carreras de ingeniería están generalmente inmersos en el sistema educativo tradicional, en el que se ha perdido significado en los principales conceptos y nociones matemáticas (Zúñiga, 2004).

Numerosos estudios muestran cómo la enseñanza habitual de las matemáticas en la ingeniería se basan en la transmisión de conocimientos con un peso muy marcado en sólo desarrollar habilidades algebraicas, es decir, se centra la enseñanza en memorizar y mecanizar métodos algorítmicos y procedimientos, olvidándose de promover habilidades en el estudiante que le permitan aplicar ese conocimiento matemático en el campo especifico de la ingeniería es decir, no basta con sólo formular la ecuación de la recta para encontrar el punto de intersección de dos rectas, si la necesidad es dividir una superficie de terreno en lotes iguales y con una superficie especifica (agrodesia) o calcular los ángulos interiores de un polígono si la petición es obtener el azimut de cada uno de los vértices de una poligonal cerrada (Topografía).

Respecto a la enseñanza del conocimiento matemático (CM), Zúñiga (2004) menciona:

> […] el conocimiento generalmente se trata fuera de todo contexto del mundo real, a lo más que se llega en este sentido en un curso común de cálculo, es a resolver los "problemas de aplicación" que se proponen en los textos, los cuales casi nunca corresponden a la realidad. Esto tiene importantes consecuencias (negativas) cuando los que aprenden son estudiantes que en el ejercicio de su profesión requieren de conocimientos y habilidades que les permitan resolver problemas de verdad. Tal es el caso, por ejemplo, de quienes se preparan en carreras de ingeniería. (p. 7).

La problemática de la enseñanza y aprendizaje de la ingeniería y en especial de las asignaturas de matemáticas es conocida y ha sido ampliamente estudiada. Camarena (2010) señala que los estudiantes de ingeniería no están teniendo éxito con estas disciplinas debido a que:

> No ven de manera inmediata su aplicación ni el objeto de cursarla; en buena medida, un factor que afecta, es el hecho de no tener un currículo adecuado a las necesidades de la ingeniería en donde se imparten estos cursos de las ciencias básicas (p. 6).

Para identificar qué CM es usado en una ingeniería específica considero necesario caracterizar primero qué es la ingeniería. Al respecto, Chatterjee (2005) nos dice que la ingeniería es el nombre utilizado para definir la actividad orientada a la explotación intencional de las leyes, las fuerzas y los recursos de la naturaleza, todo ello enfocado a la mejora directa de la condición humana y agrega que los ingenieros, a diferencia de los científicos y matemáticos puros, no buscan la verdad fundamental de la naturaleza, ni requieren de un rigor intelectual en sus respuestas ya que ellos realizan cálculos y desarrollan modelos aprovechando su experiencia previa. Con base en lo anterior, podemos pensar que los ingenieros encuentran la funcionalidad de los conocimientos matemáticos en un escenario diferente al escolar tradicional, esto da paso al problema de relacionar los conocimientos adquiridos en la escuela a un contexto diferente, es decir, la capacidad de aplicar los conocimientos y procedimientos aprendidos en un contexto a nuevos contextos (Mestre, 2002, citado por Covián, 2013, p. 5).

El contexto en el cual se trabajará la presente investigación es el del ingeniero Topógrafo y Fotogramétrico (ITF) en formación y práctica profesional, con base en ello nos planteamos la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué CM, adquirido en formación, usa el ITF en su práctica profesional y en la generación de conocimiento científico dentro de su disciplina?

Camacho, Sánchez, Blanco y Cuevas (2011) nos mencionan que se puede considerar que la topografía es una especie de *geometría natural*—también conocida en su origen como *geometría práctica*—que ha sido poco investigada como objeto de estudio, dejándola al margen de las matemáticas y de las tradiciones propiamente técnicas (p. 124). Desde el punto de vista de la asociación de conocimientos matemáticos con diferentes técnicas, la topografía puede verse como definidora de "prácticas de referencia" (Camacho *et al.*, 2011, p. 125), entendiendo como *prácticas de referencia* aquellas actividades que se acontecieron a partir de un problema particular, de cuya solución destacan los conocimientos de referencia en forma de significados; éstos desarrollados a través de la experiencia de las que se han desprendido nuevos conocimientos matemáticos (Camacho-Ríos, 2011) y la problemática se presenta, cuando la topografía ha sido poco estudiada desde el punto de vista de desarrollar conocimiento científico dentro de su disciplina.

Caracterizar el uso del conocimiento matemático del ITF en distintos escenarios (escolar, profesional e investigador) es la razón de ser de esta investigación, pretendiendo identificar el contenido matemático que se enseña al futuro Ingeniero, caracterizar el conocimiento matemático que usa en su práctica profesional e identificar el conocimiento matemático que usa en el desarrollo de conocimiento científico en su disciplina.

Cabe aclarar que en la revisión realizada hasta el momento, no se ha encontrado registro de que se haya abordado de manera específica el conocimiento matemático dentro de la Ingeniería Topográfica y Fotogramétrica. Por otro lado, se pretende aportar conocimiento en torno a la problemática presente dentro de las ingenierías, donde los alumnos presentan dificultades con las asignaturas de matemáticas por no ver la aplicación inmediata a sus materias de especialidad. Para esto se indagará en los diferentes usos que el ITF da al conocimiento matemático adquirido en su formación, con el propósito de identificar cuáles son los tópicos específicos y necesarios, para que pueda desempeñarse de manera satisfactoria en un escenario distinto al escolar.

Marco Teórico

Se ha mencionado acerca de la problemática que prevalece por una inadecuada contextualización de los CM dentro del aula, y posiblemente existe por la falta de relación o escasa relación entre conocimientos matemáticos en uso y conocimientos matemáticos enseñados (Covián, 2013). Si tomamos como punto de referencia que la Topografía se ha considerado generadora de prácticas de referencia (Camacho *et al.*, 2011) y que nuestro foco central en este estudio es caracterizar el *uso* del CM de un I.T.F, consideramos conveniente adoptar como marco teórico que nos ayude a sustentar nuestra investigación la teoría socioepistemológica. La socioepistemología es una teoría que describe:

> La construcción social del conocimiento matemático dentro de un enfoque sistémico que toma en cuenta al menos cuatro dimensiones que estudian la naturaleza del uso de los saberes matemáticos (Epistemológica), la difusión institucional de los saberes matemáticos (la didáctica), la apropiación de dichos saberes por grupos humanos e individuos (cognitiva) y los usos de saberes matemáticos en diferentes escenarios (social) (Covián, 2013, p. 34).

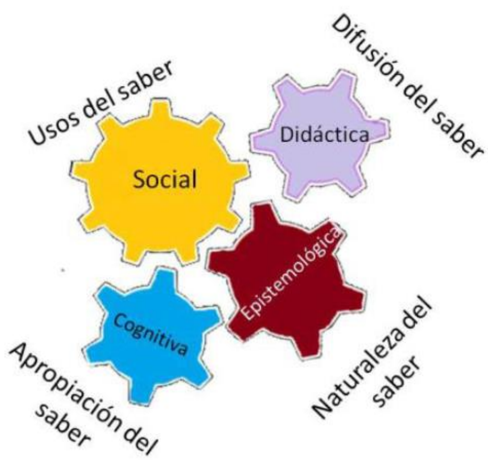


Figura 1. Vista de engranes (Covián, 2013, p. 38).

Aunque en estos momentos, el trabajo se encuentra precisamente en el análisis de la pertinencia de este marco teórico, consideramos, dados los objetivos que nos hemos planteado, que este sustento teórico nos permitirá analizar el uso del conocimiento matemático en los diversos escenarios de la disciplina observada.

Método

En una primera etapa de nuestro trabajo de investigación se realizó una revisión de documentos relacionados con el problema de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en estudios interdisciplinares y en la formación de futuros ingenieros. Como producto de la revisión se ha encontrado trabajos que reportan este problema en áreas específicas como la ingeniería Biomédica o ingeniería Aeronáutica y Astronáutica y otros que tratan en lo posible atender esta problemática proponiendo teorías o incluso posgrados dedicados a la formación de profesores de ingeniería.

Como parte del trabajo futuro de esta investigación se contempla para las siguientes etapas de nuestro trabajo estudiar los diferentes escenarios donde se presentan el CM de un ITF, por esta razón se pretende:

- Realizar un análisis del plan de estudios.
- Realizar entrevistas a los docentes de esta área.
- Entrevistar a los ingenieros topógrafos en ejercicio.
- Realizar un análisis del contenido matemático inmerso en las publicaciones científicas en esta disciplina.

Reflexiones/Conclusiones parciales

La problemática presente en ingeniería con respecto a la asignatura de matemáticas, se ve reflejada claramente en los índices de reprobación de esta materia en las instituciones universitarias de nuestro país. Como menciona Cantoral (2001) *nuestra educación superior no está dando resultados y nuestra práctica diaria lo constata*.

Esta problemática no sólo se presenta en nuestro país, un ejemplo de ello es el reportado por Willcox y Bounova (2004), quienes abordan la misma inquietud pero con estudiantes de ingeniería en Aeronáutica y Astronáutica del Instituto Tecnológico de Massachusetts, donde su objetivo fue identificar las barreras que se presentan para una comprensión profunda de las matemáticas entre los estudiantes de ingeniería, a partir de una serie de entrevistas a profesores y alumnos. Mencionan que muchos profesores de ingeniería tenían un conocimiento inadecuado de los planes de estudio en la clase de matemática, y con frecuencia no saben dónde o cómo se les enseña las habilidades que necesitan, mientras que los profesores de matemáticas a menudo tienen una comprensión limitada de cómo los conceptos matemáticos se aplican en las clases de ingeniería.

Es tal el impacto que presenta esta problemática en los alumnos, que incluso en Estados Unidos en un trabajo conjunto de varias universidades, se ha propuesto la creación de un posgrado especializado en la formación de profesores de matemáticas para ingeniería (ver Benson, Becker, Cooper, Griffin, & Smith, 2010), debido a que no se ha logrado realizar esa conexión entre las matemáticas y las materias de especialidad propias de la ingeniería. Benson *et al.* (2010) expresan que, históricamente, las prácticas educativas y creencias de los profesores en la educación superior, han sido en gran parte anecdóticas y basadas en la experiencia personal. Quizá estos problemas se presenten con mucha frecuencia porque no se han podido, contextualizar adecuadamente los conocimientos matemáticos que se le brinda a un ingeniero en formación (Camarena, 2010), y esto podría ser debido tal vez a que no se toma en cuenta el uso que se le da a ese conocimiento fuera del escenario escolar.

A partir del análisis realizado pudimos percatarnos de que existe un vacío en la investigación con respecto del *uso* del conocimiento matemático (CM) en nivel universitario, específicamente en ingeniería. Se observa también que muchos de los trabajos revisados reportan la falta de vinculación entre el CM (calculo vectorial, funciones de dos variables, algebra lineal, derivadas parciales) con las ciencias que las requieren dentro del aula de clase (Camarena, 2009), mientras que otros trabajos estudian la construcción de saberes de un área o tópico específico como: cálculo diferencial, trigonometría, equilibración de relaciones asimétricas (ingeniería biomédica), etc. Pero ¿Qué sucede cuando ese conocimiento supuestamente contextualizado, adquirido en el aula se lleva a un escenario diferente?, es decir ¿se hace *uso* de él en un escenario practico-laboral o de investigación?, ¿cuáles de los conocimientos matemáticos construidos en la formación de un ingeniero son usados? o ¿cuáles de los conocimientos matemáticos presentes en el currículo, se imparten con el grado de importancia que refleje su *uso* en la práctica o para generar más conocimiento? Como se puede observar, la lectura de trabajos previos ha generado aún más dudas pero también ha brindado un panorama más amplio de la atención que se ha dado a la problemática de la enseñanza de las matemáticas en ingeniería y nos ha permitido plantear el problema de la manera que hemos mencionado anteriormente. De manera particular, es de mencionar que Covián (2013) aporta conocimientos que se deben de ofrecer a un técnico en construcción y llega a sus resultados a través de analizar los *usos* de conocimiento en diferentes escenarios.

Adicionalmente, se percibe la necesidad de abordar este tópico para saber si el CM enseñado a un ITF es el adecuado y el que se *usa* en su área laboral o en la obtención de nuevo conocimiento. Se espera brindar información útil para la mejora en la impartición de dichos conocimientos, Aportar dentro del aula aplicaciones más apegadas a la realidad, con el objeto de poder ofrecer a los alumnos ejemplos dentro de la topografía práctica o ramas alternas como la geodesia, cartografía, agrodesia, entre otras, que requieran el manejo de dicho CM. A su vez, esperamos que los resultados puedan brindar ideas para diseños de propuestas didácticas que refuercen el proceso de enseñanza aprendizaje y que se vea reflejado en un mejor desempeño del joven profesionista. Este estudio también pretende identificar el CM que refuerza y posiblemente aprende un ITF a través de su uso en un escenario extra escolar. Por último, esperamos que las aportaciones puedan ser tomadas en cuenta para futuras reformas curriculares, ya que permitirá observar los tópicos más utilizados así como los que se encuentran en desuso, dentro de la disciplina.

Referencias

ANUIES (2004). Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Educación Superior ANUIES. *Documento estratégico para La Innovación en la Educación Superior*. México.

Benson, L., Becker, K., Cooper, M., Griffin, H. and Smith, K (2010). Engineering Education: Departments, Degrees and Directions. *International Journal of Engineering Education, 26*(5), 1042-1048.

Camacho-Ríos, A. (2011). Socioepistemología y prácticas sociales. Hacia una enseñanza dinámica del cálculo diferencial. *Revista Iberoamericana de Educación Superior*, *11* (3), 152-171.

Camacho, A., Sánchez, B., Blanco, V. y Cuevas, J. (2011).Geometrización de una porción del espacio real. *Educación Matemática, 23*(3) ,123-145.

Camarena, P. (2009). La matemática en el contexto de las ciencias. *Innovación Educativa, 9* (46), 15-25.

Camarena, P. (2010). *Aportaciones de investigación al aprendizaje y enseñanza de la matemática en ingeniería*. Recuperado el 03 de abril de 2015, de http://www.ai.org.mx/eventos/coloquios/ingreso/10/camarena.html

Cantoral, R. (2001). Enseñanza de la matemática en la educación superior. *Revista Sinéctica*, (19), 3-27.

Chatterjee, A. (2005). Mathematics in engineering. En *Current Science*, 88(3). Recuperado el 03 de abril de 2015, de www.ias.ac.in/currsci/feb102005/405.pdf.

Covián, O. N. (2013). *La formación matemática de futuros profesionales técnicos en construcción***.** Tesis de Doctorado inédita. Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México, D.F.

Montiel, G. y Castañeda, A. (2009). *Educación a distancia en línea: elementos para la formación del profesor de matemáticas en servicio.* Recuperado 11 de junio de 2015, de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/archivos/(GMontiel-ACastaneda-2009)-UPVM.pdf

Willcox, H. y Bounova, G. (2004). Mathematics in Engineering: Identifying, Enhancing and Linking the Implicit Mathematics Curriculum. *En Proceedings of the 2004 American Society for Engineering*. Recuperado el 04 de mayo de 2015, de http://web.mit.edu/kwillcox/www/WillcoxASEE04.pdf

Zúñiga, L. (2004). *Funciones cognitivas: un análisis cualitativo sobre el aprendizaje del cálculo en el contexto de la ingeniería*. Tesis de Doctorado inédita. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, México, D.F.

Autores

Luz Adriana Segura Camargo; UAZ. México; ikle2009@hotmail.com
Carolina Carrillo García; UAZ. México; cgcarolin@hotmail.com
José Iván López Flores; UAZ. México; ivan.lopez.flores@hotmail.com

SUCESIONES FIGURATIVAS DE SEGUNDO ORDEN, UNA SECUENCIA DIDÁCTICA UTILIZANDO LAS VARIABLES COMO NÚMEROS GENERALES

José Rolando Palomino Iraburo, Nancy Janeth Calvillo Guevara, Leticia Sosa Guerrero

Resumen

En este escrito se presenta una problemática relacionada con el uso de sucesiones figurativas utilizando la variable como número general en secundaria (estudiantes que tienen entre 12 y 15 años), en particular, los jóvenes no pueden identificar patrones o comportamientos al hacer uso de sucesiones, tanto numéricas como figurativas, sobre todo cuando son del tipo cuadrático. Para enfrentar tal situación se propone diseñar y aplicar una secuencia didáctica. Se considera que la teoría de situaciones didácticas de Brousseau brindará elementos importantes para su diseño, empleando sucesiones figurativas. Como metodología se utilizará la ingeniería didáctica. Se espera que con la implementación de la secuencia los estudiantes logren el reconocimiento de patrones en sucesiones figurativas y por ende, lleguen a la generalización.

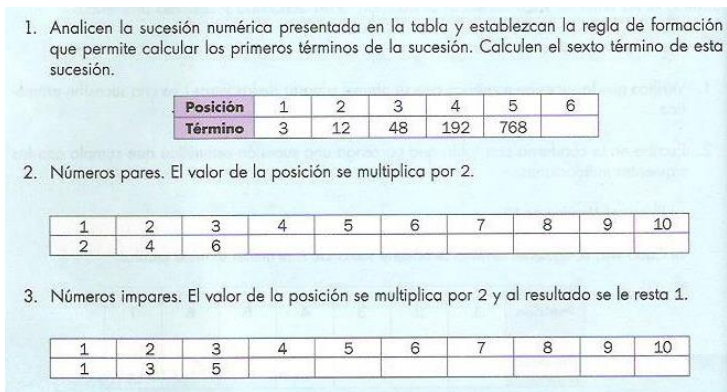
Palabras clave: sucesiones figurativas, patrones, generalización, secundaria.

Introducción

Cuando se estudia el tema de Patrones y Ecuaciones en secundaria, las sucesiones son un concepto que está inmerso en dicho contenido y ayuda al desarrollo del pensamiento algebraico a través del uso de las variables como números generales, “hay quienes consideran que el álgebra tiene que ver esencialmente con los procesos de generalización, y ponen énfasis en el uso de expresiones generales en las que los símbolos literales representan números generales” (Ursini, Escareño, Montes y Trigueros, 2005, p. 21), en ese sentido, Ferrini, Lappan y Phillips (1997, p. 112) señalan que “el estudio de patrones es una forma productiva para desarrollar el pensamiento algebraico en grados elementales o básicos”. Osorio (2012) y Vergel (2015) concluyen que al tratar con sucesiones figurativas los estudiantes conjeturan y se inician en los principios del álgebra, debido a que hacen uso de expresiones verbales, palabras, dibujos y símbolos que les permiten acercarse a la simbolización. En particular, Vergel (2015) observó que el hecho de contar con secuencias figurales propulsa una articulación de las estructuras espacial y numérica, lo cual constituye un aspecto importante del desarrollo del pensamiento algebraico.

Las sucesiones aparecen en el tema estudio de la variable como número general, la cual se ve desde el primer año de educación secundaria, es aquí donde se comienza a trabajar con sucesiones numéricas y sucesiones figurativas, entendidas éstas como “conjunto de figuras con la propiedad de que hay un patrón de crecimiento que permite encontrar todas las figuras, empezando por la que ocupa el primer lugar de la sucesión; luego la que ocupa el segundo lugar; luego la que ocupa el tercer lugar y así sucesivamente" (Araujo, García, García y López, 2006, p. 40), presentándose en ese momento una serie de conflictos de aprendizaje, como son el no comprender el uso de literales y el comportamiento de patrones, entre otras, como consecuencia éstos pueden acarrear obstáculos y errores durante toda su vida escolar. Al respecto, la principal conclusión del estudio realizado por Przenioslo (2005) con estudiantes de secundaria y de universidad, fue que muchas de las concepciones de los estudiantes universitarios que ya habían cursado análisis matemático, probablemente habían sido formadas desde que estudiaron en secundaria.

Por otra parte, se considera que algunos de los libros de apoyo para los estudiantes de primer año de secundaria, como el de "Matemáticas 1. Construcción del Pensamiento" (Sánchez, 2012) en su primer acercamiento con sucesiones numéricas y figurativas, contiene tareas que los estudiantes pueden resolver sin dificultad, donde pocas veces se les plantean ejercicios donde puedan llegar a la generalización, como se puede ver en la figura 1, donde solo se consideran ejercicios en los que no se les pide que lleguen a la generalización, sino solamente ir completando la información para casos concretos.



1. Analicen la sucesión numérica presentada en la tabla y establezcan la regla de formación que permite calcular los primeros términos de la sucesión. Calculen el sexto término de esta sucesión.

Posición	1	2	3	4	5	6
Término	3	12	48	192	768	

2. Números pares. El valor de la posición se multiplica por 2.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6							

3. Números impares. El valor de la posición se multiplica por 2 y al resultado se le resta 1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	5							

Figura 1. Ejercicios planteados para el tema de sucesiones

Otro aspecto a señalar es que algunos profesores plantean a los estudiantes ejercicios con sucesiones tanto figurativas como numéricas, pero el énfasis es en estas últimas. Por ejemplo, revisando las notas de clase de una estudiante de la escuela secundaria "J. Jesús Larios Guzmán" ubicada en la cabecera municipal de Gral. Pánfilo Natera, Zacatecas, observamos en la figura 2 que si bien resuelve los ejercicios propuestos por su maestro, no es claro cuál fue el proceso que utilizó, ya que solo escribió el resultado. Esto nos deja varias interrogantes como son: ¿realmente la estudiante identificó el patrón?, ¿Cuál fue su estrategia?, ¿Cómo logró la generalización?, ¿Comprendió efectivamente el uso de sucesiones numéricas y figurativas?

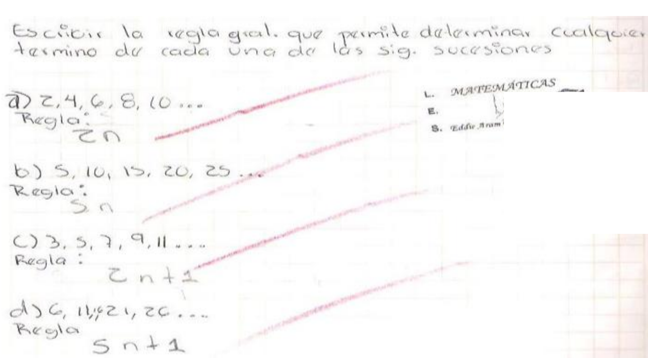


Figura 2. Ejercicios propuestos para el tema de sucesiones

Es por esto que consideramos importante que cuando el profesor aborde contenidos con sucesiones, éste ponga especial atención al uso de sucesiones figurativas, en donde los estudiantes podrían identificar y deducir las reglas que los rigen, pues mediante su implementación, se tendría una mejor comprensión de la generalización, y por ende, de la variable. En ese sentido, Osorio (2012, p. 81) menciona que "los estudiantes identifican mejor el patrón cuando se trata con figuras, debido al tipo de arreglos, pues permite observar claramente las regularidades, porque se analizan todas sus partes, desde que se descompone, por así decirlo, a la figura", igualmente, Pérez, Pérez y Hernández (2013) en su investigación, detectaron que a los alumnos se les facilita el tránsito de lo aritmético a lo algebraico mediante la construcción de figuras geométricas y tablas con patrones numéricos.

Asimismo, según Vergel (2015) la generalización de patrones es considerada como una de las formas más importantes de introducir el álgebra en la escuela. Sin embargo, se presentan dificultades cuando a través de dicho proceso se estudian secuencias figurales. Muestra de ello es lo que advirtió Ursini (1994 citada en Vergel, 2015) cuando un grupo de profesores no pudo simbolizar patrones al tratar problemas donde se requería reconocer secuencias, por ejemplo, una de las preguntas que implicaba expresar analíticamente la regla general de una secuencia visual, obtuvo un 0% de aciertos.

Por su parte, Londoño, Kakes y Álamo (2014) descubrieron que los alumnos, al pasar de la identificación de patrones a la generalización, cuando se pide completar una tabla en forma correcta para valores específicos, no encuentran dentro de su lenguaje algebraico una expresión que represente lo que se pide de manera correcta.

Además, según Osorio (2012) cuando se trata de relacionar una figura o número cuyo patrón es de tipo cuadrático, varios alumnos no se percatan de qué está sucediendo de un término a otro, no observan qué pasa de una figura a otra. Así, el problema radica en que los estudiantes no alcanzan a percibir los cambios que presenta una figura respecto a otra; no identifican el patrón numérico para llegar a su posible generalización. Esto muestra que el proceso de generalización no se establece solo a partir de la detección de las regularidades del proceso observado (Velasco y Acuña, 2010).

En particular, uno de los estándares curriculares de matemáticas, que comprenden el conjunto de aprendizajes que se espera de los alumnos al terminar la educación secundaria es que "el alumno resuelve problemas que implican expresar y utilizar la regla general lineal o cuadrática de una sucesión" (México, 2011, p.16), propuesta por la Secretaría de Educación Pública (SEP) en México, mediante Los Programas de Estudio 2011 de educación secundaria en matemáticas. Es aquí donde se recurre al uso de sucesiones numéricas y figurativas y donde los estudiantes enfrentan una serie de problemas que están relacionados principalmente con:

- El tránsito de la aritmética al álgebra: esto podría ser porque en la escuela primaria los niños están más familiarizados con conocimientos del tipo aritmético (Pérez, Pérez y Hernández, 2013).

- Procesos sobre generalización de patrones: en este caso los estudiantes al momento de tratar de llegar a una expresión algebraica, pueden tener dificultades, ya que en ocasiones no logran percibir los cambios que se presentan de una figura a otra, lo mismo ocurre cuando trabajan con números, en consecuencia no identifican un patrón y no logran llegar a la generalización (Osorio, 2012).

Así que se puede sospechar que las dificultades que enfrentan los estudiantes en los procesos de generalización y cuando hacen uso de sucesiones en los niveles de educación básica, media superior y superior mucho dependerán de la experiencia vivida con las mismas y por consecuencia podría afectar su compresión cuando se den los primeros acercamientos al álgebra.

Por otra parte, según Osorio (2011) en secundaria se da cierta preferencia a los modelos lineales cuando se presentan secuencias figurativas para generalizar, ya que el número de actividades de secuencias figurativas de segundo orden o cuadráticas que se plantean son escasas, hecho que pudimos constatar al inspeccionar las notas de clase de una alumna de secundaria, lo cual se antepone a uno de los propósitos del estudio de las matemáticas de la educación secundaria donde menciona que los estudiantes "Modelen y resuelvan problemas que impliquen el uso de ecuaciones hasta de segundo grado, de funciones lineales o de expresiones generales que definen patrones" (México, 2011, p.14).

Problema de investigación

Los estudiantes de secundaria presentan dificultades al no poder identificar patrones o comportamientos al hacer uso de sucesiones, tanto numéricas como figurativas, sobre todo cuando las sucesiones son del tipo cuadrático.

Objetivo General

Diseñar y aplicar una situación didáctica que ayude a los estudiantes en la generalización del comportamiento de una sucesión figurativa de tipo cuadrático.

Objetivos particulares.

- Realizar un análisis preliminar que permita rescatar elementos para el diseño de una secuencia didáctica.
- Diseñar una secuencia didáctica relacionada con sucesiones figurativas del tipo cuadrático.
- Aplicar la secuencia didáctica a estudiantes de secundaria.
- Analizar los resultados obtenidos para mejorar el diseño.

Hipótesis

Se considera que con la implementación de la secuencia didáctica, los estudiantes lograrán el reconocimiento de patrones en sucesiones figurativas de tipo cuadrático y en consecuencia llegarán a la generalización.

El hecho de que el profesor solo sea una guía en el desarrollo de la secuencia didáctica y el hecho de que los estudiantes logren por sí solos llegar a la generalización, podría generar en ellos una comprensión más significativa de las sucesiones.

Justificación

El tema de sucesiones numéricas se aborda en los planes y programas de estudio en diferentes niveles de educación en México como son preescolar, primaria, secundaria y medio superior (Torres, Borjón y Hernández, 2013), es decir, durante todo el proceso educativo básico los estudiantes deben de estar trabajando con actividades en donde se vea implícito el tema de sucesiones.

Esto ayudaría en principio al desarrollo del pensamiento algebraico; sin embargo, la realidad dista en buena medida de lo que se propone en los documentos oficiales, por ejemplo Londoño, Kakes y Álamo (2014) encontraron que alumnos que han aprobado varios cursos de álgebra elemental, no cuentan, en la preparatoria, con herramientas algebraicas que les permitan llegar al proceso de generalización, más aún los resultados encontrados en (Ursini y Trigueros, 2006, citados en Juárez, 2011) permiten expresar que estudiantes universitarios que habían llevado cursos de matemáticas avanzadas siguen teniendo dificultades para manejar este concepto, llegando a evitar cualquier acercamiento algebraico y retornando a procedimientos de carácter aritmético. Esto quiere decir que respecto al currículo, de manera transversal, es necesario reforzar este tema.

Además, se ha identificado que cuando se abordan problemas relacionados con sucesiones en primer año de secundaria, se presentan mayormente sucesiones numéricas y en menor cantidad sucesiones figurativas, pero además si abonamos dos factores más, como es el que las sucesiones son en su mayoría del tipo lineal y que son escasos los problemas en donde se les pide que lleguen a la generalización, esto podría acarrear un vacío en el aprendizaje de los estudiantes. Es por eso que proponemos implementar una secuencia didáctica en la que se involucren secuencias figurativas de segundo orden o cuadráticas, en donde los estudiantes logren por sí solos visualizar el comportamiento o el patrón de una figura y con esto tengan mayores posibilidades de llegar a una generalización.

Asimismo Osorio (2012) y Vergel (2015) consideran que los estudiantes perciben mejor un patrón cuando hacen uso de sucesiones figurativas que cuando se emplean sucesiones numéricas y en consecuencia los estudiantes podrían tener más probabilidad de llegar a la generalización. Al respecto, en este trabajo los estudiantes podrán experimentar con sucesiones figurativas de segundo orden que les permita tener una comprensión de la generalización en la educación secundaria.

Fundamento Teórico y Metodológico

Para el diseño de una propuesta didáctica es importante saber qué actividades debemos plantear y de qué manera, para lograr el aprendizaje que pretendemos. Por esta razón es que nos basaremos en la Teoría de Situaciones Didácticas desarrollada por Brousseau (1986), pues ésta propone el estudio de las condiciones en las cuales se constituyen los conocimientos, y menciona que los alumnos aprenden por adaptación al medio.

Así, dentro de esta teoría se propone un modelo que intenta explicar el comportamiento didáctico, para ello utiliza conceptos que describen el proceso enseñanza – aprendizaje, algunos de estos conceptos son la clasificación de los tipos de situaciones en las que se encuentra un alumno: acción, formulación, validación, institucionalización.

Además, es una teoría amplia que permite considerar que todos los fenómenos pertinentes puedan ser tomados en consideración, así podremos utilizar modelos adecuados para trabajar en la mayoría de los casos.

Por otro lado como metodología de la investigación se propone La Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), que comprende cuatro fases:

- Análisis preliminares. Donde realizaremos un estudio epistemológico para analizar la manera en que las sucesiones figurativas se constituyeron como tema de estudio en secundaria. Además se efectuará revisión acerca de la manera en que se trabajan las sucesiones figurativas en secundaria, y una inspección para analizar qué problemas en particular tienen los sujetos de nuestro estudio con respecto al tema.

- Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas. Con base en los resultados de los análisis preliminares se retomarán aquellos elementos que se consideren pertinentes para el aprendizaje de las sucesiones figurativas. Esto permitirá organizar una situación de aprendizaje en la que habremos de distinguir las variables didácticas. También plantearemos dicha situación y realizaremos el análisis a priori respectivo, donde explicitaremos los supuestos, los probables y los seguros, de manera que nos permitan trazar la mayoría de las rutas que los alumnos pudieran tomar en la experimentación.

- Experimentación. Esta fase comprende la descripción de la manera en que se llevará a cabo la puesta en escena y la manera en que se hará la recopilación de evidencias.

- Los análisis a posteriori y validación. En esta fase se analizará lo que sucedió en la puesta en escena. Para la validación (interna) se realizará una confrontación entre los análisis a priori y a posteriori.

En general, se realizará un estudio del tipo cualitativo, donde se trabajará con estudiantes de educación secundaria, implementando una secuencia didáctica.

Reflexiones/Conclusiones

Hasta el momento se ha identificado que el sentido del estudio de las sucesiones numéricas de segundo orden, en secundaria, se ve limitado al tipo de situaciones en la que se pide "encontrar la regla definida por x sucesión"; es decir, la enseñanza de este tema deja de lado aquellas situaciones donde el estudiante habría de descubrir el por qué o para qué encontrar dicha regla. Es por esta razón que para su aprendizaje proponemos incluir sucesiones figurativas.

Al término de la investigación se espera proponer una herramienta didáctica para mejorar el aprendizaje del uso de la variable como número general, y por consecuencia aportar para el desarrollo del pensamiento algebraico.

Por otra parte, consideramos que la elección de la teoría de situaciones didácticas como marco teórico y de la ingeniería didáctica como metodología, nos aportarán varios elementos teóricos que nos ayudarán a comprender el fenómeno de la enseñanza, por ende, nos facilitarán tanto la elaboración de la situación didáctica, como su validación.

Referencias

Araujo, M., García, S., García, J. y López, O. (2006). *Matemáticas I. Volumen I. Telesecundaria.* México: Secretaría de Educación Pública. Recuperado de: http://issuu.com/sbasica/docs/matematicas1vol1_1314.

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En: M. Artigue, *Ingeniería Didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33-59). México: Grupo editorial Iberoamérica.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática. *Recherches en Didáctique des Mathématiques, 7(2), 33-155.* (versión castellana).

Ferrini-Mundy, J., Lappan, G., y Phillips, E. (1997). Experiences with patterning. *Teaching Children Mathematics*, *3*, 282-289.

Juárez, J. (2011). Dificultades en la interpretación del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria: un análisis mediante el modelo 3UV. *Números Revista de Didáctica de las Matmáticas, 76,* 83-103. Recuperado de: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/76/Articulos_04.pdf.

Londoño, N., Kakes, A. y Álamo, A. (2014). Del reconocimiento de patrones a la generalización. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27,* 361-367. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de: http://www.clame.org.mx/documentos/alme27.pdf

México. Secretaría de Educación Pública. (2011). *Programas de estudio 2011, Guía para el maestro. Educación básica secundaria. Matemáticas*. D.F., México.

Osorio, J.C. (2012). Procesos de generalización que intervienen en el aprendizaje del alumno al hacer uso de sucesiones. R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 25*, 75-83. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de: http://www.clame.org.mx/documentos/alme25.pdf

Osorio, J. C. (2011). Dificultades para la construcción de un modelo algebraico de segundo orden a través de sucesiones, para definir el enésimo término. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24*, 13-22. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de: http://www.clame.org.mx/documentos/alme24.pdf

Pérez, A. R., Pérez, A. D. y Hernández, H. (2013). Secuencia didáctica para facilitar la transición entre la aritmética y el álgebra. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26*, 863-871. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de: http://www.clame.org.mx/documentos/alme26v.2.pdf

Przenioslo, M. (2005). Introducing the concept of convergence of a sequence in secondary school. *Educational Students in Mathematics.* 60: 71 – 93.

Sánchez, F. (2012). *Matemáticas 1: Construcción del pensamiento.* México: Fernández educación.

Torres, M., Borjón, E. y Hernández, J. (2013). Una aproximación al concepto de sucesión con uso de tecnología por medio de representaciones semióticas en el nivel bachillerato. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 26, 2011-2018. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de: http://www.clame.org.mx/documentos/alme26.pdf

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. y Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del Álgebra Elemental. Una propuesta alternativa.* México: Trillas.

Velasco, K. y Acuña, C. (2010). El uso de patrones geométricos para la construcción del lenguaje simbólico en estudiantes de nivel medio superior. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23*, 805-811. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA, 9*(3), 193-215.

Autores

José Rolando Palomino Iraburo; UAZ. México; palomino_rolando@outlook.com
Nancy Janeth Calvillo Guevara; UAZ. México; nancycalvillo@gmail.com

Leticia Sosa Guerrero; UAZ. México; lsosa19@hotmail.com

UNA PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS PROPIEDADES DE LOS ÁNGULOS EN ESCUELAS TELESECUNDARIAS MULTIGRADO

Víctor Manuel Ibarra Solís

Resumen

Motivado por la carencia de material apropiado para la enseñanza de matemáticas en escuelas Telesecundarias multigrado y preocupado por las dificultades que presentan los estudiantes en la adquisición del concepto de ángulo, surge la necesidad de diseñar una propuesta de enseñanza de las propiedades de los ángulos en esta modalidad, con base en la teoría cognitiva de Mitchelmore y White (2000), que considera la formación del ángulo a partir de las experiencias físicas que viven los estudiantes, se pretende plantear una serie de materiales concretos y el uso de Geogebra para la enseñanza significativa de las propiedades de los ángulos en Escuelas Telesecundarias Multigrado.

Palabras claves: Ángulos, escuelas multigrado, materiales concretos, Geogebra, propuesta de enseñanza.

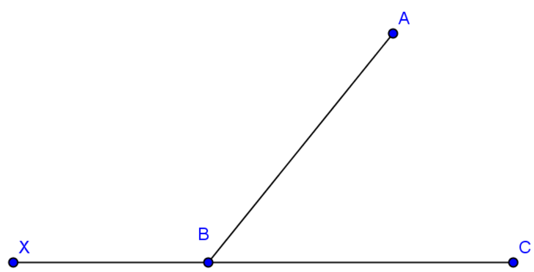
Introducción

El presente documento muestra la inquietud por la enseñanza significativa de las propiedades de los ángulos en una Escuela Telesecundaria Multigrado. En Zacatecas las escuelas secundarias tienen diferentes modalidades: técnicas, generales y telesecundarias. En cuanto a las escuelas telesecundarias, existen diferentes clasificaciones. Según el número de alumnos inscritos en el programa, se dividen en organización completa (todos los profesores para todos los grados), bidocentes (escuelas con dos profesores para impartir todas las materias a los tres grados) y multigrado (un profesor para todas las materias y todos los grados).

En escuelas multigrado la complejidad aumenta porque tienen los mismos programas, mismos libros y los mismos tiempos para dedicar a la enseñanza en educación secundaria, una de las dificultades más grandes a las que se enfrenta un profesor de Telesecundaria en multigrado, es la ausencia de material apropiado para llevar a cabo la tarea de impartir la asignatura de matemáticas, entre otras, a los tres grados de Telesecundaria.

Entonces el profesor al impartir clases debe de atender a todos los alumnos de los diferentes grados, la complejidad aumenta cuando entramos a la asignatura de matemáticas, donde solo existe un libro para el alumno y uno para el maestro, por lo que en la mayoría de las escuelas, los maestros comienzan sus clases con una explicación del tema en general para luego ir profundizando con cada grado hasta llegar a lo particular de cada grado, por ejemplo, al explicar el tema de ángulos, el maestro comienza explicando qué es un ángulo para luego continuar con el tema en cada grado, con primer grado trabaja la clasificación de ángulos, con segundo trabaja ángulos comparativos y ángulos entre paralelas y en tercero trabaja las líneas notables de un triángulo. Algunos profesores de Telesecundarias Multigrado se reunieron y empezaron a crear material específico para las asignaturas de español y matemáticas, a estos materiales le llamaron "catálogos", los cuales son secuencias de actividades que permiten la reflexión sobre un tema concreto, la forma de aplicarlos es con tintes de asesorías personalizadas por parte del profesor o de alumnos que ya recibieron asesoría del "catalogo", el sistema de catálogos es una estrategia excelente para atender a los alumnos de escuelas multigrado en Telesecundaria, sin embargo esto no está formalizado y es necesario dar a conocer a otras Telesecundarias Multigrado el beneficio que conlleva trabajar con catálogos.

El propósito es diseñar una propuesta de enseñanza enfocada a las propiedades de los ángulos, por las dificultades que tienen los estudiantes de Telesecundarias Multigrado en torno al ángulo como la dificultad para utilizar el transportador, la dificultad para definir la clasificación de los ángulos según su medida, las dificultades que surgen cuando se revisan las propiedades de los ángulos y por último la dificultad para el manejo del lenguaje matemático alrededor de los ángulos, por ejemplo algunos alumnos al intentar medir un ángulo ABC terminan midiendo el ángulo ABX.



En Telesecundaria el tema de ángulos se encuentra en el eje temático de forma, espacio y medida, y la mayoría de los temas necesitan del concepto de ángulo, por lo que es un contenido transversal, sin embargo este tema es visto en un segundo plano puesto que solo aparece de manera directa en segundo año en el tema de *"Identificación de relaciones entre los ángulos que se forman entre dos rectas paralelas cortadas por una transversal"* (SEP, 2011, p. 39), por lo que se pretende dar más importancia en la enseñanza de las propiedades de los ángulos a través del diseño de una propuesta de enseñanza con ayuda de un software de geometría dinámica y material concreto, para ello tomaremos en cuenta las investigaciones de algunos autores que se preocupan por la enseñanza del ángulo.

Los australianos Mitchelmore y White (2000) se han preocupado por la adquisición del concepto de ángulo, para ello descubrieron que el concepto es difícil de comprender y proponen que los niños reconocen similitudes progresivamente cada vez más profundas entre sus experiencias cotidianas y la noción formal de ángulo y los clasifican en primer lugar a situaciones específicas, luego en contextos más generales, y finalmente en dominios abstractos, dichos investigadores han indagado ampliamente acerca de la problemática en cuanto a la comprensión de los ángulos.

Por otro lado Casas y Luengo (2005) identificaron cuáles son los conceptos parciales a partir de los que se construye el concepto general de ángulo y cuáles son los más importantes dentro de la estructura cognitiva de los alumnos y nos mencionan que el estudiante necesita relacionar los ángulos con objetos de su vida cotidiana, tales como la esquina de una habitación, unas tijeras, las manecillas del reloj, entre otras y nos mencionan que es necesario considerar estas situaciones cotidianas para mejorar el entendimiento del concepto de ángulos.

Algunas dificultades que exhiben los estudiantes son que no utilizan correctamente un transportador miden un ángulo, tal vez por la forma en que los transportadores están fabricados, pero la dificultad va más allá y tiene sus orígenes como lo menciona Lineberry (2010) que debido a las múltiples definiciones de ángulo se ha logrado que los estudiantes se confundan ante el concepto de ángulo.

Estos autores nos mencionan la problemática en torno a la comprensión del concepto, pero otros autores como Godino (2010) encontraron que la suma de ángulos se debería interpretar como una suma de amplitudes angulares, no como la suma de los números correspondientes a sus medidas tomando el grado como unidad de medida, por lo que existe la necesidad de investigar la comprensión de las propiedades de los ángulos.

No obstante Rotaeche (2008) nos presenta los elementos teóricos que fundamentan una secuencia didáctica orientada a la construcción de la noción de ángulo, particularmente sus significados como parte de vuelta y giro, y algunos resultados de la puesta en escena en un contexto escolarizado, pero está pensada para secundarias en general, sin embargo las escuelas Telesecundarias multigrado tienen diferentes situaciones de enseñanza como el contexto, en el que el profesor no solo imparte la asignatura de matemáticas, los libros de texto, los materiales, etcétera, por ello surge la necesidad de diseñar una propuesta para la enseñanza de ángulos en una escuela telesecundaria multigrado.

Consideramos que encontrar la forma de enseñar la aplicación de los ángulos en la geometría, podría ayudar a los estudiantes a la comprensión del tema de una forma significativa la cual podría hacerse visible por medio de las situaciones contextuales de los estudiantes relacionándolo con las propiedades de los ángulos y con apoyo en la teoría cognitiva de Mitchelmore y White (2000) que considera la formación del ángulo a partir de las experiencias físicas que viven los estudiantes, de aquí nace la pregunta: ¿Cómo utilizar los elementos cognitivos en una propuesta de enseñanza enfocada a las propiedades de los ángulos en escuelas multigrado de Telesecundaria? La cual se proyecta en diseñar una propuesta de enseñanza de las propiedades de los ángulos a partir de las experiencias físicas que viven los estudiantes en una Escuela Multigrado de Educación Telesecundaria.

Marco teórico

La teoría cognitiva de Mitchelmore y White (2000) considera la formación del ángulo a partir de las experiencias físicas que viven los estudiantes, es decir, parte de la génesis de las abstracciones necesarias para entender los significados asociados al concepto de ángulo. Además, interpretan e integran otras investigaciones a las etapas que proponen en su teoría. Esta teoría toma las nociones de clasificación, similitud, abstracción y concepto.

Se describen tres etapas de abstracción que representan una clasificación, progresivamente más refinada de la experiencia de los estudiantes. La primera etapa se denomina conceptos del ángulo situado y se limita a las situaciones físicas asociadas con el ángulo, de forma implícita. Los conceptos formados en esta etapa se generalizarán en el tiempo conforme se ponga atención en la situación física y las acciones ejecutadas y menos en las circunstancias sociales.

La segunda etapa se denomina conceptos contextuales del ángulo. En esta el alumno clasifica las situaciones físicas en contextos físicos, es decir, tiene cierto estado de reconocimiento de las similitudes que hay entre las situaciones diversas que ha enfrentado. Estos contextos físicos se forman sobre la base de configuraciones geométricas comunes y de acciones físicas similares.

La tercera etapa denominada conceptos abstractos del ángulo, se da el reconocimiento de las semejanzas que existen entre los contextos del ángulo. Esto constituye el principio del concepto matemático elemental de ángulo.

Las similitudes entre contextos no son del todo obvias, por lo que reconocerlas requiere regularmente de acciones físicas o mentales por parte del aprendiz, es un proceso constructivo que requiere de abstracción reflexiva.

Una clase de contextos físicos del ángulo que el alumno reconoce como similares recibe el nombre de dominio abstracto del ángulo. Cuando la similitud se abstrae para formar un concepto entonces se habla del concepto abstracto de ángulo. Dentro de estos conceptos Mitchelmore y White (2000) reconocen un concepto estándar que se relaciona con todos los contextos físicos del ángulo y es el más común entre las construcciones del estudiante: aquel de las dos líneas inclinadas que se encuentran en un punto.

Diseñar una propuesta de enseñanza de las propiedades de los ángulos a partir de las experiencias físicas que viven los estudiantes en una escuela multigrado de educación telesecundaria con base a las etapas de la Teoría Cognitiva en la que se vean reflejadas las experiencias de los alumnos en los conocimientos que se desean adquirir en torno a la comprensión del concepto del ángulo.

Aspectos metodológicos

Para cumplir con tal objetivo, se realizarán acciones donde se recabe información para obtener los elementos que deben de contener un catálogo pertinente para la enseñanza de los ángulos, así como un análisis de la literatura acerca de las dificultades que tienen los estudiantes alrededor del ángulo, para conjuntarlos y obtener una propuesta de enseñanza adecuada para Escuelas Telesecundarias Multigrado, por esto se proponen las siguientes actividades:

- Recopilar catálogos que utilizan algunos maestros en Multigrado para la enseñanza del ángulo o temas afines, con el fin de conocer los materiales de una manera profunda.
- Analizar esos catálogos desde la perspectiva de La Teoría Cognitiva de Mitchelmore y White (2000).
    - Grabaciones de video y de audio.
    - Entrevista a profesores de Multigrado.
    - Análisis de Estenografía.

Con el propósito de encontrar elementos para el diseño de la propuesta de enseñanza.

- Búsqueda, diseño o rediseño de materiales concretos o actividades en Geogebra para ajustarlos en la propuesta de enseñanza.

- Diseño de propuesta de enseñanza.
- Aplicación de la propuesta por profesores de Escuela Telesecundaria Multigrado
- Toma de datos.
    - Guía de observación
    - Grabación de video
    - Entrevista a Maestros
- Análisis de datos.
- Posible rediseño de propuesta de enseñanza.
- Reflexiones.
- Conclusiones.

Reflexiones

El diseño de materiales apropiados para la enseñanza en escuelas telesecundaria multigrado podría generar nuevas estrategias dentro de la modalidad además de facilitar la enseñanza al profesores y el aprendizaje a los alumnos, se pretende que sea el primer paso para considerar el diseño de material específico y formal dentro de escuelas multigrado y con ello mejorar la calidad de educación en el país.

Los estudiantes tienen dificultades en los ángulos, atender a ellas es una prioridad ya que el comprender el concepto de ángulo, podría facilitar la adquisición de temas o conceptos relacionados con el ángulo, entonces al diseñar la propuesta se espera comprender la forma en que un estudiante adquiere el concepto de ángulo.

Suponemos que al analizar las etapas de la teoría cognitiva en los contenidos a abordar en torno al concepto de ángulo en escuelas multigrado, se obtendría una secuencia de actividades relacionadas con las situaciones que el alumno vive cotidianamente con el concepto a comprender.

Algunas de las secuencias van relacionadas con familiarizar al alumno en las situaciones cotidianas con el concepto de ángulo, como relacionar las esquinas de una mesa con ángulos rectos, las tijeras con el movimiento entre ángulos agudos y ángulos obtusos pasando por el ángulo recto.

Después continuar con la secuencia en la que el alumno encuentre la similitud entre diferentes contextos, es decir, relaciona diferentes situaciones con un tipo de ángulo, como la esquina de una mesa, la esquina de una pared y los escalones tienen una similitud con el ángulo recto.

En la secuencia también se incluirán actividades en las cuales se consideren las similitudes del concepto de ángulo en diversas situaciones, de manera tal que en una rueda se encuentren diferentes ángulos o se relacione con un ángulo de 360°.

Esta secuencia busca el apoyo de la tecnología mediante el software "Geogebra" el cual nos permitirá diseñar actividades en las que las etapas puedan ser analizadas y comprendidas por los alumnos, de acuerdo con Casas y Luengo (2005) las actividades diseñadas en el

DGS estarán relacionadas con las situaciones cotidianas en las que el alumno interactúe con las manecillas de un reloj o la posición de los rayos en una rueda de bicicleta.

Referencias

Casas, L. M., y Luengo, R. (2005). Conceptos nucleares en la construcción del concepto de ángulo. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *23*(2), 201-216.

Godino, J. D., Gonzato, M., y Blanco, M. T. F. (2010). ¿ Cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo? . Conocimientos puestos en juego en la realización de una tarea matemática. *Investigación en educación matemática XIV*, 341-352.

Kothari (2004). *Research Methodology. Methods & Techniques*. Second Revised Edition. New Delhi: New Age International (P) Ltd., Publishers.

Mitchelmore, M. C., y White, P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstraction and generalisation. *Educational Studies in Mathematics*, *41*(3), 209-238.

Lineberry, C. (2010). *Using Dynamic Geometry Software to Develop Students' Conceptual Understanding of Angle*. (Thesis of Master of Science). Faculty of North Carolina State University, Raleigh, North Carolina.

Rotaeche, A. (2008). La construcción del concepto de ángulo en estudiantes de secundaria. Tesis de maestría no publicada. CICATA IPN, Legaria.

SEP. (2011). *programas de estudio 2011*. Guía para el maestro. México.

White, P., y Mitchelmore, M. (2001). Teaching for Abstraction: Angle as a case in point. In J. Bobis, B. Perry, y M. C. Mitchelmore (Eds.), *Numeracy and beyond* (Proceedings of the 24th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Sydney, pp. 531-538). Sydney: MERGA

Autor

Víctor Manuel Ibarra Solís; UAZ. México; vibarra_sol@hotmail.com

UNA CARACTERIZACIÓN DE PROBLEMAS CONTEXTUALIZADOS QUE IMPACTEN EN EL DESARROLLO DE PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Zuleyma Sarahí Pérez Moguel, Isabel Tuyub Sánchez, Landy Sosa Moguel

Resumen

El objetivo de este trabajo es contribuir con una propuesta de características esenciales de problemas contextualizados que podrían favorecer la construcción de aprendizajes significativos a través del desarrollo de pensamiento matemático. Para lo cual se realizó una selección y análisis de los problemas contextualizados propuestos en libros de texto de los diferentes Sistemas Educativos de bachillerato del estado de Yucatán, con apoyo de una triangulación cuyos vértices son: el análisis de dichos problemas, las ventajas que Camarena aporta para determinar un *problema contextualizado y* las cuatro dimensiones de la teoría Sociopistemológica de Cantoral, para la abstracción de las características esenciales que hagan de éstos, problemas contextualizados que favorezcan un impacto en el desarrollo de pensamiento matemático en el estudiante.

Palabras clave: problemas contextualizados, pensamiento matemático, competencias.

Introducción

En la actualidad es reconocido que existe una brecha entre la matemática que se emplea en la vida tanto cotidiana como profesional y la matemática escolar, lo cual se puede reflejar en apatía, deserción y rezago en las matemáticas. Ante esta situación se han realizado investigaciones en Matemática Educativa que apunta a varias direcciones, algunas con razones cognitivas, epistemológicas, socioculturales o didácticas. En lo que respecta a la matemática escolar se han realizado cuatro reformas en México, la del 1942, 1970, 1993 y 2013 (Ruíz, 2013) que han perfilado al desarrollo de competencias matemáticas.

Existen investigaciones que afirman que la resolución de *problemas contextualizados* juega un papel importante para el desarrollo de competencias y de un pensamiento matemático. Por ejemplo, Ramos y Font (2006), se basan en la necesidad del uso de contexto para que el estudiante sea capaz de enfrentar las exigencias de su futuro cotidiano y profesional.

Por otra parte, las competencias han reflejado un impacto en las pruebas nacionales como la Evaluación Nacional de Logro Académico en Centros Escolares (ENLACE) e internacionales como el Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes (PISA, por sus siglas en inglés), ya que miden la aplicación de conocimientos, habilidades y actitudes de los estudiantes en la resolución de problemas en contextos extra-matemáticos. Sin embargo, los estudiantes mexicanos han demostrado en dichas pruebas niveles muy bajos de desempeño. Por ejemplo, en la prueba PISA 2012, México ocupó el lugar número cincuenta y tres de sesenta y cinco países participantes (Flores y Díaz, 2013). Esto quizás se deba a que los estudiantes no están familiarizados con este tipo de problemas que les demanden el desarrollo de pensamiento matemático. Si se da una visión rápida al tipo de problemas presentados en las pruebas PISA y ENLACE, se observa un contraste entre dichos problemas con los que se le presentan al estudiante en los libros de texto utilizados en sus escuelas.

En los libros de texto se pueden encontrar problemas textualizados, puesto que distan de ser *contextualizados,* entendiendo por contexto "…las condiciones y circunstancias de carácter sociocultural en las que física o simbólicamente se sitúa un hecho o persona" (Aparicio, Jarero, Sosa y Tuyub, 2010, p. 167), esto es, mirar al contexto como el escenario en el que tiene lugar la actividad humana, considerando sus aspectos sociales y culturales que permitan al estudiante construir aprendizajes con sentido y significado. Y por otro lado, coincidimos con Díaz y Poblete (2001) en que un problema matemático corresponde a una situación representada en forma textual, en donde el estudiante intenta responder a una pregunta hecha o realiza una tarea determinada empleando su experiencia y con informaciones que se proporcionan ya sea explícita o implícitamente, además surge la necesidad de buscar un medio para responder a la pregunta planteada; y debe recurrir a la matemática o a las habilidades intelectuales frecuentemente utilizadas para lograrlo.

Debemos tener claro que el pensamiento matemático suele referirse a las formas en que piensan las personas no solo con base en tópicos matemáticos sino haciendo referencia a los procesos avanzados del pensamiento: abstracción, justificación, visualización, estimación y razonamiento bajo hipótesis (Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez, Garza, 2000).

Por lo que un ***problema contextualizado*** será *aquel que permita al estudiante construir sus conocimientos en situaciones con aspectos sociales, culturales, científicos, etc., de su interés, y que propicien el desarrollo de pensamiento matemático para la construcción de aprendizajes significativos, dándole un sentido y significado al saber matemático involucrado*.

Sin embargo, a pesar de que se contemplan en las reformas educativas y son utilizados como medio de evaluación, en pruebas nacionales como la ENLACE e internacionales como PISA, no se ha cuestionado sobre cómo debe ser un *problema contextualizado* para garantizar ventajas en la generación de competencias en los estudiantes. De ahí que tomar como objeto de estudio *problemas contextualizados*, en el sentido como lo definimos, permite mirar que pareciese que los libros de texto de bachillerato, en particular del estado de Yucatán, están en su mayoría llenos de problemas textualizados los cuales carecen de una intencionalidad didáctica para el desarrollo de pensamiento matemático. Por esta razón, nos hemos planteado la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué características poseen los *problemas contextualizados* que promueven el desarrollar un pensamiento matemático y la significación de saberes matemáticos?

Objetivo

Por lo que el objetivo del presente trabajo es determinar características esenciales que potencialicen de forma intencional *problemas contextualizados*. Para ello se identificarán problemas que según el marco de referencia sean contextualizados y abstraer sus características para contribuir con una propuesta que apoye al diseño o rediseño de dichos problemas.

Marco teórico

"La matemática no se inventó para ser enseñada" (Cantoral, 2013, p. 28), sin embargo por su necesidad funcional incluso en actividades básicas para el ser humano, como por ejemplo ir a comprar a la tienda de la esquina, cocinar para determinado número de personas o trasladarse de un lugar a otro, tenemos que enseñarla y aprenderla. Empero al llevar el saber matemático al aula, sufre una serie de modificaciones con el fin de facilitar la enseñanza, despersonalizándolo y descontextualizándolo, lo cual provoca una pérdida de sentido y significado de la propia matemática. Por esta serie de modificaciones que con los años ha sufrido cada vez más la matemática y por esta necesidad funcional de la matemática que se observa en el ámbito cotidiano, laboral y profesional, nace una teoría que estudia y modela la construcción social del conocimiento, mediante el uso de las prácticas sociales con las cuales se explican las normativas de funcionamiento social y la exigencia a las matemáticas escolares para que adquieran un valor de uso y sean funcionales en un ambiente profesional y cotidiano, esta teoría recibe el nombre de Socioepistemología (Cantoral, 2013).

El objetivo de la Teoría Socioepistemológica es mirar las diversas formas en que se desarrolla el pensamiento matemático, tanto en el ámbito escolar como en el ámbito no escolar, de manera que los conocimientos puedan difundirse en la sociedad destacando su sentido funcional en las situaciones tanto cotidianas como profesionales, así como en otras áreas de estudio como la física, química, biología, etc.

Por ello y como menciona Cantoral (2013) "las matemáticas en tanto creación humana, están situados cultural, histórica e institucionalmente y recrean a su vez la vida misma" (p. 33). Es decir, que podemos encontrar las matemáticas en toda actividad humana, desde la más simple hasta la más compleja, lo cual debemos aprovechar al momento de enseñar matemáticas. Dentro de la teoría se consideran cuatro dimensiones del saber, la dimensión epistemológica que refiere la forma en que el saber matemático fue construido, la dimensión cognitiva, relativa los procesos mentales realizados por el estudiante al utilizar el saber, la dimensión didáctica donde intervienen los procesos de comunicación y organización del saber y la dimensión social-cultural, que alude a los escenarios en los cuales el saber matemático tiene lugar, es decir, una construcción social del conocimiento en cuestión, que invita al estudiante a mirar el saber matemático en sus diversas funcionalidades, permitiendo identificarlo en prácticas y situaciones de la realidad cotidiana, laboral o profesional en las que adquiere sentido y significado.

Actualmente la Socioepistemología postula que para entender la complejidad de la naturaleza del saber y su funcionalidad al nivel cognitivo, didáctico, epistemológico y social deberá problematizar el saber situándole en el entorno de la vida del aprendiz, de manera que éste le dé un significado al aprendizaje que está construyendo. Coincidimos con Cantoral cuando menciona en su libro que una cuestión fundamental de importancia contemporánea consiste en adecuar una enseñanza, en el sentido más vasto del término, a las exigencias del pensamiento, del aprendizaje y de los contextos históricos, institucionales y culturales que requiere la actividad humana. Así como la integración sistémica de las cuatro dimensiones propuestas por esta teoría, que enriquezca el entendimiento del concepto matemático, a medida que lo haga funcional en la vida cotidiana y profesional.

De esta manera, la teoría Socioepistemológica rompe o se aleja de los programas escolares tradicionalistas, tomando una postura original sobre el problema de la construcción social del conocimiento matemático y sobre la parte didáctica del quehacer matemático vistos en un ambiente socio-cultural.

Bajo esta teoría, Cantoral hace referencia que lo social no se reduce a la interacción entre individuos, sino que éstos interactúen con su entorno, que pudiera ser por ejemplo, la resolución de un problema situacional *contextualizado* que le permita al estudiante utilizar herramientas tales como conocimientos, habilidades y actitudes para construir aprendizajes significativos. Por lo que esta perspectiva socioepistemológica permite a nuestro trabajo de investigación mirar que los *problemas contextualizados* son pertinentes y que deben ir encaminados al desarrollo de pensamiento matemático por medio de contextos extra-matemáticos que propicien una relación de la escuela con la vida cotidiana y lo laboral, de manera que la unión de estos dos elementos permitan la construcción de aprendizajes con sentido y significado.

Además de la Teoría Socioepistemológica, existe otra teoría que también le apuesta al uso de contextos extra-matemáticos como un elemento de gran importancia para la construcción de aprendizajes significativos: *La Matemática en el Contexto de las Ciencias* (Camarena, 2009), la cual "reflexiona sobre la vinculación que debe existir entre la matemática y las ciencias que la requieren, entre la matemática y las situaciones de la vida cotidiana, así como entre la matemática y los problemas de la vida laboral y profesional del futuro egresado" (p. 16). Por lo que importa considerar para el proceso de enseñanza-aprendizaje el uso de contextos extra-matemáticos que acerquen al estudiante a la realidad social y lo prepare para las exigencias de su futuro profesional. Específicamente esta teoría indica dos medios para lograr aprendizajes con sentido y significado, los cuales son la resolución de problemas y la realización de proyectos. Sin embargo, en este trabajo solamente estudiaremos la resolución de *problemas,* ya que Camarena menciona que éstos permiten un acercamiento de las matemáticas con las demás ciencias al observar su sentido funcional, lo que podría despertar interés o motivación en los estudiantes por aprender matemáticas. En este trabajo, por resolución de problemas entenderemos que se tratan de la resolución de problemas contextualizados, pues consideramos que estos son un camino que contribuye a la construcción de aprendizajes con sentido y significado.

La Teoría de la Matemática en el contexto de las Ciencias, está conformada por diferentes fases, empero para fines de nuestro trabajo, únicamente ahondaremos en la fase didáctica, de donde inferimos las siguientes "ventajas" que destacan elementos favorables asociados a los *problemas contextualizados:*

Esta teoría profesa un cambio de paradigma educativo, de la enseñanza tradicional a una enseñanza con conocimientos integrados y centrada en el aprendizaje, está centrada en el aprendizaje, permitiendo que el estudiante sea más activo y participativo en la construcción de sus aprendizajes. También se observa que la matemática en contexto refuerza el desarrollo del pensamiento en temas de interés para el estudiante y vincula los conceptos matemáticos con las demás asignaturas que se cursan y al ritmo y tiempos requeridos. Se fortalece la reorganización cognitiva de conceptos y procesos matemáticos, haciendo al estudiante transitar entre los registros aritmético, algebraico, analítico, visual y contextual para construir su propio conocimiento, con estructuras mentales articuladas (Camarena, 2009).

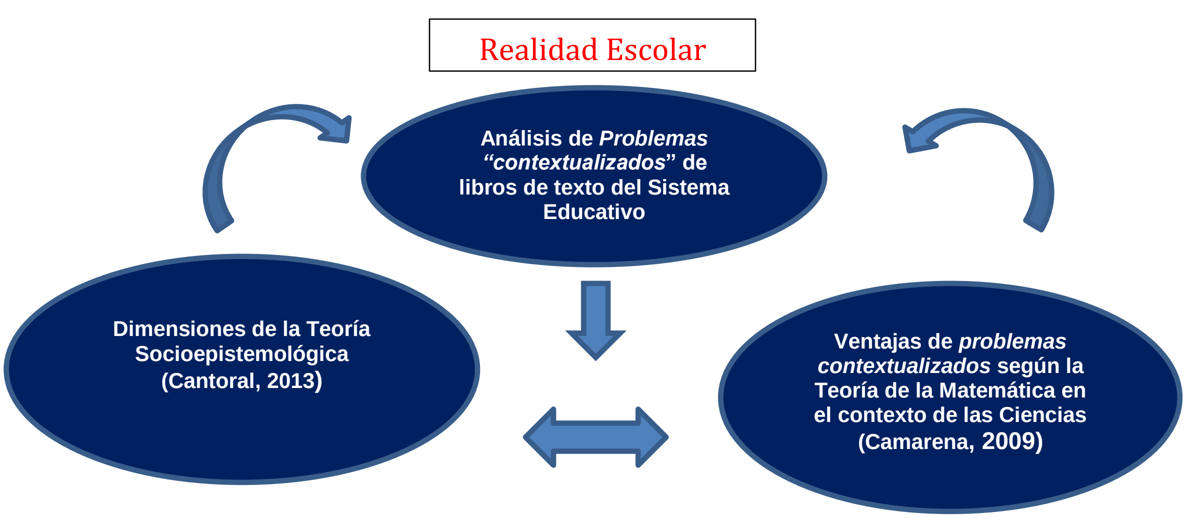
Es evidente, por tanto, la importancia de la resolución de *problemas contextualizados* de manera que el estudiante observe la utilidad de las matemáticas en distintas áreas de estudio y adquiera con ello aprendizajes significativos.

Para nuestro trabajo de investigación utilizaremos de base por un lado, lo que la Teoría Socioepistemológica precisa que debemos reflexionar sobre los tipos de problemas y actividades que les planteamos a los estudiantes basados en situaciones reales en donde aparezcan las estructuras matemáticas que se desean enseñar, de manera que éstos promuevan el desarrollo de un pensamiento matemático. Y por otra parte, la Teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias, para que dichos problemas sean aquellos que en diversos contextos, estén influenciados con datos de tipo social, cultural, económico y político, de manera que el estudiante al resolverlos se enfrente a simulaciones de situaciones que se le presentarán en un futuro cotidiano, laboral y profesional. De esta manera, consideramos la resolución de *problemas contextualizados* como un medio para promover el sentido y significado de los saberes matemáticos, así como el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes y por ende, su aprendizaje.

Método

En este trabajo, la investigación será de tipo cualitativa ya que es de corte exploratorio y lo que nos interesa es abstraer y proponer características de los *problemas contextualizados*, mediante una técnica de triangulación, por cuanto contribuye a elevar la objetividad del análisis de los datos y a ganar una relativa mayor credibilidad de los hechos (Ruiz, 1999).

La triangulación realizada tiene como vértice principal el análisis de *problemas contextualizados* encontrados en libros de texto de los diferentes Sistemas Educativos del nivel Medio Superior del estado de Yucatán, segundo vértice las ventajas que Camarena aporta para determinar un *problema contextualizado*, en su teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias *y* tercer vértice las cuatro dimensiones de la teoría Sociopistemológica de Cantoral, que nos permitirán determinar las características desde dichas dimensiones de análisis. Lo cual se ilustra a continuación:



Para el logro de nuestro objetivo, se analizaron los *problemas contextualizados* propuestos en libros de texto utilizados por las diferentes instituciones educativas de nivel bachillerato del estado de Yucatán, incorporadas a la Universidad Autónoma de Yucatán y a la Secretaría de Educación Pública. Se revisaron los libros de texto del primer al quinto semestre de las Escuelas Preparatorias de la UADY, los del COBAY y los de las Escuelas Preparatorias Estatales; correspondientes a las asignaturas de Álgebra, Geometría, Trigonometría y Geometría Analítica, Precálculo y Probabilidad y Estadística, o sus equivalentes, las cuales son de tronco común entre los sistemas educativos. Las escuelas del CONALEP y los DGETI's no utilizan un libro de apoyo durante sus cursos de matemáticas, por lo que no se contemplaron. Se seleccionaron los problemas que cumplían con las ventajas de un *problema contextualizado*, según la teoría matemática en el contexto de las ciencias, cuidando analizar todos los problemas propuestos en los libros de texto y ante ello no hubo una cantidad predefinida de los problemas seleccionados en cada uno de los libros o por sistema educativo, más bien dependía de la asignatura, tema y que fomenten apoyo a la construcción de aprendizajes significativos y que incluso propiciaban el desarrollo de pensamiento matemático, para ser un problema seleccionado.

Se analizó cada problema contextualizado seleccionado y se identificaron características en él, realizando un análisis general del problema, posteriormente determinando qué ventajas de la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias cumplía y finalmente se realizó un análisis de acuerdo a las dimensiones de la teoría Socioepistemológica.

Posterior al análisis de cada problema, se compararon y abstrajeron las características comunes de los *problemas contextualizados* seleccionados, esenciales para que éstos impacten en el desarrollo de pensamiento matemático, de manera que el estudiante desarrolle competencias y construya aprendizajes significativos.

Reflexiones y conclusiones

La siguiente tabla presenta las características esenciales encontradas de los *problemas contextualizados*, las cuales se organizaron con base en las cuatro dimensiones de la teoría socioepistemológica:

Epistemológico	**Cognitivo**	**Didáctico**	**Social**
Uso de experiencias de los estudiantes. Uso actual del origen del saber matemático.	Identificación de conocimientos específicos. Información esencial Congruencia entre contenidos.	Intencionalidad didáctica. Problemas aplicados para inducción, desarrollo ó consolidación. Tránsito entre registros.	En un escenario familiar al estudiante. Contribuye a la Alfabetización Científica.

Es importante mencionar que las características presentadas en la tabla anterior, son una propuesta a ser perfectible que podría considerarse en la realización, diseño o rediseño de *problemas contextualizados*, que con base en la experiencia y análisis de los problemas encontrados en los libros de texto, a las teorías que nos respaldan sobre las ventajas de hacer de un *problema contextualizado* para la construcción de aprendizajes significativos, así como apostar por aquellos problemas que desarrollen en el estudiante pensamiento matemático que pueda utilizar para resolver situaciones cotidianas o profesionales futuras y de acuerdo a los problemas observados que vienen en pruebas internacionales de evaluación que justamente miden competencias en los estudiantes, fueron localizadas para exponerlas en este trabajo.

Si bien, este no es el único medio para lograrlo, en este trabajo asumimos que esta sistematización para el diseño y rediseño de *problemas contextualizados* puede contribuir a que la resolución de dichos problemas sea un camino que pueda potencializar el desarrollo de pensamiento matemático en el estudiante para apoyar a la construcción de aprendizajes significativos, propiciando un cambio considerable en la vida académica y profesional futura del aprendiz.

Consideramos que los *problemas contextualizados*, bajo la perspectiva que se estudiaron en esta investigación, puede resultar ser un objeto de estudio importante para esta ciencia porque el uso de problemas en el aula bajo una guía sistemática que conduzca al desarrollo de pensamiento matemático impacta directo en el aprendizaje de los estudiantes, pues se trabaja a nivel micro, cambiando formas de pensamiento.

Para darle una mayor fuerza al proyecto aquí plateado convendría ahora el diseño o rediseño de problemas de algún libro de texto bajo estas características y mirar el impacto que generan, si en verdad y en qué medida generarán aprendizajes significativos en los estudiantes al favorecer el desarrollo de pensamiento matemático y potencializar la construcción de aprendizajes con sentido y significado.

Esperemos que esta investigación permita hacer una reflexión de la importancia de estudiar los *problemas contextualizados* en términos de caracterizarlos, ya que de esta manera al menos sería una forma de regular lo que se proyecta en los libros de texto.

Referencias

Aparicio, E., Jarero, M., Sosa, L. y Tuyub, I. (2010). Conocimiento matemático. Un estudio sobre el papel de los contextos. *Memoria de la XIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa*.

Camarena, P. (2009). La Matemática en el contexto de las Ciencias. *Innovación Educativa*, *9* (46), 15-25.

Camarena, P. (2006). *La Matemática en el Contexto de las Ciencias y los retos educativos del siglo XXI*. Cientifico, 10 (4). pp, 167-173. IPN. Recuperado el 10 de septiembre de 2014 de: http://www.redalyc.org/pdf/614/61410403.pdf

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepisgtemológica de la Matemática Educativa*. Editorial Gedisa,

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*. España: Editorial Gedisa, S.A.

Cantoral, R., Farfán, R., Cordero, F., Alanís, J., Rodríguez, R. y Garza, A. (2000). *Desarrollo del Pensamiento Matemático.* México: Trillas.

Díaz, V. y Poblete A. (2001). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. *Revista de didáctica de las matemáticas, 45*, 33-41.

Flores, G. y Díaz M. (2013). *México en PISA 2012*. Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. México, D.F.

Ramos, A. y Font, V. (2006). *Contexto y contextualización en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. Una pérspectiva ontosemiótica*. (pp. 535-556). España: Universidad de Barcelona.

Ruíz, A. (1999). *Metodología de la Investigación Educativa*. México: Editorial Grifo Chapecó.

Ruíz, R. (2013). *La educación en México de 1856 al 2013 y su relación con el desarrollo humano*. Ciudad de México.

Autores

Zuleyma Sarahí Pérez Moguel; CIMATE, UADY. México; zuleyma.2703@gmail.com
Isabel Tuyub Sánchez; CIMATE, UADY. México; isabel.tuyub@uady.mx
Landy Sosa Moguel; CIMATE, UADY. México; smoguel@uady.mx

CONEXIONES MATEMÁTICAS ENTRE LA DERIVADA Y LA INTEGRAL: UNA REVISIÓN DE LIBROS DE TEXTO DE BACHILLERATO

Javier García-García, Crisólogo Dolores Flores

Resumen

En este documento se exponen los avances de un proyecto de investigación cuyo objetivo es identificar las conexiones que entre la derivada y la integral establecen los libros de texto de Cálculo del bachillerato. Para ello se propone una revisión de cinco de los libros de texto más *comunes* recomendados por la DGB (Dirección General de Bachillerato) y la UAGro (Universidad Autónoma de Guerrero) para los cursos de Cálculo Diferencial e Integral. A la fecha solo se han analizado dos, donde observamos que la conexión entre la derivada y la integral visto como un proceso reversible se aborda mediante la idea de primitiva y por el otro, utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo.

Palabras claves: conexiones matemáticas, derivada, integral, libros de texto.

Introducción

El estudio de las conexiones matemáticas en el campo de la Matemática Educativa parece ser una perogrullada. Ya que son parte consustancial de la estructura misma de la matemática; sin embargo, una cosa es su estructura como disciplina científica y otra diferente es lo que sucede cuando es sujeta de enseñanza y aprendizaje. Es una idea generalizada entre profesores y estudiantes que la matemática que se enseña en la escuela se desarrolla desvinculada de la realidad, por ejemplo. Las conexiones matemáticas implican una relación entre distintos objetos matemáticos, permitiendo con esto ver a las Matemáticas como un campo integrado y no como una colección de partes separadas. Estas conexiones pueden darse entre contenidos matemáticos (transversalidad interna), entre éstos y otras disciplinas (transversalidad externa), así como entre los conceptos matemáticos y la resolución de problemas planteados en diversos contextos (físico, químico, biológico, económico, en la vida real, etc.). Esto permite comprender la importancia de las conexiones matemáticas, razón por lo que han sido consideradas un eje fundamental en los estándares de la *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2014). Además, en el proceso de aprendizaje las conexiones matemáticas implican que el alumno relacione y articule diversas nociones, conceptos y procedimientos para resolver problemas, tanto matemáticos como de otras áreas de conocimiento y situaciones de la vida cotidiana.

Por otra parte, reconocemos como conceptos clave del Cálculo a la derivada y a la integral. El primero tuvo su origen en el problema de las tangentes y, la integral tuvo su origen en el problema del cálculo de áreas de superficies con lados curvos. La conexión entre estos problemas como procesos inversos la descubrió Isaac Barrow (1630-1677) [Stewart, 2010] y, en el plano matemático la relación entre ambos está cifrada por el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC). Este teorema unifica dos conceptos aparentemente inconexos que fueron desarrollados aisladamente durante casi dos mil años. Sin embargo, asumimos que esta conexión no se hace evidente en el proceso de aprendizaje, entre otras razones porque el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral se estudian de manera separada en bachillerato, incluso en el nivel superior.

En razón de lo antes expuesto, creemos importante estudiar las conexiones matemáticas entre los conceptos clave del cálculo: derivada e integral. En particular, los avances que se presentan en este escrito buscan responder al siguiente objetivo: identificar las conexiones que entre la derivada y la integral establecen los libros de texto de Cálculo de nivel bachillerato.

Elementos teóricos y metodología

Las conexiones matemáticas son el elemento teórico en el que se fundamenta nuestro trabajo. Businskas (2008) señala que el énfasis en hacer conexiones matemáticas proviene de los Documentos Curriculares de Norteamérica, que indican una prevaleciente creencia de que hacer conexiones es un aspecto importante y valioso para el aprendizaje de las matemáticas. Para Businskas (2008), las conexionas matemáticas son:

- Una relación entre ideas matemáticas (existe independientemente del alumno) o procesos que se pueden utilizar para vincular los temas de matemáticas. Es decir, es parte de la actividad de hacer matemáticas.
- Un proceso cognitivo para hacer o reconocer los vínculos entre las ideas matemáticas.
- Una asociación que una persona puede hacer entre dos o más ideas matemáticas; esto es, una construcción por parte del alumno, en nuestro caso.
- Una relación causal o lógica o interdependencia entre dos entidades matemáticas.

Asimismo, Businskas considera a una conexión matemática como una verdadera relación entre dos ideas matemáticas, A y B. Para ello, resalta algunas categorías como marco teórico para pensar sobre las conexiones matemáticas. De estas categorías, consideremos importante para nuestros propósitos las siguientes:

- Representación alternativa: A es una representación alternativa de B. Las dos representaciones son diferentes: simbólica (algebraica), gráfica (geométrica), pictórica (diagrama), manipulativa (objeto físico), descripción verbal (hablado), descripción escrita.

- Representaciones equivalentes: A es equivalente a B. Son los conceptos que están representados en diferentes formas dentro del mismo tipo de representación.

- Procedimiento: A es un procedimiento usado cuando se trabaja con el objeto B. Por ejemplo, un diagrama de árbol es utilizado para describir un espacio muestral.

En este escrito entendemos por *conexiones matemáticas* en el sentido de Businskas. Para ubicar los libros de texto a revisar, primero identificamos aquellos que son recomendados en los programas de Cálculo Diferencial y Cálculo Integral de la Dirección General de Bachillerato (utilizado por la mayoría de los bachilleratos) y de la Universidad Autónoma de Guerrero. De esta exploración, elegimos los libros *comunes* que son sugeridos en ambos planes, pero optamos por revisar aquellos que abordan tanto el Cálculo Diferencial como el Integral al mismo tiempo (Tabla 1). De esta manera, obtenemos los siguientes:

Libros
Contreras, L., Martínez, M., Lugo, O. y Montes, M. A. (2009). *Cálculo diferencial e integral.* México: Santillana.
Mora, E. y Del Río, M. (2009). *Cálculo diferencial e integral. Ciencias sociales y económico administrativas.* México: Santillana.
Stewart, J. (2007). *Cálculo Diferencial e Integral.* México: CENGAGE Learning.
Stewart, J. (2010). *Cálculo de una variable: Conceptos y Contextos*. México: CENGAGE Learning.
Larson, R., Edwards, B. H. y Hostetler, R. P. (2002). *Cálculo diferencial e integral*. México: McGraw-Hill.

Tabla 1. Libros comunes recomendados por la UAGro y la DGB

Los libros registrados en la Tabla 1 son recomendados para el nivel bachillerato y en los que vamos a centrar nuestra atención. Como categorías de análisis utilizamos las siguientes:

a) *El orden en el tratamiento de los contenidos y conocimientos previos para introducir al Cálculo Integral:* esto es, el orden secuencial de los temas; en particular cómo se presenta la derivada y la integral. Asimismo, interesan los temas precedentes al Cálculo Integral.

b) *La conexión que hacen los textos en la transición del Cálculo Diferencial al Cálculo Integral*: en particular, la conexión entre la derivada y la integral. En este punto importa también identificar si existe la conexión entre ambos conceptos y cómo se da esa conexión.

c) *Representaciones alternativas y equivalentes utilizadas en la conexión entre la derivada y la integral:* estas representaciones pueden ser: visual, simbólica, verbal, contextual y física.

d) *Procedimientos utilizados:* es decir, identificar cómo se relacionan procedimientos de una representación con los procedimientos de otra representación alternativa o entre representaciones equivalentes (referentes a la conexión entre la derivada e integral).

e) *Usos de las conexiones matemáticas en la resolución de problemas:* identificar la utilización de las conexiones entre la integral y la derivada en la resolución de problemas matemáticos y de otros contextos.

Resultados preliminares

Hasta la fecha hemos revisado dos libros. Enseguida daremos los pormenores de la revisión del libro de Mora y Del Río (2009).

El orden en el tratamiento de los contenidos y conocimientos previos para introducir al Cálculo Integral

El libro se integra de cinco unidades temáticas: (I) progresiones, (II) funciones, (III) límites y derivada, (IV) integral y (V) matrices y determinantes. En ese sentido, primero se presenta la idea de derivada y después la de integral. Previo al tema de derivada, se presenta el concepto y la definición de límite, teoremas de límites y continuidad. Las aplicaciones de la derivada se centran principalmente para calcular el costo marginal y el costo marginal unitario. Al término de esto, los autores presentan una sección llamada *ejercicios adicionales,* una de *autoevaluación* y una de *ejercicios complementarios.* En fin, previo al tema de integral se presenta primero la derivada, las interpretaciones de ésta (física y geométrica) y algunos de sus usos en contextos: geométrico, físico y en las ciencias económico-administrativas.

La conexión que hacen los textos en la transición del Cálculo Diferencial al Cálculo Integral

En la parte introductoria de la Unidad IV (La Integral), los autores refieren que la integral se vincula de manera natural con la derivada, de modo que con ambas es posible analizar profundamente un fenómeno. Con esto, reconocen la relación existente entre la derivada e integral, es decir, la *conexión* entre ambos conceptos; pero no lo declaran como un objetivo del bloque. Para fortalecer la necesidad de transitar del Cálculo Diferencial al Cálculo Integral, en el primer tema (función integrable en un intervalo cerrado) los autores presentan un gráfico (Fig. 1):

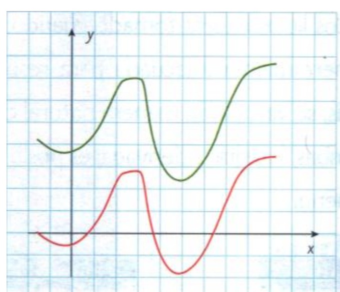


Fig. 1. Curvas que representan las ganancias de dos empresas (Mora y Del Río, 2009).

La explicación breve que subyace al gráfico es, que desde el punto de vista del Cálculo Diferencial, el comportamiento de ambas curvas es igual; sin embargo, para estudiar su diferencia representada por el área bajo la curva es necesario el Cálculo Integral. Por otra parte, en el tema *función integrable en un intervalo cerrado* la primera relación que se establece es con la geometría básica, se le hace explícito al estudiante cómo calcular el área bajo una función constante, sin realizar ni presentar el cálculo. Esta misma idea se sigue para indicar cómo calcular el área bajo funciones escalonadas y de una función lineal. Para ésta última se recurre al trazo de rectángulos y triángulos para determinar las áreas bajo ella. Posterior a esto, se representan aproximaciones de áreas –sin realizar cálculos, es decir, solo haciendo trazos- usando sumas de Riemann; tampoco se hace explicito este nombre, sino que se hace más adelante. Como ejemplo donde se utiliza la suma de Riemann, los autores se aproximan al área de $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 10]$ trazando 5 rectángulos utilizando sólo el registro *simbólico.* Para puntualizar sobre la integral definida, los autores utilizan la noción de límite al infinito de las sumas de Riemann, sin profundizar en los procesos algorítmicos que llevan a esa igualdad.

Un aspecto a resaltar en la presentación de la integral es que primero se aborda la definida y después la indefinida. La conexión formal entre la derivada e integral que se observa está mediado por el primer Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), donde los autores señalan: *Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$. Sea una función G, definida como $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ para cualquier x en $[a, b]$; entonces G es una primitiva de f.* Los autores hacen explícito que este teorema indica el *sentido de reversibilidad* entre la derivada e integral y señalan que *la derivada de la integral de f es f misma*. Posterior a ello, presentan el segundo TFC en términos de una función primitiva F y, el tercer TFC referido al teorema del valor medio utilizando la idea de integral definida. Por otra parte, Mora y Del Río (2009) muestran ejemplos –recurriendo al registro simbólico- sobre el cálculo de primitivas de una suma de funciones, a la cual le añaden una constante para señalar que una función tienen una infinidad de primitivas. Enseguida en una tabla (Fig. 2) presentan ejemplos de funciones y sus respectivas primitivas.

Función *F*: primitiva de *f*	Función *f*: derivada de *F*
C	0
$kx+C$	k
$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$	x^n
$\operatorname{sen} x+C$	$\cos x$
$\cos x+C$	$-\operatorname{sen} x$
$\ln x+C$	$\frac{1}{x}$
e^x+C	e^x
$\frac{a^x}{\ln a}+C$	$\frac{a^x(\ln a)^2}{(\ln a)^2}=a^x$

Fig. 2. Funciones primitivas (Mora y Del Río, 2009)

En la figura 2 se relaciona, al menos en el registro simbólico, el paso del Cálculo Diferencial al Cálculo Integral mediante la idea de primitiva. Después de ello, los autores presentan como ejemplo la primitiva de la función $f(x) = x^2 - 3x + 1$ cuando pasa por el punto (1, 2) utilizando el registro simbólico. Otros ejemplos corresponden a funciones de tipo: polinomial, racional, irracional y trigonométrica, una de cada una. En todas ellas usan el registro simbólico.

Representaciones alternativas y equivalentes en la conexión entre la derivada y la integral

La conexión entre la derivada y la integral en el libro de Mora y Del Río, se presenta en dos momentos: cuando se usan las primitivas y cuando se presenta el TFC. En ambos casos, sólo se usa el registro simbólico. Asimismo, sólo se muestran representaciones equivalentes cuando se expresan las primitivas de una función. Por ejemplo, $F(x) = x^2 - x^3$ y $F(x) = x^2 - x^3 + k$ vistas como primitiva de $f(x) = 2x - 3x^2$ son equivalentes en el registro simbólico. En el tránsito del Cálculo Diferencial al Cálculo Integral no se utilizan las representaciones alternativas.

Procedimientos utilizados

En la conexión entre la derivada y la integral se observan dos procedimientos utilizados. Primero, se utilizan operaciones básicas (suma, resta, multiplicación, división, potencias, radicación) para encontrar primitivas entre representaciones equivalentes (simbólico-simbólico). Segundo, los autores se apoyan de la tabla mostrada en la *Figura 2* como un procedimiento para encontrar más fácilmente una primitiva, aunque no se puede decir que explícitamente sea entre registros alternativos, sino que sigue siendo entre representaciones equivalentes. Esa tabla (Fig. 2) es utilizada para encontrar primitivas de funciones particulares.

Usos de las conexiones matemáticas en la resolución de problemas

Los problemas que plantean Mora y Del Río (2009) para evidenciar la reversibilidad entre la derivada y la integral están referidos al campo de la economía, administración y finanzas. En el primer ejemplo, los autores explican brevemente lo que es el costo marginal ($C'(x)$) y enseguida plantean la integral que ayuda a calcular el costo total (CT), definido por la expresión $CT = \int C'(x)\,dx = C(x) + k$, donde la constante de integración es el costo fijo asignado al producto. Asimismo, usando ideas análogas presentan la forma de calcular el ingreso total (IT) en función del ingreso marginal ($IM = I'(x)$), es decir $IT = \int I'(x)\,dx = I(x) + k$. Aclaran que para calcular la constante de integración en este caso, puede ser usada la condición inicial de que el ingreso es nulo cuando la cantidad de demanda es nula. Finalmente, explican la forma de calcular la ganancia o beneficio marginal (GM) en función del beneficio total ($G(x)$). Ellos presentan la expresión $G(x) = \int_0^{x^*} [I'(x) - C'(x)]dx$, donde x^*representa el valor para el que $I'(x) = C'(x)$, que es donde se obtiene el valor máximo de beneficio.

Lo anterior nos indica que los problemas que Mora y Del Río presentan para reforzar la idea de la reversibilidad entre la derivada y la integral (utilizando el primer TFC), son referidos al cálculo del costo total y del ingreso total (en Economía), puesto que para el cálculo del beneficio total se requiere la idea de integral definida. Se presentan otros problemas de oferta y demanda como ejemplos, pero sólo utilizando la noción de integral definida. Los autores no presentan más problemas para reforzar la idea de reversibilidad entre la derivada y la integral en las lecciones. Aunque en las secciones de *ejercicios adicionales, autoevaluación* y *ejercicios complementarios,* se ubican problemas que requieren el cálculo de primitivas. Por ejemplo, encontrar la función que describe la posición de un objeto, la función que predice la recuperación de un paciente, para predecir el estado de ánimo de una persona bipolar, en ambos casos se dan unas condiciones iniciales, entre otros. Estos problemas, desde nuestro punto de vista, favorecen la conexión entre la derivada y la integral a partir de la idea de antiderivada o primitiva. Es necesario notar que los problemas planteados como ejercicios corresponden principalmente a los campos de la física, química, medicina, biología, economía y finanzas.

***Revisión del libro de Stewart* (2010)**

El orden en el tratamiento de los contenidos y conocimientos previos para introducir al Cálculo Integral

El libro se integra de ocho unidades: (I) Funciones y modelos, (II) Límites y derivadas, (III) Reglas de derivación, (IV) Aplicaciones de la derivada, (V) Integrales, (VI) Aplicaciones de la integración, (VII) Ecuaciones diferenciales y (VIII) Sucesiones y series infinitas.

La conexión que hacen los textos en la transición del Cálculo Diferencial al Cálculo Integral

En Stewart (2010) la conexión entre la derivada e integral, vistos como procesos reversibles, se aborda en diferentes momentos. En la Unidad II, destaca el tema titulado *¿Qué dice f'acerca de f?* Donde presenta dos ejemplos utilizando el registro gráfico. En ese mismo bloque, el autor presenta la noción de *antiderivada;* "[…] una antiderivada de f es una función F tal que $F' = f$ (Stewart, 2010, p. 160)". En la Unidad IV, presenta el tema 4.8 titulado: *antiderivadas*, donde se presenta la conexión entre la derivada y la integral nuevamente, usando en este caso representaciones simbólicas. Asimismo, similar a Mora y Del Rio (2009) presenta una tabla donde expone algunas fórmulas de antiderivación (similar al de la Fig. 2) y ejemplos recurriendo a esa tabla. En un segundo plano, el autor resuelve dos problemas donde se requiere el uso de la antiderivada. Ambos corresponden al campo de la física.

En la Unidad V (Integrales) nuevamente se hace explícita la relación entre derivada e integral. Después de presentar la definición de integral definida y una parte del TFC, se expone la integral indefinida, donde se introduce la notación para la antiderivada y se dice que: $\int f(x)dx = F(x)$ significa $F'(x) = f(x)$. Luego de esto, se presenta una tabla con las principales integrales indefinidas, sus respectivos ejemplos recurriendo al registro simbólico y posteriormente algunos ejercicios. Creemos que lo que podría permitir al estudiante concebir la reversibilidad entre la derivada y la integral, es cuando se le pide que después de resolver cada integral indefinida verifique su resultado derivando la función antiderivada que ha encontrado. Con este procedimiento podrá obtener nuevamente la función integrando.

Representaciones alternativas y equivalentes utilizadas en la conexión entre la derivada y la integral; y procedimientos utilizados.

A diferencia de Mora y Del Rio (2009), Stewart utiliza tanto representaciones alternativas: simbólico-gráfico y verbal-simbólico, como equivalentes: gráfico-gráfico y simbólico-simbólico. Estos se presentan en distintos momentos. Por otra parte, en la conexión entre derivada e integral se observa a las: representaciones gráficas, operaciones básicas y, el apoyo en una tabla donde se registran algunas antiderivadas generales como procedimientos para obtener algunas primitivas

Usos de las conexiones matemáticas en la resolución de problemas

El autor sólo presenta como ejemplo dos problemas (ambos en el contexto físico) para apoyar la conexión que nos ocupa. En ese sentido, sólo retomamos el siguiente:

> Una pelota es lanzada hacia arriba con una rapidez de 48 ft/s desde el borde de un acantilado a 432 ft del suelo. Encuentre su altura sobre el suelo t segundos después. ¿Cuándo alcanza su máxima altura? ¿Cuándo cae al suelo? (Stewart, 2010, p. 320).

Se presentan otros problemas en el apartado de ejercicios donde se utilizan las primitivas; sin embargo, todos están en el contexto físico.

Reflexiones finales

A la fecha sólo hemos revisado dos libros (Mora y Del Río, 2009; Stewart, 2010), faltan tres más. De esta revisión, a manera de síntesis tenemos lo siguiente (Tabla 1).

Categorías \ Libro	**Mora y Del Río (2009)**	**Stewart (2010)**
El orden en el tratamiento de los contenidos y conocimientos previos para introducir al Cálculo Integral	Se integra de cinco unidades temáticas. Primero se aborda la derivada y después la integral. En el tema de integral, primero se presenta la definida y posteriormente la indefinida.	El libro se estructura de ocho unidades. Sin embargo, el tema que nos ocupa se presenta en diversas partes del libro. Los temas de Cálculo Diferencial siguen siendo los conocimientos previos para introducir la idea de antiderivada.
La conexión que hacen los textos en la transición del Cálculo Diferencial al Cálculo Integral.	La conexión se presenta en dos momentos: primero en lo que ellos denominan primer TFC; y segundo, utilizando la noción de primitiva (registradas en una tabla) sin mencionar que implícitamente la idea de fondo es el TFC.	Similar a Mora y Del Río (2009), se utiliza la idea de primitiva y el TFC. El autor resalta en repetidas ocasiones el sentido de reversibilidad entre derivada e integral.
Representaciones alternativas y equivalentes utilizadas en la conexión entre la derivada y la integral.	Se utilizan representaciones equivalentes y sólo referidas al registro simbólico.	Las representaciones alternativas que utiliza Stewart para favorecer la conexión entre la derivada y la integral son: simbólico-gráfico y verbal-simbólico. Las representaciones equivalentes que utiliza son: gráfico-gráfico y simbólico-simbólico. Estos se presentan en distintos momentos.
Procedimientos utilizados.	Se recurre al uso de operaciones básicas (cuando se emplea el TFC) y de una tabla (con primitivas generales) como procedimientos para obtener algunas antiderivadas.	Las representaciones gráficas, las operaciones básicas y, el apoyo en una tabla (que registra algunas antiderivadas generales) son utilizados como procedimientos para obtener algunas primitivas.
Usos de las conexiones matemáticas en la resolución de problemas.	Como ejemplos, se presentan problemas al campo de la economía, administración y finanzas. En la sección de ejercicios, se recurre a problemas de la física, la química, economía, finanzas, entre otros.	Los problemas presentados como ejemplos sólo se plantean en el contexto físico, incluso los que se plantean como ejercicios también son del campo de la Física.

Tabla 1. Resultados de la revisión de dos libros de bachillerato

Los resultados indican que en ambos libros (Mora y Del Río, 2009; Stewart, 2010) se hace explícito la conexión entre la derivada y la integral a través del TFC y la noción de antiderivada o primitiva (Tabla 1). En Mora y Del Río (2009) sólo se utilizan representaciones equivalentes, a diferencia de Stewart (2010) donde también se emplean las alternativas. Destaca también que Stewart presenta la antiderivada en diferentes momentos, en cambio Mora y Del Río (2009) lo hace en una sola unidad (IV), después del TFC y la integral definida. Un aspecto en común es que en ambos libros se plantean pocos problemas donde se favorece la conexión que nos interesa; en cambio, donde se utiliza la idea de integral definida observamos mayor variedad.

La siguiente fase de nuestra investigación es culminar con la revisión de libros de texto; pero creemos que los resultados serán similares. Es decir, prevemos encontrar la conexión entre la derivada y la integral vistos como procesos reversibles mediante la idea de primitiva o utilizando el TFC. Lo único que puede variar es el orden en el tratamiento de los temas, en las representaciones utilizadas, los procedimientos y en los problemas presentados como ejemplos para favorecer la conexión entre derivada e integral.

Referencias bibliográficas

Businskas, A. M. (2008). *Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections*. Tesis de doctorado no publicada. Simon Fraser University. Canadá.

Mora, E. y Del Río, M. (2009). *Cálculo diferencial e integral. Ciencias sociales y económico administrativas.* México: Santillana.

NCTM. (2014). *Principles to action: Ensuring mathematical success for all.* United State of America: Nacional Council of Teachers of Mathematics:

Stewart, J. (2010). *Cálculo de una variable: Conceptos y Contextos.* México: CENGAGE Learning.

Autores

Javier García-García; CIMATE, UAGro. México; libra_r75@hotmail.com
Crisólogo Dolores Flores; CIMATE, UAGro. México; cdolores2@gmail.com

EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE BACHILLERATO SOBRE SISTEMAS DE ECUACIONES DE 2X2 Y EL APRENDIZAJE DE SUS ESTUDIANTES

Maricela Robles Robles, Lorena Jiménez Sandoval

Resumen

Se presenta un primer avance de investigación en la cual buscamos caracterizar la relación entre; los significados que asocia el profesor a los sistemas de ecuaciones de 2X2, la forma en la que enuncia y organiza las capacidades que espera desarrollar en los estudiantes y las actividades que propone para el desarrollo de su práctica educativa, con el aprendizaje de los estudiantes. Esta caracterización se realizará con el seguimiento del análisis didáctico del profesor que será documentado a través de videograbaciones, evidencia escrita y entrevistas y una evaluación que realizaremos a sus alumnos con la propuesta de solución de problemas que diseñaremos en base a las expectativas y práctica de enseñanza del profesor.

Palabras claves: profesor, análisis didáctico, aprendizaje, sistemas de ecuaciones de 2x2.

Introducción

En el estado de Zacatecas se conocen niveles bajos en los resultados de la prueba Evaluación Nacional de Logros Académicos en Centros Escolares (ENLACE, 2014) de Educación Media Superior, muestran que entre los estudiantes de Bachillerato, de las distintas modalidades (General, Técnico, Tecnológico), hay un alto porcentaje que tienen un nivel de desempeño elemental, tendiendo a insuficiente (55.7 %); si bien este porcentaje ha disminuido de 2008 a la fecha, aún se deja ver que hay mucho por hacer para lograr la mejora académica de nuestros estudiantes.

Al reflexionar sobre las dificultades que presentan los estudiantes al aprender matemáticas, es necesario hacerlo centrando la atención en un tema en específico ya que dichas dificultades varían y pueden tener origen distinto. El caso del aprendizaje de los sistemas de ecuaciones es un tópico, que de acuerdo a Segura (2004), presenta dificultades de para los estudiantes, sin embargo pocos estudios ponen en el centro de atención en analizar hasta dónde estás dificultades identificadas en los estudiantes tienen su origen en dificultades que al respecto tienen los profesores.

De acuerdo a Segura (2004)

> Las dificultades en el aprendizaje de sistemas de ecuaciones tienen orígenes diversos. Unos están ligados a la complejidad matemática de los elementos básicos que se utilizan en la adquisición del objeto sistemas de ecuaciones lineales (números reales y función afín, ambos en vías de construcción); otros al concepto de sistemas de

> ecuaciones lineales y su solución, y otros más a la ruptura entre el pensamiento aritmético y el algebraico (p. 53)

Godino (2009) menciona que, aunque hay un consenso general de que los profesores deben dominar los contenidos disciplinares correspondientes, no existe un acuerdo similar sobre la manera en que se debe lograr dicho dominio, ni siquiera acerca de cómo se debería concebir la disciplina. Él afirma que suele reconocerse que el conocimiento disciplinar no es suficiente para asegurar competencia profesional, siendo necesarios otros conocimientos de índole psicológico, por ejemplo; cómo aprenden los estudiantes, conocer los afectos, dificultades y errores característicos de tal conocimiento. Los profesores deberían ser capaces también de organizar la enseñanza, diseñar tareas de aprendizaje, usar los recursos adecuados, y comprender los factores que condicionan la enseñanza y el aprendizaje.

Desde esta idea el profesor debe conocer y dominar los temas que va impartir a sus estudiantes además de tener presente la forma en la que logrará que el estudiante aprenda dicho conocimiento. En el caso que nos ocupa el profesor debiera al menos poder trabajar los diferentes registros de representación de los sistemas de ecuaciones de 2x2 y los pasajes entre estos registros a sabiendas de que la coordinación entre registros está implicada en la conceptualización de un concepto matemático.

Por otro lado Gavilán, García y Llinares (2007) afirman que la práctica del profesor ha sido señalada y abordada por numerosos investigadores desde distintos enfoques teóricos con el objeto de describir y proponer modelos que permitan explicarla, tal es el caso de la Teoría Antropológica de lo Didáctico en la que se abordan las maneras de enseñar como praxeologias didácticas, el Enfoque Sociocultural de la práctica en el que la actividad del profesor viene dada por la manera en la que éste crea las condiciones para que los estudiantes se introduzcan en una comunidad de práctica matemática y por último el enfoque que hace un planteamiento cognitivo en donde la práctica del profesor incluye además de lo que los profesores hacen, lo que piensan sobre lo que hacen y sus motivaciones para actuar de esa manera.

Zakaryan, Ribeiro y Valenzuela (2015) señalan que la mejora de la práctica del profesor y los resultados del aprendizaje de los alumnos, implica también una mejora de su conocimiento, siendo éste el factor que a su vez, más influye en los aprendizajes y resultados de los alumnos.

Coll y Onrubia (2001) explican cómo el conocimiento que construyen los estudiantes es indisociable de la construcción colectiva que llevan a cabo profesores y alumnos en el salón de clase y cómo la construcción de sistemas de significados y representaciones compartidas remite a *cómo uno y otro presentan, representan, elaboran y reelaboran los contenidos y tareas escolares* (p. 23).

En un primer momento lo habitual es que las representaciones que sobre un contenido específico tienen estudiantes y profesores difiera considerablemente, en cuyo caso el reto inicial consiste en conectar las representaciones del profesor y del alumno para garantizar un punto de partida compartido y orientar el proceso de enseñanza en la orientación deseada. Así la plataforma de representaciones compartidas deberá hacerse evolucionar progresivamente en los estudiantes hasta hacerla alcanzar la pretensión de la acción educativa (Coll y Onrubia, 2001).

En ese sentido, tomando en consideración la diversidad de perspectivas posibles para acercarnos al conocimiento del profesor, realizaremos éste acercamiento desde la perspectiva del *Mathematics Teachers Specialised Knowledge* (MTSK). Analizar, por ejemplo en el seguimiento del análisis didáctico que realizará el profesor, cuáles son los registros semióticos presentes sobre sistemas de ecuaciones lineales de 2X2, cuáles son los pasajes que éste realiza entre dichos registros, para posteriormente analizar estos mismos elementos en el aprendizaje de los estudiantes, de forma tal que sea posible identificar y caracterizar una relación entre estos dos aspectos.

Planteamos así la siguiente pregunta de investigación; ¿Cómo caracterizar la relación entre el conocimiento matemático del profesor sobre sistemas de ecuaciones de 2X2 y de su enseñanza, con el aprendizaje de los estudiantes sobre este tema?

Con el objetivo general de caracterizar la relación entre el conocimiento matemático del profesor sobre sistemas de ecuaciones de 2X2 y de su enseñanza con el aprendizaje de los estudiantes, planteamos como objetivos particulares:

- Identificar el conocimiento matemático del profesor sobre sistemas de ecuaciones de 2x2 en base a los resultados de análisis de contenido correspondiente al análisis didáctico que él realice.
- Caracterizar este conocimiento del profesor desde el marco teórico de las Representaciones Semióticas.
- Describir las capacidades que el profesor espera desarrollar, sobre sistemas de ecuaciones de 2x2, en los estudiantes.
- Caracterizar el aprendizaje de los estudiantes sobre sistemas de ecuaciones de 2x2 desde el marco teórico de las Representaciones Semióticas.

Si tal y como lo afirma Segura (2004) en la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales de 2X2, algunos profesores apuntan al desarrollo algorítmico y no trabajan los pasajes del registro algebraico al verbal ni del gráfico al algebraico y asumiendo la postura de Coll y Onrubia (2001) de que las representaciones del profesor y del estudiante terminan con una mayor plataforma de conexiones una vez que ha ocurrido el proceso de enseñanza aprendizaje, se espera que la caracterización de la relación entre el conocimiento matemático del profesor y de su enseñanza con el aprendizaje de los estudiantes sobre sistemas de ecuaciones de 2x2 pueda darse en términos de describir las diferentes registros de representación y conexiones que entre estos pueda establecer el profesor y aquellas que termina por construir y establecer el estudiante.

Marco teórico

Rico (2013) considera:

> El análisis didáctico como un método de investigación propio de la didáctica de la matemática, que se sustenta en la historia, en la propia matemática, en la filosofía del conocimiento y de la educación, que utiliza técnicas y métodos del análisis conceptual y del análisis de contenido (p. 19)

Lupiáñez y Rico (2006) mencionan que parte de un análisis didáctico es establecer, analizar y organizar las capacidades y competencias que los profesores desean desarrollar en los estudiantes en torno a un tema especifico, el análisis didáctico es considerado por los autores como un proceso cíclico donde se pretende que el profesor describa cómo debería idealmente diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje.

De esta manera entendemos por análisis didáctico el procedimiento que realiza el profesor para el diseño, implementación y evaluación de una hora de clase o unidad didáctica, donde el profesor organiza la enseñanza basándose, a su vez, en cuatro análisis: análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación (Gómez, 2014) El conocimiento del profesor esta fusionado por el conocimiento de la materia a enseñar así como el conocimiento didáctico de ella:

“El análisis de contenido es el procedimiento en virtud del cual, el profesor identifica y organiza la multiplicidad de significados de un concepto” (Gómez, 2014, p. 2) y se compone de tres organizadores de currículo que corresponden a las tres dimensiones del significado de un concepto en el contexto de las matemáticas escolares: *sistemas de representación, estructura conceptual y fenomenología.*

El análisis cognitivo es el momento en el que “el profesor describe sus hipótesis acerca de cómo los escolares pueden progresar en la construcción de su conocimiento sobre el concepto cuando se enfrenten a las tareas que compondrán las actividades de enseñanza y aprendizaje” (Gómez, 2014, p. 2). Se describen las expectativas del profesor sobre lo que se espera que el alumno aprenda sobre el contenido matemático en cuestión y sobre el modo en que el alumno va a desarrollar ese aprendizaje.

El análisis de instrucción ocurre cuando “el profesor diseña, analiza y selecciona las tareas que constituirán las actividades de enseñanza y aprendizaje objeto de la instrucción” (Gómez, 2014, p. 2); y

El análisis de actuación, se da cuando “el profesor diseña los instrumentos para determinar y establecer las capacidades que los escolares han desarrollado y las dificultades que manifiestan por la implementación de la unidad didáctica (Gómez, 2014, p. 2).

Por su parte el grupo de investigación en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Huelva propone un modelo analítico del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, MTSK (por sus siglas en inglés *Mathematics Teacher’s Specialised Knowledge*), siendo una propuesta teórica que modela el conocimiento núcleo del profesor de matemáticas (Flores-Medrano, Escudero, Montes y Aguilar, 2014), .

En el modelo MTSK se propone la separación del conocimiento del profesor en el conocimiento matemático y conocimiento didáctico del contenido, cada uno con tres subdominios. Tres referentes al conocimiento matemático son: Conocimiento de los tópicos (KoT), Conocimiento de la estructura matemática (KSM) y Conocimiento sobre la sintaxis de las matemáticas (KPM) (Flores-Medrano, et al, 2014).

Dados los objetivos de nuestra investigación solo nos ocuparemos del KoT, específicamente en la categoría de **registros de representación** que considera el conocimiento que tiene el profesor de las distintas formas en las que se puede representar el tema que se aborda, ya sea numérica, gráfica, verbal, analítica o cualquier otra.

Para caracterizar el conocimiento matemático de sistemas de ecuaciones de 2x2 que posee el profesor emplearemos la teoría de Representaciones Semióticas de Duval, ya que nos permite analizar las representaciones en torno a los sistemas de ecuaciones de 2x2 que domina el profesor y luego, junto a la forma en la que enuncie y organice las capacidades que espera desarrollar en los estudiantes y las actividades que propone para el desarrollo de su práctica educativa, diseñar el instrumento de evaluación del aprendizaje de los estudiantes y caracterizarlo también desde la misma teoría.

Según Nava (2006) para la teoría de Representaciones Semióticas es primordial analizar y enfatizar la importancia de la "representación" dentro de la matemática. Menciona también que no es posible analizar los fenómenos relacionados al conocimiento matemático sin requerir de la noción de representación, es decir que para analizar los conocimientos de sistemas de ecuaciones de 2X2 es necesario, desde esta teoría, recurrir a sus distintas representaciones.

Método

La investigación se realiza por medio del estudio de caso, estos estudios según Martínez (2011), tienen como objetivo documentar una experiencia o evento en profundidad o también entender un fenómeno desde la preceptiva de quienes lo vivieron.

Liñan y Contreras (2013) emplean un cuestionario y posteriormente una entrevista como una manera de lograr la caracterización del conocimiento del contenido matemático (KoT), determinado las debilidades y fortalezas respecto al tema.

Climent, Carreño y Ribeiro (2014) realizan también un cuestionario a estudiantes para profesor de matemáticas para indagar sobre el conocimiento matemático (KoT) que tienen sobre el tema de polígonos.

Dado que nuestro objetivo se centra en caracterizar la relación entre el conocimiento matemático que posee el profesor sobre sistemas de ecuaciones de 2X2 y las características de su enseñanza con el aprendizaje de los estudiantes hemos construido el siguiente esquema metodológico, para primero analizar el conocimiento matemático (KoT) del profesor y posteriormente el aprendizaje de sus estudiantes para lograr esa caracterización.

- Revisión bibliográfica.
- Diseño del cuestionario que permita identificar el conocimiento matemático del profesor sobre sistemas de 2X2 que se aplicara a 3 profesores del Colegio de Bachilleres del Estado de Zacatecas que actualmente trabajan con grupos de Matemáticas I,.
- Aplicación del cuestionario y análisis de las respuestas.
- Diseño e implementación de una entrevista que nos permita profundizar en las respuestas que dieron los profesores.
- Diseño y aplicación de una segunda entrevista en la que el profesor describa cómo es y en base a qué organiza su clase sobre el sistemas de ecuaciones de 2x2 que nos permita analizar y describir el conocimiento de la enseñanza que posee del profesor.

- Diseño de un cuestionario que nos permita analizar, desde la teoría de representaciones semióticas de Duval, el aprendizaje que los estudiantes logran luego de las clases en las que se aborde el tema de sistemas de ecuaciones de 2x2 que se aplicará a los estudiantes de los 3 profesores
- Aplicación del cuestionario y posteriormente una entrevista para detallar las respuestas al cuestionario y caracterizar el aprendizaje de los estudiantes sobre sistemas de ecuaciones de 2x2 desde el marco teórico de las Representaciones Semióticas.
- Análisis de la información
- Resultados.
- Conclusiones generales.

Conclusiones

Una de las problemática que más ha interesado en el área de la educación matemática es la de determinar cuál es el conocimiento didáctico-matemático del profesor, requerido para enseñar matemática (Badillo, Azcárate y Font, 2011).

Gavilán, García y Llinares (2007) mencionan que la relación entre la práctica del profesor, entendida como, el conjunto de actividades que genera cuando realiza las tareas que definen la enseñanza de las matemáticas y la justificación dada (Llinares, 2000, citado en Gavilán, García Llinares, 2007), y la manera de entender el aprendizaje de los alumnos, ha sido subrayada de diferentes maneras en las distintas aproximaciones y con diversos grados de presición.

Dada pues la relación existente entre el conocimiento matemático del profesor y su conocimiento sobre la enseñanza, con el aprendizaje de los estudiantes, es que se considera importante profundizar en su análisis, esto llevará indudablemente a entender mejor el aprendizaje que alcanzan los estudiantes y el porqué de las deficiencias

Referencias

Badillo, E., Azcárate C. y Font, Vicenc. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos f´(a) y f´(x) en profesores de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(2), 191-206.

Climent, N., Carreño, E., y Ribeiro, M. (2014). Elementos de conocimiento matemático en estudiantes para profesor de matemática. El caso de los polígonos. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 27, 1761-1769.

Coll, C., y Onrubia J. (2001). Estrategias discursivas y recursos semióticos en la construcción de sistemas de significados compartidos entre profesor y alumnos. *Investigación en la Escuela*, 45, 21-31

Flores-Medrano, E., Escudero D., Montes M. y Aguilar, A. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. Recuperado el día 06 de octubre 2015, en: http://www.researchgate.net/publication/267392675_Un_marco_terico_para_el_Conocimiento_especializado_del_Profesor_de_Matemticas.

Gavilán, J. M., García, M. M. y Llinares, S. (2007). La modelación de la descomposición genética de una noción matemática. Explicando la práctica del profesor desde el punto de vista del aprendizaje potencial en los estudiantes. *Educación Matemática. 19* (2), 5-39.

Godino, J. D. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20*(1), 15-31.

Gómez, P. (2012). Análisis didáctico en la práctica de la formación permanente de profesores de matemáticas de secundaria. En Gómez (Ed.) *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas de matemáticas en MADI* (pp. 1-23).Colombia: Universidad de los Andes.

Liñán, M. y Contreras, L. (2013). Debilidades y Fortalezas en el Conocimiento de los Temas en Geometría de los Estudiantes para Maestro. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *XVII Simposio Investigación en Educación Matemática*. Bilbao, España: SEIEM.

Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2006). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades del aprendizaje de los escolares. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), Investigación en Educación Matemática. X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), 225-236. Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses y Universidad de Zaragoza.

Martínez, J. (2011). Métodos de investigación cualitativa. *Revista de Investigación Silogismo*, *1*(08).

Nava, J. (2006). Un estudio, sobre los registros de representación algebraica y gráfica, de inecuaciones lineales y de valor absoluto (Tesis de licenciatura).Universidad Autónoma de Guerrero, Chilpancingo, Guerrero.

Resultados Enlace (2014) por identidad federativa. Recuperado el día 03 de abril de 2015 en http://www.enlace.sep.gob.mx/content/ms/docs/2014/historico/32_EMedia_2014.pdf.

Rico, L. (2013). EL método de análisis didáctico. *Revista Iberoamericana de educación matemática*, 33, 11-27.

Segura, S. (2004). Sistema de Ecuaciones Lineales: Una secuencia didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *7*(1), 49-78.

Zakaryan, D., Ribeiro, M., y Valenzuela, P. (2015). Conocimiento matemático especializado de los números racionales un caso de una profesora chilena. En *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*.

Autores

Maricela Robles Robles; UAZ. México; maricela_robles2@hotmail.com
Lorena Jiménez Sandoval; UAZ. México; lorejim79@hotmail.com

UNA SITUACIÓN DE MODELACIÓN EN EL CONTEXTO DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Salvador López-López, Guadalupe Cabañas-Sánchez

Resumen

El artículo analiza una situación de modelación en el contexto de la función cuadrática. Se articulada al actual proceso de reforma educativa implementado en el bachillerato de la Universidad Autónoma de Guerrero, cuyo enfoque está centrado en el desarrollo de competencias tanto disciplinares como genéricas. La postura teórica de modelación que se asume, parte de que el modelo tiene que ser construido por los estudiantes a través de la idealización, especificando y matematizando la situación del mundo real. En la interpretación y explicación de la situación se prevé que emerjan tres tipos de modelos: el algebraico, el tabular y el gráfico. Asimismo, que discutan la solución en términos de los modelos y de la situación.

Palabras clave: modelación matemática, situación de modelación, competencia matemática.

Introducción

El presente trabajo es parte de una investigación más amplia que caracteriza los modelos matemáticos construidos por estudiantes de Nivel Medio Superior (NMS), al interpretar y explicar una situación de modelación asociada a la función cuadrática. Se enmarca en el actual proceso de reforma educativa implementado en este nivel de enseñanza, en la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro), cuyo enfoque está centrado en el desarrollo de competencias tanto disciplinares como genéricas. Los planteamientos pedagógicos, filosóficos y metodológicos, de esta reforma se delimitan en el Modelo Educativo de la UAGro (ME), el que declara como uno de sus objetivos centrales, formar de manera integral al estudiantado en los ámbitos del saber, saber hacer, saber convivir con los demás y saber ser (UAGro, 2013). Visto desde las unidades de aprendizaje (antes asignaturas), en particular para el área de Matemáticas, el desarrollo de competencias se plantea a través de situaciones (o fenómenos) del entorno inmediato del estudiante y de su comunidad (UAGro, 2010a; 2010b). En ese proceso, la modelación matemática se concibe fundamental, a fin de favorecer que los estudiantes le den sentido y significado a la matemática. Desde la perspectiva de esta reforma, el desarrollo de competencias se apoya de tres *componentes de competencias*: a) conceptual, b) procedimental, y; c) actitudinal. El rol del profesor por su parte, además de ser un facilitador y mediador de aprendizajes, debe ser respetuoso y disciplinado, diseñar estrategias y ambientes de aprendizaje que favorezcan el desarrollo de competencias. En ese contexto, se adaptó una situación de aprendizaje en el ámbito del entorno inmediato del estudiante. El objetivo central es que los estudiantes de bachillerato construyan e interpreten modelos matemáticos asociados a la función cuadrática, mediante el uso de procedimientos algebraicos. El reporte se centra en dar respuestas a las preguntas siguientes: (1) ¿Qué modelos matemáticos se construyen al interpretar y explicar una situación asociada a la función cuadrática?, y; (2) ¿Qué componentes de competencia emergen en la construcción y uso de modelos cuadráticos en las explicaciones de los estudiantes?

Fundamentos teóricos

Los fundamentos teóricos que respaldan la investigación en general y el diseño de la situación de modelación asociada a la función cuadrática (SMFC) en particular, son los conceptos de modelación matemática, modelo matemático, realidad y competencia matemática.

a) Modelación matemática y realidad

Hay diferentes perspectivas sobre modelación, que los investigadores pueden adoptar en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas (Kaiser & Sriraman, 2006 en Ärlebäck & Doerr, 2014). Stillman (2012) distingue entre modelación y aplicación. Con las aplicaciones, de acuerdo con el investigador, la dirección que se sigue es *matemáticas* → *realidad* y la pregunta que se hacen quienes siguen esta ruta, es ¿dónde puedo usar esta particular pieza de conocimiento matemático? Desde esta perspectiva, significa que el modelo ya fue aprendido y construido. Con la modelación matemática, sostiene, que la dirección es contraria, es *realidad* → *matemáticas*. La pregunta central aquí, es ¿Qué matemáticas puedo usar para resolver este problema? Desde esta postura, el modelo tiene que ser construido a través de la idealización, especificando y matematizando la situación del mundo real. Ambos tipos de tareas, ocupan un lugar importante en el salón de clases. En este trabajo, la ruta que sigue la situación de aprendizaje, es la segunda, donde la *realidad*, se entiende en el sentido de Córdoba (2011, p. 11), *como todo lo que es y ocurre (interna y externamente al sujeto) y que pueda ser no sólo percibido sino también imaginado o representado por un individuo a partir de sus sentidos y procesos mentales, y en cuya interpretación y análisis influye tanto su propia subjetividad como el contexto en el que se encuentra inmerso*.

b) Modelo matemático y Modelación Matemática

El concepto de modelación matemática está anclado al concepto de modelo en general, y modelo matemático en particular (Vargas, 2015). Tanto el concepto de modelación matemática como el de modelo, se asume desde la postura de Biembengut y Hein (1997). Así visto, un modelo matemático es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que traducen el fenómeno en cuestión o una situación problema. Este puede ser formulado mediante expresiones numéricas o formulas, diagramas, gráficos o representaciones geométricas, tablas, etc. La Modelación Matemática por su parte, se entiende como el proceso involucrado en la obtención de un modelo. Este proceso, desde cierto punto de vista, puede ser considerado artístico, ya que para elaborar un modelo, además del conocimiento matemático, el modelador debe tener una dosis significativa de intuición-creatividad para interpretar el contexto, discernir qué contenido matemático se adapta mejor y tener sentido lúdico para jugar con las variables involucradas.

c) Competencia matemática

Este concepto se retoma de la OECD (2012, p. 9), quien lo define como la capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos. Incluye el razonamiento matemático y la utilización de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a los individuos a reconocer el papel que las matemáticas desempeñan en el mundo y a emitir los juicios y las decisiones bien fundadas que los ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos necesitan.

Esta concepción de competencia matemática, resulta conveniente en nuestro estudio, por la importancia que se le da a que los individuos, en nuestro caso los estudiantes, usen conceptos, herramientas, hechos y procedimientos matemáticos para describir, explicar y predecir fenómenos. En ese marco, el uso del conocimiento matemático, se articula a la descripción y explicación de una situación específica en el marco de la función cuadrática.

Aspectos metodológicos

1. Población objetivo y contexto

La población objetivo son estudiantes matriculados en décimo grado en una Unidad Académica Preparatoria de la UAGro. Su desarrollo se plantea en condiciones de enseñanza, como parte de los objetivos de la Unidad de Aprendizaje Matemáticas I. Los antecedentes académicos básicos para interactuar con la situación, son el concepto de función, ecuación y el trabajo con gráficas. Las interacciones de los estudiantes con la SMFC en el salón de clases se ha diseñado en tres momentos, trabajo individual, en equipo y discusión grupal. El propósito de esta última etapa, es discutir el o los modelos matemáticos que explican la situación y distinguir entre la solución al modelo y el de la situación. Está planteada para realizarse en un ambiente de lápiz y papel, en un tiempo promedio de cuatro sesiones de 90 minutos cada una.

2. Situación de modelación en el marco de la función cuadrática

La SMFC pasó por un proceso de validación con estudiantes de décimo grado y con profesores de bachillerato de la UAGro. Está estructurada mediante dos actividades, cada una con objetivos específicos y constituida por tareas.

Actividades de la SMFC

Actividad 1. El objetivo de la actividad es que el estudiante construya el modelo matemático que explica la situación involucrada, en particular de tipo algebraico. Son ocho tareas las que la componen y el tiempo promedio para su desarrollo es de dos sesiones.

<u>Tarea 1.1</u>: Los estudiantes escuchan y comprenden la situación narrada por el profesor, es la siguiente:

> *La empresa "Súper-Clima" quiere aumentar sus ganancias por servicio de mantenimiento de aire acondicionado. De sus clientes que tiene actualmente da servicio a 10 equipos, cobrando semestralmente por cada equipo $600.00. Para aumentar sus ganancias solicita un estudio de mercadotecnia, el cual recomienda aplicar algunas veces, un descuento de $60.00 en el costo del servicio semestral. Se estima, que por cada descuento aplicado incorporará 5 equipos* (adaptación de la actividad 3, en Farfán, et al, 2014, p. 80).

Tarea 1.2: Ubica al estudiante a trabajar de forma individual a fin de que escriba el relato narrado por el profesor, incorporando en esta redacción, la pregunta que relaciona lo que se quiere determinar en ella.

Tarea 1.3: En equipo, comparan sus redacciones sobre la situación y a partir de ello, proponen una sola.

Tarea 1.4: De manera individual, discriminan las partes relevantes de la situación, para luego escribirlas tanto en lenguaje común como en lenguaje algebraico.

Tarea 1.5: En equipo, comparten y comparan las representaciones a las que arribaron en la etapa previa y acuerdan una sola.

Tarea 1.6: Proponen en forma individual una expresión algebraica que integre todas las partes identificadas en la fase anterior. Este deberá ser el modelo matemático que permita explicar la situación, sin que el estudiante lo llegue a reconocer como modelo.

Tarea 1.7: En equipo comparan el (o los) modelo (s) al que arribaron, con la intención de validarlo, y de ser posible, acordar uno solo.

Tarea 1.8: Exponen el (o los) modelo (s) que planteó cada equipo y lo (s) comparan con el fin de acordar uno solo, la cual permitirá dar continuidad a la situación en la actividad 2.

Actividad 2. El objetivo es que el estudiante interprete y explique cuál es la solución a la situación, a través de los modelos tabular y gráfico. Y que distinga, que el modelo matemático tiene más de una solución, y que una de ellas, es la que explica la situación. Son nueve las tareas que la componen. El tiempo promedio para su desarrollo es de dos sesiones. Las tareas de la 2.1 a la 2.8 se realizan de forma individual, se comparan y validan en equipo. La 2.9, de manera grupal, bajo la dirección del profesor, a fin de discutir la solución de la situación a partir de la (s) solución (es) del modelo matemático. El tiempo promedio para su desarrollo es de dos sesiones.

Tarea 2.1: Completan una tabla de valores utilizando la expresión algebraica (modelo) obtenida en la actividad 1, en la que relacionan los descuentos aplicados con el costo del servicio para obtener las ganancias, de acuerdo con lo planteado en la situación.

Tarea 2.2: Con base en los datos de la tabla, representan en el plano cartesiano la gráfica correspondiente (modelo gráfico).

Tarea 2.3: Analizan los resultados de la tabla y de la representación gráfica para determinar la máxima ganancia.

Tarea 2.4: Identifican el número de descuentos que debe aplicar para obtener ganancia máxima. Tarea 2.5: Identifican el intervalo en donde no se obtienen ganancias y se le solicita también lo marquen con rojo en la gráfica.

Tarea 2.6: Analizan si tiene sentido seguir aplicando descuentos cuando la ganancia es cero pesos.

Tarea 2.7: Ubican en la tabla y gráfica las ganancias cuándo deja de aplicarse el descuento por servicio prestado.

Tarea 2.8: Identifican el intervalo que comprende el incremento en las ganancias y discuten ¿por qué en el resto del modelo gráfico no se obtienen?

Tarea 2.9. Exponen y explican en grupo, apoyándose en los modelos tabular y gráfico que usaron, cuál es la solución a la situación. Discuten además, que el modelo matemático tiene más de una solución, y que una de ellas, es la que explica dicha situación.

3. *Unidades de análisis*

Desde el punto de vista metodológico, el análisis de las competencias se sustenta de Unidades de Análisis (UA). Fundamentales para reconocer qué componentes de competencia (disciplinares y genéricos) favorecen las tareas de cada actividad y con ello, cuáles va construyendo el estudiante, mientras las analiza y discute en los tres momentos ya descritos. Entendiéndose por UA en el sentido de Cabañas-Sánchez (2011) como una entidad representativa de lo que va a ser objeto específico de estudio en una medición y se refiere al qué o quién es objeto de interés en una investigación, en este caso las competencias matemáticas en un proceso de modelación matemática.

En este contexto, se han delimitado diecisiete unidades de análisis asociadas a componentes de competencia disciplinares, se describen en seguida:

Actividad	**Tarea**	**Unidades de Análisis (UA)**
1	1.1	UA1. Comprende la situación narrada.
	1.2	UA2. Representa la situación en lenguaje común.
	1.3	UA3. Comparan y comparten su representación en lenguaje común de la situación.
	1.4	UA4. Representa en lenguaje algebraico los datos relevantes de la situación identificando también constantes y variables.
	1.5	UA5. Comparan y comparten su representación algebraica de los datos relevantes de la situación.
	1.6	UA6. Construye el modelo matemático de la situación, mediante la relación de los datos relevantes y lo que se desea determinar.
	1.7	UA7. Comparan y comparten su representación del modelo matemático de la situación.
	1.8	UA8. Unifican criterios en el grupo al confrontar las representaciones del modelo matemático construyendo la expresión final de la situación.

2	2.1	UA9. Construyen una tabla de valores con la finalidad de analizar la situación utilizando el modelo matemático.
	2.2	UA10. Representan gráficamente los resultados obtenidos en el modelo tabular.
	2.3	UA11. Analizan los datos y resultados obtenidos en los modelos tabular y gráfico, determinando la solución en términos de la situación.
	2.4	UA12. Ubican en los modelos el momento en el que se genera la solución de la situación.
	2.5	UA13. Analizan e identifican el intervalo donde no se genera ganancias dentro de la situación.
	2.6	UA14. Analizan la pertinencia de seguir aplicando descuentos a partir de la obtener cero pesos en las ganancias.
	2.7	UA15 Identifican el monto de la ganancia cuando no se aplican descuentos.
	2.8	UA16. Identifican el intervalo de incremento en las ganancias.
	2.9	UA17. Validan las soluciones en el marco del modelo matemático y en términos de la situación.

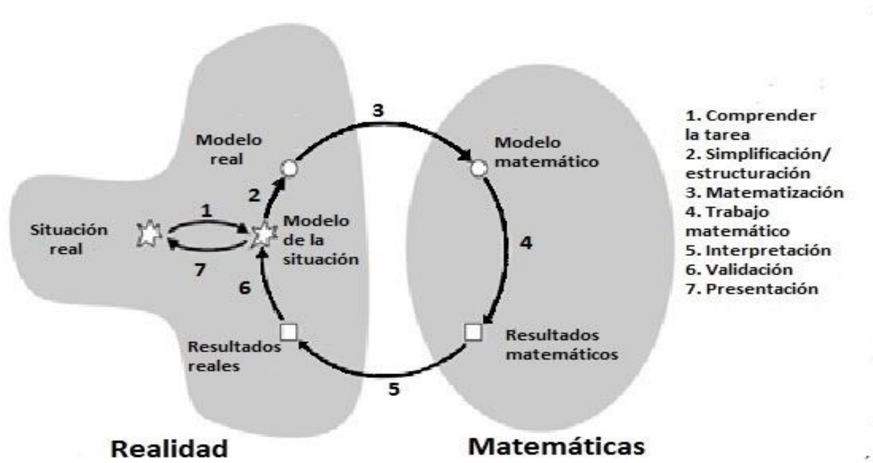
En el marco de la SMFC, los componentes de competencia que permitirán valorar el desarrollo de las de tipo disciplinar y genéricas son los siguientes:

Conceptual	**Procedimental**	**Actitudinal**
1. Funciones cuadráticas 2. Ecuaciones de segundo grado	-Traduce al lenguaje algebraico fenómenos de su región descritos en lenguaje común. -Construye expresiones completas de 2° grado que representan fenómenos descritos en lenguaje común. -Ubica en el modelo algebraico las magnitudes que intervienen en el fenómeno. -Distingue las partes de un problema que corresponden a las variables y constantes.	-Comunica y comparte de manera solidaria y respetuosa sus ideas y hallazgos. -Confronta sus preconcepciones acerca de las expresiones de 2º grado con el nuevo conocimiento algebraico, mejorando sus argumentos para explicar la realidad. -Valora el lenguaje algebraico como herramienta de síntesis de información

	-Transforma las expresiones aplicando las reglas de las operaciones algebraicas. -Representa gráficamente las expresiones algebraicas y/o sus soluciones.	acerca de los fenómenos de su entorno.

4. Proceso de modelación de la situación

El análisis se sustenta además, de las fases del ciclo de modelación propuesto por Blum y Leiß (2006, en Blum y Borromeo, 2009), en el que se reconocen siete fases: comprender la tarea, la simplificación/estructuración, la matematización, el trabajo matemático, la interpretación, la validación y la presentación.



Ciclo de Modelado de Blum / Leiß (Blum & Leiß (2006 en Blum y Borromeo 2009, p. 46)

El proceso de modelación articulado con la situación, se proyecta que se desarrolle de la forma siguiente:

1. *Comprensión de la situación* (considerada real). El objetivo es que los estudiantes sean capaces de representar mentalmente, los elementos datos relevantes de la situación.
2. *Simplificación/estructuración*. Se espera que sean capaces de arribar a un modelo real, que puede ser estructurado de manera interna o mediante la representación escrita, algebraica, dibujos, etc.
3. El proceso de *matematización* se logra utilizando las representaciones de la etapa previa, mediante el manejo de expresiones algebraicas, dando como resultado el modelo matemático.
4. El *trabajo matemático* está relacionado con la elección de los métodos que les permitirán obtener los resultados matemáticos.
5. Los *resultados matemáticos* son analizados o interpretados con base en la situación planteada.
6. La *validación* contribuye a determinar cuál o cuáles de las soluciones cumplen con la situación planteada y cuáles al modelo matemático.

7. En la *presentación*, se analizan los resultados obtenidos por el grupo de estudiantes. Ello, a partir del modelo matemático al que arribaron, con la situación real. De existir discrepancias entre ambos, se repite el proceso, hasta obtener el modelo que represente dicha situación.

Este proceso no se concibe lineal, pues es posible que el estudiante no tenga necesidad de transitar por algunas de las etapas e incluso que deba regresar a una de ellas.

5. Recolección de la información

La recolección de los datos de la actividad matemática en el salón de clases, se sustentará de diferentes medios e instrumentos: a) Las producciones escritas desarrolladas en las etapas individual y en equipo, y; b) Las discusiones en equipo y las grupales. Para ello nos apoyaremos de las videograbaciones, así como de notas de campo del investigador.

Consideraciones finales

Mediante la SMFC se contribuye a que los estudiantes reconozcan que desde el punto de vista de la matemática, hay más de una solución al modelo matemático, y que una de ellas es la que satisface la situación planteada. La ruta que se sigue *realidad* → *matemáticas* (mediante la situación de aprendizaje), favorece además, a que se le dé sentido y significado a la matemática, pues los modelos matemáticos aparecen a modo de uso, mientras interpretan y explican una situación de su entorno inmediato. Esta ruta, se sugiere al profesor en la reforma educativa de la UAGro, para el desarrollo de competencias disciplinares y genéricas. En la interpretación y explicación de la SMFC emergen tres tipos de modelos: el algebraico, el tabular y el gráfico.

Referencias bibliográficas

Ärlebäck, J. B., Doerr, H. M. (2014). *At the core of modelling: connecting, coordinating and integrating models*. Descargado de: http://www.cerme9.org/products/wg6/

Biembengut, M.; Hein, N. (1997). *Modelo, modelación y modelaje. Métodos de enseñanza y aprendizaje de matemáticas*. Recuperado de: matesup.utalca.cl/**modelos**/artículos/**modelacion**_mate2.pdf

Blum, W., Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt?

Journal of Mathematical Modelling and Application 1(1), 45-58.

Borromeo, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, *38*(2), 86–95. doi:10.1007/BF02655883

Cabañas-Sánchez, G. (2011). *El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. Un estudio socioepistemológico (Tesis de doctorado*). Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México, Distrito Federal.

Cantoral, R., Farfán, R., Montiel, G., Lezama, J., Cabañas, G., Castañeda, A. Martínez, G. y Ferrari, M. (2014). *Matemáticas 3. Serie desarrollo del pensamiento matemático*. México: Mc Graw Hill.

Córdoba, F. (2011). *La modelación en matemática educativa: una práctica para el trabajo de aula en ingeniería.* (Tesis de maestría). CICATA-IPN, México, D.F.

OECD, (2012). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA. Ministerio de Educación, Cultura y el Deporte*. Madrid. Recuperado de: http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/pisa2012/marcopisa2012.pdf?documentId=0901e72b8177328d

Stillman, G. (2012). *Applications and modelling research in secondary classrooms: What have we learnt?* (pp. 902–921). Presented at the 12th International Congress on Mathematical Education, 8 July – 15 July, 2012, COEX, Seoul, Korea, Seoul, Korea.

UAGro (2013). *Modelo Educativo. Hacia una educación de calidad con inclusión social.*

México: Universidad Autónoma de Guerrero.

UAGro (2010a). *Plan de estudios por competencias de Educación Media Superior2010.* México: Universidad Autónoma de Guerrero. Recuperado de http://cgru.uagro.mx/

UAGro (2010b). *Plan de estudios por competencias 2010. Programa de estudios de la Unidad de Aprendizaje Matemáticas II.* México: Universidad Autónoma de Guerrero. Recuperado de http://cgru.uagro.mx/

Vargas, A. (2015). *La modelación matemática en la interpretación de una situación asociada a lo lineal* (tesis inédita). México: Universidad Autónoma de Guerrero.

Autores

Salvador López-López; CIMATE, UAGro. México; slopezl@uagro.mx
Guadalupe Cabañas-Sánchez; CIMATE, UAGro. México; gcabanas.sanchez@gmail.com

LA FUENTE DE SENTIDO EN LA FORMACION DOCENTE EN CHILE

Claudio Enrique Opazo Arellano, Francisco Cordero Osorio

Resumen

La propuesta de investigación aborda el desafío de conocer y evidenciar la identidad disciplinar que se constituye en la formación docente de matemáticas en Chile. Así, se espera caracterizar la fuente de sentido que se desarrolla en el proceso de la formación inicial, con objeto de conocer la función del saber matemático del docente en su formación. Para tal fin, consideramos al discurso Matemático Escolar como aquel elemento provocador del fenómeno de adherencia, es decir, aquello que no permite reflexionar o cuestionar cómo se construye el conocimiento matemático. Con base en estas ideas, nuestro trabajo se enmarca desde la Teoría Socioepistemológica, con objeto de atender los usos del conocimiento matemático que expresan una identidad disciplinar en los docentes en formación en Chile. De ahí nuestra preocupación por estudiar al humano desde el conocimiento matemático que usa y construye en su práctica cotidiana.

Palabras Claves: Identidad disciplinar, conocimiento matemático, discurso Matemático Escolar, fenómeno de adherencia.

Introducción

La formación docente de matemáticas es un proceso que se ha estudiado en diferentes partes del mundo y bajo distintas perspectivas teóricas, particularmente en Matemática Educativa, referida al proceso de enseñanza y aprendizaje que se sitúa en la conformación de una visión disciplinar, ya sea de quien se forma para ser profesor de matemáticas, del formador de éstos nuevos recursos humanos o bien, de quien es profesor y enfrenta una profesionalización docente.

Los trabajos desarrollados en Matemática Educativa han evidenciado el interés por conocer cómo mejorar el complejo escenario que se logra apreciar en la formación docente de matemáticas. De ahí que se formulan preguntas en el medio académico, por ejemplo: ¿Cuál es la matemática que necesita adquirir un docente en formación?, ¿cuál es la pedagogía, o bien, cuál didáctica debe saber un docente en formación?, ¿quién tiene la responsabilidad de formar a los docentes?, ¿cuál es el rol de la formación inicial en la constitución de la identidad disciplinar?, entre otras.

En este contexto, aludo a las preguntas realizadas en mi investigación de Maestría (Opazo-Arellano, 2014), "¿Cómo usan el conocimiento matemático en las gráficas de las derivadas los estudiantes de pedagogía en matemáticas en Chile?, ¿Cuáles son los significados, procedimientos y argumentaciones en la construcción del conocimiento matemático en la comunidad de estudiantes de pedagogía en matemáticas en Chile?". Dichas preguntas surgen de considerar la importancia de realizar estudios sobre el humano usando el conocimiento matemático (Montiel y Buendía, 2012) con base en su *intimidad, localidad y reciprocidad* bajo una Situación Específica (SE) (Cordero, 2013); de ahí que es importante hacer visible cómo ese conocimiento matemático expresa una *realidad* desde un *cotidiano* particular (Gómez, 2013).

Con base en dichas preguntas se logró conocer y evidenciar cómo la construcción del conocimiento matemático de esta comunidad está opacada por una forma de ver la Matemática, de naturaleza homogénea y hegemónica en relación a ciertos significados, procedimientos y argumentaciones (Soto, 2010) que caracterizan al discurso Matemático Escolar (Figura 1). Dicho discurso responde a ciertos concesos y bases de comunicación, junto con la construcción de significados compartidos de los objetos y procesos matemáticos (Cantoral, 2013).

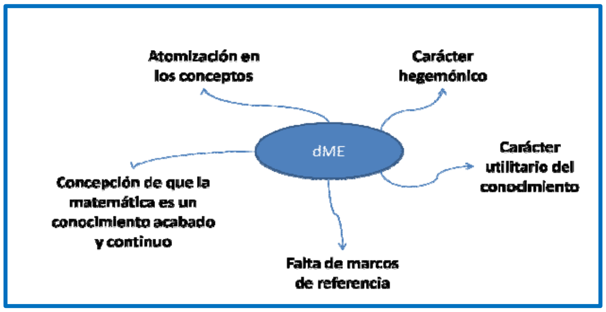


Figura 1: Caracterización del discurso Matemático Escolar (Soto, 2010).

En este contexto postulamos que los docentes en formación están excluidos de la construcción social del conocimiento matemático, ya que sus usos del conocimiento matemático escolar se ven opacados por el discurso Matemático Escolar, lo que provoca una adherencia al mismo en el proceso de la formación docente de matemáticas.

Esto conlleva a una opacidad en los usos del conocimiento matemático (Gómez, 2013; Gómez, 2015) donde *lo matemático no es visible.* Lo que sitúa a la comunidad en un proceso de desventaja e inequidad, ya que se ve limitado a un cierto tipo de significado, procedimientos y argumentaciones (Soto, 2010), soslayando otros.

Tal situación se expresa en que los docentes en formación en su proceso de enseñanza y aprendizaje sólo aprecian por ejemplo: las argumentaciones que se sustentan en los procesos algorítmicos (Farfán y Cantoral, 2012). Opacando de esta manera, argumentos como el comportamiento tendencial de las funciones dentro de su proceso de formación disciplinar.

Esta situación permea a diario la formación inicial de una comunidad que debiese poseer una mirada articulada de la construcción del conocimiento matemático, sobre todo desde una fuente de sentido propia. En este contexto, (Castells, 2001; citado de Parra, 2015) plantea que la fuente de sentido atiende a un atributo cultural, o a un conjunto de atributos culturales al que se le da prioridad por sobre el resto. Es decir: desde aquel *sentido* que caracteriza a una comunidad. Esto implica poseer una identidad disciplinar con base en las problemáticas endógenas (Silva-Crocci, 2014) de la formación docente de matemática, con objeto de expresar ahí una mirada epistemológica.

Destacamos que nuestra propuesta de investigación aborda el complejo escenario de la formación docente de matemáticas en Chile mediante la caracterización de la fuente de sentido que logra conformar un estudiante que es parte de este proceso. De esta manera, esperamos conocer y evidenciar aquel conocimiento matemático que logra caracterizar al docente en formación desde una identidad disciplinar. Para tal fin, se espera problematizar los usos de las gráficas desde el estudio de la simultaneidad de las derivada, con objeto de atender el rol del discurso Matemático Escolar en el proceso de la formación docente; ya que conjeturamos que éste se encuentra inmerso en un *fenómeno de adherencia* (Cordero y Silva-Crocci, 2012; Silva-Crocci, 2014).

Por la necesidad de incursionar en el conocimiento matemático que es propio del docente en formación utilizaremos como herramienta metodológica el *modelo de comunidad de conocimiento matemático* (Cordero, 2013), con objeto de lograr responder desde la Teoría Socioepistemológica, a cómo es la identidad disciplinar que se desarrolla en la formación docente de matemáticas en Chile. De ahí que esperamos una caracterización robusta y específica, desde los distintos constructos que son parte del modelo que busca conocer los usos del conocimiento matemático de una comunidad específica en función de una reciprocidad, intimidad y localidad del uso del conocimiento matemático.

Considerando la formulación anterior, la propuesta de investigación se inserta en una mirada latinoamericana de la construcción social del conocimiento matemático, donde la Teoría Socioepistemológica, nos permite mirar de manera particular la problemática de la formación docente de matemáticas desde elementos como: la región, país, condición social, política y cultural (Lezama, 2009). De ahí la relevancia de nuestra propuesta de investigación, ya que permitirá dar una mirada al complejo escenario actual de la formación docente de matemáticas en Chile, teniendo presente que en una sociedad y en su historia, el conocimiento, ante todo, se humaniza (Cordero, 2011).

Marco Teórico

Nuestro trabajo se enmarca en la Teoría Socioepistemológica (TS), la cual está inserta en la disciplina de la Matemática Educativa (ME), cuyo objetivo es brindar explicaciones sobre la construcción del conocimiento matemático y las formas en que éste se institucionaliza en el sistema escolar (Soto, 2010).

Destacamos que la TS aborda la problemática de la confrontación entre la obra matemática y la matemática escolar, donde esta última debe reinterpretar y reorganizar la primera (Cordero, 2001), con objeto de establecer un diálogo entre ambas epistemologías las que se caracterizan por ser de distinta naturaleza.

La TS implica considerar un conjunto de ideas como: la construcción social del conocimiento, los procesos de institucionalización, los usos del conocimiento, el lenguaje de herramientas, entre otros (Torres, 2013). De ahí que la TS, considera sistémicamente la dimensión: epistemológica, cognitiva, didáctica y sociocultural. Lo cual ha permitido tener un panorama amplio, ya que ha colaborado en el reconocimiento del por qué un grupo humano se organiza para construir un determinado conocimiento (Gómez, 2009).

Así pues, creemos que nuestro trabajo de investigación al abrazar la TS, hace eco en torno al *rediseño del discurso Matemático Escolar* (RdME). Ello con objeto de incorporar las epistemologías que en su mayoría no son consideradas en las prácticas educativas que se dan de manera permanente en el sistema educativo. De ahí la necesidad de incorporar: la funcionalidad del conocimiento matemático, los usos, los funcionamientos y las formas; en diferentes escenarios, por ejemplo: la escuela, el trabajo y la ciudad (Torres, 2013). De esta manera, se promoverá la descentralización de los objetos matemáticos; situación importante, ya que éstos tienen una relevante participación en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Lo cual permite evidenciar cómo la actividad humana está puesta al servicio de la matemática y no la disciplina al servicio de la actividad humana (Soto, 2010).

Entonces surge la necesidad de observar a las distintas comunidades de conocimientos, por ejemplo: la de Sordos, la Otomí, la Ñu Savi y la de Estudiantes de Pedagogía en Matemáticas entre otras. Ya que de esta manera se propicia reconocer los usos del conocimiento, cuando sus integrantes se enfrentan a una situación específica, por ejemplo: la de transformación. Logrando identificar de esta manera aspectos singulares de una comunidad de conocimiento matemático, por ejemplo, su identidad o bien, su tradición en términos del conocimiento que persiste aun al paso del tiempo.

Lo relevante es conocer los usos del conocimiento que son particulares de esa comunidad, ya que de esa manera se evidencia la pluralidad epistemológica que existe en las distintas comunidades a la luz de las diversas formas de poner en uso el conocimiento matemático. De ahí la relevancia de pensar y proponer al MCCM para realizar tal labor.

Aspectos Metodológicos

Con el fin de llevar a cabo los objetivos descritos, consideramos necesario determinar una unidad de análisis relativa a la comunidad, el cotidiano desde el mantenimiento de rutinas y las crisis (Zaldívar, 2009), será aquel elemento que conjeturamos nos permitirá tener una aproximación concreta a la realidad del docente en formación a la luz de expresar en ella los usos del conocimiento matemático de esta comunidad. Tal situación esperamos nos permita vincular aquel conocimiento particular de los docentes en formación con la identidad disciplinar que se desarrolla durante el proceso de formación inicial.

De esta manera, el cotidiano como unidad de análisis se consolida desde un enfoque socioepistemológico y nos permite sistematizar nuestro interés por conocer y evidenciar la construcción social del conocimiento matemático. En este contexto, toma relevancia pensar y poner en uso el modelo de comunidad de conocimiento matemático, como una herramienta metodológica que nos permite abordar la compleja tarea de conocer y evidenciar los usos del conocimiento matemático de una comunidad de conocimiento a partir de una situación específica (Cordero, Méndez, Parra y Pérez, 2014).

Dicho modelo se ha conformado desde la Teoría Socioepistemológica, bajo la articulación de los siguientes constructos:

Ejes centrales: identidad e institucionalización. En el primer caso para conocer la *fuente de sentido* de ésta (Cordero y Silva-Crocci, 2012); y en el segundo, para abordar aquel conocimiento que se ha mantenido al paso del tiempo (Cordero, 2001), respectivamente.

Finalmente, se integra la triada que conforma una comunidad: reciprocidad, intimidad y localidad. Ello con objeto de romper la centración en lo individual, lo público y lo cosmopolita (Cordero, 2013):

- Reciprocidad. El conocimiento se genera por la existencia de un compromiso mutuo.
- Intimidad. Es el uso de conocimiento propio y nativo que no es público.
- Localidad. El conocimiento es local, se da cuando existe una coincidencia en ideas, una jerga disciplinar, trabajo u oficio, intereses, la región, entre otros (Figura 2).

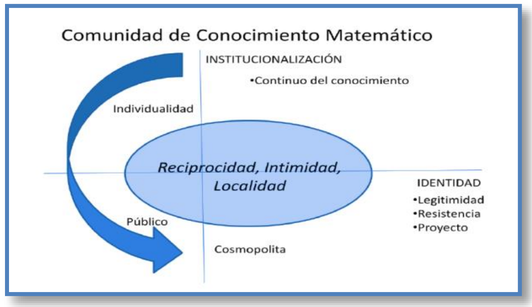


Figura 2: Modelo de comunidad de Conocimiento Matemático (Cordero, 2013).

La articulación de los constructos del modelo de la Figura 2 nos permitirá conformar una mirada más robusta y específica del cotidiano disciplinar en el que está inmerso el docente en formación. Destacamos la relación que el modelo nos permite instaurar sobre los docentes en formación con base en el uso del conocimiento matemático que se expresa en determinados *funcionamientos y formas*.

De esta manera, se identifica el uso del conocimiento matemático con base en una identidad disciplinar particular de la comunidad de los docentes en formación en Chile, desde la revelación (Guber, 2013) que ellos hagan de sus usos del conocimiento matemático.

Reflexiones a futuro

La propuesta de investigación sugiere problematizar el uso de las gráficas en atención a conjeturar que el discurso Matemático Escolar provoca el *fenómeno de adherencia* (Cordero y Silva-Crocci, 2012; Silva-Crocci, 2014) en el proceso de la formación docente de matemáticas en Chile. Tal situación, favorece que el docente en formación de matemáticas quede en desventaja y en adherencia al discurso Matemático Escolar, lo que implica admitir un tipo específico de conocimiento matemático desde argumentaciones específicas.

Destacamos que el discurso Matemático Escolar emerge en la formación docente en Chile a partir de la interacción de al menos tres campos disciplinares permanentes: la Matemática, la Educación y la Matemática Educativa (Soto, 2013). Estos campos disciplinares no son cuestionados ni menos se reflexiona cómo se han conformado a la luz de la construcción del conocimiento disciplinar (CCD).

De esta manera el docente en formación en Chile queda inmerso en un discurso Matemático Escolar homogéneo y hegemónico (Soto, 2010). Un ejemplo de ello, es el tratamiento de la derivada en el sistema educativo: pareciera que la derivada queda a merced de ser aprendida como un proceso de iteración de funciones y su gráfica como una representación de ese proceso (Opazo-Arellano, 2014).

Así, se logra identificar una exclusión de la construcción social de la derivada, ya que se opaca la intimidad del uso del conocimiento que es propio de los docentes en formación en Chile; esto provoca que esta comunidad de conocimiento quede inmersa en una adherencia a la noción de derivada del discurso Matemático Escolar. Esto es, la definición de límite incremental y la explicación de la secante que deviene tangente (Montiel, 2005).

Por lo anterior, es que mantener una opacidad del uso del conocimiento matemático de los docentes en formación sería no haber logrado reflexionar sobre la problemática que atiende la Teoría Socioepistemológica, es decir; cuestionar la utilidad del conocimiento matemático y la centración en los objetos matemáticos que propone el discurso Matemático Escolar (Cordero, 2001); lo cual provoca dejar al sujeto que aprende en el olvido, en desventaja y en un proceso de adherencia. Un ejemplo, es cuando los profesores asumen los conceptos matemáticos como entidades elaboradas, por lo cual, ellos sólo deben comunicar este conocimiento a sus estudiantes en una enseñanza pulcra y libre de dificultades (Farfán y Cantoral, 2012).

De esta manera, consideramos necesario atender el fenómeno de adherencia que se vincula a un proceso que oprime (Freire, 1970) a la formación inicial y sus integrantes. Un ejemplo, son los cursos de precálculo, los cuales tienden a ser un repertorio de procedimientos y algoritmos provenientes del algebra y geometría analítica; dejando de lado los argumentos visuales por no considerarlos matemáticos (Farfán, Ferrari y Martínez, 2010). Frente a esta realidad, será fundamental identificar, conocer y evidenciar cuál y cómo es la identidad disciplinar que subyace en el proceso de la formación docente de matemáticas en Chile con base en la fuente de sentido endógena a ella (Silva-Crocci, 2014), es decir: una que exprese su cotidiano disciplinar (Gómez, 2013). Lo que permitirá conocer cuál es el uso del conocimiento matemático que caracteriza a los docentes en formación, junto con sentar las bases para un marco de referencia que permita hacer resistencia a las imposiciones particulares del discurso Matemático Escolar.

En este sentido, creemos que si los docentes en formación cuentan con un marco de referencia más amplio desde una pluralidad epistemológica, es decir: desde otra epistemología, vamos a recuperar al sujeto olvidado (Cordero, en prensa (a)) desde el uso del conocimiento matemático propio de éste.

Al recuperar *lo matemático*, es decir: aquel conocimiento que construye el humano (Gómez, 2013); los docentes en formación podrán estar en posición de enfrentar las nuevas iniciativas educativas que provienen de realidades ajenas a Latinoamérica, ya que estarán en condiciones de atender el carácter contingente de sus adhesiones (Rabossi, 2003). Por ejemplo, la noción de competencia.

Entonces, será fundamental la caracterización del conocimiento matemático de la formación docente, ya que será ésta la que nos permita identificar, conocer y evidenciar la identidad disciplinar que se da desde la fuente de sentido endógena de la comunidad. De ahí la relevancia del *modelo de comunidad de conocimiento matemático* (Cordero, 2013), ya que el modelo nos permitirá conocer el uso del conocimiento matemático desde la revelación (Guber, 2013) que los docentes en formación en Chile hagan de su realidad; en éste caso la conformación de la identidad disciplinar de los docentes en formación a partir de los funcionamientos y determinadas formas en el uso del conocimiento matemático.

Finalmente, destacamos que la propuesta de investigación nos aportará una mirada crítica al actual panorama del sistema educativo desde una preocupación puntual, el sujeto que aprende. Ahí observamos inequidad, lo cual se expresa en este caso en la desventaja y adherencia a un conocimiento que fue construido bajo una cultura y sociedad distinta a la que se vive en Chile; y por ende, en los programas de formación docente de matemáticas. De esta manera, nos hacemos cargo y provocamos la discusión con otros marcos teóricos, ya que tensamos la relación del uso y construcción del conocimiento matemático al considerar en este proceso el sujeto olvidado; es decir: los docentes en formación en Chile.

Agradecimientos

Esta investigación está financiada por CONACYT con el Proyecto Las Resignificaciones del Uso del Conocimiento Matemático: la Escuela, el Trabajo y la Ciudad. Clave 0177368

Referencias

Castells, M. (2001). *La era de la información. Economía sociedad y cultura. El poder de la identidad.* Volumen II. Tercera edición. Siglo XXI editores.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 4(2), 103-128.

Cordero, F. (2011). Prólogo. En Buendía G. *La construcción social del conocimiento matemático escolar. Un estudio socioepistemológico sobre la periodicidad de las funciones* (pp. 9-11) México, D.F.: Díaz Santos ISBN: 978-84-9969-004-9

Cordero, F. y Silva-Crocci, H. (2012). Matemática Educativa, Identidad y Latinoamérica: El quehacer y la usanza del conocimiento disciplinar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 15 (3), 295-318.

Cordero, F. (2013). Matemáticas y el Cotidiano. Diplomado Desarrollo de estrategias de aprendizaje para las matemáticas del bachillerato: La transversalidad curricular de las matemáticas, Módulo III. Documento interno. Cinvestav – IPN.

Cordero, F., Méndez, C., Parra, T., y Pérez, R. (2014). Atención a la diversidad. La Matemática Educativa y la Teoría Socioepistemológica. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7 (3), 71-90.

Cordero, F. (en prensa (a)). *La matemática y lo matemático. Transversalidad y modelación: un programa socioepistemológico*. Barcelona, España: Gedisa.

Farfán, R., Ferrari, M., y Martínez, G. (2010). Lenguaje algebraico y pensamiento funcional. En R. Cantoral, R. Farfán, F. Cordero, J. Alanís, A. Garza, R. Rodríguez, (Eds.) *Desarrollo del pensamiento matemático* (pp. 89-144). México: Trillas-ITESM.

Farfán, R. y Cantoral, R. (2012). El aprendizaje de las matemáticas desde la investigación en Matemáticas Educativa. En Farfán, R. *El desarrollo del pensamiento matemático y la actividad docente* (pp.13-47). Barcelona, España: Gedisa.

Freire, P. (1970). *Pedagogía del oprimido.* México: Siglo XXI Editores.

Gómez, K. (2009). *Los procesos de difusión del conocimiento matemático en el cotidiano. Un estudio Socioepistemológico*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Gómez, K. (2013). *La Socialización de la Función del Conocimiento Matemático: Pluralidad Epistemológica y Opacidad del Cotidiano*. Memoria Pre-Doctoral no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Gómez, K. (2015). *El fenómeno de opacidad y la socialización del conocimiento*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Gómez, K. (2013). *La Socialización de la Función del Conocimiento Matemático: Pluralidad Epistemológica y Opacidad del Cotidiano*. Memoria Pre-Doctoral no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Gómez, K. (2015). *El fenómeno de opacidad y la socialización del conocimiento*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Lezama, J. (2009).Relevancia de los estudios sobre el campo del profesor de matemáticas. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22, 1391-1393. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Montiel, G. (2005). Interacciones en un escenario en línea. El papel de la Socioepistemología en la resignificación del concepto de derivada. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 8 (2), 219-235.

Montiel, G. y Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: Ejemplos e ilustraciones. En Rosas, A. y Romo, A. (Eds), *Metodologías en Matemática Educativa*: *Visiones y reflexiones* (pp. 61-88). México: Lectorum.

Opazo-Arellano, C. (2014). *El uso de las gráficas y el fenómeno de opacidad. El caso del concepto de derivada en los estudiantes de pedagogía en matemáticas en Chile*. Tesis de Maestría no publicada. Centro de investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Soto, D. (2014). *La dialéctica exclusión-inclusión entre el discurso matemático escolar y la construcción social del conocimiento matemático*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Soto, D. (2010). *El discurso matemático escolar y la exclusión. Una visión Socioepistemologíca.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Torres, L. (2013*). Usos del conocimiento matemático. La simultaneidad y estabilidad en una comunidad de conocimiento de ingeniería en un escenario de trabajo*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Zaldívar, D. (2009). *Una caracterización de la función de un escenario de difusión de la ciencia una visión socioepistemológica. El caso de la resignificación de lo estable*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Autores

Claudio Enrique Opazo Arellano; CINVESTAV, IPN. México; opazoferrari_claudio@hotmail.com
Francisco Cordero Osorio; CINVESTAV, IPN. México; fcordero@cinvestav.mx

APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE MATRIZ A TRAVES DE PROBLEMAS APLICADOS A LA INGENIERIA

José Luis Ávila Luna, Ofelia Montelongo Aguilar, Lorena Jiménez Sandoval

Resumen

En este trabajo, se presentan los avances del proyecto de investigación que tiene como objetivo describir las construcciones y mecanismos mentales de los estudiantes de la carrera de ingeniería en mecatrónica de la UPZ (Universidad Politécnica de Zacatecas), respecto al concepto de matriz cuando se enfrenta a situaciones problemáticas aplicadas a la ingeniería en mecatrónica. El marco teórico que sustenta la investigación es la teoría APOE, la cual cuenta con un ciclo de investigación como metodología. Este ciclo consta de tres fases: análisis teórico del concepto, diseño e implementación de enseñanza y el análisis y verificación de los datos. Se presenta como avance de la investigación, la primera componente del ciclo de la teoría APOE, que da como resultado una descomposición genética preliminar del concepto de matriz.

Palabras Claves: matriz, APOE, ciclo de investigación, construcciones y mecanismos mentales, descomposición genética.

Introducción

En las ingenierías como en otras ramas afines a la matemática, los conceptos del álgebra lineal son relevantes debido a la gran diversidad de aplicaciones que los requieren, por ejemplo: el cálculo de corrientes o voltajes (diferencia de potencial) en un circuito eléctrico o para manipular las articulaciones de algún mecanismo robótico. Al menos un curso de Álgebra Lineal está presente en los planes de estudio de las carreras como Ingeniería en Mecatrónica. A pesar de que en la mayoría de los casos los cursos se ven desde su aspecto puramente algorítmico, los estudiantes tienen dificultades con la materia. Dorier y Sierpinska (2001) atribuyen estas dificultades a la naturaleza abstracta de los conceptos que se abordan en un curso tradicional de Álgebra Lineal.

Investigaciones como las presentadas en Dorier (2000) se han enfocado en detectar las "*fuentes de las dificultades*" de los estudiantes al abordar las nociones del álgebra lineal en el nivel superior. Otros estudios como los reportados en Oktaç y Trigueros (2010) consideran a la teoría APOE como una herramienta poderosa para estudiar cómo los estudiantes construyen los conceptos del álgebra lineal.

Nos centramos en el concepto de matriz, debido a la gran variedad de aplicaciones que tiene en la solución de problemas propios de la ingeniería, además de ser un concepto que no se ha abordado desde su aspecto cognitivo, y que a pesar de parecer sencillo, es conceptualmente difícil de comprender para un estudiante de ingeniería. Es por ello, que nuestro interés sea describir el desarrollo cognitivo del estudiante respecto al concepto de matriz, a través de la caracterización de las construcciones y mecanismos mentales que los estudiantes llevan a cabo cuando aprenden dicho concepto, poniendo en marcha el ciclo de investigación de la teoría APOE.

Las preguntas de investigación que se pretenden responder son:

- ¿Cuáles son las construcciones y mecanismos mentales de los estudiantes de ingeniería en mecatrónica de la UPZ sobre el concepto de matriz?
- ¿Qué papel juega la modelación en la construcción del concepto de matriz?
- Para dar respuesta a estas preguntas se plantea el siguiente objetivo general y los objetivos particulares:
- **Objetivo general:**
- Caracterizar las construcciones y mecanismos mentales que desarrollan los estudiantes de ingeniería en mecatrónica de la UPZ sobre el concepto de matriz al resolver situaciones problemáticas que involucran aplicaciones de dicho concepto.
- **Objetivos particulares:**
- Diseñar una descomposición genética del concepto de matriz, a partir de un diseño preliminar elaborado por el grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community).
- Elaborar e implementar un diseño de enseñanza.
- Diseñar y aplicar instrumentos que permitan analizar las construcciones y mecanismos mentales de los estudiantes de ingeniería en mecatrónica de la UPZ respecto al concepto de matriz haciendo énfasis en problemas de modelación.
- Recolectar y analizar los datos obtenidos de la aplicación de los instrumentos diseñados y de ser necesario refinar la descomposición genética.
- Proporcionar sugerencias didácticas que permita mejorar el aprendizaje del concepto.

Marco teórico-metodológico

Se considera como marco teórico a la teoría APOE (acrónimo de Acción, Proceso, Objeto y Esquema), ya que ha mostrado ser una herramienta poderosa que permite describir cómo se construye el conocimiento matemático en el nivel superior (Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros, & Weller, 2014).

Dicha teoría está sustentada en las ideas de Piaget relacionadas con la abstracción reflexiva, que en un primer momento Dubinsky y posteriormente el grupo RUMEC transponen esta idea al contexto de las matemáticas de nivel superior para describir el desarrollo cognitivo del estudiante. La abstracción reflexiva es considerada como un proceso que permite al individuo, a partir de las acciones sobre los objetos, inferir sus propiedades o las relaciones entre objetos en un cierto nivel de pensamiento. (Dubinsky, 1991 a), 1991 b)). Dubinsky usa la abstracción reflexiva para describir cómo un individuo logra ciertas construcciones mentales sobre un concepto determinado, al enfrentarlo a situaciones problemáticas. La teoría considera el conocimiento matemático de un individuo como:

Su “tendencia” a responder a ciertas situaciones matemáticas problemáticas en un contexto social, construyendo o reconstruyendo acciones, procesos y objetos y organizándolas en esquemas con el fin de manejar las situaciones y resolver los problemas (Dubinsky y McDonald, 2001, p.276).

Para la teoría APOE la construcción de un concepto matemático pasa por tres etapas básicas: acción, proceso y objeto; el mecanismo que permite pasar de una etapa de construcción de conocimiento a otra, es la abstracción reflexiva. De este modo, la construcción del conocimiento matemático se realiza a través de distintas abstracciones sucesivas hasta llegar a construir de manera coherente un esquema asociado a un concepto matemático.

La construcción del concepto matemático en estudio, comienza con la realización de una acción sobre un objeto que fue previamente construido por el individuo. La acción se interioriza por medio de la repetición reflexiva y guiada en un proceso, en el cual la transformación es controlada de forma consciente por el individuo. Nuevos procesos se pueden construir mediante los mecanismos de coordinación y reversión. El proceso es encapsulado en un objeto a través de la aplicación de acciones u otros procesos acompañada de una reflexión sobre él. Los esquemas son una colección coherente de acciones, procesos, objetos y otros esquemas relacionado con el concepto, así como de las relaciones entre sus elementos. Estos esquemas son dinámicos y van evolucionando a través de las etapas de desarrollo llamadas inter, intra y trans. Los esquemas se pueden tematizar en objetos. La figura 1 muestra las relaciones entre las construcciones y mecanismos mentales que explica la teoría.

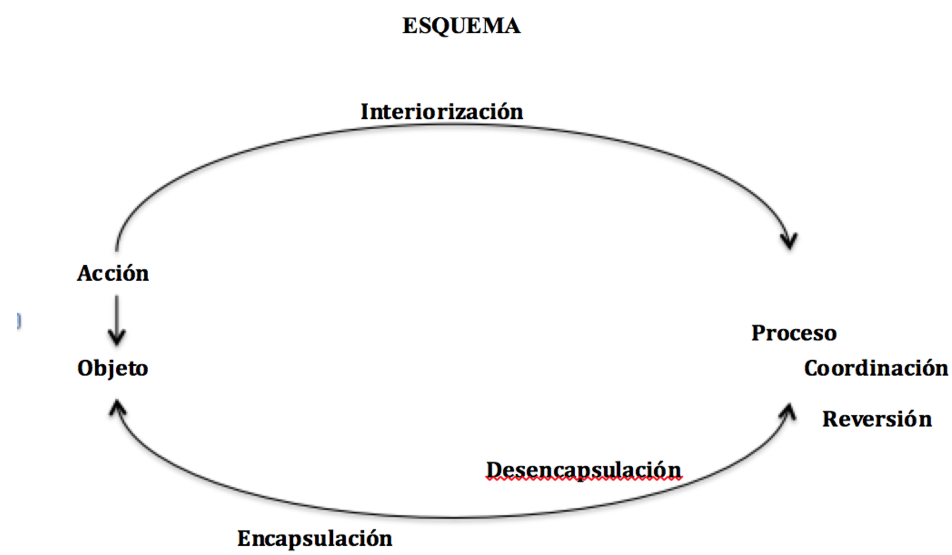


Figura1. Construcciones y mecanismos mentales para la construcción de conocimiento matemático (Arnon et al., 2014, p. 18)

Metodología

La teoría APOE propone un ciclo de investigación (Arnon et al., 2014) como metodología el cual guía la investigación, este nos permitirá alcanzar cada uno de los objetivos que se plantearon y así dar respuesta a las preguntas de investigación.

El ciclo de investigación de la teoría APOE consta de tres fases que se describen en detalle a continuación (ver figura 2):

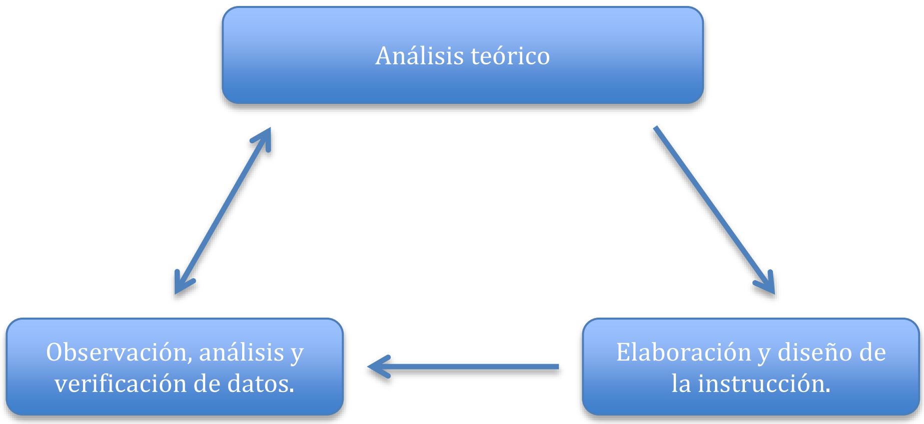


Figura 2. Ciclo de investigación (Asiala et al., 1996)

Fase 1: Análisis Teórico. Se elabora un análisis teórico tomando algunos de los elementos descritos por Roa y Oktaç (2010), tales como el análisis de los libros que se utilizan como textos básicos en los cursos de Álgebra Lineal de la carrera de Ingeniería en mecatrónica, con el objetivo de conocer los conceptos previos requeridos para la construcción del concepto de matriz, así como las investigaciones que han abordado esta temática desde la teoría APOE, esto permitirá determinar las construcciones previas requeridas para la construcción del concepto en estudio. El resultado final de este análisis es una descomposición genética del concepto de matriz, en la que se describen las construcciones y mecanismos mentales que pueden ayudar al estudiante en la comprensión del concepto matemático en estudio.

Fase 2: Elaboración y diseño de la instrucción. Se elabora un diseño instruccional sustentado en el análisis teórico elaborado en la primera fase del ciclo, y se pondrá en marcha mediante el ciclo de enseñanza ACE de la teoría APOE (Asiala et al., 1996), el cual consiste de tres componentes: (A) actividades en grupos colaborativos, (C) discusiones en clases y (E) ejercicios. Esta propuesta pedagógica tiene como objetivo principal facilitar al estudiante la construcción de las estructuras mentales propuestas en la descomposición genética.

Fase 3: La recolección y análisis de los datos. La recolección de los datos se llevará a cabo mediante un cuestionario escrito y una entrevista semiestructurada. El análisis se realizará bajo la lente de la descomposición genética, poniendo el foco de atención en determinar sí las construcciones mentales propuestas en la descomposición genética son o no realizadas por los estudiantes.

Fase 1 del ciclo de investigación

Mediante la teoría APOE el desarrollo cognitivo del estudiante se puede describir al poner en marcha su ciclo de investigación, el cual por lo general comienza con el diseño del análisis teórico, en él se describen las construcciones y los mecanismos mentales que requiere un estudiante para la construcción de un concepto matemático, el resultado final del análisis teórico proporciona una descomposición genética (DG) del concepto. Así, una descomposición genética es un modelo hipotético que describe las estructuras y los mecanismos mentales que un estudiante puede requerir para la construcción de un concepto matemático (Arnon et al., 2014).

El diseño de una descomposición genética se puede basar en la comprensión matemática del concepto, la experiencia con la que cuenta el investigador ya sea como aprendiz o enseñante del concepto. También, se pueden tomar en cuenta otros elementos como: el análisis de textos, los resultados de estudios previos, las investigaciones previas sobre el pensamiento que tienen los estudiantes del concepto, por ejemplo las dificultades de estos con el concepto, las perspectivas teóricas del desarrollo del concepto y/o los materiales de instrucción (Arnon et al., 2014).

Una vez elaborada una descomposición genética hasta que no sea probada experimentalmente es considerada preliminar. Es importante aclarar que distintos estudiantes pueden seguir caminos diferentes para construir el concepto, esto llevaría a tener más de una descomposición genética. Cada una de ellas puede ser validada en base a los datos que se obtengan de la aplicación y análisis de instrumentos que permitan observar las construcciones y mecanismos que desarrollan los estudiantes sobre el concepto. Puede ocurrir que los datos muestren evidencia de construcciones o mecanismos que no fueron considerados en la descomposición genética preliminar lo cual llevaría a refinarla, y mediante la aplicación sucesiva del ciclo de investigación de la teoría APOE tener una descomposición genética más acabada (Asiala et al., 1996), de modo que dé cuenta de una mejor manera, de lo que se observa que realizan los estudiantes cuando construyen el concepto.

Para nuestra investigación, se modificó y amplió una descomposición genética preliminar del concepto de matriz, diseñada por el grupo RUMEC, para elaborar las actividades propuestas en el libro de texto *Learning Linear Algebra with ISETL* (Weller et al., 2002). En la descomposición genética se considera que el estudiante debe contar con la construcción previa de esquema de secuencia, el cual contiene al menos al objeto secuencia considerada como una lista de elementos y el objeto secuencia como una función definida entre los naturales y los reales

Se propone que el concepto de matriz como objeto puede ser construido por el estudiante encapsulando el proceso de matriz, obtenido de la coordinación de los procesos:

1. Considerar a una secuencia como una función definida entre el conjunto de los números naturales y los reales.
2. Usando el esquema de secuencia se construye el concepto de una secuencia de secuencias, dado que cada elemento del conjunto de matrices de $m \times n$ es una secuencia vertical de longitud m de secuencias alineadas horizontalmente de longitud n.
3. De igual manera que en 2, cada elemento del conjunto de matrices de $m \times n$ es una secuencia horizontal de longitud n de secuencias alineadas verticalmente de longitud m.

Para la encapsulación del proceso matriz en un objeto, el estudiante debe ser capaz de construir nuevos objetos matriz mediante acciones que pueden ser por ejemplo, sumar, multiplicar matricialmente y/o multiplicar por escalar otras matrices; verlas como elementos del espacio vectorial de las matrices de $m \times n$ o tomar una matriz y reducirla a su forma escalonada.

Reflexiones

El diseño de una descomposición genética es fundamental en la teoría APOE, ya que está es necesaria para el desarrollo de las demás faces del ciclo de investigación, pero también es la más difícil de elaborar, por ello se presenta solo un avance de dicha descomposición genética.

Actualmente, se está trabajando en la descripción detallada de las construcciones previas que necesita el estudiante para lograr con éxito la comprensión del concepto de matriz, pues a pesar de tener en claro que el estudiante requiere contar con la estructura de esquema de secuencia, hace falta especificar y justificar mediante la teoría los elementos mínimos que componen al esquema y las relaciones entre estos. Por otra parte, se requiere delinear cómo lograr que los estudiantes desarrollen los mecanismos propuestos en la descomposición genética, por ejemplo: la coordinación de procesos.

Referencias

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. DOI 10.1007/978-1-4614-7966-6.New York: Springer.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. En J. Kaput, Shoenfeld, A. y Dubinsky, E. (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education (Vol. II*, pp. 1-32). U.S.A.: American Mathematical Society.

Dorier, J. (2000). Epistemological Analysis of the Genesis of the Theory of Vector Spaces. En Dorier, J. (Eds.), *The Teaching of Linear Algebra in Question* (pp. 3-81). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dorier, J. & Sierpinska, A. (2001). Research into the Teaching and Learning of Linear Algebra. En Holton, D. (Eds.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (pp. 255-273). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (1991 a). Reflexive Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En Tall, D. (Eds), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-126). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (1991b). The constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics. En Steffe, L. (Eds.) *Epistemological Foundations of Mathematical Experiences* (pp. 160-220). New York: Springer-Verlag.

Dubinsky, E. & McDonald, M. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. En Holton, D. (Eds.). *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (Vol. *7*, pp. 273-280). Kluwer Academic Publishers.

Roa, S. & Oktac, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(1), 89-112.

Weller, K., Montgomery, A., Clark, J., Cottrill, J., Trigueros, M., Arnon, I. & Dubinsky, E. (2002). Learning Linear Algebra with ISETL. Obtenido de http://homepages.ohiodominican.edu/~cottrilj/datastore/linear-alg/LLAWI-P3.pdf

Autores

José Luis Ávila Luna; UAZ. México; joseluis.avilaluna@hotmail.com
Ofelia Montelongo Aguilar; UAZ. México; omontelo@mate.reduaz.mx
Lorena Jiménez Sandoval; UAZ. México; lorejim79@hotmail.com

CONOCIMIENTO DEL PROFESOR AL ENSEÑAR LA DERIVADA USANDO RECURSOS TECNOLÓGICOS

Edgar Ponciano Bustos, Leticia Sosa Guerrero

Resumen

El objetivo de esta investigación se centra en caracterizar los conocimientos sobre recursos didácticos (tecnológicos) que manifiesta un profesor para enseñar la derivada. Este estudio es de corte cualitativo y descriptivo, en el cual se analizará el estudio de casos de dos profesores de nivel medio superior que participaron en un curso de desarrollo profesional, donde planearon, ejecutaron y mejoraron algunas actividades para enseñar la derivada. Uno de los principales resultados gira en torno a que el docente conoce las desventajas, y las capacidades que poseen los recursos didácticos tecnológicos, pero en su práctica docente no los implementa en sus actividades de enseñanza.

Palabras clave: Conocimiento del profesor, Derivada, Tecnología, MTSK, KMT.

Introducción

Este trabajo de investigación se centra en la problemática de *la caracterización del conocimiento del profesor referente al uso de recursos para enseñar la derivada*, donde para entender lo anterior se planteó la pregunta de investigación: *¿Qué conocimiento en cuanto al uso de recursos manifiesta el profesor para enseñar la deriva?* Este trabajo de investigación busca saber y entender qué conocimiento referente a recursos didácticos tiene el profesor de nivel medio superior para enseñar el concepto de la derivada, y de igual modo nos interesa saber cómo implementa algún recurso tecnológico en su enseñanza. Con base en los planteamientos anteriores el objetivo de este trabajo es *caracterizar el conocimiento del profesor en cuanto a recursos tecnológicos para enseñar la derivada.*

Las investigaciones revisadas hasta el momento, reportan distintas dificultades de los profesores y estudiantes con la derivada, por ejemplo, los trabajos de Artigue (1995) y Hitt (2003). Por otro lado, también existen investigaciones que mencionan la importancia del uso de la tecnología para mejorar la enseñanza y el aprendizaje, por ejemplo la de Cantoral y Mirón (2000), estos autores analizan los efectos al incorporar calculadoras con capacidad gráfica al enseñar las relaciones entre f y f', es decir, entre una función y su derivada o la función y sus primitivas. Por su parte, Marquez y De los Rios (2013), en su investigación dan una propuesta para la enseñanza de la derivada y sus aplicaciones en un entorno informático usando Geogebra.

Las complicaciones de los alumnos con el concepto de la derivada, se pueden deber a que sus profesores también tienen esas confusiones en sus conocimientos, y esto pudo ser provocado debido a la formación académica del docente. El conocimiento que manifiesta el profesor entorno a la derivada influye en su enseñanza. Y es que en ciertas circunstancias, el docente no posee un excelente dominio de las matemáticas que se enseña (Badillo, 2003), es decir, el educador no comprende muy bien el concepto, significados, representaciones y aplicaciones. Por su parte, Cantoral y Farfán (2004) afirman que el docente controla los conceptos, sin embargo no posee el conocimiento de las herramientas didácticas para enseñar eficazmente esos saberes a sus alumnos. Además, García, Azcárate y Moreno (2006) reportan que los docentes repiten los mismos métodos de instrucción, que adquirieron en su etapa de estudiante, ignorando metodologías de enseñanza nuevas y alternativas.

Es importante también que los profesores incorporen la tecnología en su instrucción, ya que en la vida cotidiana estamos haciendo uso constante de las tecnologías, es por ello que los docentes deben incorporarlas a la educación, para asegurar la educación tecnológica de los estudiantes. El uso de la tecnología puede provocar cambios en el conocimiento didáctico del contenido y en el conocimiento matemático. La transendencia del uso de recursos didacticos tecnologicos en la enseñanza, ha sido mencionado por Akkoc, Bingolbali y Ozmantar (2008), quienes afirman que los profesores necesitan la tecnología para enriquecer su comprensión del contenido tecnológico y pedagógico, ideas detrás de este contenido que afecten directamente sus conocimientos del contenido tecnológico, para una integración exitosa de la tecnología para enseñar derivada en un punto. Por su parte, Kendal y Stacey (2002) mencionan que el implemento de un recurso didáctico tecnológico de los profesores hará cambios en el contenido que enseñan en respuesta a un nuevo conocimiento. Asimismo, Villanueva (2004), señala que las TIC (Tecnología de la Información y Comunicación) en la educación son una herramienta de apoyo pedagógico, reforzando las actividades escolares y colaborando a la educación no formal y alternativa, también agrega que las TIC ofrecen condiciones tecnológicas para la alteración de la enseñanza tradicional.

En este estudio consideramos que investigar el conocimiento del profesor servirá para detectar las carencias y potencialidades que tiene el profesor con respecto al contenido matemático (la derivada), y conocimiento didáctico del contenido (recursos didácticos tecnológicos), y así, para que el docente ejerza eficientemente su práctica docente y de este modo beneficiar el aprendizaje del estudiante.

El profesor es uno de los ejes principales para mejorar la enseñanza por lo tanto su formación debe ser fundamental. Pino, Godino y Font (2011), mencionan que el desarrollo del pensamiento y de las competencias matemáticas de los alumnos de una institución educativa, depende de manera esencial de la formación de sus respectivos profesores.

En lo que se refiere al conocimiento del profesor, de acuerdo con Ponte y Chapman (2006), las investigaciones realizadas dentro del campo de formación de profesores de matemáticas, se han centrado en diversos aspectos del conocimiento y la práctica del profesor, los cuales pueden ser agrupadas en cuatro categorías: 1) conocimiento matemático de los profesores, 2) conocimiento de los profesores para la enseñanza de las matemáticas, 3) creencias y concepciones de los profesores, y 4) la práctica del profesor.

Con respecto al conocimiento del profesor relacionado con el concepto de la derivada, se han realizado investigaciones que han abordado esta problemática. Por ejemplo, el trabajo de García, Azcárate y Moreno (2006) concluyen que el conocimiento del profesor está relacionado con a la formación que tuvo de estudiante, se basa en lo empírico, los libros de texto y la propia experiencia, los docentes tienden a unificar los programas, obviando la diferenciación entre las materias afines de diferentes carreras, y además, los profesores reproducen las mismas metodologías de trabajo que siguieron en su etapa de estudiante, ignorando metodologías alternativas disponibles y no se involucran con la profesión del estudiante. Asimismo, Stump (2001, citado en Gavilán, 2005), aporta como importante la obligación de los profesores de conocer diferentes representaciones y las conexiones entre las mismas, además de la necesidad de conocer y usar materiales curriculares no tradicionales para el desarrollo del conocimiento de contenido pedagógico.

Siguiendo en la misma línea de las investigaciones enfocadas al conocimiento del profesor con respecto a la derivada. Pino, Godino y Font (2011) finalizan que, hay que seguir avanzado en la determinación del Conocimiento didáctico-Matemático(CDM) que necesita el profesor de bachillerato con relación a la enseñanza de la noción de derivada teniendo en cuenta el estado actual de las investigaciones en Didáctica del Cálculo, mediante la reconstrucción de un significado epistémico global de la derivada que sirva de referencia para determinar aspectos esenciales del CDM del profesor de bachillerato respecto a dicha noción.

Las investigaciones anteriores muestran que existen muchos factores que influyen en el conocimiento del profesor al enseñar la derivada, es necesario seguir investigando sobre el conocimiento del profesor, porque de esta manera se mejorara el conocimiento en matemática y didáctica del profesor, y así, favorecer el aprendizaje de los estudiantes.

Marco teórico

Esta investigación se localiza en el conocimiento del profesor para la enseñanza de las matemáticas. En vinculación con el marco del conocimiento del profesor, este avance de investigación se localiza en el modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK, ver la figura 1) desarrollado en la Universidad de Huelva en España (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013). El MTSK considera, dos grandes dominios de conocimiento. Por un lado, considera el conocimiento que tiene el profesor de las matemáticas como disciplina científica en un entorno escolar. En el modelo, se llama a este dominio el MK (*Mathematical Knowledge*). El otro dominio es el conocimiento de apariencia relacionadas con el contenido matemático como objeto de enseñanza-aprendizaje. Este domino se llama PCK (*Pedagogical Content Knowledge*). Cada dominio (MK y PCK) tiene tres subdominios los cuales son:

Subdominios del Conocimiento Matemático (MK)

- *Conocimiento de los temas (KoT)*. En este subdominio incluye, entre otros, aspectos fenomenológicos, definiciones, registros de representación, y ejemplos que caractericen aspectos del tópico abordado, de igual manera alude al contenido disciplinar de las matemáticas que figura en libros y textos de matemáticos.
- *Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (KSM)*. En este subdominio se incorporan el conocimiento de las primordiales ideas y estructuras matemáticas, y conexiones entre temas (Santana y Climent, 2015).
- *Conocimiento de las Prácticas Matemáticas (KPM)*. Es el conocimiento de cómo se conduce cuando se crea matemáticas, por ejemplo, cómo se razona, cómo se argumente o cómo se demuestra o define.

Subdominios del Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)

- *Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM)*. Es el conocimiento que tiene el docente de cómo aprenden los alumnos el contenido matemático y el conocimiento de ese desarrollo de entendimiento, así como los errores, dificultades, y obstáculos relacionados a un concepto matemático.
- *Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS).* Es el conocimiento que posee el profesor acerca de lo que el alumno debe y puede alanzar en un curso escolar, asimismo es aquello que el docente conoce sobre las capacidades conceptuales, procedimentales y de razonamiento matemático que se fomentan en definido momento educativo (Flores, Escudero y Aguilar, 2014).
- *Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT).* Se refiere al conocimiento que tiene el profesor sobre cómo representar el contenido de cara a su enseñanza. Incluye el conocimiento del profesor en cuanto a las estrategias de enseñanza, recursos y materiales que el docente debe conocer para enseñar un contenido matemático, de igual modo se incluye aquello que proporcione ayuda a los estudiantes a construir conceptos matemáticos y que logre activar su intuición, de igual manera todas aquellas habilidades y conocimientos del profesor para apoyar al estudiante a superar sus propios errores. Esta investigación se centra en el *KMT*, este subdominio está compuesto por dos categorías *Formas de Enseñanza* y *Recursos y Materiales*. Este estudio se enfocará en la categoría *Recursos y Materiales*. La categoría *Recursos y Materiales* asociados al contenido a enseñar, alude a los conocimientos que tiene el profesor sobre los recursos y materiales (libros de texto, pizarrones normales y electrónicos, softwares educativos, aplicaciones móviles, etc.) y los beneficios o perjuicios afiliadas al uso de estos como apoyo para la enseñanza de un cierto contenido matemático. Santana y Climent (2015) afirman que el docente debe saber las capacidades de la herramienta tecnológica para poder implementarla en el aula de modo que mejore la enseñanza, de igual modo debe conocer posibles dificultades de aprendizaje que puede propiciar. Los docentes al implementar materiales, recursos y actividades innovadoras ofrecidas por un software podrían disponer de mejores herramientas para desarrollar su enseñanza, esto tendría impactos positivos en el proceso de aprendizaje de los alumnos ya que dispondrían de recursos mejores y más diversos (Hinostroza, 2000). Por su parte, González (1989, citado en Villanueva, 2004) sugiere que los medios de enseñanza ejecutan funciones instructivas, cibernéticas, formativas, y recreativas, a las cuales se le agrega las funciones: motivadora-innovadora- creadora, lúdica-recreativa y desarrolladora-control. Además, Castillo (2008) menciona que las teorías relacionadas con la innovación en la educación sugieren que las tecnologías actúan como catalizadoras del proceso de cambio. Tal efecto ayuda a crear una alteración en los métodos y procedimientos que utiliza un profesor, facilitando la adopción de estrategias pedagógicas diferentes que, eventualmente, son más efectivas.

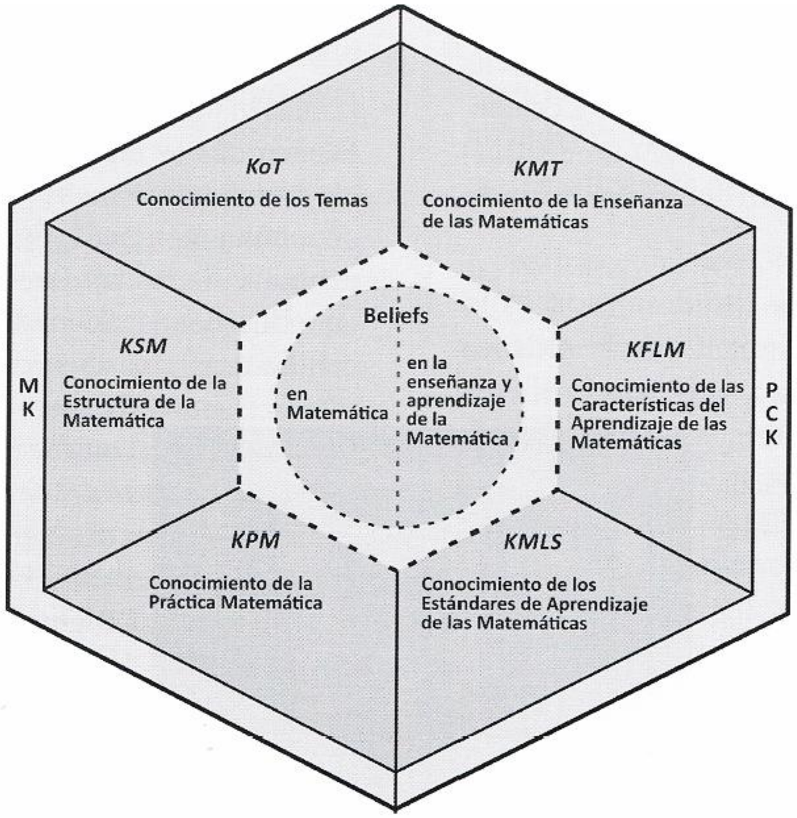


Figura 1. Modelo MTSK con sus respectivos dominios y subdominios (Santana y Climent, 2015)

Método

La metodología empleada en este estudio es de tipo cualitativa, mientras que su naturaleza se define como descriptiva. Es cualitativa porque se pretende identificar, observar, obtener y caracterizar el conocimiento de recursos didáctico tecnológicos que manifiesta el docente para enseñar la derivada. De acuerdo con Denzin y Lincoln (2005), la investigación cualitativa es una labor que sitúa al observador en el mundo, consiste "en un conjunto de prácticas interpretativas que hacen al mundo evidente, y estas prácticas alteran el mundo, lo transforman en una serie de representaciones, que insertan las notas de campo, las entrevistas, conversaciones, fotografías, registros y memorias" (p. 3).

Es a su vez descriptivo, porque se busca especificar con una mayor exactitud el conocimiento del profesor al enseñar la derivada. Dankhe (1989) menciona que las investigaciones descriptivas buscan especificar las propiedades importantes de personas, grupos, comunidades o cualquier otro fenómeno sometido a análisis.

En esta investigación se analizará el estudio de casos de dos docentes de nivel medio superior, ya que de acuerdo con Stake (2007), el estudio de casos es el estudio de la singularidad y de la complejidad de caso particular, para llegar a comprender su actividad en coincidencias importantes. De estos estudios de casos se identificará, observará, obtendrá y caracterizará el conocimiento del profesor en cuanto a recursos didácticos tecnológicos que manifiestan los dos docentes para enseñar la derivada. Estos profesores estaban en un curso de desarrollo profesional, donde planearon, ejecutaron y mejoraron algunas actividades, para la enseñanza la derivada dentro del aula. De esas actividades se analizará el conocimiento sobre recursos tecnológicos que implementaron los profesores en su enseñanza. Con base en dicho análisis se caracterizará el conocimiento del profesor. Una vez que se logre la caracterización se pretende hacer un diseño de actividades. Los instrumentos en la recogida de datos serán una entrevista inicial y sesiones de clases grabadas en video.

Reflexiones

El profesor conoce la potencialidad que puede tener el uso de recursos didácticos tecnológico en su práctica docente, pero a pesar de esto, no realiza su enseñanza con estos recursos tecnológicos, y además, sabe de las desventajas que puede tener dichos recursos didácticos, al momento de comprender algunos procedimientos y propiedades de la derivada.

Los resultados son enfocados en los conocimientos del profesor a través de los cuales optimice y potencie el uso de los recursos didácticos a fin de favorecer la enseñanza de la derivada.

A su vez, con los resultados que arroje esta investigación, se espera que puedan servir como un inicio de partida para la creación de diseños de instrumentos de evaluación y actualización de planes de formación matemáticas, y desarrollar conocimientos didácticos matemáticos tecnológicos que se necesita para la enseñanza de la derivada. De igual forma, con esta investigación se espera aportar criterios para seleccionar los problemas y prácticas matemáticas a incluir en los programas y procesos de formación. Coincidiendo con Moreno (2005), quien afirma que el docente es clave para el éxito e indispensable para implementar cualquier cambio o propuesta didáctica que tengan su principio investigación, también menciona que hablar del profesor implica hacerlo del conocimiento y del desarrollo profesional.

Referencias

Akkoc, H., Bingolbali, E., y Ozmantar, F. (2008). Investigating the technological pedagogical content knowledge: A case of derivative at a point. En O. Figueras, y A. Sepúlveda (Eds.). *Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, and the XX North American Chapter*, *2*, 17-24. Michoacán, México: PME.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady y P. Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática*. (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemáticas de Colombia* (Tesis de Doctorado inédita). Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona, España.

Cantoral, R. y Mirón, H. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: de la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *3*(3), 265-292.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2004). *Desarrollo conceptual del cálculo*. Australia: Thomson.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)*, 2985-2994. Middle East Technical Universitiy: Ankara, Turquía.

Castillo, S. (2008). Propuesta pedagógica basada en el constructivismo para el uso óptimo de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *11*(2), 171-194.

Dankhe, G. L. (1989). Investigación y comunicación. En C. Fernández Collado y G.L Dankhe (Eds.), *La comunicación humana: ciencia social*. México: McGraw-Hill, 385-454.

Denzin, N. y Lincoln, Y. (2005). *The Sage Handbook of Qualitative Research* (3a. ed.). Londres: Sage.

Flores, E., Escudero, D. I., y Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275-282). Bilbao: SEIEM.

García, L., Azcárate, C. y Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*(1), 85-116.

Gavilán, J. (2005). *El papel del profesor en la enseñanza de la derivada. Análisis desde una perspectiva cognitiva* (Tesis de Doctorado inédita). Universidad de Sevilla, España.

Hinostroza, E. (2000). *Roles alternativos de TIC en educación: sistema de apoyo al proceso de enseñanza aprendizaje*. Recuperado 18 de mayo del 2015, de www.c5.cl/ieinvestiga/actas/ribie2000/papers/265.html

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. *Décimo Primer Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior*, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Morelia, México.

Kendal, M. y Stacey, K. (2002). Teachers in transition: Moving towards CAS-supported classrooms. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *34*(5), 196-203.

Marquez, C. y De los Ríos, C. (2013). Una propuesta para la enseñanza de la derivada con Geogebra. *Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, 7211-7217.

Moreno, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: Evolución, estado actual y retos futuros. *IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, Universidad de Córdoba, España, 81-96.

Pino, L., Godino, J. y Font, V. (2011). Conocimiento didáctico-matemático sobre la enseñanza y aprendizaje de la derivada. *Memoria de la XIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, 206-213.

Ponte, J.P., y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. En A. Gutiérrez, y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 461-494). Rotterdam: Sense Publishers.

Santana, N. y Climent, N. (2015). Conocimiento Especializado del Profesor para la utilización de Geogebra en el Aula de Matemáticas. *Números*, *88*, 75-91.

Stake, R. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Ediciones Morata.

Villanueva, Y. (2004). *Tendencias actuales en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas y la utilización de las nuevas tecnologías de la información y las comunicaciones en la educación.* Recuperado 18 de mayo del 2015, de http://funes.uniandes.edu.co/6168/1/VillanuevaTendenciasAlme2005.pdf

Autores

Edgar Ponciano Bustos; UAZ. México; eponcianob@gmail.com
Leticia Sosa Guerrero; UAZ. México; lsosa@mate.reduaz.mx

LA MOTIVACIÓN EN ALUMNOS DE INGENIERÍA. UN TALLER DE DIVULGACIÓN QUE EMPLEA CASOS SIMULADOS CON MATRICES

Daniel Salado Mejía, Lorena Jiménez Sandoval

Resumen

Se presentan los resultados iniciales de un estudio que se realiza en el marco del dominio afectivo con el objetivo de identificar sí la motivación hacia las matemáticas que tienen los estudiantes de ingeniería se modifica al trabajar con actividades que involucran el concepto de Matriz en lo que se ha llamado "casos simulados". Se diseñaran actividades que se implementaran en un taller de divulgación científica en el que participan estudiantes de ingeniería, con la finalidad de promover la motivación hacia la matemática, y será a través de lo capturado en videograbaciones, entrevistas y la aplicación de un quiz sobre motivacióque caracterizaremos la motivación antes, durante y después de la implementación del taller en la idea de aportar elementos que nos permitan entender qué es lo que impulsa a las personas a hacer lo que hacen.

Introducción

El origen de nuestra investigación se dio en dos ejes: la matemática educativa y la divulgación científica. El primero, como todo trabajo en ésta área, surge desde el momento en que existe interés por entender la forma en que aprenden los estudiantes de nivel superior. El interés sobre el concepto de matriz se origina luego de una primera exploración bibliográfica en la que encontramos que es uno de los conceptos que se estudia en los primeros cursos de álgebra en el nivel superior y que tiene además diversas aplicaciones en plano de la ingeniería.

El segundo eje se relaciona con el interés personal que tengo luego de trabajar cerca de 6 años en un grupo de divulgación científica en el estado de Zacatecas llamado Grupo Quark. En este grupo se desarrollan distintas actividades con el objetivo de informar, generar interés y crear actividades de carácter lúdico en la búsqueda de dar a conocer hechos y principios de las ciencias como Física, Química, Biología y Matemáticas. Sin embargo, es de ésta última ciencia de la que menos se han desarrollado actividades de tipo recreativas para el trabajo con estudiantes de nivel superior, las actividades con las que actualmente se cuenta están dirigidas más a los niveles Básico y Medio Superior.

Específicamente, en el Grupo Quark no se trabajan muchas actividades en las que se empleen las matemáticas porque la mayoría de los instructores del grupo no les llama la atención trabajar con matemáticas, de forma tal que esto es el impulso inicial para identificar y/o diseñar actividades que motiven el interés por la matemática en los participantes de este tipo de talleres de divulgación científica.

Antecedentes

La siguiente información se asocia a nuestro trabajo en el abordaje de temas de motivación. Cada uno de los estudios que se reseñan muestran resultados sobre cómo incide la motivación en el aprendizaje de las matemáticas y cómo este tipo de investigaciones tiene cabida en la Matemática Educativa.

Como profesores hemos encontrado antipatía por parte de los alumnos hacia estudiar matemáticas, dichos resultados los podemos encontrar, por ejemplo, en registros hechos por Larkin y Jorgensen (2015), quienes analizan las emociones de alumnas de 6to grado de primaria y cuyos resultados muestran que ellas se sienten disgusto por estudiar matemáticas. De las principales emociones que estas alumnas relacionan con la matemática se encuentran: tristeza, odio, frustración, confusión entre otras, y dichas emociones las encuentran ya sea en Matemáticas vistas desde un punto de vista general o en temas específicos de la misma.

El uso de la motivación puede impactar en otras emociones o viceversa, a mí parecer, pueden ayudar en el aprendizaje y compromiso de los estudiantes al aprender matemáticas. El estudio hecho por Barnes (2015) muestra que alumnas entre 10 y 11 años desarrollan interés por resolver problemas y muestran perseverancia en encontrar la solución cuando trabajan con un material llamado "*palillos de Cuisenarie*" que las lleva a buscar patrones de comportamiento.

Otro punto que refuerza el estudio de la motivación es el que argumenta Gómez (2005); el principal medio para motivar a los alumnos es que aprendan (p. 2). Pero no todos se acercan a la escuela con los mismos condicionamientos. En la motivación hacia el aprendizaje tenemos que considerar aspectos muy diferenciados:

- El ambiente socio-cultural del alumno
- La imagen que tienen de sí mismos
- Los intereses personales
- Los estilos de aprendizaje.

Al analizar las respuestas de los estudiantes dadas en el Informe PISA 2003 (OCDE, 2005, citado en Gómez, 2005) se resaltan tres datos importantes sobre las actitudes de los alumnos de secundaria frente al estudio; el primero es que los estudiantes de los diferentes países tienen diversas características auto-identificadas que pueden ayudarlos a aprender. En segundo lugar, el grado en que las diferentes características se asocian con el rendimiento. Y en tercer lugar, muestran cómo influyen la motivación y las creencias sobre uno mismo al igual que los factores emocionales sobre la adopción de estrategias de aprendizaje eficaces, de este modo, dichos factores ayudan a los alumnos a convertirse en estudiantes de por vida.

Beumann (2015) hace un trabajo que se acerca bastante a lo que queremos hacer. Ella implementó un curso donde se generaba un laboratorio experimental donde los alumnos eran quienes desarrollaban todo el experimento, en esta investigación se buscaba encontrar una forma de caracterizar la motivación del aprendizaje que tuvieron tales estudiantes. Se hicieron cuestionarios antes de la primera sesión del curso y después de la última, con el objetivo de identificar aspectos como el *auto-concepto, interés, motivación intrínseca y extrínseca.* La caracterización de la motivación de aprendizaje no fue posible y presenta datos cuantitativos que ella misma señala como no significativos para explicar la motivación. Aun con esto, dentro de sus resultados resalta comentarios que hicieron los estudiantes en los que expresan haberse sentido motivados con las actividades de manera que propone que existe un lazo entre el *interés asistido, la motivación y los experimentos matemáticos basados en el estudiante*. Con esto se concluye la importancia de los estudios sobre la motivación de un estudiante desde una perspectiva cualitativa.

En la una búsqueda inicial que nos permita en un futuro el diseño de casos simulados que empleen el concepto de matriz hemos encontrado estudios como el de Azofeifa (2007) que expone el papel que juegan las matrices en la industria automotriz, particularmente en el diseño de la carrocería de un automóvil. Este modelo se basa en un modelo matemático llamado modelo de alambre, que es manipulable desde la computadora. En dicho modelo están presentes las matrices cuyas columnas corresponden a las coordenadas sobre un punto en la superficie de la carrocería.

Parraguéz, Maturana y Rodríguez (2013) trabajan en un sentido meramente matemático la relevancia del teorema de la matriz asociada a una transformación lineal TMATL. Aun siendo un estudio teórico se explica que:

> La matriz asociada a la transformación lineal T, digamos A, depende de las bases B y B'. Normalmente uno elegiría B y B' para hacer el cómputo de matrices de coordenadas, tan fácil como sea posible. Sin embargo, uno en su lugar podría intentar elegir las bases B1 y B2 para hacer la matriz A lo más simple posible, digamos con un montón de ceros en sus coeficientes. Cuando esto se hace en la forma correcta, la matriz A puede proporcionar información importante sobre la transformación lineal (Parraguéz et al., 2013, p.2.)

Por último en el ámbito de la divulgación citamos a Martin y Osorio (2003) que nos hablan de un enfoque entre ciencia, tecnología y sociedad (CTS). Los contextos sociales e históricos siempre son un punto clave para la generación de conocimiento científico y tecnológico además de incorporar estos conocimientos en el ámbito educativo, aunque a veces se hace de manera tangencial al sector educativo. Es por eso que el enfoque CTS debe hacerse de forma activa, evaluando la participación. De lo que se trata es de reenfocar en la práctica los espacios y tiempos curriculares para dar lugar a flexibles, multidireccionales y participativas enseñanzas de la ciencia y la tecnología (p. 12)

Marco teórico

Investigaciones sobre las creencias, actitudes y emociones indican una importante e inseparable relación entre lo cognitivo y el dominio afectivo en matemáticas (Larkin y Jorgensen, 2015). Ma & Kishor (2007, citado en Larkin & Jorgensen, 2015) sugieren que por cada componente cognitiva hay objetivo afectivo y que para cada componente afectivo hay un objetivo cognitivo. McLeod (1992, citado en Larkin y Jorgensen, 2015) propone que las creencias de los estudiantes acerca de las matemáticas pueden ser categorizadas en 4:

a) La dificultad y la naturaleza de las matemáticas basada en reglas,

b) El "yo" y la autoconfianza en aprender matemáticas y sus atributos para lograrlo o fallar,

c) Cómo las matemáticas deben ser enseñadas y

d) El contexto social para aprender matemáticas.

La motivación es un constructo teórico usado para explicar la iniciación, dirección, persistencia, intensidad y calidad del comportamiento, en especial el comportamiento dirigido por metas (Maehr y Meyer, 1997, referenciado en Brophy, 2004). *Los motivos* son constructos hipotéticos que explican por qué las personas hacen lo que están haciendo. Los motivos se distinguen de otros constructos relacionados como son las *metas* (objetivos inmediatos de una secuencia particular del comportamiento) y las *estrategias* (los métodos para lograr las metas y de esa forma satisfacer los motivos).

La motivación del estudiante se origina en las experiencias subjetivas de éste, especialmente aquellas relacionadas con su disposición de comprometerse con las clases, actividades de aprendizaje y las razones para hacerlo.

Las teorías sobre motivación intrínseca presentan a las personas como aquellas que siguen su propia agenda, hacen lo que hacen porque lo quieren hacer, en vez de tenerlo que hacer. Un ejemplo sobresaliente es la teoría de autodeterminación es la propuesta por Edward Deci y Richard Ryan (1985, 2002 respectivamente, citado en Brophy, 2004). Cuando las personas están motivadas intentan cumplir una tarea y emprenden una acción orientada con una meta para lograrlo, al grado de que esto es auto-determinado, es experimentado como elegido de forma libre y surge de uno mismo, no es hecho bajo presión de una necesidad interna o una fuerza externa.

El prototipo de comportamiento auto-determinado es una acción intrínsecamente motivada en la que las personas se comprometen porque quieren hacerlo. Las acciones intrínsecamente motivadas no separan consecuencias motivacionales; la única "recompensa" necesaria para ellos es el interés espontáneo y el disfrute que experimentamos como lo hacemos con ellos. Ellos cuentan con el interés, la curiosidad, la espontaneidad y exploración en nuestros alrededores.

La teoría de la auto-determinación específica que los ajustes sociales promueven la motivación intrínseca siempre que se satisfagan tres necesidades psicológicas innatas: *La autonomía* (la auto-determinación en decidir qué hacer y cómo hacerlo), *la competencia* (habilidades desarrolladas y ejercitadas para la manipulación y control del ambiente) y *la relación* (afiliación con otros a través de relaciones pro-sociales). En otras palabras, las personas son inherentemente motivadas a sentirse conectadas con otras dentro de un medio social, para funcionar efectivamente en ese medio, y a tener un sentimiento de iniciativa personal mientras lo hacen.

Metodología

Para el diseño de actividades nos basamos en García (2008) que hace énfasis en que las actividades no deben hacerse de manera espontánea o improvisada. Deben prepararse y hacerse bajo el respaldo de un modelo. Una vez seleccionado el tema de trabajo se empieza a buscar los modelos que funcionen mejor para emplearse dentro de un taller.

El modelo lúdico-experimental tiene como objetivo propiciar el acercamiento recreativo con la ciencia y debe contener ciertos elementos:

a) *Objetivos.* Ya sea propiciar el aprendizaje o generar actitudes y aptitudes favorables hacia la ciencia, todo modelo debe tener establecidas las metas que persigue.

b) *Estructura.* Las características particulares de cada actividad necesitan una aproximación específica para el proceso. No es lo mismo que se le pida a los participantes que se construya un modelo a que sean meramente observadores. Cada modelo debe tener una estructura propia.

c) *Interacción completa.* En todos los aspectos se buscará que el participante se apropie de la actividad. Los modelos deben buscar una interacción completa: física, intelectual y emocional.

d) *Material.* Cada modelo para que funcione de manera óptima debe tener los materiales adecuados para ejecutarla. García (2008) recomienda que sean materiales fáciles de conseguir y de precio bajo.

Estas características se espera cubrirlas con el diseño de “casos simulados” que es una propuesta de trabajo diseñada por el Grupo Argo (Martín & Osorio, 2003) en un enfoque científico, tecnológico y social (CTS).

Los casos simulados son una propuesta en la que a partir de una noticia ficticia, pero verosímil, se genera una discusión en la que intervienen varios aspectos sociales a través de ideas, opiniones o intereses diversos.

El desarrollo del caso simulado se da de la siguiente forma: primero se da lectura de la noticia ficticia y luego se dan documentos complementarios para entender de forma lo más entera posible el problema discutido en la noticia. Después se asignan papeles a los estudiantes, de forma que se comprometan con su rol y tengan argumentos para defender el rol que se les asignó. Después se les pide a los estudiantes que sigan documentándose acerca del tema para terminar en una mesa de debate. Finalmente se deja de lado la noticia ficticia y se analiza lo aprendido al respecto al tema.

Conclusiones y reflexiones

Emplearemos el taller de divulgación científica para crear un espacio en el que se presente al divulgador como alguien que puede reforzar el conocimiento impartido en el aula. En el caso que nos ocupa, el concepto de matriz y sus aplicaciones. Para el desarrollo del taller, buscaremos, recopilaremos y/o diseñaremos materiales didácticos relacionados con el tema de matrices y su empleo en casos simulados.

Coincidiendo con Beumann (2015) buscaremos establecer una relación entre la motivación que se promueve con actividades experimentales en las que se emplea la matemática y el empleo de los casos simulados en el diseño de estas actividades y su implementación en un taller de divulgación científica. De igual forma, haremos entrevistas antes del inicio del taller y después de la clausura del mismo para observar cambios en la motivación de los estudiantes en el aprendizaje de matrices, solamente que en vez de evaluar de forma cuantitativa, lo haremos de forma cualitativa.

Referencias bibliográficas

Azofeifa, C. (2007). Una introducción al aprendizaje de la teoría de matrices. *Actas del V Congreso sobre la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora* (pp.1-8). Costa Rica.

Barnes, A. (2015). Improving children's perseverance in mathematical reasoning: Creating conditions for productive interplay between and affect. *Actas del 9th. Congress of European Research in Mathematics Education.* Praga, República Checa.

Beumann, S. (2015). Mathematical student-based experiments and their impact on motivation and interest. *Actas del 9th. Congress of European Research in Mathematics Education.* Praga, República Checa.

Brophy, J. (2004). Student's motivation: The Teacher's Perspective. En Brohpy, J. (2004). *Motivating Students to learn* (pp. 1-25). Londres, Reino Unido: Lawrence Erlbaum Associates, Publisher.

Deci, E., & Ryan, R. (Eds.), (2002). Handbook of self-determination research. En Brohpy, J. (2004). *Motivating Students to learn* (pp. 1-25). Londres, Reino Unido: Lawrence Erlbaum Associates, Publisher.

García, M. (2008). A preparar juegos. En García, M. (2008). *Ciencia en todos los rincones* (pp. 103-111). Universidad Autónoma de Zacatecas, México.

Gómez I. (2005). Motivar a los alumnos de secundaria para hacer matemáticas. En Ministerio de Educación y Ciencia (2005). *Matemáticas: PISA en la práctica.* Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Larkin, K. & Jorgensen, R. (2015). "I hate Maths: Why do we need to do Maths?" Using iPads video diaries to investigate attitudes and emotions towards Mathematics in year 3 and year 6 students. USA: Springer.

Maehr, M., & Meyer, H. (1997). Understanding motivation and schooling: Where we've been, where we are, and where we need to go. En Brohpy, J. (2004). *Motivating Students to learn* (pp. 1-25). Lawrence Erlbaum Associates, Publisher. Londres, Reino Unido.

Martín, M. & Osorio, C. (2003). Educar para participar en la ciencia y la tecnología. Un proyecto para la difusión de la cultura científica. *Revista iberoamericana de educación, 32*, 165-210.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. En Larkin, K. & Jorgensen, R. (2015). *"I hate Maths: Why do we need to do Maths?" Using iPads video diaries to investigate attitudes and emotions towards Mathematics in year 3 and year 6 students.* Ed. Springer.

OCDE-PIS(2005). Informe Pisa 2003. Aprender para el mundo de mañana. En Ministerio de Educación y Ciencia (2005). *Matemáticas: PISA en la práctica.* Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Parraguéz, M., Maturana, I. & Rodríguez, M. (2013). APOE: una perspectiva cognitiva para el aprendizaje de la matriz asociada a una transformación lineal. *Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (pp. 1798,1807).* Montevideo, Uruguay.

Autores

Daniel Salado Mejía; UAZ. México; daniels@grupoquark.com
Lorena Jiménez Sandoval; UAZ. México; lorejim79@hotmail.com

LA VISUALIZACIÓN DIDÁCTICA EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Joan Sebastián Ordoñez

Resumen

El siguiente trabajo tiene como propósito fundamental describir y analizar críticamente el papel que profesores y estudiantes asignan a la *visualización* en el contexto local o particular del *sistema didáctico* que se implementa en la clase, cuando se propone enseñar y aprender el concepto (sistema o estructura conceptual) de derivada. Con ese fin se propone la realización de un Análisis Didáctico (AD) del proceso de enseñanza de la derivada, en un curso de Cálculo I ofrecido a estudiantes (futuros profesores de matemáticas) de la Universidad del Valle, como instrumento metodológico, a través del cual se espera contribuir al mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje de la derivada en el ámbito escolar.

Palabras claves: Formación de Profesores de Matemáticas, Visualización Didáctica, derivada,

Introducción

La investigación en el campo de la didáctica de matemáticas, así como diferentes experiencias empíricas en el aula han mostrado dificultades en la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo; varios conceptos básicos como límite, continuidad, derivada e integral generan dificultades a la hora de ser comprendidos por parte de los estudiantes, algunos ejemplos de estos problemas son reportados por Tall (1992), Badillo (2003), Hitt (2006), entre otros. En particular se determina que en el contexto local los futuros profesores de matemáticas (estudiantes de licenciatura en matemáticas-física y estudiantes de licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas) no son exentos del problema, por lo menos así lo muestran los bajos resultados de rendimiento en el curso y análisis de resultados empíricos no sistematizados.

Por otra parte, numerosas investigaciones en didáctica de las matemáticas, realizadas por diferentes investigadores (Bishop, 1989; zimmerman y cunningham, 1991; Bedoya 2002, 2011; entre otros) han mostrado que el proceso de *visualización matemática* puede ser implementado como un medio importante para el desarrollo de la intuición, de representaciones internas y por lo tanto para la comprensión y el aprendizaje significativo de muchos conceptos matemáticos en general entre ellos los ligados al aprendizaje de los conceptos fundamentales del calculo

En esta dirección Duval (2002) y Hitt (2005) plantean respectivamente que *There is no understanding without visualization (no es posible un aprendizaje sin visualización)* y *la visualización plantea un conocimiento directo e intuitivo de los conceptos matemáticos*, por consiguiente se puede pensar en la visualización como un campo de investigación que estudia el potencial de los seres humanos para procesar las representaciones visuales; la "visualización del conocimiento" Burkhard (2005), cuando este conocimiento conceptual y procedimental se utilizan de un modo explícito desde una perspectiva didáctica y con propósitos didácticos Bedoya (2002,2011) lo denomina proceso de visualización didáctica; considerándolo una de las competencias didácticas profesionales del profesor de matemática.

De acuerdo con lo anterior, el principal interés del estudio es identificar el papel de la visualización matemática desde una perspectiva didáctica en la formación inicial de profesores de matemáticas ofrecidos a los estudiantes futuros maestros de matemáticas para esto se delimito y se escogieron conceptos fundamentales del Cálculo ya que estos son una base fundamental en la formación de profesores de matemáticas y además son un requisito fundamental en los cursos avanzados de matemáticas que tienen que ver con estos estudiantes. El centro de estudio es la derivada y las nociones que estructuran este concepto; a partir de esto el objetivo principal de la investigación es:

Describir el papel que se le asigna a la Visualización Didactica y el modelo Didactico que se aborda en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la derivada en un curso de Cálculo I ofrecidos a los estudiantes de la licenciatura en matemáticas y física y la licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas.

Como objetivos específicos se proponen:

Identificar el papel de la visualización en la enseñanza y aprendizaje de nociones que estructuran el concepto de derivada

Identificar la manera en que se aborda la visualización didáctica del concepto de derivada en el texto guía del curso anteriormente mencionado

Caracterizar el modelo didáctico entorno a la visualización de los docentes de Calculo I en el concepto de derivada.

Marco de referencia conceptual

La formación inicial de profesores es sin duda un ítem fundamental en las agendas de los investigadores en educación matemática, se proponen el siguiente diagrama para ver las relaciones presentes.

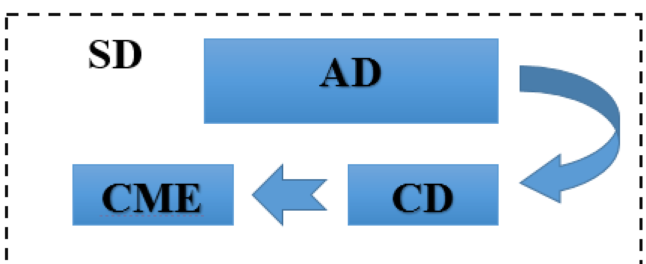


Fig 2: Diagrama de SD, AD, CD Y CME.

- Sistema Didáctico (SD): Desarrollado desde Bedoya (2004); el cual se conforma por los distintos agentes, factores, ambientes internos y externos, relaciones y conocimientos que influyen directa o indirectamente en su funcionamiento: profesores y estudiantes; conocimientos y contenidos matemáticos, metodologías, etc., donde se constituye el ambiente educativo (curricular y didáctica) de carácter externo que se dan cita en torno a un sistema didáctico determinado.

- Análisis Didáctico (AD): Es el que expresa un conjunto de conceptos y métodos que alcanzan un uso generalizado, manejados por un grupo de investigación constituidos en el área de Educación matemática Rico & Fernández (2013), se verá particularmente como una estrategia y un ejercicio de reflexión donde se tendrán en cuenta los diversos componentes del análisis didáctico en su mayor complejidad posible. Bedoya (2004)

- Conocimiento Didáctico (CD): Una aproximación a la caracterización del conocimiento didáctico se plantea desde bedoya (2004) como un conocimiento de carácter conceptual y procedimental que es base de la formación didáctica de los educadores en matemáticas.

- Visualización Didáctica (VD): Introducimos el término de visualización didáctica en nuestra investigación, entendiendo por este como el proceso y resultado por el cual se representa tanto externa como internamente además de estructurar sistémicamente los objetos matemáticos tanto conceptual como procedimental, todo con fines didácticos Bedoya (2002), con la visualización didáctica se aprovecha las diversas tecnologías informáticas con sistemas de representación múltiple, sistema de cálculo simbólico integrados y posibilidades dinámicas e interactivas permitiendo realizar diversas representaciones de un objeto o proceso matemático y percibir o deducir propiedades del objeto a través de la manipulación y observación completa, la visualización didáctica permite hacer una aproximación experimental de algunos conceptos y procedimientos matemáticos escolares cabe destacar que el uso de la VD hace parte del CD de los profesores pero debido a la importancia de esta en la comunicación se decide definirla aparte.

- Conocimiento Matemático Escolar (CME): Este conocimiento es el de la derivada como un sistema o estructura conceptual.

Metodología

El estudio de casos es un método empleado en investigaciones de tipo cualitativo pero este también permite usar fuentes de tipo cuantitativo ya que permite usar una gran variedad de fuentes (tales como documentos, entrevistas, observaciones entre otras). La mayor fortaleza de este método se centra en medir y registrar conductas de personas que se involucran con el fenómeno a estudiar (Carazo, 2006); por tanto, se adoptó como método de investigación al estudio de casos y la investigación es de tipo cualitativo con un enfoque exploratorio y de observación (Carvajal, 2008). El diseño metodológico que se adoptó en la investigación fue el siguiente:

- Participantes
- Contextualización del medio
- Métodos, técnicas, recolección de datos y análisis de información.

Selección de los casos de estudio: para la población del estudio de caso se escogerán dos estudiantes adscritos a los programas de licenciatura en matemáticas -física y la licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas, los estudiantes se escogerán al azar y el profesor a cargo del curso de Cálculo I uno de la universidad del valle

Contextualización del medio: como parte del diseño metodológico se contextualizara el problema de estudio a una población especifica (estudiantes futuros maestros de matemáticas), con un curso determinado (Cálculo I) y un concepto definido (la derivada), también se analizaran las mallas curriculares donde se buscara una idea más amplia sobre cómo está presente la visualización Didáctica en la formación de profesores de matemáticas

Métodos, técnicas, recolección de datos y análisis de información: la investigación es de carácter cualitativo el referente teórico se enmarca en el análisis didáctico, las actividades de observación serán de carácter no participativa, como se mencionó anteriormente se realizara un análisis de documentos pertinentes al proyecto (libros de texto, cuadernos de los entrevistados, notas de clase del profesor, observación a partir de videos, notas de campo) a partir de lo anterior se tomara el marco conceptual para determinar las categorías y sub categorías de análisis que permitirán estructurar y concretar los instrumentos de entrevista

Consideraciones finales

En el desarrollo del trabajo investigativo se han adelantado algunos análisis que permiten sacar algunas posibles conclusiones del mismo:

- El concepto de derivada se presenta a los estudiantes de la misma forma como se ha encontrado en la revisión de algunos libros (representación gráfica de la derivada a partir de la recta tangente a la curva en un punto), con lo cual se puede decir que esta es una definición tradicional que usan algunos profesores para apoyarse en una representación intuitiva del concepto y generar, a partir de esta, una mejor comprensión. Sin embargo, según algunos investigadores (Bishop, 1989; Tall. 1991; Guzmán, 1996; Bedoya, 2002 Hitt. 2003, entre otros), el uso de este tipo de representaciones tiene una serie de limitaciones que se deben tener en cuenta ya que podría llevar al estudiante a conocer y trabajar sobre una única representación, excluyendo otras estrategias que desarrollan mejor el concepto.
- En la actualidad la formación de profesores de matemáticas es de mucha importancia; es por esto que se considera que el generar en los estudiantes reflexiones didácticas acerca de cómo se aborda un concepto matemático fundamental como lo es la derivada es un hecho que no se puede negar y una salida a esto tiene que ver con el uso de procesos de visualización por parte del profesor con propósitos didácticos.

Bibliografía

Badillo, E.; (2003). La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemáticas de Colombia. Tesis Doctoral. Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona.

Bedoya, E. (2011). Didáctica de las matemáticas y formación de profesores de matemáticas: organizadores del currículo, conocimiento y análisis didáctico. Documento de trabajo, sin publicar. Área de Educación Matemática, Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle.

Bedoya, E. (2004). "Conocimiento Matemático Escolar": Hacía una Epistemología Didáctica Matemática. En Universidad del Valle, II Escuela de Historia y Epistemología de las Matemáticas, Cali, Valle.

Bedoya, E. (2002). *Formación inicial de profesores de matemáticas: Enseñanza de funciones, sistemas de representación y calculadoras graficadoras*. Tesis Doctoral. Granada: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada.

Bishop, A.; (1989). Review of research in visualization in mathematics education. Focus on Learning Problems in Mathematics, 11(1), 7-16.

Burkhard, R. (2005). Knowledge Visualization: The Use of Complementary Visual Representations for the Transfer of Knowledge: a Model, a Framework, and Four New Approaches (Doctoral dissertation, Swiss Federal Institute for Environmental Science and Technology).

Carvajal, A. (2008). *Elementos de investigación social aplicada.* Santiago de Cali:

Universidad del Valle.

Duval, R.; (2002) Representation, vision and visualization: Cognitive Funtion in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. In f. Hitt (editor), Representations and Mathematics Visualitations. International Group for the Psychology of Mathematics Education North American Chapter and Cinvestav-IPN. Mexico.

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. XI Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia (Mexico), pp. 81-108.

Carazo, P. C. M. (2006). El método de estudio de caso: estrategia metodológica de la investigación científica. *Pensamiento y gestión: Revista de la división de Ciencias Administrativas de la Universidad del Norte*, (20), 165-193.

Rico, L., & Fernandez-Cano, A. (2013). Análisis Didáctico y Metodología de Investigacíon. En L. Rico, J. Lupiáñez, & M. Molina (Edits.), Análisis Didáctico en Educación Matemática (Pág. 1-22). Granada: Comares.

Tall, D. (1991). Intuition and rigour: The role of visualization in the calculus, en Zimmermann, W. y Cunningham, S. (eds.), Visualization in Teaching and Learning Mathematics, PP. 105-119. Washington: Mathematical Association of America.

Autor

Joan Sebastián Ordoñez Cuastumal; UNIVALLE. Colombia;
joan.ordonez@correounivalle.edu.co

EDUCACIÓN BÁSICA Y MODELACIÓN MATEMÁTICA ¿QUÉ CONCEPCIONES TIENEN SUS DOCENTES?

Samantha Quiroz Rivera, Ruth Rodríguez Gallegos

Resumen ejecutivo

El proceso de aprendizaje de la modelación matemática en futuros docentes no puede ser reducido a la memorización de su definición. Para tal logro, es necesario por tanto que el investigador se involucre en el quehacer diario del docente con el objetivo de acompañarlo en sus dificultades y requerimientos específicos. Es esta colaboración entre el investigador y los docentes la apuesta de la presente investigación. Se presentan los resultados de una metodología que donde mediante el diseño y rediseño de planes de clase, se promueve el aprendizaje de la modelación matemática en tanto estrategia didáctica a través de la evolución de sus concepciones. El estudio muestra cambios en las concepciones de las cinco futuras docentes que conformaban la muestra, específicamente en el diseño de una clase de probabilidad.

Palabras clave: Modelación matemática, Formación docente, Concepciones, Educación primaria.

Introducción

La educación primaria es el pilar sobre el cual se conforman la mayoría de las nociones y conceptos matemáticos. A pesar de lo anterior, múltiples evaluaciones muestran como más de la mitad de los alumnos de este nivel educativo están reprobados en la asignatura de matemáticas (Vidal, 2009).

Análisis de los resultados de las evaluaciones detallan la dificultad de la escuela para vincular las matemáticas que enseñan con la realidad diaria de los alumnos. Las estrategias puestas en marcha por los docentes no llevan a considerar a las matemáticas como una herramienta que le permita al alumno resolver situaciones de la vida cotidiana.

A través de las reformas actuales, se ha iniciado a priorizar la implementación de clases que vinculen las matemáticas escolares con las matemáticas de la vida cotidiana, promoviendo oportunidades para el desarrollo de competencias de modelación matemática dentro de los textos escolares. Sin embargo, estudios anteriores demuestran que en la mayoría de las lecciones de los libros de texto de educación primaria mayormente promueven la resolución de algoritmos aislados donde las matemáticas son utilizadas mecánicamente y sin contexto alguno (Quiroz y Rodríguez, 2011).

Entre las estrategias que promueven esta vinculación se encuentra la modelación matemática. Dicha estrategia, promueve una vinculación clara entre las matemáticas escolares y la realidad del alumno, buscando siempre una construcción del conocimiento, mediante la discusión entre pares y el trabajo autónomo (Alsina, 2007; Aravena & Caamaño, 2009; Bonotto, 2007; Lombardo & Jacobini, 2009).

¿Cómo puede el futuro docente llevar al aula estrategias para la enseñanza de una matemática funcional?, ¿en qué momento de su formación deben ser adquiridas estas competencias?, ¿de qué manera debería llevarse a cabo este aprendizaje? Ante tales preguntas, a presente investigación cuestiona la manera en que los docentes de escuelas primarias están siendo formados para la enseñanza de las matemáticas y propone elementos que apoyen el aprendizaje de la modelación matemática como estrategia didáctica para su implementación en el aula de clases. Se describe una propuesta teórico metodológica para el trabajo con los docentes y el investigador que lleve a la evolución de sus concepciones sobre modelación matemática.

Marco teórico

Los principales referentes básicos sobre modelación matemática se retoman de los estudios de Blum y Niss (1990) y Niss, Blum, y Galbraith (2007) que la definen como la relación entre las matemáticas y los contextos extra-matemáticos. Utilizaremos el modelo de Rodríguez (2007, 2010) donde a través de seis etapas que transitan entre tres dominios diferentes es posible explicar el paso de los alumnos a través del ciclo de modelación.

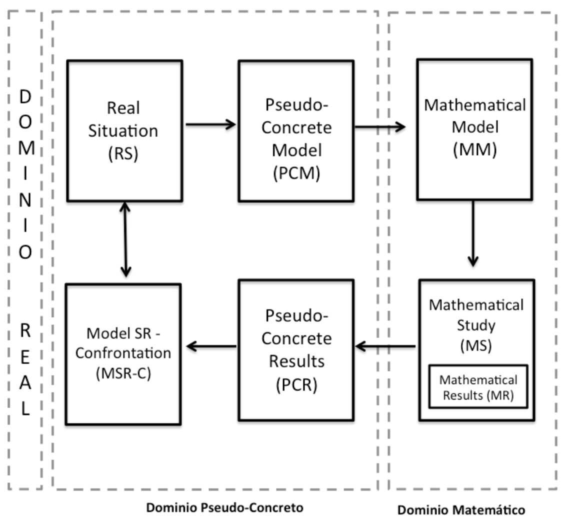


Figura 1. Ciclo de modelación de Rodríguez (2007, 2010)

La presente investigación se centra específicamente dentro de una perspectiva cognitiva, que se vale de la Teoría de los Campos Conceptuales (TCC) para el estudio del desarrollo y aprendizaje del concepto Modelación Matemática en futuros profesores. Para ello, nos apoyamos en la noción de concepción utilizada por Balacheff y Gaudin (2002) como la suma del conjunto de situaciones que le dan sentido al concepto (Situaciones), el conjunto de esquemas que describen la acción del sujeto (Esquemas), el conjunto de significantes asociados (Representaciones simbólicas), así como el conjunto de acciones que permiten juzgar la validez de las decisiones de los individuos en situaciones problemas (Estructura de control).

El modelo está basado en la búsqueda de los esquemas (invariantes operatorios) referentes a modelación matemática que utilizan los docentes en formación en la resolución de una situación específica planteada por el investigador, a través de sus diversas representaciones simbólicas, donde además, se pongan en evidencia las maneras en que se juzgan la validez de sus acciones.

En cuanto a la evolución de concepciones, se retoman elementos del mismo Vergnaud (1990) cuando refiere que las transformaciones en las concepciones de las personas requieren actos de mediación, específicamente el planteamiento de situaciones didácticas idóneas que provoquen una ruptura en los sujetos. Las ideas de ruptura y filiación están ligadas a las de asimilación y acomodación de Piaget. Para Vergnaud, los esquemas pueden cambiar cuando la adaptación es solicitada mediante una situación propuesta por el docente. Bajo esta idea conductora, se buscará que las concepciones respecto a modelación matemática que poseen los docentes en formación sean transformadas considerando una metodología de aprendizaje en colaboración. Se retoma el término "concepción inicial" para dar cuenta de las ideas del profesor respecto a modelación matemática en un primer momento sin la intervención del investigador. Además de eso, la evolución de las concepciones será posible mediante el trabajo en colaboración, de acuerdo con lo expuesto por Hitt (2003).

Método

La investigación presentada está inserta en un enfoque cualitativo, ya que la principal tarea es entender el mundo complejo desde el punto de vista de quienes lo experimentan. Específicamente se selecciona el Estudio de casos múltiples, puesto que se investiga un acontecimiento explorado a través de algunos casos dentro de su contexto y a través de múltiples fuentes de información (Creswell, 2007). El proceso de recolección de datos se llevó a cabo en una Escuela Normal pública con una muestra de 5 docentes en formación del octavo semestre durante el período enero-mayo de 2014. Los instrumentos para la recolección de datos consistieron en: dos guías de observación, una guía de entrevista y un formato de análisis de documentos.

El diseño de investigación fue el Estudio de Lecciones, consistente en un proceso mediante el cual los profesores trabajan en común para mejorar progresivamente sus métodos pedagógicos examinándose y orientándose mutuamente las técnicas de enseñanza y que contiene 3 fases (Mena, 2007):

1. Planeación: Diseño por un grupo de profesores de una lección.
2. Implementación: Implementación de la lección llenando un registro de lo ocurrido.
3. Revisión y discusión de los registros y recuerdos de lo ocurrido con el objetivo de mejor la lección y derivar en recomendaciones para su reestructuración y nueva implementación (Ver Figura 2)

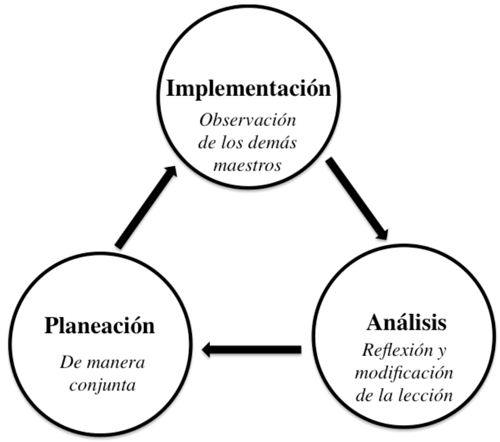


Figura 2. Diseño de investigación Estudio de Lecciones

Resultados

El análisis realizado en el primer ciclo demostró que las docentes en formación poseían seis concepciones iniciales sobre la modelación matemática que se encontraban muy distantes de los postulados de esta estrategia. El rol del docente y el rol del alumno que las maestras consideraban como correctos, estaban muy ligados a sus concepciones sobre el mismo proceso de aprendizaje. De esta manera, las docentes en formación coincidían en pensar a dicho proceso como el añadir información en forma de acumulación en la mente de los estudiantes.

Al ser considerado como tal, el rol del docente consistía en otorgar el conocimiento a manera de explicación al alumno, y este en recibirlo pasivamente. Las matemáticas, eran concebidas por las maestras como un cuerpo estático de nociones terminadas que debían ser transferidas a los alumnos. Dentro de este mismo discurso, los posibles puntos de vista de los alumnos se retomaban como errores que el docente debía corregir.

En el análisis del último ciclo, por otra parte, fue posible apreciar que las actividades reflejaban un cambio debido a una evolución de las concepciones iniciales. Fue en cada ciclo, como se determinaron cambios específicos que permitieron develar al final un plan completamente diferente al realizado en un primer momento. Las concepciones de las docentes finales mostraban una mayor afinidad con los elementos del ciclo de modelación (Ver figura 3). Para las docentes en formación, el proceso de aprendizaje ya no consistía en acumular información, sino en una construcción donde el alumno necesita desestabilizar sus ideas iniciales para asimilar y acomodar sus estructuras mentales.

Bajo esta premisa, las concepciones de las docentes ya no atribuían al docente un rol de expositor, sino más bien ligado al diseño de situaciones que guiaran el proceso de aprendizaje de los alumnos. Estas situaciones inician desde el planteamiento de un problema en términos de contextos cotidianos, que desestabilice las ideas iniciales de estos y permita un pensamiento diversificado mediante la producción en equipo de diferentes procedimientos para su resolución.

En el diseño de actividades que realiza el docente también fueron considerables las actividades donde se permitía una discusión de ideas que guiaran la creación de un modelo matemático y a su vez su trabajo. Para las docentes en formación, las concepciones sobre modelación matemáticas que lograron evolucionar permitieron una apreciación de las matemáticas como algo no terminado que puede ser construido y reconstruido por los alumnos.

Figura 3. Concepciones finales de las docentes luego del ciclo 5.

Las rupturas en las concepciones iniciales fueron logradas mediante el diseño de planes de clase donde, a través de la reflexión de lecturas específicas se plantearan obstáculos epistemológicos a las docentes tal cual refiere Brousseau (1999). Este sistema de generación de planes de clase permitió sistematizar las concepciones evolucionadas y las que faltaban por trabajar.

Dos aspectos se resaltan como claves para el éxito de los diseños de plan propuestos. En primer lugar, el trabajar con elementos del Diseño de Lecciones permitió que las profesoras tuvieran la oportunidad de implementar el plan de clase diseñado en 5 ocasiones y observar lo que sucedía el mismo número de veces. La experiencia de observar lo que sucedía cuando se implementaban sus propias decisiones entre los alumnos de la escuela primaria, suscitó la mayor parte de los argumentos reflexivos que desencadenaban la generación de cambios.

En segundo lugar, el trabajo en colaboración permitió la creación misma de rupturas, mediante la generación de argumentos por las maestras que desafiaban las ideas de sus compañeras tal y como lo establece Hitt (2003). En ocasiones dichas rupturas no estaban incluso consideradas por la investigadora originalmente. El trabajo en conjunto además permitió la validación de las concepciones de las docentes al forzar a externar sus decisiones y acciones en su discurso oral, es decir, a describir los esquemas seguidos mediante el lenguaje como representación simbólica.

Es importante mencionar que las rupturas encontradas no sucedieron al mismo tiempo para todas las docentes. La presentación de resultados en cada una de los ciclos permite analizar cómo para algunas de las futuras docentes fue más rápido la reflexión de ciertas concepciones. En cambio, el diálogo y lo apreciado en la escuela primaria sirvió para que otras se fueran incorporando. Se destaca el caso de la maestra 4 quien a pesar del diálogo continuo no logra evolucionar sus concepciones y esto lo refleja en el momento en que imparte la clase.

Reflexiones y conclusiones

La Modelación Matemática como estrategia didáctica es un contenido que debiera aparecer en el currículo de la formación de profesores de educación primaria. El aprendizaje de dicha estrategia no estriba solamente en la definición de ella en las clases de Matemáticas de las escuelas normales, es necesario un análisis profundo respecto al desarrollo de este concepto en los jóvenes estudiantes.

La presente investigación pretende proponer un modelo para el análisis de las concepciones de Modelación Matemática y su evolución en ambientes de colaboración entre futuros docentes. A través de un enfoque cognitivo, se presentó la manera en que serán estudiados los elementos de una concepción y la metodología que se seguirá para la recolección de los datos.

Se abren espacios para la reflexión respecto a la importancia del uso de metodologías que involucren una comunión entre el investigador y el profesor quienes mediante un trabajo en colegiado busquen el impacto en las prácticas diarias en las escuelas primarias. Ello es considerado como un aporte significativo dentro del rubro de la formación de profesores.

Referencias

Alsina, C. (2007). Teaching applications and modelling at tertiary level. *Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14th ICMI Study*, *10*(44), 469–474. doi:10.1007/97803872982212

Aravena, M. D., y Caamaño, C. E. (2009). Mathematical models in the secondary Chilean education. In M. Blomhoj y S. Carreira (Eds.), *Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics* (pp. 159–176). Dinamarca: Roskilde University.

Balacheff, N., y Gaudin, N. (2002). Students conceptions : an introduction to a formal characterization, 1–21.

Blum, W., y Niss, M. (1990). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects. State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 37–68.

Bonotto, C. (2007). How to replace word problems with activities of realistic mathematical modelling. *Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14th ICMI Study*, *10*(32), 185–192. doi:10.1007/978-0-387-29822-1_18

Brousseau, G. (1999). Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas. *Recherches En Didactique Des Mathématicques*, *4*(2), 165–198.

Creswell, J. (2007). *Qualitative Inquiry and Research Design* (p. 414). California: Sage.

Hitt, F. (2003). Le caractère fonctionnel des représentations. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *8*(1), 255–271.

Lombardo, D. H., y Jacobini, O. R. (2009). Mathematical modelling: From classroom to the real world. In M. Blomhoj y S. Carreiro (Eds.), *Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics* (1º ed., pp. 35–46). Dinamarca: Roskilde University.

Mena, A. (2007). Proemio. In *El Estudio de Clases Japonés en Matemáticas, Su importancia para el mejoramiento de los aprendizajes en el escenario global* (p. 341). Valparaíso: Pontíficia universidad Católica de Valparaíso.

Niss, M., Blum, W., y Galbraith, P. (2007). Introduction. *Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14th ICMI Study*, *10*(1), 3–32. doi:10.1007/9780387298221

Quiroz, S., y Rodríguez, R. (2011). Las competencias de modelación matemática con apoyo en Webquest. In *Memorias de la XIV Escuela de Invierno de Matemática Educativa.* p. 515.

Rodríguez, R. (2007). *Les équations différentielles comme outil de modélisation mathématique en Classe de Physique et de Mathématiques au lycée : une étude de manuels et de processus de modélisation d ' élèves en Terminale S. Sciences-New York*. Joseph Fourier Grenoble I.

Rodríguez, R. (2010). Aprendizaje y enseñanza de la modelación: el caso de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *13*(4-1), 191–210.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Reserches En Didáctique Des Mathématiques*, *10*(2), 133–170.

Vidal, R. (2009). *¿Enlace, Exani, Excale o PISA?*. *Director*. D.F., México: Ceneval.

Autores

Samantha Quiroz Rivera; ITESM. México; samanthaq.rivera@gmail.com
Ruth Rodríguez Gallegos; ITESM. México; ruthrdz@itesm.mx

ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES: REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

Sara Marcela Henao Saldarriaga, Flor Monserrat Rodríguez Vásquez

Resumen

En este escrito se presenta un estado del arte sobre la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), con el objetivo de caracterizarlas en diferentes contextos dentro de la investigación en educación matemática. Recurrimos a la metodología de revisión bibliográfica y al análisis crítico sobre los documentos elegidos. Los resultados de la revisión bibliográfica muestran que las EDO tienen un alto impacto en la investigación sobre modelación en educación matemática. Sin embargo, existe la necesidad de investigaciones que reflejen la naturaleza de las EDO para el beneficio de la enseñanza y aprendizaje de las mismas, es decir, la necesidad de investigaciones que muestren aspectos históricos y epistemológicos de las EDO.

Palabras clave: ecuaciones diferenciales ordinarias, modelación, registros de representación.

Introducción

Diversas investigaciones muestran que existen dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las EDO no solo de carácter conceptual sino de carácter procedimental (Guerrero, Camacho, y Mejía, 2010; Arslan, 2010). A fin de solventar estas dificultades, se han realizado investigaciones que reportan estrategias para resolverlas exitosamente. Particularmente, algunos investigadores en el campo de la Educación Matemática se han dedicado a estudiar diversos enfoques para su enseñanza. Por ejemplo, es posible identificar algunas tendencias en las propuestas de investigación, entre las cuales se encuentra: i) investigaciones que vinculan la modelación y el uso de tecnologías en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales (Rasmussen & King, 2000; Chaachoua & Saglam, 2006; Ortigoza (2007); Rodríguez, 2010), y; ii) investigaciones que utilizan los diferentes registros de representación como recursos en el proceso de enseñanza aprendizaje de este concepto (Habre, 2000; Ju & Kwno, 2007; Habre, 2012).

Las EDO, con frecuencia describen el comportamiento de algún sistema o fenómeno de la vida, dicha descripción matemática es lo que suele llamarse un modelo matemático. Por ejemplo, existen modelos que describen el comportamiento de ecosistemas estudiando su crecimiento poblacional o modelos para fechar fósiles analizando la desintegración de una sustancia radiactiva en el fósil o en el estrato en donde se encontraba. En este contexto, el del modelado de fenómenos físicos, es donde precisamente tienen su origen las ecuaciones diferenciales hacia finales del siglo XVI y principios del XVII. Sin embargo, una de las problemáticas que se reconoce en el campo de la educación matemática, precisamente es que los conceptos matemáticos se consideran como objetos sin una historia que les preceda, y únicamente se expone lo que los libros de texto muestran en su contenido.

En este sentido, el objetivo general de la investigación, que incluye esta revisión bibliográfica, es realizar un estudio histórico epistemológico de las EDO. No obstante, en este documento, únicamente se presenta un avance de investigación que consiste de la revisión bibliográfica sobre la enseñanza aprendizaje de las ecuaciones diferenciales. A partir de esta revisión bibliográfica se ha realizado una clasificación, que no pretende ser exhaustiva, de los diferentes tipos de investigación que se han desarrollado sobre dicho concepto. Si bien, existe una amplia discusión sobre métodos de enseñanza de las EDO estos siguen centrados en aprendizajes procedimentales (memorización de operaciones sin la comprensión de significados subyacentes), dejando de lado los aprendizajes conceptuales que implican la comprensión y la interpretación de los conceptos y las relaciones que se puedan establecer en las EDO (Arslan, 2010). Desde esta perspectiva, se pone en evidencia la necesidad de realizar investigaciones que enfaticen en las relaciones conceptuales presentes en las EDO. Una vía para solucionar esta problemática es la elaboración de propuestas orientadas a investigar factores epistemológicos que ponen en evidencia las relaciones matemáticas y fenomenológicas de la emergencia de un concepto matemático (Castro, Castro, y Torralbo, 2013; Anacona, 2003; Vasco, 1994).

Metodología

Para la revisión bibliográfica se recurrió a la metodología propuesta en Gómez, Fernando, Aponte, y Betancourt (2014). En principio, la metodología menciona la claridad del objetivo, para que la búsqueda bibliográfica sea la necesaria para el investigador. Se proponen tres fases en la revisión bibliográfica: 1) *búsqueda de la información*, la cual debe ser confiable, es decir, deben ser documentos con fundamento y además reconocidos, es decir documentos que han sido revisados cuidadosamente por expertos antes de ser publicados. Particularmente en esta fase, se realizó una búsqueda exhaustiva en bases de datos como conricyt, scopus, elservier, eric, por mencionar algunas; 2) *organización de la información*, consiste en la organización sistemática de la información. En esta fase, se utilizó la aplicación de mendeley para la organización de los documentos que se encontraron en la primera fase; 3) *análisis de la información*, consiste en indagar cuáles son los documentos más útiles para el estudio. En paralelo a las otras fases, se debe tener un pensamiento crítico, sin embargo este análisis debe ser tal que se reafirmen las ideas planteadas en la formulación del problema. Específicamente en esta fase se realizó una clasificación de los diferentes tipos de investigación que se han desarrollado alrededor de las ecuaciones diferenciales, mostrando la necesidad de elaborar una investigación histórica epistemológica en el campo de las EDO.

Resultados. Revisión bibliográfica sobre investigaciones del concepto ecuaciones diferenciales en educación matemática

En la siguiente tabla, organizamos de acuerdo a la metodología la revisión bibliográfica.

Fase 1. Búsqueda de la información.	Fase 2. Artículos seleccionados:	Fase 3. Análisis de la información.
Revistas: *Teaching Mathematics and its Applications; International Journal of Mathematical*	Chaachoua, H., & Saglam, A. (2005). Modelling by differential equations. *Teaching Mathematics and its*	**Clasificación 1.** Investigaciones relativas a la enseñanza de las

Education in Science and Technology; Asia Pacific Education Review; *Revista Latinoamericana de Investigac*ión *en Matemática Educativa.* **Bases de datos consultadas:** conricyt, springer, eric, redalyc, scopus, elsevier.	*Applications, 25* (1), 15-22. Ortigoza, G. (2007). Resolviendo ecuaciones diferenciales ordinarias con Maple y Mathematica. *Revista mexicana de física, 53* (2), 155-167. Rasmussen, C. L., & King, K. D. (2000). Locating starting points in differential equations: a realistic mathematics education approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*(2), 161-172. Rasmussen, C., Kwon, O., Allen, K., Marrongelle, K., & Burth, M. (2006). Capitalizing on Advances in Mathematics and K-12 Mathematics Education in Undergraduate Mathematics: An Inquiry-Oriented Approach to Differential Equations. *Asia Pacific Education Review. 7* (1), 85-93. Rodríguez, R. (2010). Aprendizaje y enseñanza de la modelación: el caso de las ecuaciones difenciales. *Revista Latinoamericana de Investigac*ión *en Matemática Educativa., 13* (4), 191-210.	ecuaciones diferenciales mediante la modelación y la incorporación de tecnologías.
Revistas: *The Journal of Mathematical Behavior; Teaching Mathematics and Its Application.* **Bases de datos consultadas:** conricyt, springer, eric redalyc, scopus, elsevier.	Habre, S. (2000). Exploring students' strategies to solve ordinary differential equations in a reformed setting. *The Journal of Mathematical Behavior*, *18*(4), 455-472. Habre, S. (2012). Improving understanding in ordinary differential equations through writing in a dynamical environment. *Teaching Mathematics and Its Application, 31*, 153-166. Ju, M. K., & Kwon, O.N. (2007). Ways of talking and ways of positioning: Student´s beliefs in an inquiry-oriented differential equations class. *Journal of*	**Clasificación 2.** Investigaciones relativas a la enseñanza de las ecuaciones diferenciales mediante el trabajo con sistemas de representación.

	Mathematical Behavior. *26*, 267-280.	

A continuación se muestra a detalle lo correspondiente a la fase 3, es decir se muestra el análisis de cada una de las investigaciones según su clasificación.

Clasificación 1. Enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales mediante la modelación y la incorporación de tecnologías

En conjunto las siguientes investigaciones, muestran que el proceso de enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales se fortalece mediante la incorporación de tecnologías y el trabajo con la modelación. Por su parte Rasmussen & King (2000) desarrollan una investigación en la que el proceso de modelación posibilita el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Esta propuesta se fundamenta en el enfoque de Educación Matemática Realista (EMR), y busca a partir de contextos cercanos a los estudiantes abordar la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. En esta dirección, los autores dejan entrever la importancia de iniciar el proceso de aprendizaje desde contextos cercanos a los estudiantes (en el sentido imaginables en la mente), pues de esta manera se logra que los alumnos reinventen la matemática involucrada en la situación. El medio para aprender el concepto de ecuación diferencial es la modelación de situaciones, en las que los estudiantes construyen métodos de solución y técnicas que los matemáticos encontraron en su momento histórico. Las actividades propuestas por Rasmussen & King (2000) buscaban que los estudiantes construyeran técnicas gráficas y numéricas para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias con ayuda de la calculadora simbólica gráfica TI-92. Una de las actividades consistía en entregarle a los estudiantes una ecuación diferencial que modelaba el crecimiento de peces en un estanque ($\frac{dP}{dt} = k * P(t)$) la idea era que aproximaran el número de peces en el estanque en los siguientes meses de acuerdo a unas condiciones establecidas, además debían tabular y graficar los resultados. Los autores concluyen que mediante esta propuesta los estudiantes involucrados en la investigación lograron construir su propio método de Euler para aproximar la función solución, y de esta manera dar respuesta a las ecuaciones diferenciales. Esto con la ayuda de un software que posibilitó la visualización de las gráficas, sus manipulaciones y el reconocimiento de relaciones matemáticas.

Rasmussen, Kwon, Allen, Marrongelle & Burth (2006) desarrollan una investigación sobre un curso de ecuaciones diferenciales orientado a la investigación (IO-DE), esta propuesta tuvo como propósito explorar las diferencias entre un curso tradicional de ecuaciones diferenciales (centrados en la presentación de técnicas) y curso de IO-DE. En correspondencia con este objetivo, los investigadores fundamentaron su propuesta en el enfoque de la EMR. Este enfoque considera la reinvención guiada como el proceso mediante el cual los estudiantes construyen su conocimiento con la ayuda de sus pares y la orientación del maestro. Bajo esta perspectiva es fundamental que los estudiantes justifiquen todos los procesos realizados con sus compañeros, de aquí que las discusiones con los pares son un factor determinante en la construcción de conocimiento. Algunos instrumentos importantes en este estudio fueron las encuestas y las evaluaciones (rutinaria y conceptual) realizadas tanto a los cursos de IO-DE como a los cursos tradicionales. Los resultados obtenidos de estos instrumentos permitieron la comparación de ambos cursos. Con respecto a la evaluación rutinaria las actividades propuestas consistían en cinco problemas de naturaleza analítica, un problema numérico para construir el método de Euler y un problema de modelación. Rasmussen et al. (2006) concluye que los resultados de ambos grupos (IO-DE y tradicional) no variaron demasiado en la evaluación rutinaria excepto en la actividad en la que tenían que construir el método de Euler. Este resultado se justificaba en el hecho de que el curso de IO-DE se sustentaba en el proceso de reinvención guiada. Del mismo modo en la evaluación conceptual los resultados fueron casi los mismos; las actividades propuestas consistían en dos problemas centrados en el significado y relaciones entre las soluciones exactas y aproximadas, y dos problemas de modelado. Sin embargo, un seguimiento posterior a los participantes mostró que los estudiantes del curso IO-DE tenían mayor comprensión de las ecuaciones diferenciales después de un año de asistir al curso.

Chaachoua & Saglam (2006) señalan que el proceso de modelación ocupa un papel fundamental en el aprendizaje matemático, y por lo tanto es necesario incorporarlo en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. De igual manera, argumentan que existe una estrecha relación entre el campo de las Matemáticas y la Física; siendo la modelación el proceso que posibilita este vínculo. A partir de los anteriores argumentos Chaachoua & Saglam (2006) elaboran una propuesta de enseñanza para las ecuaciones diferenciales sustentada en fenómenos físicos que motivaron la emergencia de este concepto matemático en el siglo XVII. Específicamente, plantean una situación asociada a un circuito eléctrico RLC (capacitador inductancia y resistencia), puesto que este fenómeno se modela mediante ecuaciones diferenciales, además de ser una situación que motivó el surgimiento de este concepto. De igual modo, y con el propósito de estudiar las técnicas de solución de las ecuaciones diferenciales, proponen algunos ejercicios que exigen el uso de los diferentes métodos analíticos de resolución de ecuaciones. La actividad planteada en este estudio consistía en encontrar la solución de la ecuación diferencial $y"(t) + 2\lambda y'(t) + \omega^2 y(t) = 0, y(0) = 2, y'(0) = 0$ en la que se satisfaciera las condiciones iniciales cuando las constantes λ y ω fueran iguales y números reales positivos. Posteriormente se mencionaba que esa ecuación diferencial modelaba la descarga de un condensador C en un circuito en serie con una inductancia L y una resistencia R, bajo estas condiciones se cumplía que $2\lambda = \frac{R}{L}\ y\ \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$. El objetivo era analizar la solución de la ecuación diferencial a la luz del circuito RLC y realizar una gráfica de este comportamiento. En términos generales las actividades planteadas en esta investigación buscaban que los estudiantes reconocieran que las ecuaciones diferenciales modelaban diversos fenómenos del campo de la electrocinética. Algunos resultados de Chaachoua & Saglam (2006) se asocian con la necesidad de conectar el estudio de las ecuaciones diferenciales con problemas de otros campos de conocimiento como la física o la química.

En la misma línea de argumentación sobre la importancia de vincular las matemáticas con la física mediante la modelación, Rodríguez (2010) realiza una propuesta en la que identifica dificultades en los estudiantes al enfrentarse a situaciones de modelaje en contextos que involucran el uso de ecuaciones diferenciales. Específicamente, diseña una situación experimental en la que plantea un circuito eléctrico RC, a partir del cual se genera la discusión en torno a solución de una ecuación diferencial que modela la situación. Esta propuesta se fundamenta en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y busca incorporar la modelación en la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales. Para ello, en un primer momento Rodríguez (2010) realiza una revisión a algunos libros de texto matemáticos y físicos, en los que encuentra tareas recurrentes para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. Particularmente, señala la ausencia de diversas tareas (no habituales) que involucran la creación de modelos matemáticos, la transición entre la situación real y el modelo pseudo concreto, y la confrontación entre el modelo pseudo concreto y el modelo realidad. A partir del primer análisis se implementa una situación experimental con tareas no habituales, lo cual posibilitó la identificación de la influencia de las praxologías en los procesos de aprendizaje de los estudiantes (el término praxología se enmarca dentro la TAD y hace referencia a un conjunto de tareas (tareas que usualmente se enfrenta el estudiante), técnicas (como se realiza una determinada tarea), tecnología (establece el discurso que justifica la técnica), y una teoría (justifica y explica la tecnología). La pareja tarea - técnica conforman el bloque práctico o praxis (el saber hacer) mientras que el conjunto tecnología - teoría conforman el bloque teórico o logos (el saber)). La situación consistía en modelar el comportamiento de un desfibrilador cardíaco que actuaba en el cuerpo de un hombre; es decir los estudiantes tenían que dibujar el circuito eléctrico que diera cuenta de la situación, escribir la ecuación diferencial correspondiente y analizarla en relación con la situación. De la puesta en escena de esta actividad se tiene que los estudiantes presentan diferentes dificultades en el proceso de modelación, entre ellas, representaciones incompletas de los circuitos, olvidan algunas leyes de la física, mal planteamiento de la ecuación diferencial, y la falta de comprensión en la determinación de los valores iniciales cuando no son explícitos en el problema.

Una investigación que considera a la tecnología como un recurso importante para optimizar tiempos en cálculo pero al mismo tiempo más calidad en lo cognitivo es la de Ortigoza (2007), él propone el uso de paquetes simbólicos como Maple y Mathematica como herramienta en la resolución de las EDO, y concluye que al ahorrar el esfuerzo del cómputo algebraico complejo, permite enfocar la atención en ideas y conceptos importantes como son el análisis cualitativo de las soluciones, el comportamiento asintótico y relaciones del modelo físico con la contraparte matemática de la ecuación que lo describe.

Clasificación 2. Enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales mediante el uso de los registros de representación

En Habre (2000) se reporta que los campos direccionales son elementos que caracterizan la solución de las ecuaciones diferenciales de primer orden y los estudiantes las resuelven con éxito cuando leen información de estas representaciones.

Ju & Kwon (2007) proponen desarrollar un curso de ecuaciones diferenciales orientado a la investigación (IO-DE), en el cual la discusión grupal y los procesos argumentativos ocupan un papel fundamental en la construcción de conocimiento. En este contexto el docente es quien orienta estas discusiones a partir del planteamiento de problemas contextualizados, a saber: el enfriamiento de una taza de café y la descripción del movimiento de un objeto a partir de su gráfica. Los diferentes registros de representación como el analítico, grafico, numérico y cualitativo son esenciales para la discusión de los problemas, pues es a partir del análisis en cada uno de estos registros que se logra encontrar la solución a las situaciones. De igual modo, las tecnologías facilitaron el proceso de visualización el cual fue fundamental para la solución de las actividades. Las actividades consistían en modelar situaciones cercanas a los estudiantes mediante ecuaciones diferenciales, analizar el comportamiento de los modelos en diferentes registros de representación y argumentar como el proceso que posibilito la solución del problema. Esta investigación muestra que un trabajo sustentado en un curso IO-DE permite trasformar el discurso y las creencias de los estudiantes frente al conocimiento matemático, pues ya no se encuentra ajeno a ellos, sino que por el contrario hace parte de la cotidianidad.

Más recientemente Habre (2012) admite que el uso de múltiples representaciones de un objeto matemático (simbólica, verbal, gráfico y numérico) dentro de una situación de resolución de problemas, conlleva a grandes ventajas, entre ellas al aumento en la comprensión del concepto. Ahora bien, esta propuesta pone de manifiesto que escribir en matemática exige vincular todas las representaciones de un concepto, de aquí que la escritura en matemática puede considerarse al mismo tiempo como una representación única y la conjunción de todas las representaciones. Las ventajas de trabajar mediante el proceso de escribir en clase de matemáticas, no está dada por la actividad real de escritura, sino al hecho de que se requiere que los estudiantes pasen un tiempo pensando en ideas matemáticas y luego las comuniquen a los demás. Desde esta perspectiva, Habre (2012) propone abordar el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales haciendo uso de problemas que involucraban el análisis de las gráficas de funciones. En esta dirección, los estudiantes deben escribir todas sus explicaciones y justificaciones que les permitieron hallar la solución de la situación, logrando de este modo comprender el fenómeno planteado. Igualmente las tecnologías ocupan un papel fundamental en esta investigación, pues facilita aspectos visuales. Entre las actividades propuestas en este estudio se encuentra el planteamiento de una grafica $\frac{dy}{dt} = f(y)$ en la que se debía explorar las soluciones de equilibrio y la solución que satisficiera ciertas condiciones iniciales. Habre (2012) concluye que la escritura es un medio que permite vincular las representaciones analíticas y geométricas de las ecuaciones diferenciales, posibilitando una mejor comprensión por parte de los estudiantes de los conceptos matemáticos.

Por otra parte, Arslan (2010) expone que existen dos tipos de aprendizaje en matemáticas, conceptual y procedimental, el primero implica la comprensión y la interpretación de los conceptos y las relaciones que se puedan establecer en ellos, el segundo exige la memorización de operaciones sin la comprensión de significados subyacentes. A partir de estas definiciones se establece la importancia de abordar el estudio de las ecuaciones diferenciales mediante un aprendizaje conceptual, puesto que el procedimental es consecuencia del primero. Igualmente Arslan (2010) en su estudio señala que a pesar de existir diversas investigaciones para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales estas siguen centrándose en los aprendizajes procedimentales.

A manera de conclusión

Las investigaciones anteriores muestran nuevas propuestas de enseñanza para abordar el estudio de las Ecuaciones Diferenciales, pero dejan de lado el trabajo alrededor de algunos aspectos epistemológicos de este concepto, tales como la relación con la emergencia del cálculo, pues se centran en el proceso de modelación el cual hace parte de los factores que posibilitaron la constitución de las ecuaciones diferenciales, pero los aspectos conceptuales vinculado al cálculo quedan resumidos en técnicas sin ningún sentido o en análisis de un único registro representación. De aquí, como lo señalan diferentes investigadores (Castro, Castro, y Torralbo, 2013; Anacona, 2003; Vasco, 1994) es necesario elaborar propuestas orientadas a estudiar factores epistemológicos que muestren tanto las relaciones matemáticas como fenomenológicas de la emergencia de un concepto matemático. En particular, en el campo de las ecuaciones diferenciales, ya que a pesar de existir diversas investigaciones para favorecer en su enseñanza, éstas siguen centrándose en los aprendizajes procedimentales y no conceptuales (Arslan, 2010). En este sentido, es importante señalar que los estudios históricos y epistemológicos ocupan un papel fundamental en el campo de la Educación Matemática, ya que de estos se rescatan aspectos conceptuales que son fundamentales para la comprensión de conceptos.

Referencias bibliográficas

Anacona, M. (2003). Historia de las matemáticas en la educación matemática. *Revista EMA. 8*(1), 30-46.

Arslan, S. (2010). Traditional instruction of differential equations and conceptual learning. *Teaching Mathematics and Its Applications, 29*, 94-107.

Castro, E., Castro, E., y Torralbo, M. (2013). El análisis fenomenológico en la formación inicial de maestros. En L. Rico, J. Lupiañez & M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática* (pp. 141-160). España, Granada: Comares.

Chaachoua, H., & Saglam, A. (2005). Modelling by differential equations. *Teaching Mathematics and its Applications, 25* (1), 15-22.

Gómez-Luna, E., Fernando-Navas, D., Aponte-Mayor, G., y Betancourt-Buitrago, L. (2014). Metodología para la revisión bibliográfica y la gestión de información de temas científicos, a través de su estructuración y sistematización. *Dyna*, *81* (184).

Guerrero, C., Camacho, M., y Mejía, H. (2010). Dificultades de los estudiantes en la interpretación de las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias que modelan un problema. *Enseñanza de las ciencias*, *28* (3). 341-452.

Habre, S. (2000). Exploring students' strategies to solve ordinary differential equations in a reformed setting. *The Journal of Mathematical Behavior*, *18*(4), 455-472.

Habre, S. (2012). Improving understanding in ordinary differential equations through writing in a dynamical environment. *Teaching Mathematics and Its Application, 31,* 153- 166.

Ju, M. K., & Kwon, O.N. (2007). Ways of talking and ways of positioning: Student´s beliefs in an inquiry-oriented differential equations class. *Journal of Mathematical Behavior. 26*, 267-280.

Ortigoza, G. (2007). Resolviendo ecuaciones diferenciales ordinarias con Maple y Mathematica. *Revista mexicana de física, 53* (2), 155-167.

Rasmussen, C. L., & King, K. D. (2000). Locating starting points in differential equations: a realistic mathematics education approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*(2), 161-172.

Rasmussen, C., Kwon, O., Allen, K., Marrongelle, K. & Burth, M. (2006). Capitalizing on Advances in Mathematics and K-12 Mathematics Education in Undergraduate Mathematics: An Inquiry-Oriented Approach to Differential Equations. *Asia Pacific Education Review. 7* (1), 85-93.

Rodríguez, R. (2010). Aprendizaje y enseñanza de la modelación: el caso de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13* (4), 191-210.

Vasco, C. E. (1994). La educación matemática: una disciplina en formación. *Escuela Regional de Matemática. 3*(2), 59-75.

Autores

Sara Marcela Henao Saldarriaga; CIMATE, UAGro. México; saramarcelahenao@gmail.com
Flor Monserrat Rodríguez Vásquez; CIMATE, UAGro. México; flor.rodriguez@uagro.mx

EL CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN APOYADOS CON TECNOLOGÍA Y EL PAPEL QUE JUEGAN LOS DISTINTOS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN

Erick del Refugio de Lira Lozano, Elvira Borjón Robles

Resumen

Una de las preguntas más frecuentes que los estudiantes hacen al profesor de matemáticas es: ¿y esto para qué me va a servir?. Generalmente en el programa de cálculo diferencial del nivel medio superior, el tema de optimización se ubica al final, razón por la que en muchas ocasiones debido al tiempo no se le pone la atención necesaria, trayendo como consecuencia el poco o nulo aprendizaje del tema. Para atender lo anterior se diseña un secuencia didáctica que promueve el tránsito entre representaciones semióticas (Duval, 1998) y puesta en escena a través de la programación de problemas en representación verbal, representación analítica, representación grafica y apoyados de espacios de tabulación. Con esto se promueven los conceptos de máximos y mínimos, teniendo como premisa la afirmación de Duval (1998) que dice que para que haya noesis se requiere la semiosis, es decir que para que al alumno adquiera un concepto se requiere que transite entre dos o más representaciones.

Palabras clave: Optimización, representaciones semióticas, secuencia didáctica, máximos y mínimos

Introducción

El tema de optimización es de interés entre distintos autores, en particular queda de manifiesto que existen distintos factores que acontecen dentro y fuera del aula, siendo uno de los más citados el tiempo que se le dedica a su abordaje debido a la manera en la que están estructurados los programas de estudios. Por otro lado hay coincidencia en que el cálculo diferencial en bachillerato generalmente se vuelve un proceso algorítmico y con falta de significado.

Basándonos en esta última afirmación se diseña una secuencia didáctica que considera diversas representaciones semióticas, cuyo objetivo es promover significados del tema de máximos y mínimos involucrando en este proceso al tema de derivada, procurando con esto, que los alumnos dejen de considerar la derivación como un proceso algorítmico y carente de significado y a la vez promover el aprendizaje de los conceptos de máximo y mínimo ya que según Duval (1998) "la coordinación de varios registros de representación semiótica aparece como fundamental para una aprehensión conceptual de los objetos" (p. 176).

De acuerdo con Duval (1998), la comprensión de los conceptos se da cuando los alumnos logran transitar de un registro a otro, haciendo más fácil la identificación y aplicación del concepto. Sin embargo, en la enseñanza tradicional se enfatiza, casi siempre, en abordar los conceptos en un solo registro y de manera algorítmica, esto crea la necesidad de formular propuestas didácticas para una formación sólida de conceptos en los alumnos y con ello una mejor comprensión de los mismos. Este trabajo de investigación tiene el objetivo de contribuir a mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje del cálculo diferencial en relación a la formación de conceptos matemáticos, específicamente en el proceso de formación del concepto de máximo y mínimo de una función en alumnos del nivel medio superior.

Por otra parte existen huecos en la literatura que fundamenten como, con ayuda de las representaciones semióticas, el estudiante puede mejorar su comprensión hacia la resolución de problemas de optimización. Camacho y González (1998) realizan una propuesta para abordar el tema de optimización haciendo uso de la calculadora TI-92 para que así el estudiante pueda trabajar con las diferentes representaciones con las que puede abordar la solución a estos problemas; finalmente los autores hacen invitación a seguir investigando sobre la ventaja que las calculadoras gráficas ofrecen al momento de resolver problemas de optimización.

Tomás (2002) afirma que a la enseñanza de los problemas de optimización no se le hace demasiado hincapié al momento de llevar a cabo el programa de estudios y que en muchas de las ocasiones las clases se encaminan a la derivación de funciones cada vez más complejas y eso hace que el estudiante pierda interés al momento de introducir máximos y mínimos, lo que conlleva a un tedio al momento de abordar los problemas aplicados de optimización de funciones.

En un estudio realizado por Malaspina (2007) se analizan las soluciones de 38 estudiantes de ingeniería a dos problemas de optimización. Los resultados a los que se llegan no son alentadores en el sentido de que "se perciben capacidades para intuir las respuestas correctas a los problemas propuestos, mas no han sido fortalecidas con experiencias previas en el empleo adecuado de argumentos, procedimientos, proposiciones y lenguaje formalizado" (p. 391). Es en este sentido donde podemos aventurarnos a pensar en que con la ayuda de las representaciones semióticas los estudiantes poseerán y podrán dar argumentos válidos y de rigor para defender sus soluciones.

Por su parte Moreno y Cuevas (2004) muestran que, con base en un estudio realizado a profesores de nivel medio y superior y a estudiantes de maestría e ingeniería, "debido a una interpretación errónea que los estudiantes hacen sobre el tema de máximos y mínimos, cuando se les propone resolver problemas de optimización proporcionan respuestas inverosímiles..." (p. 94).

En Tall (1997) se mencionan las bondades que tiene el uso de la tecnología como apoyo para la clase de matemáticas, "la computadora proporciona un nuevo entorno para explorar el concepto de función" (p. 300). También hace mención de que cuando el software es utilizado para representar el concepto de función generalmente se hace de manera gráfica y en ocasiones de forma tabular. Fey (1989) citado en Tall (1997) menciona que "la función de las computadoras que ha causado recientemente más entusiasmo entre los educadores matemáticos es la facilidad de pasar de una forma de representación de la información (numérico, gráfico y simbólico) a otra..." (Fey, 1989, p. 225).

Por último, en Arcavi y Hadas (2000) se menciona que debido al surgimiento de diferentes software para la enseñanza de las matemáticas, su implementación en el salón de clases exige al profesor que introduzca conceptos de las matemáticas apoyándose en el uso de la computadora, "la existencia de la computadora plantea a los educadores matemáticos el reto de diseñar actividades que tomen ventaja de aquellas características con potencial para apoyar nuevos caminos de aprendizaje" (p. 41).

De las investigaciones revisadas se puede concluir que:

- La resolución de problemas de optimización utilizando el criterio de la primera derivada se enseña como un proceso mecánico.
- Cuando los estudiantes llegan a la solución de un problema de optimización no "cuentan" con las herramientas para argumentar y justificar por qué su solución es óptima.

Por lo que surge la siguiente pregunta de investigación:

¿En qué medida el uso de tecnología y las representaciones semióticas pueden mejorar el aprendizaje de los temas de derivada, máximos y mínimos y criterio de la primera derivada para resolver problemas aplicados de optimización en alumnos de bachillerato?

El objetivo de la investigación es construir un diseño apoyado con software con el que se promuevan las representaciones semióticas en el tema de optimización. Esta investigación intentará ser un parte aguas en la enseñanza del tema de optimización en la materia de cálculo diferencial en el nivel medio superior pues, de cumplirse el objetivo planteado muchos serán los profesores que puedan llevar esta actividad al aula y así abordar de manera distinta y novedosa el tema.

Marco teórico

Se trabajará con la teoría de representaciones semióticas (Duval, 1998), basándose en el supuesto de que mientras más representaciones se tengan de un objeto, mejor será la comprensión o aprehensión del concepto en juego; se trabajará con un software programado en la plataforma de desarrollo y ejecución de aplicaciones .NET Framework y lenguaje C# para promover en el estudiante el uso de distintas representaciones para aproximarse y, en la medida de lo posible, llegar a la solución de los problemas aplicados de optimización de funciones. De ahora en adelante llamaremos OptiProb al software producto de mi trabajo.

Duval (1998) afirma que sólo por medio de las representaciones es posible una actividad sobre los objetos matemáticos y caracteriza a un sistema semiótico como un sistema de representación, el cual puede ser un registro de representación si permite las tres actividades cognitivas fundamentales ligadas a la semiosis:

- La formación de un signo o un conjunto de signos perceptibles que sean identificables como una representación de alguna cosa en un sistema determinado.
- El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada.
- La conversión que es la transformación de la representación en otra de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial.

Una de las hipótesis que se mencionan en Duval (1998) referente a la noesis es que "la comprensión de un contenido conceptual reposa sobre la coordinación de al menos dos registros de representación, y esa coordinación se manifiesta por la rapidez y espontaneidad de las actividades de conversión” (p. 186).

En la actualidad el uso de la tecnología es atractivo para los alumnos del nivel medio superior; la utilización de un software con interfaz amigable y sencilla nos permite trasladar un problema dado de manera tradicional en los libros de texto, a diversas representaciones (entre ellas, representación verbal, representación analítica, representación tabular y representación gráfica) permitiendo, por ejemplo, que el alumno interactué con un programa de computadora que pueda manipular fácilmente y que a la vez le permita transitar entre las diferentes representaciones. Es importante resaltar la importancia del uso de la tecnología debido a que se ahorran cálculos y el alumno no pierde de vista el objetivo, es decir, el alumno se centra en la parte visual y no se centra en realizar operaciones en su calculadora, hacer tablas de datos, graficar puntos, hacer dibujos, etc. sino que simplemente concentrará su atención en reportar en un formato de Microsoft Word previamente elaborado todo aquello que observe y que le ayude a responder a las cuestiones marcadas en dicho documento. Esto con el fin de manejar todo la evidencia en formato digital aprovechando las potencialidades del uso de la computadora en el diseño.

Método

- Diagnosticar de qué manera los estudiantes resuelven los problemas de optimización.
- Promover el uso de la tecnología, en concreto el software OptiProb, para aproximarse a la solución de problemas de optimización.
- Percibir la diversidad de representaciones semióticas que puede tener un problema de optimización.
- Diseñar una secuencia didáctica a través de la cual el estudiante logre aproximarse a soluciones de problemas de optimización mediante las distintas representaciones semióticas que el software OptiProb le puede proporcionar.
- Observar el impacto del diseño en los alumnos del nivel bachillerato.
- Evaluar si se están aprendiendo o no los temas que involucran la resolución de problemas de optimización usando el criterio de la primera derivada.

Esta situación se implementará a un grupo de estudiantes que se encuentren cursando la materia de Cálculo Diferencial, es decir, la situación se implementará de manera tal que sustituya sus clases. Posteriormente se hará un test para comprobar la funcionalidad de la situación. Se aplicará un examen a dos distintos grupos de estudiantes, el primero será un grupo de estudiantes que hayan trabajado los problemas de optimización con el uso de tecnologías y bajo la implementación de la situación didáctica, y el segundo grupo estará conformado por estudiantes que hayan llevado un curso tradicionalista para así poder comparar si realmente la situación diseñada es funcional o proponer cambios para ello.

Resultados

Con la puesta en escena del diseño realizado se espera que a través del uso de las representaciones semióticas el alumno aprenda de una mejor manera el tema de máximos y mínimos de una función, y que a la vez se promueva el uso y aplicación de la derivada (criterio de la primera derivada) a problemas de la vida cotidiana y de la geometría. Debido a que la puesta en escena se llevará a cabo con alumnos que aun no han visto los temas de máximos y mínimos de una función, criterio de la primera derivada y optimización de funciones, se espera que, al salirnos un poco de la enseñanza tradicional, los alumnos tengan una mejor comprensión del concepto de máximo y mínimo y puedan, como menciona Malaspina (2007), justificar con rigor sus soluciones por medio de distintas representaciones semióticas de la solución del problema y que no solamente se queden con la parte algorítmica y carente de sentido.

Reflexiones

A través del análisis de las investigaciones se evidencia, en primer lugar, que existe una gran preocupación por atender y mejorar el aprendizaje de los alumnos en el tema de optimización. Más aun, en las investigaciones se hace uso de tecnología (Calculadoras TI-92 y Derive); el presente trabajo se realizará con el apoyo del software propio OptiProb, debido a que se considera que tanto profesores como estudiantes tiene más posibilidad de acceder a este software que a calculadoras gráficas u otro dispositivo. Además se propone trabajar a través del uso de representaciones semióticas (Duval, 1998) los de temas de la derivada, máximos y mínimos y criterio de la primera derivada en la solución de problemas aplicados.

Con este diseño de secuencia didáctica se espera desarrollar una buena herramienta tanto para el aprendizaje como para la enseñanza del tema máximos y mínimos haciendo uso del criterio de la primera derivada para resolver problemas aplicados de optimización de funciones en el nivel medio superior.

Referencias

Arcavi, A. & Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: An example of an approach. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 5, 25-45. Recuperado de http://srvcnpbs.xtec.cat/creamat/joomla/images/stories/documents/visualizacio/arcavi_computer.pdf

Camacho, M. y González, A. (1998). Una aproximación a los problemas de optimización en libros de bachillerato y su resolución con la TI-92. *Didáctica de la matemática*, *10*, 137-152. Recuperado de http://campus.usal.es/~revistas_trabajo/index.php/0214-3402/article/viewFile/3553/3573

Duval R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Investigaciones en Matemática Educativa II. pp. 173-201. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Malaspina, U. (2007). Intuición, rigor y resolución de problemas de optimización. *Relime*, 10(3), 365-399.

Moreno, S. y Cuevas, C. (2004). Interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el cálculo diferencial. *Educación matemática*, *16*(2), 93-104.

Tomás, F. (2002). Método de determinación de máximos y mínimos previo a la enseñanza del cálculo diferencial. *SUMA*, *47*, 87-90.

Tall, D. (1997). Functions and Calculus. En Bishop A. J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J. & Laborde, C. (Eds.), International Handbook of Mathematics Education, Países Bajos, pp. 289-325. Recuperado de https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1997a-functions-calculus.pdf

Autores

Erick del Refugio de Lira Lozano; UAZ. México; erickdlllma@gmail.com
Elvira Borjón Robles; UAZ. México; borjonrojo@hotmail.com

EL USO DE LAS GRÁFICAS POR ESTUDIANTES DE BACHILLERATO. LA MODELACIÓN DEL LLENADO DE RECIPIENTES

Karen Zúñiga González, María Esther Magali Méndez Guevara

Resumen

El reporte comparte algunos resultados que se obtuvieron al poner en juego un diseño de situación a estudiantes de bachillerato, en un ambiente extra-escolar. El diseño de situación es el llenado de recipientes, está basado en una categoría de modelación para la matemática escolar, en donde se parte de la experimentación para provocar en los estudiantes el uso de conocimiento matemático develado en las herramientas de variación local, global y su articulación durante la explicación del llenado de recipientes. El objetivo principal fe desarrollar el uso de las gráficas, y en ello encontramos que hay usos arraigados que nos llaman la atención hacia un cambio de paradigma del conocimiento matemático y a pensar que estos usos obedecen a la orientación actual de los programas de estudio, por lo que esta investigación considera que es necesario un rediseño del discurso matemático escolar.

Palabras claves: Modelación, uso de las gráficas, matemática escolar, experimentación, rdME

Introducción

En nuestra iniciación en este campo disciplinar podemos conocer la diversidad que existe para atender nuestra tarea, la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, pero pocas veces podemos conocer, discutir y probar lo que una teoría significa desde aquello que provoca al implementarse con los estudiantes. Los avances que reportamos nacen desde la formación inicial, como profesor a la par de nuestra primera experiencia en la investigación (Zúñiga & Méndez, 2013). Esto ha permitido reconocer desde una teoría una forma de problematizar los conocimientos matemáticos, y cómo generar instrumentos que permitan su desarrollo en el aula de matemáticas.

Así desde la colaboración en proyectos para la mejora del aprendizaje de las matemáticas y su divulgación hemos colaborado en la creación de instrumentos que promuevan nuestra tarea educativa.

De este modo, el presente reporte de investigación, comparte una experiencia didáctica en dos sentidos, como matemáticos educativos en formación y como participe en un proyecto que implementa elementos de una investigación realizada desde una teoría socioepistemológica que plantea una forma de tratar a la modelación como un marco de referencia que provoca la construcción de conocimiento matemático (Méndez, 2013). Desde ahí se elaboró un diseño que busco promover el desarrollo de usos de conocimiento matemático entorno a las gráficas, el instrumento se llama “comunicando el llenado de recipientes”. El diseño de la modelación parte de la experimentación para provocar el uso de conocimiento matemático develado en las herramientas de variación local, global y su articulación durante la explicación del llenado de recipientes.

Problemática

Entre las sociedades se reconoce la importancia de los conocimientos matemáticos para su desarrollo científico y tecnológico. Sin embargo, nos enfrentamos a un problema cuando de conocimiento matemático se trata, pues existe un cierto rechazo a éste (Méndez, 2013). Tal desarrollo científico y tecnológico a lo largo de la historia se ha apoyado de dos principales pilares que son: la observación y la experimentación. Sin embargo, parece que a estos dos pilares se les ha olvido incluirlos en las aulas. Como si todo el conocimiento matemático estuviese en forma de libros donde se reduce a menudo al aprendizaje algorítmico, y que otros tipos de experiencias matemáticas son tratadas de forma rudimentaria o, simplemente no son tratadas.

Esta problemática nos lleva reflexionar en diversas direcciones por ejemplo sobre el perfil emocional que se desarrolla en torno a la matemática, *que se basa en varios ejes a saber: una autoconcepción de las capacidades matemáticas, actitudes respecto a para quien son divertidas o no, y si son fáciles o no; y en creencias en tanto a la disposición, confianza, apoyo y valoración que ofrecen los profesores y los familiares. Esto se traduce como las emociones que despierta la matemática en los actores directos del contexto escolar*. Coincidiendo con esta postura se puede decir que hay muchos factores, entre ellos emocionales, que influyen en este proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas,.

Otra dirección está en incluir en las actividades de aula a la modelación, la cual tiene diversas acepciones, la que se toma en esta investigación es la desarrollada desde la Socioepistemología (Méndez & Cordero, 2014).

Estas dos direcciones sin duda son importante en sí, y actualmente hay estudios que muestran que ambas convergen (Pereira & Cerqueira, 2010), esta investigación hará un acercamiento al estudio de las emociones desde la modelación a la par de estudiar el desarrollo de redes de usos de conocimiento matemático en estudiantes de Bachillerato.

Fundamentación y método

La Teoría Socioepistemológica (TSE) reconoce que las construcciones de conocimiento, incluso las que atañen a la matemática, son una producción social que cambia y transforma la naturaleza y la sociedad; que los conocimientos tienen un origen y una función social asociada a un conjunto de prácticas, de modo que existe una relación entre la naturaleza del conocimiento y las actividades mediante las cuales y en razón de las cuales dichos conocimientos son producidos (Méndez, 2013; Cantoral, 2003; Cordero, 2006).

Una forma de estudiar esas prácticas sociales es mediante su función en el uso del conocimiento matemático ante situaciones específicas. Postulamos a la modelación como una de estas PS, que el saber matemático debe su origen, su razón de ser y su significado a otras prácticas de referencia (PR), por eso planteamos que la experimentación de fenómenos físicos provee de esas PR en un escenario escolar.

Así desde la postura de esta investigación, la modelación inicia desde la experimentación o la simulación-evocación de la misma. Ya que es así como los datos (numéricos o gráficos) se relacionan con las herramientas de variación para la predicción, optimización, unión y/o análisis, del fenómeno.

El diseño de situación implementado se basa en los resultados de investigaciones (Méndez, 2008; Méndez & Cordero, 2012; Méndez 2013) que tratan a la modelación como una construcción de conocimiento matemático en sí misma, una postura propia de la teoría Socioepistemológica. En específico dichas investigaciones nos han permitido explicitar una categoría para la modelación escolar. Es decir, determinar qué elementos se deberían poner en juego para desarrollar una matemática distinta al estudiante, y cómo pondrían dichos elementos hacerse explícitos en diseños de situación.

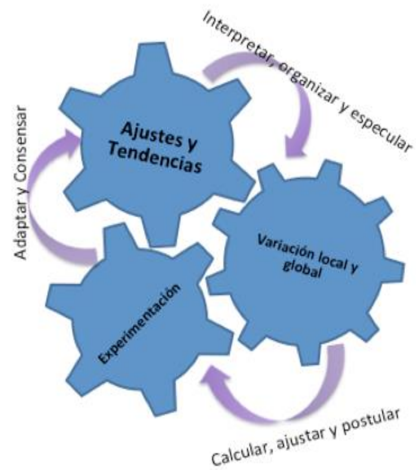


Figura 1. El núcleo de la categoría de modelación.

El planteamiento que hacemos nos lleva a la necesidad de diseñar actividades propias para este nivel educativo, pero antes reconocer cuáles son los usos que se privilegian ante las situaciones de modelación que tenemos al momento (Zúñiga & Méndez, 2014), los cuales no han variado mucho a lo reportado (Cordero &Flores, 2007; Cordero, Cen & Suárez, 2010).

El marco de referencia del que hablamos provoca el desarrollo de redes de usos de conocimientos matemáticos (drucm), en la caracterización de comportamientos de tipos de variación. El núcleo o corazón de este marco o categoría (fig. 1) provoca que emerjan los usos de gráficas-tablas-expresiones analíticas como herramientas que permiten estudiar y explicar la variación local o global y conjeturar sobre la tendencia o caracterizar un comportamiento.

En el diseño los usos aparecen como argumentos y evidencias que los actores, en este caso estudiantes, emplean para organizar comportamientos de fenómenos, mediante la comparación de dos estados de éste en el tiempo, los cambios de condiciones en un experimento y sus implicaciones en las variaciones de su gráfica hasta llegar al estudio de operaciones de corte lógico-formal. Además, dichas construcciones son enlazadas por prácticas como interpretar, analizar, especular, graficar, calcular, organizar, postular, adaptar y consensuar, entre otras.

La forma en cómo se ponen en juego todos los elementos se sintetiza en momentos que se viven en el diseño de situación, los cuales provocan el drucm del que hablamos (tabla 1). Nos interesa conocer cómo y porqué se usan las gráficas más que saber si saben graficar o no, o si logran construir los modelos correctos (Marmolejo & Riestra, 2013)

DS		**El llenado de los recipientes**
DRUCM		
Usos de las gráficas, tablas y las expresiones de analíticas	**Momento 1**	Elementos que describen el experimento y su implicación en las transformaciones gráficas y los valores numéricos. La construcción del espacio gráfico.
	Momento 2	Caracterizar los incrementos por intervalos en forma numérica en las tablas de datos o en los intervalos de variación en una gráfica.
	Momento 3	En la interpolación y extrapolación de los puntos en las gráficas. La identificación de una constante de variación y formulación de una regla de variación.

Tabla 1. Momentos base diseño de situación

Resultados

Se han realizado pruebas piloto del diseño de llenado de recipientes con estudiantes de nivel medio superior en donde el principal objetivo fue develar el uso de las gráficas a través de la experimentación y el modelado. Dichas pruebas han arrojado resultados que están denotados por cada uno de los momentos del diseño de situación. El análisis de datos que realizo se hace desde la perspectiva socioepistemológica en donde se busca evidenciar el desarrollo de redes de usos de conocimientos matemáticos.

Algunos de los resultados que se han obtenido con estudiantes de educación media superior:

La consigna núm. 1, incisos a) y b), muestran argumentos que están denotados por el momento1. Donde se relaciona el experimento con las herramientas que les permite describir lo que sucede y el surgimiento del drucm para provocar el uso de las gráficas en la explicación de fenómeno (fig.2)

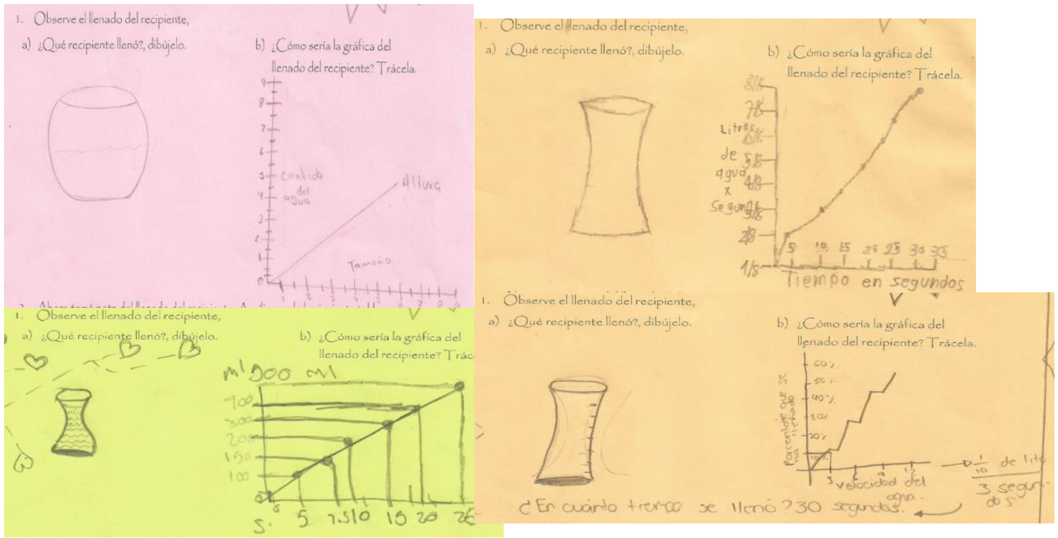


Figura 2. Surgimiento del uso de la gráfica

En donde se pudo ver que las variables con las que los estudiantes relacionan el fenómeno con tamaño-cantidad de agua, velocidad del agua-porcentaje que se ha llenado, segundos-mililitros y tiempo en segundos-litros de agua por segundos, llevándolos así a la construcción de distintas gráficas posibles que puedan describir el fenómeno.

De manera que las variables que nos permiten comunicar el fenómeno son tiempo-altura, tiempo-volumen y altura-volumen.

En la consigna 2 del diseño de situación se sigue provocando el drucm con la indicación de que hagan toma de datos con las variables tiempo-altura que este caso se les indico que esas

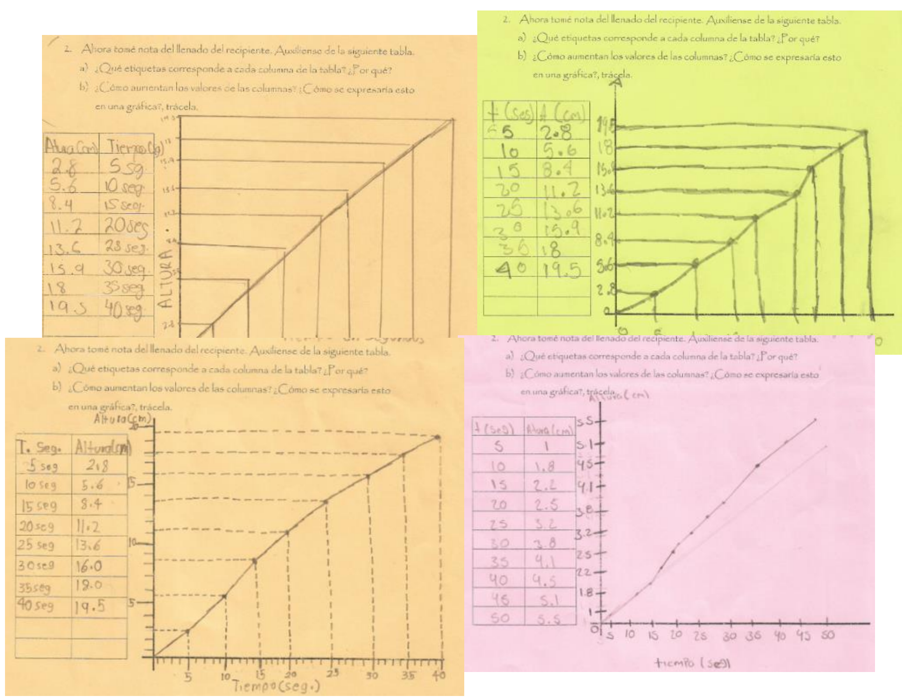


Figura 3. Uso de las tablas de datos y gráficas

serían las variables convenientes a usar, haciendo el uso de las tablas de datos para poder identificar los intervalos de variación local y global, surgiendo el momento 2 del diseño de situación y hacer uso de la gráfica.

Se pudo notar que los estudiantes no tienen bien consensuado cual es el uso adecuado que se debe de dar a cada una de las gráficas.

Cierta dificultad es la que se pudo observar en la actividad de llenado de recipientes, ya que los estudiantes no tienen claro en que situaciones es conveniente el uso de cada gráfica, en algunos casos no saben cómo colocar los datos adecuadamente para graficar y en otros no comprenden como graficar; y nos podemos preguntar ¿Por qué sucede esto? ¿Cómo hacer que construya una gráfica de manera adecuada?, tal vez este problema surge porque en los programas de estudio está muy arraigada alguna manera de hacer uso de las gráficas o tal vez no hacen a menudo uso de las gráficas, en particular de las cartesianas.

Esto nos ha llevado a reflexionar sobre la estructura del diseño mismo por lo cual se rediseño y dividió en 3 momentos, (tabla 2):

<table>
<tr><th colspan="2">DS</th><th rowspan="2">El llenado de los recipientes</th></tr>
<tr><th colspan="2">Drucm</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Usos de las gráficas, tablas y las expresiones de analíticas</td><td>Momento 1</td><td>Consta de la experimentación donde se devela los usos de las gráficas.
Y se convienen las variables a considerar para una mejor comunicación y caracterización de llenados.</td></tr>
<tr><td>Momento 2</td><td>Experimentación y desarrollo de la gráfica para las variaciones a trozos. Los ajustes y las tendencias de nuevos recipientes y las gráficas.</td></tr>
<tr><td>Momento 3</td><td>Las expresiones analíticas que comunican el llenado.</td></tr>
</table>

Tabla 2. Momentos base del rediseño de situación

Conclusiones

Desde mi iniciación en la matemática educativa he logrado percibir que la matemática es una de las áreas con más obstáculos en el proceso de enseñanza-aprendizaje, por lo que en mi experiencia de formación en la ME pareciera que la matemática ha quedado solo en los libros, investigaciones como esta nos dejan pensado sobre qué es lo que está pasando dentro de las aulas de clases y si es necesario un rediseño del discurso matemático escolar.

La matemática debería ser incluida en las aulas de clases de forma más atractiva para los alumnos, por ello la creación de diseños de situación que lleven a los alumnos a la construcción de conocimiento matemático es muy necesaria hoy en día.

Tal así, que la experimentación de fenómenos cotidianos pueden ser opción para hacer una matemática funcional.

Así mismo la categoría de modelación nos dota de elementos para la construcción de conocimiento matemático con diseños basados en ella para el uso de las gráficas en distintos niveles educativos. Diseños basados en la experimentación y/o planteamiento de fenómenos cotidianos en los que los alumnos pueden hacer uso de herramientas para comunicar dichos fenómenos.

Referencias

Cantoral, R. (2003). La aproximación socioepistemológica a la investigación en Matemática Educativa. *XI Conferencia Interamericana de Educação Matemática*. Tema: Educación Matemática & Desafíos y Perspectivas. Blumenau, Brazil: Universidade Regional de Blumenau.

Cordero, F. (2006). La modellazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamento-apprendimento della matematica. La Matematica e la sua Didattica. Anno 20, n.1, 59-79.

Cordero, F. & Flores, R. (2007) El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 10*(1), 7-38.

Marmolejo, E. & Riestra, J.A. (2013) Modelo matemático del llenado de recipientes.

Modeling in Science Education and Learning 6(2), 155-169.

Méndez, M. (2008) *Un estudio de la evolución de las prácticas: la experiencia de modelar situaciones análogas.* (Tesis inédita de maestría). Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero. México.

Méndez, M. (2013) *Desarrollo de red de usos del conocimiento matemático: la modelación para la matemática escolar.* (Tesis inédita de doctorado). Departamento de matemática educativa del centro de investigación y de estudios avanzados del IPN. México.

Méndez, M. & Cordero, F. (2012). La función de la modelación en la resignificación del conocimiento matemático. En O. Covian, Y. Chávez, J. López, M. Méndez, A. Oktaç. *Memorias del Primero Coloquio de Doctorado, (pp. 257 – 267).* ISBN: 978-607-9023-08-9, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Cinvestav.

Pereira, O. & Cerqueira, J.(2010). Mathematical Modeling and the Teachers' Tensions. Capítulo 44. En R. Lesh et al. (eds.), Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies, (511-517). DOI 10.1007/978-1-4419-0561-1_44, Springer Science+Business Media.

Autores

Karen Zúñiga González; CIMATE, UAGro. México; kzg.93@live.com
María Esther Magali Méndez Guevara; CIMATE, UAGro. México; mguevara83@gmail.com

EVALUACIÓN EN EL MARCO DE LAS COMPETENCIAS UNA MIRADA DESDE LOS DOCENTES DEL COBACH 145

Luis Alejandro Jonapá Chacón, Alma Rosa Pérez Trujillo

Resumen

Considerando que el currículo mexicano en sus diferentes niveles educativos ha sido atravesado por distintas reformas, es necesario centrar la atención en los procesos que viven los actores de los mismos, por ello en nuestra propuesta nos interesa mostrar la mirada de los profesores quienes intervienen en el proceso de evaluación de las competencias matemáticas de sus estudiantes. En esta ponencia se muestra un avance la investigación titulada "Evaluación en el marco de las competencias: El caso los profesores de matemáticas del COBACH 145". De manera general se presenta la revisión sobre la Reforma Integral para la Educación Media Superior y de forma particular cómo el Colegio de Bachilleres de Chiapas atiende las demandas que implican la puesta en marcha de la misma, establecemos la postura teórica epistemológica, así como el método y herramientas desde la cual estamos llevando a cabo la investigación.

Palabras claves: Competencias Matemáticas, Evaluación, Fenomenología, Estudio de caso.

Introducción

En el ciclo escolar 2009-2010 se puso en marcha la Reforma Integral para la Educación Media Superior que establece el enfoque educativo por competencias, a través del establecimiento del Marco Curricular Común. Lo anterior hace necesario un cambio en las prácticas de evaluación en el aula, mismo que conlleva a un proceso de adaptación del docente a su nuevo rol en el juego.

> Uno de los ejes principales de la Reforma Integral es la definición de un Marco Curricular Común, que compartirán todas las instituciones de bachillerato, basado en desempeños terminales, el enfoque educativo basado en el desarrollo de competencias, la flexibilidad y los componentes comunes del currículum (Dirección General del Bachillerato, 2013, p. 4).

El subsistema educativo del Colegio de Bachilleres de Chiapas (COBACH) hizo lo propio para atender esta nueva demanda educativa poniendo a disposición una Guía de Inducción para el trabajo docente en el año 2012, así como ofertar becas para la actualización docente en este rubro a través del programa PROFORDEMS (Programa de Formación Docente de Educación Media Superior) con el fin de impulsar a sus trabajadores docentes en este proceso de adaptación al nuevo enfoque educativo.

> En cuanto a la formación de los estudiantes, el modelo educativo que ofrece el COBACH, consiste en un bachillerato general y propedéutico en el marco de la adopción del Marco Curricular Común (MCC); con las directrices que norman los programas de

> estudio, el modelo de calidad educativa y de evaluación integral que son los principios básicos de la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS), expresados por la Dirección General del Bachillerato (DGB), para potencializar experiencias, valores ciudadanos y la adquisición de conocimientos para la vida (Dirección Académica del COBACH, 2012).

En la guía de inducción para el docente del Colegio de Bachilleres de Chiapas se observan los cuatro pilares para el desarrollo de competencias para la vida:

1. Aprender a conocer
2. Aprender a hacer
3. Aprender a vivir juntos
4. Aprender a ser

Se tiene además una definición clara sobre el concepto de competencia:

> Una competencia se define como una capacidad adaptativa, cognitivo conductual especifica que se despliega para atender a la demanda que se produce en un entorno determinado en un contexto sociohistórico y cultural (Dirección Académica del COBACH, 2012, p. 15).

Es por tanto una capacidad cognitiva, de pensamiento, conocimiento y emoción, conductual que tiene que ver con las actitudes y que responde a las demandas del entorno, todo esto se traduce en un desempeño que es observable y que tiene un fin dirigido por el sujeto. Se especifican además, las competencias que deben tener los docentes; así el docente al trabajar por competencias debe utilizar los conocimientos en desempeños concretos de la vida, logrando que el estudiante se apropie de nuevos conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes. En consecuencia, es la calidad de la mediación docente la que impulsará el desarrollo de las competencias en los estudiantes. El Marco Curricular Común tiene como base las competencias genéricas, disciplinares y profesionales.

Con relación al Modelo Educativo, se sostiene que lo central es el aprendizaje del alumno, éste se circunscribe en el paradigma “constructivista” el cual, de forma general, plantea que el alumno “realiza un acto de conocimiento o de aprendizaje; no copia la realidad circundante, sino que construye una serie de representaciones o interpretaciones sobre la misma” (Dirección Académica del COBACH, 2012, p. 18)

La DGB, por su parte, actualizó los programas de estudio incluyendo en ellos el nuevo enfoque por competencias, mediante una introducción general al nuevo enfoque por competencias, el establecimiento de los bloques que conforman cada asignatura, así como la descripción de cada bloque puntualizando, entre otros rubros, Actividades de enseñanza, Actividades de aprendizaje, así como la mención, únicamente, de los instrumentos sugeridos para la evaluación.

A continuación se realiza una revisión de uno de los programas de estudio para el área de matemáticas elaborada por la DGB.MATEMÁTICAS II. El análisis elaborado incluye la estructura del primer bloque para identificar la forma de trabajo que se propone (ver Tabla 1).

Campo Disciplinar de Matemáticas	Conforme al MCC tiene como propósito contribuir al desarrollo de la creatividad, el pensamiento lógico y crítico entre los estudiantes, mediante procesos de razonamiento, argumentación y construcción de ideas que conlleven el despliegue de distintos conocimientos, habilidades, actitudes y valores, en la resolución de problemas matemáticos que en sus aplicaciones trasciendan el ámbito escolar. Para seguir lo anterior se establecieron las competencias disciplinares básicas del campo de las matemáticas, mismas que han servido de guía para la actualización del presente programa.
Distribución de bloques	Esta asignatura está conformada por 10 bloques, en los que se tocan temas desde ángulos, triángulos, polígonos, la circunferencia, razones trigonométricas hasta probabilidad y estadística elemental.
Bloque I:	Utilizas ángulos, triángulos y relaciones métricas.
Tiempo asignado:	8 horas
Desempeños del estudiante al concluir el bloque	Identifica diferentes tipos de ángulos y triángulos. Utiliza las propiedades y características de los diferentes tipos de ángulos y triángulos, a partir de situaciones que identifica en su comunidad. Resuelve ejercicios y/o problemas de su entorno mediante la aplicación de las propiedades de la suma de ángulos de un triángulo.
Objetos de aprendizaje	Ángulos Por su abertura Por la posición entre dos rectas paralelas y una secante (transversal) Por la suma de sus medidas Triángulos
Competencias a desarrollar	Expresa ideas y conceptos matemáticos mediante las representaciones geométricas de los diferentes tipos de ángulos y triángulos en situaciones reales de su comunidad. Reflexiona sobre el procedimiento para trazar ángulos, triángulos, rectas y puntos notables con regla y compás. Utiliza el software disponible en las tecnologías de la información y comunicación para trazar los diferentes tipos de ángulos, triángulos, rectas y puntos notables de un triángulo. Interpreta y resuelve problemas teóricos y del entorno mediante símbolos propios de ángulos y triángulos.

	Valora el trabajo en equipo como una alternativa para mejorar sus habilidades operacionales en la resolución de problemas de ángulos y triángulos en situaciones propias de su entorno.
Actividades de enseñanza	Presentar al alumnado en multimedia o en fotocopias imágenes donde predominen ángulos y triángulos para realizar su clasificación. Solicitar al alumnado un collage en donde se muestren los diferentes ángulos y triángulos y exponerlo a los demás integrantes del grupo. Ejemplificar al alumnado la solución de ejercicios de las propiedades de ángulos y triángulos. En diapositiva muestra los diferentes ángulos que se forman entre rectas paralelas cortadas por una secante. Solicitar al alumnado que resuelvan ejercicios y problemas usando las propiedades de ángulos y triángulos en clase y extra-clase. Los problemas planteados deben estar relacionados con situaciones que se identifican en su comunidad. Solicitar al alumnado en bina investigar las características de las rectas y puntos notables del triángulo. Mostrar a los y las estudiantes el trazo de las rectas y puntos notables del triángulo mediante regla y compás o mediante el software para matemáticas.
Actividades de aprendizaje	Investigar en equipos mixtos de cuatro integrantes las características de los diferentes ángulos y triángulos. En equipos mixtos hacer un collage en donde se muestren los diferentes ángulos y triángulos y exponerlo a los demás integrantes del grupo. Usar software para realizar las construcciones geométricas como el Cabrí y/o Geogebra (que es de uso libre en la red) Obtener ángulos en rectas paralelas cortadas por una secante, a partir de al menos un ángulo conocido. Resolver ejercicios y problemas usando las propiedades de ángulos y triángulos tanto en clase y extra-clase. Presentar las características de las rectas y puntos notables del triángulo en una tabla. De forma individual traza con regla y compás o con el software para matemáticas las rectas notables del triángulo y localiza puntos notables.
Instrumentos de evaluación	Portafolios de evidencias Lista de cotejo para evaluar la elaboración del collage Lista de cotejo para evaluar el reporte escrito

	Lista de cotejo para evaluar cómo resolvieron los ejercicios Rúbrica para evaluar los niveles de desempeño que adquirió el alumno o la alumna al resolver los problemas.

Tabla 1. Estructura del primer bloque Matemáticas I. Fuente: Elaboración propia con base en el programa de estudios de Matemáticas II emitido por la DGB en el año 2013.

Considerando todo lo expuesto, surge la siguiente interrogante general: ¿Cómo viven el proceso de evaluación en el aula bajo el enfoque educativo por competencias los docentes de la academia de matemáticas del Plantel 145 del Colegio de Bachilleres de Chiapas?

La dificultad que ha tenido la adopción del enfoque por competencias en la educación media superior, se hace evidente al momento de trabajar un tema de una clase de Matemáticas y al mismo tiempo desarrollar o fortalecer las competencias en el alumno mediante una actividad, así como también al momento de evaluar el aprendizaje y logro de las competencias. Si bien es cierto, existen documentos que establecen las nuevas formas de trabajo, pero al parecer no son suficientes para permitir un trabajo eficiente del cuerpo académico, de manera particular, la academia de Matemáticas de este plantel en específico. De tal suerte que nos obliga a preguntarnos lo siguiente: ¿Cómo viven el proceso de evaluación en el aula bajo el enfoque educativo por competencias los docentes de la academia de matemáticas del Plantel 145?

Al hablar de evaluación en el aula, suponemos que:

- Las competencias se evalúan a través de los instrumentos propuestos por los planes de cada asignatura.
- Los profesores conocen y usan la normatividad institucional para llevar a cabo la evaluación en el enfoque por competencias.

Considerando lo ya expuesto, nos preguntamos además, ¿Qué criterios adoptan más los docentes del COBACH 145 para evaluar las competencias matemáticas?, ¿Qué instrumentos de evaluación les han resultado más benéficos o eficientes tanto para el docente como para los alumnos? y ¿Cuál es la forma de trabajo en cuanto a la evaluación que ha resultado mejor en una clase de matemáticas o en la academia de matemáticas?

Si lo que está establecido en los documentos oficiales acerca de la forma de trabajo del profesor, realmente permite un trabajo adecuado del éste, entonces se podría afirmar que el enfoque por competencias se ha adoptado al 100%, sin embargo, el proceso de adaptación aún se está viviendo. Si realmente se ofrecen los mecanismos adecuados para la labor del docente o si realmente hay claridad en el trabajo bajo el enfoque por competencias, entonces en el caso de los docentes de matemáticas del plantel 145, podríamos encontrar que el enfoque por competencias no les representa dificultades, sobre todo al momento de evaluar. Es importante señalar, que los profesores de la academia de matemáticas pertenecen a un plantel que obtuvo en el año 2013, la Certificación Nivel III que otorga el Sistema Nacional de Bachillerato a las instituciones de educación media superior por su trabajo acorde a lo establecido en la RIEMS. Esta característica nos parece relevante, de ahí que nos interese analizar las vivencias de los docentes inmersos en dicho contexto.

El objeto de estudio en esta investigación son los significados que construyen los docentes de la academia de Matemáticas del Plantel 145 Tuxtla Sur del COBACH, sobre el proceso de evaluación en el enfoque por competencias, para ello hemos de analizar e interpretar los significados y estrategias que los docentes utilizan para atender las exigencias que los planes de estudio bajo el enfoque por competencias proponen. Lo que se desea a analizar son las estrategias que, los docentes que forman parte de dicha academia, llevan a cabo para atender los requisitos que los planes de estudio, diseñados por DGB, establecen.

De las preguntas de investigación se desprende el siguiente objetivo general: Analizar y comprender los significados que construyen los profesores de la academia de matemáticas del COBACH 145, sobre el proceso de evaluación de sus estudiantes en el marco de las competencias.

Para alcanzar dicho objetivo planteamos los siguientes objetivos particulares.

- Analizar cómo se viven y qué significados construyen los profesores de matemáticas del COBACH 145 los procesos de evaluación bajo el enfoque por competencias.
- Identificar a la luz de la experiencia de los profesores, los instrumentos de evaluación que han resultado más benéficos o eficientes, tanto para el docente como para los alumnos.
- Analizar los factores que llevan a los docentes al establecimiento de los criterios de evaluación.

Marco teórico

Una de las teorías que sustenta esta investigación es el enfoque por competencias, puesto que es el contexto actual en el que actúa el sistema educativo en México. Actualmente se forma a los alumnos no solo mediante la transferencia de conocimientos "inertes" o "sueltos", mediante la memorización, sino que se busca ponerlos en juego a través de actividades que generen un aprendizaje significativo.

El uso del término competencia ha penetrado fuertemente en el discurso de la educación matemática, pero sobre todo en el ámbito del desarrollo curricular de la práctica de la enseñanza y de la evaluación. Una competencia es " la capacidad de afrontar un problema complejo o de resolver una actividad compleja" (D'Amore, Díaz Godino, & Fandiño Pinilla, 2008, p. 28)

La competencia es un concepto complejo y dinámico:

- Complejo: se trata del conjunto de dos componentes:
  - Uso (exógeno),
  - Dominio (endógeno);
- Dinámico: El uso y el dominio no son las únicas expresiones de la competencia; la competencia como objeto engloba en sí misma, no solo los conocimientos que se requieren, sino también factores meta-cognitivos: la aceptación del estímulo para usarlos, el deseo de hacerlo, el deseo de completar los conocimientos que se revelan a la prueba de los hechos, insuficientes y por tanto el deseo mismo de aumentar la propia competencia (D'Amore, Díaz Godino, & Fandiño Pinilla, 2008, p. 11).

En el acuerdo secretarial 444 se establecen los siguientes tipos de competencias para el estudiante de bachillerato, como se observa en la tabla 2:

Competencias		**Objetivos**
Genéricas		Comunes a todos los egresados de la EMS. Son competencias clave, por su importancia y aplicaciones diversas a lo largo de la vida; transversales, por ser relevantes a todas las disciplinas y espacios curriculares de la EMS, y transferibles, por reforzar la capacidad de los estudiantes de adquirir otras competencias.
Disciplinares	Básicas	Comunes a todos los egresados de la EMS. Representan la base común de la formación disciplinar en el marco del SNB.
	Extendidas	No serán compartidas por todos los egresados de la EMS. Dan especificidad al modelo educativo de los distintos subsistemas de la EMS. Son de mayor profundidad o amplitud que las competencias disciplinares básicas.
Profesionales	Básicas	Proporcionan a los jóvenes formación elemental para el trabajo.
	Extendidas	Preparan a los jóvenes con una calificación de nivel técnico para incorporarse al ejercicio profesional.

Tabla 2. Competencias para los estudiantes. Fuente: Secretaría de Educación Pública, 2009.

Esta investigación se está desarrollando además, desde el paradigma interpretativo, "el supuesto básico de este paradigma es la necesidad de compresión del sentido de la acción social en el contexto del mundo de la vida y desde la perspectiva de los participantes" (Duhalde, 1999, citado en Pérez, 2012, p. 6). Se considera que este paradigma dirige su atención a aquellos aspectos de la realidad, los cuales no son medibles o susceptibles de ser cuantificados (p. e. creencias, intenciones, motivaciones, interpretaciones, significados para los actores sociales), es decir, comprende, interpreta y evalúa la realidad, no la mide; en este paradigma la realidad se considera dinámica, múltiple y holística.

De acuerdo a Pérez (2013) otra característica del paradigma interpretativo es que se parte de una interacción entre el sujeto que conoce y el objeto de conocimiento. Es así que el paradigma interpretativo se centra en el estudio de los significados de las acciones humanas y de la vida social. En la investigación retomamos también a la fenomenología, ya que pone énfasis en el retorno a la intuición reflexiva para describir y clarificar la experiencia vivida y constituida en la conciencia. La investigación fenomenológica tiene como características, la primacía que otorga a la experiencia subjetiva inmediata como base del conocimiento, el estudio de los fenómenos desde la perspectiva de los sujetos, teniendo en cuenta su marco de referencia y el interés por conocer cómo las personas experimentan e interpretan el mundo social que construyen en interacción. Desde el punto de vista fenomenológico, investigar es siempre cuestionar el modo en que experimentamos el mundo, querer conocer el mundo en el que vivimos. De acuerdo a Van Manen (2003) la fenomenología nos ofrece la posibilidad de percepciones plausibles que nos ponen en contacto más directo con el mundo.

Para Husserl y Merleau-Ponty (1982, 1962 citados en Van Manen, 2003, p. 28) la fenomenología pregunta por la naturaleza misma de un fenómeno, por aquello que hace que algo sea lo que «es», y sin lo cual no podría ser lo que «es». Es decir, la fenomenología puede definirse como el intento sistemático de descubrir y describir las estructuras, las estructuras de significado interno, de la experiencia vivida, de ahí que se considere como rememorativa. Es el carácter reflexivo de la fenomenología es lo que nos lleva a considerarla en esta investigación como parte de la metodología.

De acuerdo a Álvarez-Gayou (2003) la fenomenología descansa en cuatro conceptos clave:

1. La temporalidad, que se refiere al tiempo vivido
2. La espacialidad, alude al espacio vivido
3. La corporalidad, se ocupa del cuerpo vivido
4. La relacionalidad o la comunalidad, corresponde a la relación humana vivida

Desde la fenomenología se considera que las percepciones de la persona evidencian para ella la existencia del mundo, no como lo piensa, sino como lo vive, de esta manera, el mundo vivido y la experiencia vivida, son considerados cruciales desde este enfoque, a lo anterior hay que añadir que los comportamientos humanos se contextualizan por las relaciones con los objetos, con las personas, con los sucesos y con las situaciones. Es así que, en la investigación se busca comprender desde la fenomenología las transformaciones en el proceso de implementación de la evaluación de las competencias matemáticas de los docentes del COBACH 145.

Método

El método a utilizar será el estudio de casos en su modalidad de estudio intrínseco propuesto por Stake (1999), ya que es el caso mismo del COBACH 145 el que tiene la importancia en sí. Las técnicas de investigación son de corte cualitativo, utilizadas desde una perspectiva fenomenológica, desde la que se busca comprender la conducta humana en el marco de interpretación de quien actúa, de tal forma que el investigador está próximo a los datos asumiendo una perspectiva desde "dentro".

Hay que recordar que partimos de un marco fenomenológico, el cual se caracteriza por centrarse en la experiencia personal y exige una comprensión del significado que la experiencia vivida tiene para el sujeto, buscan además, la esencia, la estructura del significado de la experiencia, además está interesada en descubrir lo que subyace a las formas a través de las cuales convencionalmente las personas describen su experiencia desde las estructuras que la conforman, de ahí que consideramos que al llevar a cabo entrevistas a profundidad y obtener información de quienes han experimentado el fenómeno en cuestión, nos permitirá hacer una interpretación adecuada de las experiencias situadas de los sujetos entrevistados. A fin de enriquecer la interpretación y complementar la información obtenida en las entrevistas, realizamos observaciones directas, las cuales consistieron en visitar a los sujetos de estudio en sus contextos de trabajo y en el momento de estar llevando a cabo sus quehaceres cotidianos como docentes, además de la elaboración de un análisis documental y grupo focal con los profesores de la academia de matemáticas del COBACH 145.

Reflexiones

Con lo expuesto en los antecedentes, resulta interesante indagar acerca de las facilidades u obstáculos que dichos documentos propuestos en la RIEMS representan para el desempeño docente en cuanto a la evaluación de las competencias matemáticas construidas por sus estudiantes, así como el uso de los instrumentos que se sugieren en cada plan de estudio ofrecido por la DGB y de los instrumentos que ellos mismos diseñan e implementan.

Pensamos que esta investigación adquiere relevancia, toda vez que son los propios actores (profesores de matemáticas del COBACH 145) quienes a través de las técnicas de investigación mencionadas nos dotaran de la información necesaria para poder elaborar la interpretación sobre los significados que construyen en el proceso de evaluación en el enfoque de las competencias.

Referencias bibliográficas

Álvarez-Gayou, J. (2003). *Cómo hacer investigación cualitativa*. D.F., México: Paidós Educador.

D'Amore, B., Díaz Godino, J., & Fandiño Pinilla, M. I. (2008). *Competencias y matemáticas*. Bogotá, Colombia: Didácticas Magisterio.

Dirección Académica del COBACH. (2012). *Guía de inducción para el personal docente*. Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México.

Dirección General del Bachillerato. (2013). *Matemáticas II - Programa de estudio*. D.F, México.

Pérez, A. (2012). *Estudio regional sobre tecnología educativa y competencias docentes para la Didáctica de las Matemáticas*. Tesis de Doctorado no publicada, Universidad Autónoma de Chiapas. México.

Pérez, A. (2013). Tecnología educativa y competencias docentes para la Didáctica de las Matemáticas. Un Estudio Regional. *Devenir revista chiapaneca de investigación educativa*, V 207-216.

Secretaría de Educación Pública. (2009). *Acuerdo número 444*. México, D.F.: Diario Oficial.

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid, España: Morata.

Van Manen, M. (2003). *Investigación educativa y experiencia vivida: ciencia humana para una pedagogía de la acción y la sensibilidad*. España: Idea Books S. A.

Autores

Luis Alejandro Jonapá Chacón; UNACH. México; alexjonapa145@gmail.com
Alma Rosa Pérez Trujillo; UNACH. México; almarpt@hotmail.com

UNA APROXIMACIÓN VARIACIONAL AL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO DESDE LO SITUACIONAL

Aurea Guillermo Castellanos, Daniel Ortiz May, José Suárez Huchin

Resumen

En el presente trabajo se plantea una forma alternativa de investigar sobre cómo favorecer el estudio escolar del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), a partir de tres consideraciones básicas. La primera, la componente situacional en el conocimiento matemático; la segunda, asumir a dicho teorema como el eje rector para el entendimiento del Cálculo; y la tercera, conferirle un tratamiento variacional en el que la acumulación de una variable está en relación con su razón de cambio y viceversa, esto en contraposición al tratamiento analítico-formal que suele darse aún en las aulas.

Palabras clave: Teorema Fundamental del Cálculo, variación, acumulación.

Introducción

Escolarmente se concibe al TFC como un argumento para validar el algoritmo que facilita el cálculo de una integral definida. Sin embargo, su relevancia está en constituir una relación natural entre la variación de una variable y la acumulación de la misma, esto es, una relación entre el cálculo diferencial e integral entendidos como métodos o herramientas matemáticas de cuantificación variacional. De ahí que en esta propuesta investigativa se asume como premisa fundamental el que para lograr una mejor aprehensión conceptual del TFC, es necesario considerar el papel de la acumulación y razón de cambio de lo variable, tal como se menciona en Thompson (1994), empero, agregando una componente situacional, pues según Aparicio y Sosa (2015), lo situacional connota una situación de características específicas en la que esencialmente se produce la toma de consciencia de sus condiciones y contenido, posibilitando la realización e incluso la aprehensión conceptual de las tareas que de dicha situación emanan.

Los aspectos claves de esta propuesta investigativa se hallan en la manera en que conceptualmente evolucionaron las nociones básicas del cálculo. Por ejemplo y en primera instancia, se hace una consideración sobre la manera intuitiva en la que el ser humano se aproxima al análisis de las causas reales que motivan el movimiento, lo cual se asume es mediante **descripciones cualitativas**, pues como se señala en Muñoz (2007), es precisamente de esta manera en la que el ser humano describe inicialmente situaciones de movimiento. Lo anterior se enmarca bien con la historia del cálculo, pues es sabido que a partir de trabajos como los desarrollados por Arquímedes, se introduce la idea de la **cuantificación** en el estudio de áreas y volúmenes de figuras geométricas. Basta recordar que hacia los siglos XVII y XVIII, se presenta un énfasis en la necesidad de **establecer relaciones** entre magnitudes variables, tal es el caso del trabajo realizado por Leibniz sobre las relaciones entre **sucesiones de sumas y diferencias de números.** Él examina una sucesión infinita de valores de una variable, por ejemplo la variable x, y una diferencia entre dos valores sucesivos (dx) infinitesimal, comparada con los valores de la variable. Al tomar la suma de tales diferencias, denotada por $\int dx = x$ se obtiene la variable completa. Es decir, de esta forma se obtiene la noción de diferenciación e integración como procesos inversos e interrelacionados (Cantoral, 1983), y a partir de esto, sumando el trabajo de Newton, es que se identifican de manera más evidente la diferenciación e integración como procesos inversos (Lavrent'ev y Nikol'skii, 1956).

No obstante lo antes dicho y en contraste con la naturaleza histórica-epistemológica del TFC, en el tratamiento escolar otorgado a dicho contenido se deja de lado el proceso llevado a cabo por el ser humano en su constitución y desarrollo. Es sabido que en un curso tradicional, lo común es mostrar a los estudiantes procedimientos para calcular integrales con los llamados métodos de integración, básicamente mediante ejercicios repetitivos y separadamente de lo conceptual (Muñoz, 2007). Luego entonces, el TFC es erróneamente considerado como una *técnica de integración*, pues se le presenta y trata como "el argumento" que permite concebir el concepto de la integral definida como dos de sus formas más usuales de representación: como operación inversa de la derivada, y como método de determinación del área bajo una curva para funciones continuas sobre intervalos cerrados (Cabañas y Cantoral, 2007), razón por la que el significado y alcance conceptual que el teorema tiene, queda relegado a lo algorítmico.

Para desarrollar una base cognitiva que favorezca un entendimiento más amplio del TFC y del Cálculo mismo, se asume necesario reconocer una condición situacional en la que se entrelace lo variacional continuo y el cambio de lo variable, más que en los conceptos de derivada e integral en sí mismos. Por ejemplo, en el estudio de la integral y la integración se debe considerar como idea central a la acumulación por sobre el concepto función derivada o suma de Riemann (Gray y Tall, 1994; Cordero, 2003, en Muñoz, 2007). Y será precisamente en el entendimiento de la acumulación donde, de manera coherente, la atención esté puesta en que los estudiantes comprendan la conexión entre la razón de cambio de cantidades y la acumulación de esas cantidades (Thompson y Silverman, 2008).

Así, tal y como Schnepp y Nemirovsky (2001) sugieren, en lugar de aprender Cálculo partiendo de la diferenciación hacia la integración, los estudiantes deben tratar con la diferenciación en relación con la integración y viceversa. En ese sentido, con el presente trabajo se pretende determinar en qué medida actividades de cualificación y cuantificación de lo variable en una situación de relación variacional asociada al movimiento, favorecen la emergencia de nociones matemáticas inherentes al TFC como un conocimiento en vías de instituirse.

Marco teórico

El TFC, y en general el Cálculo, es una herramienta que permite cuantificar y cualificar relaciones cambiantes, sin embargo, escolarmente se propicia el entender que la derivada e integral tienen una relación en tanto métodos de cálculo que son inversos. Esto acota y limita el que se vea la relación variacional y la relación funcional entre derivación e integración, o variación y acumulación. La razón principal por la que esto ocurre es debido a la prevalencia de centrarse en los objetos matemáticos en el discurso matemático escolar, dejando a un lado las prácticas y situaciones que los significan. En el Cálculo esto se traduce como la ausencia de escenarios de intermediación socioculturales que traten con procesos de cambio y variación (Cantoral, 2013).

Por lo anterior, en este trabajo se toma como referente teórico al Pensamiento y Lenguaje Variacional (Pylvar) que estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y el medio social que le da cabida (Cantoral, 2004). En tal forma de pensar y comunicarse, los énfasis están puestos en las estructuras variacionales presentes o que se hacen presentes al momento en que las personas asignan y comparten sentidos y significados.

El Pylvar se enmarca en la teoría socioepistemológica de la Matemática Educativa, pues en ella se plantea la tesis de que para explicar el aprendizaje o la construcción del conocimiento matemático, la atención de los análisis debe estar puesta en los procesos de difusión social, así como en el desarrollo e institucionalización de los saberes desde una mirada socio-cultural; a diferencia de otras perspectivas que centran la atención en los objetos matemáticos en sí mismos, y a partir de ellos se pretende comprender y explicar los fenómenos didácticos que se suceden. En esta teoría se reconoce que el conocimiento matemático emerge como producto de una evolución del pensamiento social en el que se desarrolla, es decir, surge de la actividad humana en un contexto determinado.

Cordero (2001), refiere que "en la actividad humana el conocimiento tiene significados propios, contextos, historia e intención, de ahí surgen versiones diferentes alrededor de una noción matemática". Para el caso del presente trabajo, esto se traduce en la idea de que el TFC debe ser estudiado en relación con actividades que le dieron origen y sentido, como es la cuantificación y cualificación de lo cambiante o variable en una variación acumulativa, antes de situarlo en un discurso analítico-formal que soslaye estas nociones imprescindibles para su entendimiento. Con esta reorientación a su tratamiento didáctico, se pretende sustituir el discurso matemático escolar que hoy día está en las aulas de clase, a partir de sentar las bases que permitan comprender el porqué de ese discurso por ejemplo, de modo que se desarrolle en los estudiantes el Pylvar.

En Arrieta (2003) se señala que "el aprendizaje surge cuando los actores sociales ejercen y modifican prácticas sobre su entorno, sus realidades, sus herramientas y sus identidades", por lo que la actividad humana como referente para la producción y construcción de conocimiento matemático debe ser analizada en el contexto donde se ubica; esto implica que el contexto permite explicar el pensamiento y la acción de los individuos, lo cual se traduce en poder comprender cómo el humano, mediante su actividad, construye el conocimiento bajo las condiciones y circunstancias socioculturales en las que física o simbólicamente se sitúa (Aparicio, Sosa, Jarero y Tuyub, 2010). Entendido así el proceso de construcción y aprendizaje matemático desde una perspectiva sociocognosctiva, se propone dar un tratamiento al TFC enmarcado en lo Variacional, es decir, en el estudio de lo cambiante, donde el énfasis esté en las nociones variacionales de acumulación y razón de cambio, si lo que se desea es favorecer su aprehensión.

En ese orden de ideas, también adquiere especial relevancia la noción de *lo matemático* en lo situacional, pues ésta se puede concebir como un entramado de naturaleza socio cognoscitiva en el que se relacionan procesos de construcción, despersonalización o descontextualización de saberes matemáticos, posibilitando la objetivación de los mismos (Aparicio y Sosa, 2015). Lo matemático se inscribe en la especificidad de las acciones matemáticas que componen una situación y de las cuales se logra o es posible abstraer un conocimiento matemático específico y por tanto, denota una expresión socio cognoscente de conocimiento matemático formalmente instituido (Aparicio y Sosa, 2015).

Un ejemplo de lo anterior se puede abstraer del estudio realizado por Aparicio y Cantoral (2006), sobre la construcción del concepto de continuidad puntual, en el que se observa que en un proceso de construcción de un saber matemático como es el de función continua en un valor, el centro de atención no está sobre el objeto matemático en sí, sino en la actividad o práctica que favorece u obstaculiza su producción; mostrándose que no es la actividad humana lo central, sino los procesos o mecanismos que de ellas pueden extraerse para el aprendizaje en torno a dicha objeto matemático. Los autores plantearon en un escenario variacional, el análisis gráfico y visual de las relaciones entre dos variables (valores en el dominio e imágenes de una función real), dando cuenta de elementos discursivos y gestuales sobre los cuales emergen ideas asociadas al concepto de continuidad puntual, en tanto una cualidad discutida de relaciones entre variables.

Así en la presente propuesta se parte de un contexto específico de relación variacional en el cual la actividad humana de cualificar y cuantificar lo variable en una situación de movimiento simulado, propicie la emergencia de lo matemático en relación el TFC. Lo anterior en conjunto (contexto, actividad humana y lo matemático) conforma *lo Situacional* (Aparicio y Sosa, 2015). Se dirá pues, que se ha logrado favorecer desde lo situacional, una construcción o resignificación social de un saber matemático, para este caso particular el TFC, si los tres componentes referidos se logran integrar adecuadamente para la consecución de los objetivos planteados, en caso contrario no podría referirse así.

Lo situacional	
Componente	**En el TFC**
Contexto	Variacional
Actividad humana	Cuantificar y cualificar lo cambiante
Lo matemático	Noción acumulación y razón de cambio

Tabla 1.

En síntesis de lo dicho en este apartado, la tesis que se sostiene es que la construcción del conocimiento matemático TFC, ha de darse en la medida en que éste se sitúe como parte de un contexto asociado a una actividad humana caracterizada por un hacer de matemáticas, por ejemplo, el cualificar y cuantificar lo variable. Tal construcción de conocimiento matemático no ha de entenderse como un/el conocimiento matemático institucional, sino como aquel que emerge de dicha relación diádica (contexto y actividad), es decir, lo matemático. Así, se espera que la actuación sobre una situación variacional en el contexto de llenado de una simulación de llenado de recipientes, emerja el TFC en tanto una forma de cualificar y cuantificar lo variable.

Metodología

Como se ha establecido anteriormente, *lo situacional* no pretende la emergencia de un conocimiento formalmente institucionalizado, sino la movilización y aprehensión de nociones que están en el conocimiento en vías de institucionalizarse. En vista que el TFC como saber institucionalizado cuenta con una definición y caracterización bien definida, en esta investigación, no se pretende trabajar sobre el TFC instituido, sino sobre las nociones matemáticas que subyacen en el conocimiento institucionalizado. Por tanto, es necesario situar al estudiante en el estudio de aquello que le da sentido, en este caso, la variación y la acumulación en una situación de llenado de recipientes. La situación anterior se ha considerado conveniente debido a las ventajas que representa la visualización física de un acumulado (puede percibirse físicamente la cantidad de líquido acumulada), contrastándola con situaciones usuales de velocidad de movimiento en donde el acumulado está en términos más abstractos (La distancia recorrida solo puede compararse en términos de medición o abstracción).

En un sentido más general, se propone desarrollar un trabajo didáctico en dos Momentos: el primero protagonizado por un análisis cualitativo de las nociones fundamentales de variación y acumulación; y el segundo caracterizado por un análisis cuantitativo y con matices más formales desde el punto de vista clásico escolar, orientados a concretar las ideas que se pusieron en juego en el primer momento.

El primer Momento del trabajo didáctico se estructura por *dos Estadíos*, donde la atención se sitúa en la forma de variación del llenado de un recipiente, con base en la información que lo acumulado proporciona. *Los Estadíos* representan sistemas de llenados de recipientes con variables didácticas establecidas de tal forma que la atención del estudiante esté enfocada a un aspecto específico:

Estadío 1	**Estadío 2**
• Misma variación • Acumulación diferente	• Diferente variación • Misma acumulación
¿Qué causa que un recipiente se llene más que otro?	*¿La misma acumulación implica misma variación?*

Tabla 2.

No se hace énfasis en el saber TFC, sino en la actividad y la experiencia del estudiante, las actividades exigirán movilizar argumentos cualitativos acerca de los efectos de la variación del llenado del recipiente sobre su acumulación o bien, la variación inherente del proceso de acumulación.

En el segundo Momento se pretende incluir un estudio cuantitativo de la misma situación empero, mediante tareas de interpretación gráfica y analítica en el que las ideas de acumulación y variación de lo variable, se explicitan a partir los argumentos situacionales del momento anterior. De ser así, se consideraría el haber favorecido una construcción de lo matemático asociado TFC, entendido éste como un conocimiento no institucionalizado.

La población para el estudio consistirá de jóvenes universitarios en su primer año de estudios superiores o en último año de bachillerato, siempre que cuenten con conocimientos relacionados con el cálculo, por ejemplo, entendimiento básico del concepto función. La participación será por invitación y de forma voluntaria.

Reflexiones

Consideramos que un tratamiento sobre las nociones relacionadas con el TFC como el que se refiere, favorecería el aprendizaje significativo del Cálculo en el nivel medio superior, ya que, más allá de presentar la derivación y la integración como métodos algorítmicos, se espera que cuando los estudiantes discutan la integración en situaciones como las aquí descritas, reconozcan la naturaleza de las relaciones variacionales presentes, por ejemplo, la presencia de una acumulación conlleva una razón de cambio, y que esta razón en cualquier punto es el valor de la función a integrar; y cuando discutan la diferenciación, reconozcan que la razón de cambio es acumulativa, es decir, el acumulado hasta cierto punto es el valor de la función a diferenciar. Esta manera de conceptualizar al TFC contribuiría a la formación de una base sólida en los estudiantes para el estudio posterior y más profundo del Cálculo.

Referencias

Aparicio, E., y Cantoral, R. (2006). Aspectos discursivos y gestuales asociados a la noción de continuidad puntual. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(1), 7-29.

Aparicio, E., y Sosa, L. (2015). *Lo situacional y lo matemático en procesos de construcción social del conocimiento matemático*. Mérida, Yucatán: Universidad Autónoma de Yucatán (no publicado).

Aparicio, E., Sosa, L., Jarero, M. y Tuyub, I. (2010). Conocimiento matemático. Un estudio sobre el papel de los contextos. En R. Rodríguez y E. Aparicio. *Escuela de invierno en matemática educativa 13(1),* 167-174. Monterrey: Red de centros de investigación en matemática educativa.

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula.* Tesis de doctorado no publicada. Cinvestav-IPN, México, D.F., México.

Cabañas, G. y Cantoral, R. (2007). La integral definida: un enfoque socioepistemológico. En C. Dolores, G. Martínez, R.M. Farfán, C. Carrillo, I. López y C. Navarro (Eds), *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula*, 3-25. México: Ediciones Díaz de Santos.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 17, 1-9.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento.* Barcelona, España: Gedisa

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 4(2), 103-128.

Gray, E., Tall, D. (1994). Duality, ambiguity & flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for research in Mathematics Education*, 26, 115-141.

Lavrent'ev, M. y Nikol'skii S. (1956). Analytic Geometry. En A. Aleksandrov, A. Kolmogorov & M. Lavrent'ev, (Eds.) *Mathematics: its content, methods and meaning*, 65-180. Moscú: MIT Press.

Muñoz, G. (2007) Rediseño del Cálculo Integral escolar fundamentado en la predicción. En C. Dolores, G. Martínez, R.M. Farfán, C. Carrillo, I. López y C. Navarro (Eds), *Matemática Educativa. Algunos aspectos de la socioepistemología y la visualización en el aula*, 27-76. México: Ediciones Díaz de Santos.

Schnepp, M., Nemirovsky, R., (2001) Constructing a foundation for the fundamental theorem of calculus. *Yearbook (National council of teachers of mathematics),* 90-102.

Thompson, P. (1994). Images of rate and operational understanding of the Fundamental Theorem of Calculus. *Educational Studies in Mathemathics*, *26*(2-3), 229-274.

Thompson, P. W., & Silverman, J. (2008). The concept of accumulation in calculus. In M. Carlson, & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics*, 117-131. Washington, DC: MAA.

Autores

Aurea Guillermo; UADY. México; aureaa@live.com
Daniel Ortiz; UADY. México; dortizmay@outlook.com
José Suárez; UADY. México; jose.suarez.huchin@hotmail.com

LO MATEMÁTICO COMO ARGUMENTACIÓN EN EL APRENDIZAJE ESCOLAR. UNA REFLEXIÓN DESDE LA INVESTIGACIÓN PARA LA EDUCACIÓN

Karla Gómez Osalde, Landy Sosa Moguel, Eddie Aparicio Landa

Resumen

Se presenta una reflexión sobre el rol del conocimiento matemático y su funcionalidad ante la especificidad de situaciones, tareas o problemáticas que conforman su construcción con base en una distinción fundamental: la matemática como obra de conocimiento que responde a explicaciones desde una construcción axiomática y lo matemático como una construcción social que responde al uso y resignificación en situaciones y tareas específicas. Para ganar entendimiento de esta distinción, se exponen algunos ejemplos de situaciones de optimización a partir de los cuales se propone una caracterización de lo matemático como argumentación, en vías de favorecer el aprendizaje escolar.

Palabras clave: Lo matemático, aprendizaje escolar, construcción social.

Introducción

El aprendizaje de las matemáticas se concibe como una problemática social y cultural que se ha abordado a partir de diferentes enfoques: desde teorías conductistas o netamente cognitivas, hasta enfoques que integran aspectos sociales como las teorías constructivistas. A partir del desarrollo de éstas y junto con el reconocimiento de la naturaleza dual de la matemática, donde algunas veces es objeto de estudio y otras es un instrumento, teorías como la Socioepistemología y la Etnomatemática se han preocupado por el estudio de aquellas matemáticas que expresan el uso y las formas del conocimiento de la gente más allá del aula escolar.

Todo ello, constituye el reflejo de una necesidad social por recuperar la funcionalidad del conocimiento matemático escolar de manera que se favorezcan las condiciones para generar aprendizajes. Se reconoce entonces, una necesidad de enmarcar los procesos de aprendizaje dentro de aspectos tanto cognitivos como socioculturales que permitan una estrecha relación con la actividad humana (Cordero, 2001).

Para ello será fundamental lograr una caracterización del aprendizaje en matemáticas considerando tanto la función social y cultural del conocimiento matemático, como el entendimiento del aprendizaje más allá de la comprensión de conceptos; sino como el reconocimiento de las diferentes formas de pensar y resignificar la matemática en diferentes escenarios, situaciones, comunidades, disciplinas, etc., con la finalidad de promover intencionalmente un desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes.

En este sentido, se presenta una reflexión sobre el rol del conocimiento matemático y su funcionalidad ante la especificidad de situaciones, tareas o problemáticas que conforman su construcción misma (lo matemático) a partir del análisis de algunos aspectos que lo caracterizan. Para ganar entendimiento se exponen algunos ejemplos de situaciones de optimización a partir de los cuales se propone una caracterización de lo matemático como argumentación, en vías de favorecer el aprendizaje escolar.

Una problemática específica: la desarticulación de realidades

En la actualidad, para hablar del aprendizaje de las matemáticas se debe tomar en consideración que los estudiantes aprenden o no a partir de una confrontación de realidades.

Por un lado, se vive una realidad social permeada de exigencias del dominio de herramientas matemáticas para el desarrollo de la ciudadanía plena, donde el aprendizaje debe ir más allá de los rudimentos aritméticos inflexibles que son base de los currículos escolares (Callejo et al., 2010). Esta realidad social destaca la función de cada persona como ciudadano en sociedad, por lo que en un enfoque por competencias el énfasis recaerá en las herramientas necesarias para que un ciudadano se desenvuelva fuera de la escuela, es decir, que pueda emplear la matemática en su realidad y generar nuevo conocimiento dentro del ámbito donde se desarrolle.

Por otro lado, también se vive una realidad educativa que responde a necesidades curriculares específicas en función de un discurso Matemático Escolar el cual, debido a la naturaleza que lo constituye, provoca diversas problemáticas relacionadas con el proceso de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática (Cordero, Gómez, Silva y Soto, 2015). Este discurso Matemático Escolar se rige por un paradigma inflexible y abstracto que se centra en formas de razonamiento a partir de algoritmos sin contextos ni experiencias asociadas a su conceptualización. De alguna manera, esta realidad educativa se encuentra deshumanizada y concretizada en aspectos científicos sin considerar la construcción social del conocimiento matemático.

Es así como un estudiante vive dentro de estas dos realidades fundamentadas a partir de necesidades sociales y curriculares que no se han logrado articular. Prueba de ello se puede ver reflejado en algunos aspectos señalados en (Carraher, Carraher y Schliemann, 2002):

- La resolución de problemas en la escuela tiene objetivos que difieren de aquellos que nos mueven para resolver problemas de Matemáticas fuera de clase.
- En la clase no estamos preocupados por situaciones particulares sino por reglas generales que tienden a vaciar el significado de las situaciones.
- Lo que le interesa a los profesores no es el esfuerzo de los estudiantes por resolver el problema sino la aplicación de una fórmula, de un algoritmo u operación que se encuentran predeterminados.

Con todo lo anterior, se presenta el siguiente cuestionamiento: ¿Cómo caracterizar el aprendizaje de las matemáticas ante esta desarticulación de realidades? Para ello, se considera necesario realizar una distinción entre dos constructos íntimamente relacionados: la matemática como obra de conocimiento que responde a explicaciones desde una construcción axiomática y lo matemático como una construcción social que responde al uso y resignificación en situaciones y tareas específicas.

Así por ejemplo, en la Biología Marina lo lineal puede corresponder a formas y usos del conocimiento matemático donde el centro es el análisis de la relación entre variables (valores de importación en dólares y años en el periodo), con el que se intenta establecer una tendencia global en los valores de importación que presentan un aumento constante. En esta situación específica, lo lineal adquiere sentido y significado en términos de incrementos o aumentos en la demanda de Carregenina (producto derivado de una especie de alga) en México, (Cetina, 2011).

Por lo tanto, como se plantea en Gómez (2015) la distinción entre constructos como la matemática y lo matemático obedece a aspectos conceptuales y vivenciales: "mientras la matemática se concibe desde argumentos conceptuales donde prevalecen la búsqueda de mecanismos y del orden, *lo matemático* es de carácter vivencial pues se expresa en las cualidades de las relaciones", (Gómez, 2015, p.14). Así, *lo matemático* en lo situacional se puede concebir como un entramado de naturaleza socio cognoscitiva en que se relacionan procesos de construcción, despersonalización o descontextualización de saberes matemáticos, posibilitando la objetivación de los mismos (Aparicio y Sosa, 2015).

Lo matemático entonces, señala cierta especificidad de argumentaciones que involucran el conocimiento matemático. Por tanto, en una situación de aprendizaje, lo matemático se encontrará inscrito en la especificidad de las situaciones que la componen y de las cuales se logra o es posible abstraer un conocimiento matemático específico (Aparicio y Sosa, 2015). Estas cualidades podrían permitir un enlace entre lo que sucede en la realidad escolar donde existe un discurso alrededor de conceptos, temas y objetos acabados, con lo que se espera propiciar socialmente en el estudiante al concebirlo en su rol de ciudadano capaz de desarrollar formas de pensar que le permita formular conjeturas y procedimientos para resolver problemas; así como elaborar explicaciones de hechos o fenómenos en su área profesional y en su vida.

Para ganar mayor entendimiento, se realiza un análisis de cuatro resultados de investigación que rescatan aspectos de lo matemático desde situaciones relacionadas con la optimización, a saber: Cetina (2011), Sosa, Aparicio y Jarero (2012), Gómez (2015) y Del Valle (2015). A partir de dicho análisis se logra una articulación de cuatro elementos para caracterizar lo matemático: aspectos socioculturales, epistemológicos, el rol del individuo en comunidad y el desarrollo del pensamiento matemático.

Caracterizando lo matemático. Un ejemplo desde la construcción social de lo óptimo

A continuación, se presentan algunos ejemplos de situaciones de optimización a partir de los cuales se propone una caracterización de lo matemático como parte de las argumentaciones que promueven el aprendizaje escolar.

i. *Aspectos socioculturales*

Como parte de la vida cotidiana, se encuentran presentes situaciones fuertemente relacionadas con la optimización en términos de la selección de la mejor manera de realizar una actividad o de tomar una decisión. Por ejemplo, ante una oferta de planes tarifarios como la presentada en la Tabla I, el argumento de la situación recae en la manera de seleccionar el plan que mejor conviene a partir de las variables en juego.

OFERTA PLANES TARIFARIOS

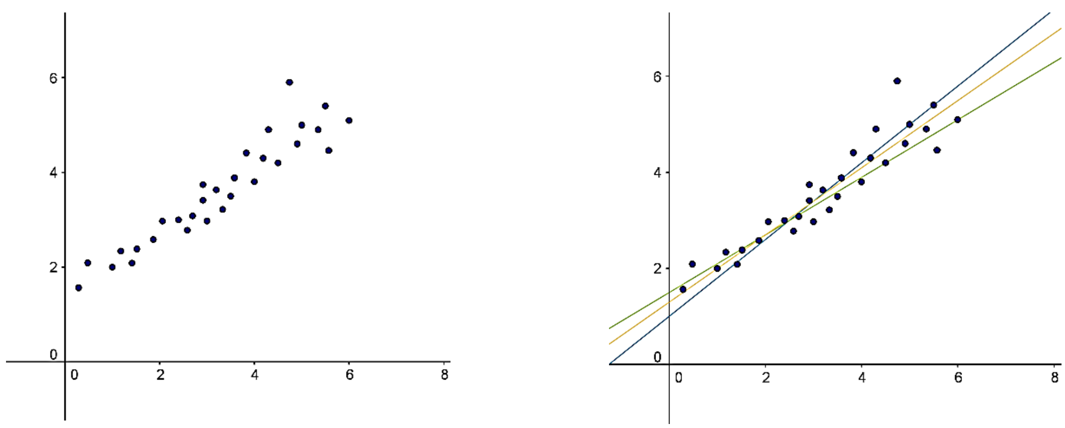
	PLAN ALFA	*PLAN BETA*	*PLAN GAMA*
Renta mensual	300	500	800

Datos (MB)	500	2,000	8,000
Velocidad 4G LTE	N/A	N/A	INCLUIDO
Minutos locales	900	1,700	7,200
Minutos nacionales	100	300	800
SMS	100	400	ILIMITADO
Minuto de telefonía adicional	$1.50	$1.50	$1.50

Tabla I. Ofertas de planes tarifarios para telefonía celular

La mejor decisión dependerá del consumidor, de sus condiciones y necesidades. Por ejemplo, depende si el teléfono se emplea para cuestiones personales o laborales, del tipo de actividad profesional; o bien si el consumidor es una compañía con necesidades de comunicación amplia con sus trabajadores a nivel nacional.

Incluso una situación asociada a comportamientos gráficos se puede encontrar permeada de conocimientos socioculturales en donde subyace la selección en términos de las condiciones ideales y las variables involucradas en la situación. Por ejemplo, ante la gráfica de dispersión que señala la Figura Ia) y las opciones de rectas que mejor ajustan a los datos presentadas en la Figura Ib), ¿cuál es la recta que mejor conviene?



a) b)

Figura I. Gráfico de dispersión

La respuesta a estas cuestiones dependerá de la situación específica que el gráfico represente y de las condiciones o necesidades socio-culturales que influyan en la toma de decisión.

En ambos casos se presentan situaciones que involucran la necesidad de una toma de decisión a partir de la optimización de la información y donde se puede distinguir que subyacen aspectos socioculturales íntimamente relacionados con la selección de un ideal.

ii. Aspectos epistemológicos

El estudio de las argumentaciones que subyacen a la optimización puede ofrecer un modelo explicativo de su uso y necesidad social según el momento histórico o la situación específica que dota de sentido y significado a la optimización.

Del Valle (2015) aporta con un estudio sobre la naturaleza epistemológica de los usos de la optimización a partir del análisis de dos escenarios, uno de corte histórico-documental y otro profesional, y de su uso en algunos escenarios escolares. Reconoce elementos relacionados con el desarrollo de patrones de adaptación, la distinción de cualidades y la búsqueda de lo estable como parte de las significaciones, procedimientos e instrumentos que conforman las argumentaciones de la optimización (Tabla II).

Epistemología de los usos de la optimización	
Significaciones	*Patrones de adaptación*
Procedimientos	*Distinción de cualidades*
Instrumento	*Lo estable*
Argumentaciones	*Optimización*

Tabla II. Desarrollo de los usos de la optimización, Del Valle (2015)

Por ejemplo, en la obra de Lagrange, lo que hoy en día se conoce como los *multiplicadores de Lagrange*, la atención estaba en el equilibrio estático de los cuerpos que orbitan alrededor del sol. El uso de la optimización se distingue a partir de la búsqueda de una relación mutua entre las fuerzas de los cuerpos y sus resistencias al incorporar los coeficientes indeterminados expresados a través de los multiplicadores λ, μ, ν, etc. (Figura II).

$$\overbrace{\underbrace{Pdp + Qdq + Rdr + \ldots\ldots}_{\text{Fuerzas Cuerpos}} + \underbrace{\lambda dL + \mu dM + \nu dN + \ldots}_{\text{Resistencia}}}^{\text{Relación mutua}} = 0$$

Figura II. Los usos de la optimización en Lagrange

Subyace una situación de selección a través de la búsqueda y significación de los patrones de adaptación a un ideal y para lo cual se recurre a procedimientos que permitan distinguir las cualidades de los elementos en juego. Todo ello conforma un instrumento que es útil para el éxito de la selección: la estabilidad.

En algún sentido, esta epistemología de distinción/modelación proporciona un tipo de explicación del uso y sentido de la optimización como un método funcional para diversas situaciones tanto dentro de la matemática disciplinar como de la vida diaria.

iii. El individuo en comunidad

El conocimiento matemático se resignifica a la luz de su uso en situaciones específicas y de sus intencionalidades, depende de su función social, de los consensos, entre muchos otros.

Por lo que la problemática asociada al aprendizaje de la matemática no puede concebirse aislada del estudio y el entendimiento del papel del individuo como parte de una comunidad, es decir, como un sujeto de carácter social en una relación dialéctica con el mundo: el conocimiento del mundo modifica y norma su actividad y sus prácticas, a la vez que dichas prácticas modifican y permiten el desarrollo del mundo social.

En Gómez (2015) se puede encontrar un ejemplo de la resignificación del uso de la optimización como parte del quehacer disciplinar de la Ingeniería Agrónoma. La Agronomía es la disciplina que se encarga de sistematizar conocimientos relativos a la práctica del suelo, plantas, animales, entre otros; así como su relación con el humano. Como parte de estas prácticas, adquiere un papel fundamental el estudio de los tipos de plantas, plagas y temperatura para el control de la producción con cultivos de alta calidad, por lo que una problemática propia de la comunidad se encuentra enmarcada en lo siguiente: ¿Qué tipo de plaga se adapta mejor a ciertas condiciones térmicas de manera que permita optimizar el empleo del plaguicida a favor de proveer del mayor tiempo de maduración del cultivo sin la necesidad de la aplicación del químico?

En la Figura III se exhiben tres tipos de umbrales (mínimo y máximo) de temperatura que corresponden a las condiciones térmicas para el desarrollo favorable de tres tipos de plagas (A, B y C), de manera que, a medida que pasan los días, varía la acumulación de temperatura de acuerdo a estos umbrales. La temperatura que se acumule (°D) determina el momento ideal donde se podrá aplicar el plaguicida para minimizar el daño en la producción, al mismo tiempo que se logre disminuir su aplicación y el impacto negativo sobre la salud de las personas y el ambiente.

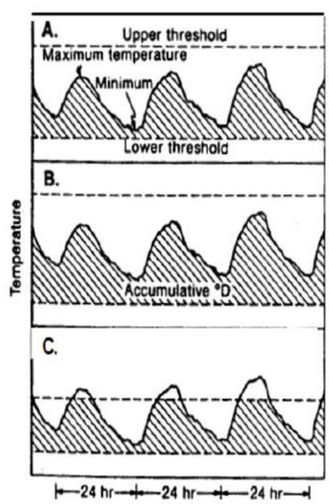


Figura III. Umbrales mínimo y máximo de tres tipos de plaga

Como se muestra en la figura III, en el caso de la plaga A con respecto a la plaga B, esta última es la que acumula mayor temperatura por día debido a que el umbral inferior es menor al de A, por lo que soporta temperaturas menores para el desarrollo favorable de la plaga. La temperatura de desarrollo de la plaga C tiene un umbral superior es mucho menor que el de A y el de B, por lo que esta plaga acumula menor cantidad de grados de temperatura por día, lo que podría resultar más conveniente en función de que se extiende el plazo en que se tendría que aplicar el plaguicida.

En el contexto de la problemática de esta comunidad, el uso ideal del plaguicida no siempre será aplicarlo en función de un tiempo mínimo y con ello evitar el crecimiento exponencial de la plaga, sino que es indispensable una toma de decisión basada en la relación cualitativa entre dos variables: la acumulación de temperatura de desarrollo de la plaga al paso de los días y la cantidad de días adecuados para asegurar la calidad del desarrollo del cultivo. Por lo tanto, el empleo óptimo del plaguicida dependerá del análisis de la relación entre estas variables según el tipo de planta y las condiciones ambientales.

Un individuo construye saberes matemáticos propios a partir del uso de su conocimiento en situaciones que exigen de un pensamiento matemático asociado a la especificidad de las prácticas que conforman su quehacer como parte de la comunidad. En el caso de la Ingeniería Agrónoma, las situaciones que involucran la optimización de recursos no sólo responden a un método matemático de optimización, sino también parten de un conocimiento desde lo óptimo como aquél argumento que considera las variables cuantitativas y cualitativas para el análisis y la toma de decisiones que solventan estas problemáticas.

iv. El pensamiento matemático

El carácter social del conocimiento matemático lo enmarca tanto la naturaleza epistemológica de la matemática misma como también las prácticas, usos y especificidades que conforman distintas racionalidades y resignificaciones del conocimiento. Bajo esta perspectiva, el pensamiento matemático no sólo depende de la estructura de la matemática sino de todas las formas posibles de construir y usar la matemática tanto disciplinarmente, escolarmente o como parte de la vida cotidiana. Este carácter social da lugar al interés de caracterizar el conocimiento matemático desde lo matemático.

De esta manera, lo matemático se distingue por una pluralidad de formas de pensar de las cuales es posible abstraer conocimiento matemático. Un ejemplo de ello se puede encontrar en Sosa, Aparicio y Jarero (2012) donde se presentan situaciones de optimización en escenarios de la ciencia, la industria y la empresa como una forma de razonamiento inherente a procesos de pensamiento y que orienta las acciones de los seres humanos para tomar decisiones. En estas situaciones, lo óptimo es un conocimiento basal para solventar las problemáticas propias de su ámbito a partir de un tipo de pensamiento que va más allá de un acto puramente mental, sino que se encuentra en estrecha relación con usos y formas del saber matemático, de manera que éstos modifican dicho pensamiento.

En este sentido, lo matemático será un elemento clave para propiciar el desarrollo del pensamiento matemático como parte de aquellas herramientas de la matemática necesarias para el potencial desarrollo del estudiante en su cualidad de ciudadano.

Reflexiones e implicaciones

Lo matemático es un conocimiento asociado a su razón de ser y a su necesidad social por lo que no responde únicamente a la construcción lógica y estructural del conocimiento desde la matemática misma, sino también a su función social. Por lo tanto, inevitablemente estará permeado con elementos como los que se han caracterizado a partir de lo óptimo:

- Los aspectos socioculturales permiten apreciar a las situaciones donde predomina una práctica de optimización como actividades humanas de selección.

- Algunos aspectos epistemológicos relacionados con lo óptimo permiten conformar un marco explicativo de los usos de la optimización a partir del desarrollo de patrones de adaptación, la distinción de cualidades y la búsqueda de lo estable.
- Lo óptimo no se puede disociar del rol del individuo como parte de una comunidad ya que en éstas adquiere especificidad el conocimiento y se resignifican permanentemente.
- El desarrollo del pensamiento óptimo no sólo exige de demandas cognitivas sino también de los escenarios donde se desarrollan las distintas formas de pensar matemáticamente.

Por lo que caracterizar lo matemático significa considerar al menos estos cuatro aspectos: lo sociocultural, la epistemología del saber, el rol del individuo como parte de una comunidad y el desarrollo del pensamiento matemático. Así, en cuanto a implicaciones didácticas, estos aspectos deberán articularse para desarrollar el pensamiento matemático en los estudiantes.

El aprendizaje entonces no puede darse en las mismas condiciones y circunstancias para todos los estudiantes. Por el contrario, debe tomar en cuenta la condición de aprender como parte de una necesidad de un individuo para desarrollarse competentemente en la sociedad. La caracterización y el desarrollo del aprendizaje en matemáticas deberá estar asociado a lo matemático como aquel nexo o articulación entre las necesidades y problemáticas que demanda la sociedad actual y la reorganización de las prácticas y necesidades curriculares propias de cada región.

Referencias

Aparicio, E., y Sosa, L. (2015). Lo situacional y lo matemático en procesos de construcción social del conocimiento matemático. Mérida, Yucatán: Universidad Autónoma de Yucatán (no publicado).

Callejo, M., Goñi, J., Alsina, C., Civil, M., Giménez, J., Gómez-Chacón, I...., Venegas, Y. (2010). *Educación matemática y ciudadanía*. Barcelona, España: Graó.

Carraher, T., Carraher, D. y Schliemann, A. (2002). *En la vida diez, en la escuela cero*. Distrito Federal, México: Siglo Veintiuno Editores.

Cetina, M. (2011). *Formas de constitución de conocimiento matemático en Biología Marina*. Tesis de licenciatura no publicada, Universidad Autónoma de Yucatán, Mérida, Yucatán, México.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4*(2), 103-128.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci y Soto, D. (2015) *El Discurso Matemático Escolar: la Adherencia, la Exclusión y la Opacidad*. Barcelona, España: Editorial Gedisa.

Del Valle, T. (2015). *Los Usos de la Optimización: Un Marco de Referencia y la Teoría Socioepistemológica.* (Tesis doctoral no publicada). Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile.

Gómez, K. (2015). *El fenómeno de opacidad y la socialización del conocimiento. Lo matemático de la Ingeniería Agrónoma.* (Tesis doctoral no publicada). Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, Distrito Federal, México.

Sosa, L., Aparicio, E. y Jarero, M. (2012). Construcción escolar de conocimiento matemático. Análisis del alcance de prácticas de optimización. *Memoria de la XV Escuela de invierno en Matemática Educativa*. 81-88. Distrito Federal, México.

Autores

Karla Gómez Osalde; UADY. México; karla.gomez@correo.uady.mx
Landy Sosa Moguel; UADY. México; smoguel@uady.mx
Eddie Aparicio Landa; UADY. México; alanda@uady.mx

CARACTERIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR EN FORMACIÓN INICIAL PARA ENSEÑAR LA RAZÓN COMO UN SIGNIFICADO DE LA FRACCIÓN

Ana María Reyes Camacho, Leticia Sosa Guerrero

Resumen

En este trabajo identificamos el conocimiento matemático de los profesores en formación inicial de primaria para la enseñanza de la razón como un significado de la fracción a través de un estudio cualitativo. Esta investigación se enfoca en el modelo Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (*MTSK, por sus siglas en inglés - Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*) con el objetivo de obtener información sobre el conocimiento en cuanto a los temas matemáticos (*KoT, por sus siglas en inglés - Knowledge of topics*), a partir de entrevistas semiestructuradas que permiten explorar los conocimientos del futuro profesor sobre el aprendizaje esperado que abordará (significado de razón), el eje de las matemáticas en el que se ubica, el enfoque y las competencias matemáticas que favorecen.

Palabras claves: Formación inicial de profesores, primaria, MTSK, razón.

Introducción

La formación inicial del profesor de primaria en el campo de las matemáticas demanda de éste una variedad de conocimientos que favorecen la gestión de contenidos como las fracciones. En este sentido, Ríos (2007) señala: "[…] Dominar más contenido del que se va a enseñar permite tener una visión amplia y profunda de cómo enseñar, hacer conexiones y transferencias entre los diversos saberes matemáticos" (p.121). Para algunos investigadores (Ávila, 2001; González, 2005; Llinares y Sánchez, 1997), las fracciones representan un tema complejo por los diferentes significados que poseen: relación parte-todo y medida, cociente, razón y operador; situación que propicia dificultades en su enseñanza y aprendizaje. La reforma en Educación Normal bajo el Plan de Estudios 2012, aspira a que los profesores en formación inicial adquieran el conocimiento disciplinar de matemáticas para contribuir al desarrollo de sus competencias docentes.

En esta investigación, se indaga sobre los conocimientos que tienen los profesores en formación en relación al significado razón y los significados de la fracción que asocian a su enseñanza en la escuela primaria, así como su ubicación en los ejes del estudio de las matemáticas, su relación con el enfoque y competencias de las matemáticas. Con frecuencia, el significado razón se designa como el último de los significados que se aborda en la escuela primaria (Gascón, 2013). En este sentido, la pregunta que guía la presente investigación es: ¿Cuáles son los conocimientos matemáticos que los profesores en formación inicial asocian al significado razón para su enseñanza?, cuyo propósito es caracterizar el conocimiento matemático de los profesores en formación inicial para enseñar el significado razón.

Marco teórico

La profesionalización del docente implica el reconocimiento de los conocimientos que están en juego durante el desarrollo de su tarea, conocimientos que por otra parte a lo largo del tiempo han sufrido una serie de cambios en función de las condiciones de la sociedad y se han convertido en objeto de estudio para contribuir a su buen desempeño como docente.

Desde hace décadas se han llevado a cabo una serie de investigaciones con el propósito de definir y organizar el conocimiento profesional de los profesores. Al respecto, Shulman (1986) realiza un trabajo sobre el conocimiento del contenido para la enseñanza, donde considera tres componentes esenciales de la materia que se va a enseñar: el conocimiento del contenido, el conocimiento didáctico del contenido y el conocimiento curricular.

En el caso de los estudios sobre los profesores que enseñan matemáticas surgieron algunas interrogantes: ¿Cuál es el conocimiento matemático que poseía el profesor? ¿Cuál es el conocimiento matemático que debe poseer para el ejercicio efectivo de su función docente? (Sosa, 2011). Ambos cuestionamientos encuentran respuesta en la práctica de los docentes en formación continua y de los profesores en formación inicial durante su estancia en la escuela primaria.

En Carrillo, Climent, Contreras & Muñoz-Catalán (2013) se presenta un modelo de conocimiento del profesor de matemáticas denominado el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK), el carácter de especializado se debe a que afecta a todos los dominios y subdominios que lo integran y no sólo a alguno de ellos, los cuales pretenden avanzar en el análisis y la conceptualización del conocimiento especializado que requiere el profesor de matemáticas para su enseñanza. En la Figura 1 se presentan los componentes del conocimiento especializado del profesor de matemáticas a través de la representación gráfica del modelo MTSK. Las siglas empleadas para los dominios y subdominios corresponden a su nombre en inglés.

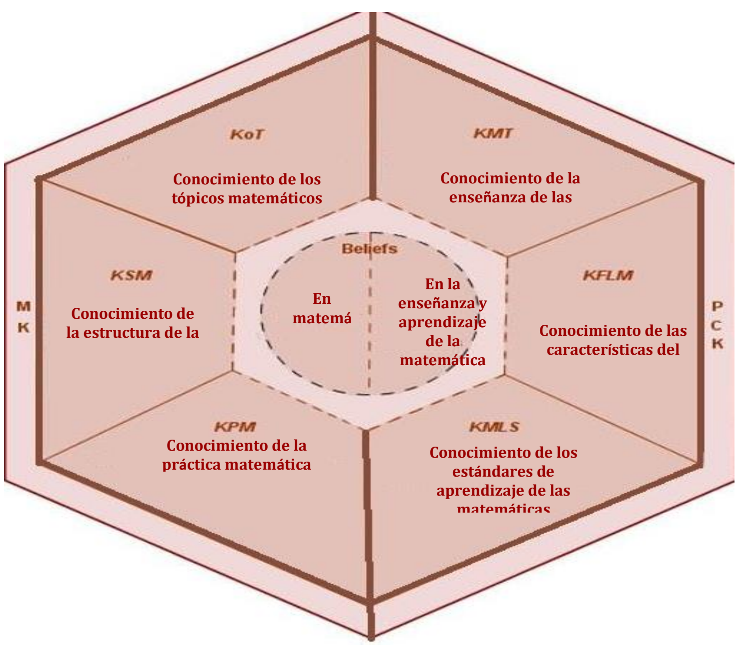


Figura 1. Diagrama del Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (*MTSK)* (Carrillo, Contreras & Flores, 2013).

El dominio conocimiento didáctico del contenido (PCK) contemplan los subdominios: conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) y conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS).

En lo que respecta al dominio conocimiento matemático (MK), se consideran tres subdominios de conocimiento (Carrillo et al., 2013; Montes, Contreras & Carrillo, 2013; Carrillo, Escudero & Flores, 2014): conocimiento de la práctica matemática (KPM), que hace énfasis en las formas de hacer y proceder en matemáticas, como son las distintas formas de demostrar o definir; por otra parte, el conocimiento de la estructura matemática (KSM), responde a la necesidad de conocer el objeto de enseñanza de manera integral y relacionada, donde entran en acción los conocimientos de las relaciones existentes entre contenidos avanzados y elementales; finalmente, se ubica el conocimiento de los temas matemáticos (KoT), subdominio que se estudia en el presente trabajo, hace referencia al contenido disciplinar de las matemáticas que figura en manuales y textos escolares, así como su fundamentación teórica. Estos conocimientos responden a una mirada enfocada en lo que tiene sentido para el profesor, en tanto que se considera importante para él tener un conocimiento disciplinar profundo. Así, este subdominio ofrece cabida a conocimientos ligados al contenido, al conocimiento de la fenomenología de los conceptos, que aporta un bagaje de aspectos epistemológicos que le permite al profesor comprender diferentes significados atribuidos a un mismo contenido, además de poder hacer asociaciones con los conocimientos de propiedades y definiciones asociados a un determinado tema. Por lo cual, esta investigación pone énfasis en el estudio del KoT.

Método

La investigación educativa tiende a comprender situaciones particulares, pero no con el objetivo de generalizar, sino de propiciar la reflexión sobre la práctica y los conocimientos que el profesor emplea durante la anterior (Elliot, 1978, citado por Albert, 2007). Es en este espacio donde el enfoque interpretativo encuentra su lugar para indagar el significado de los fenómenos educativos, cuyo objetivo es la comprensión de los significados en relación con el contexto. Esta perspectiva rechaza la existencia de patrones que constituyen toda la realidad. De acuerdo con Pérez (1996):

La estrategia interpretativa en educación supondrá sumergirse en el ambiente natural de la escuela y del aula e indagar, observando, interrogando y contrastando, los factores que intervienen y su influencia relativa en la determinación y desarrollo de los problemas que aparecen en dicha realidad (p.123).

En este sentido, por la naturaleza de este trabajo, se atiende a una investigación cualitativa, que propicia la orientación hacia la exploración, descripción y entendimiento de las prácticas plasmadas por los profesores en formación inicial en cuatro entrevistas semiestructuradas que surgen de cuatro planificaciones que realizaron para abordar la enseñanza del significado razón en una sesión de clase. De esta manera, nos acercamos a la comprensión del conocimiento por medio de las interpretaciones que como investigadores se realizan de los datos obtenidos, las cuales se nutren de referentes teóricos respecto al contenido matemático y de indicadores relacionados con el conocimiento del profesor de matemáticas (Rojas, 2014).

Los participantes fueron cuatro profesores en formación inicial (PFI1, PFI2, PFI3 y PFI4) que cursan el sexto semestre de la Licenciatura en Educación Primaria con el enfoque del Plan de Estudios 2012. Estos estudiantes llevaron todos los programas del área de matemáticas que se ubican en el trayecto formativo preparación para la enseñanza y el aprendizaje: Aritmética: su aprendizaje y enseñanza, Álgebra: su aprendizaje y enseñanza, Geometría: su aprendizaje y enseñanza y Procesamiento de la información estadística.

La fuente primaria para la recolección de datos son cuatro entrevistas semiestructuradas que surgen de cuatro planificaciones de los estudiantes para maestros donde se favorece la enseñanza de la razón como un significado de la fracción en un grupo de quinto grado de educación primaria. En este primer acercamiento al contenido de las entrevistas semiestructuradas aplicadas se pretende caracterizar el KoT que les permite abordar el significado razón.

Resultados

El conocimiento especializado del profesor de matemáticas se hace evidente en diferentes momentos durante el ejercicio de la docencia; una situación significativa es el trabajo que realiza en el aula con un grupo de alumnos, aunque, previo a esto existen otros documentos que dan cuenta de los conocimientos del profesor, tal es el caso de sus planes de clase.

En este reporte de investigación, se caracterizan los conocimientos de los temas matemáticos de los profesores en formación inicial a partir de la información que arrojan cuatro entrevistas semiestructuradas, teniendo como antecedente el diseño de planificaciones para abordar la noción de razón en cuatro grupos de quinto grado de educación primaria. Dichas entrevistas están estructuradas en función de los dominios y subdominios del MTSK. En este momento, se aborda el subdominio *Conocimiento de los temas matemáticos* (*KoT)* como parte del dominio Conocimiento matemático (MK). Las siguientes tres preguntas y respuestas que se analizan, comienzan a explorar el conocimiento que tienen los futuros profesores del contenido disciplinar de matemáticas, de manera general, contenido en los textos escolares de educación primaria.

La organización de las matemáticas, en el plan y los programas de estudio 2011 de Educación Primaria (1º a 6º) gira en torno a tres ejes: sentido numérico y pensamiento algebraico, forma, espacio y medida, y manejo de la información. Cuando se les pregunta a los estudiantes ¿Cuál es el eje de las matemáticas que se aborda en su plan de clase? Todos responden que se pretende estudiar el sentido numérico y pensamiento algebraico, pues es donde se plantea la resolución de problemas que implican suma y resta de fracciones. De acuerdo con Block (2008), la noción de razón se encuentra en la intersección de dos temas: los números racionales y la proporcionalidad, por lo que también se puede ubicar el estudio de la razón desde el eje manejo de la información, dentro de la proporcionalidad y funciones.

El estudio de las matemáticas en la educación primaria pretende favorecer que los niños desarrollen cuatro competencias: resolución de problemas de manera autónoma, comunicar información matemática, validar procedimientos y resultados y, manejar técnicas eficientemente. Ante esta gama de competencias, PFI1 menciona que durante su clase busca que los alumnos comuniquen información matemática y manejen técnicas eficientemente. Por su parte, PFI2 agrega la resolución de problemas de manera autónoma, además de las dos anteriores. PFI3 se enfoca a favorecer la resolución de problemas de manera autónoma. Finalmente, PFI4 pretende que avancen en la resolución de problemas de manera autónoma, comunicar información matemática y validar procedimientos y resultados. Como se puede apreciar, todos los estudiantes incorporan a su respuesta alguna o algunas de las cuatro competencias matemáticas.

Cuando se preguntó a los estudiantes, ¿Cómo se hace presente el enfoque de las matemáticas en su plan de clase? PFI4 señala "[…] Al plantear situaciones problemáticas"; PFI1 agrega que sí se hace presente porque se busca que el niño esté resolviendo problemas por sí sólo. Aquí se le otorga un papel activo al alumno, lo cual coincide con lo expresado por PFI2 "El enfoque de las matemáticas se hace presente porque es una actividad novedosa y les permite poner en práctica diferentes procedimientos para resolver actividades, además porque se invita a los alumnos a realizar un análisis de la reflexión de resultados, se propicia que formulen y den argumentos de lo que están haciendo". Por su parte, PFI3 afirma que se hace presente porque "A partir del problema el niño construye sus hipótesis para resolver el problema y al final se la da el nombre formal". En este caso, PFI3 retoma la participación de PFI4, PFI1 y PFI2, pero le agrega un papel activo al maestro, aunque de manera implícita cuando advierte que al final se da el nombre formal.

En relación al enfoque de las matemáticas, el programa de estudio 2011 señala que:

El planteamiento central en cuanto a la metodología didáctica que se sugiere para el estudio de las Matemáticas, consiste en utilizar secuencias de situaciones problemáticas que despierten el interés de los alumnos y los inviten a reflexionar, a encontrar diferentes formas de resolver los problemas y a formular argumentos que validen los resultados. Al mismo tiempo, las situaciones planteadas deberán implicar justamente los conocimientos y habilidades que se quieren desarrollar (SEP, 2011a, p. 67).

Como se puede apreciar, las ideas expresadas en esta cita textual establecen un rol específico para el maestro y el alumno, lo cual agrupa las respuestas que dan los estudiantes durante las entrevistas.

Las últimas tres preguntas que se presentan en este apartado de resultados exploran los conocimientos que tienen los futuros profesores sobre las fracciones y sus significados en relación a lo que plantean los programas de estudios de educación primaria (materiales escolares). ¿Cuál es el aprendizaje esperado de este plan de clase? Es otras de las preguntas que se plantean a los estudiantes. Para dar a conocer las respuestas de los profesores en formación se presenta la siguiente tabla:

PFI1	PFI2	PFI3	PFI4
"Que los alumnos conozcan la fracción en razón de la razón, es decir, cómo se ve la razón representada en fracciones"	"Es que los niños expresen por medio de razón o cociente una comparación entre dos cantidades"	"Que los alumnos sepan resolver problemas con las fracciones pero como razón"	"Que los alumnos identifiquen el uso de la razón a partir de las fracciones"

Tabla I. Comparación de las respuestas de los profesores en formación inicial.

A partir de la información de este cuadro, se observa que PFI1 y PFI4 coinciden en que los alumnos identifiquen y conozcan la razón como un significado de la fracción. En cuanto a PFI3 coincide referente a que conozcan la razón como un significado de la fracción, pero agrega que resuelvan problemas que las impliquen. Mientras tanto, PFI2 avanza en la descripción de una razón geométrica "[…] Es de tipo multiplicativo, expresa cuántas veces una cantidad es la otra, es decir, su cociente" (Block, Mendoza & Ramírez, 2010, p.27).

Después de las interrogantes anteriores se planteó a los profesores en formación inicial las siguientes preguntas:

	¿Cuáles significados y/o partes de la fracción se estudian en los grados anteriores (1º, 2º, 3º y 4º)?	**¿Cuáles significados y/o partes de la fracción se estudian en sexto grado?**
PFI1	Primero se abordan como enteros, por ejemplo con representaciones gráficas (representa en un círculo un entero y luego un medio). De aquí se va a la representación numérica y se les explica que el de arriba es el numerador y el de abajo el denominador; las dos partes de la fracción. Concluye diciendo que el significado que se aborda es como parte de un todo.	En sexto grado se estudia la comparación entre cantidades, la suma de fracciones y al igual que la multiplicación de fracciones. Se define como un conocimiento más abstracto.
PFI2	La fracción como parte-todo y medida.	La fracción mixta y un repaso de la fracción como razón.
PFI3	La fracción como parte-todo (representación gráfica) y la fracción como equivalencia y la estructura, fracciones mixtas	Operaciones con fracciones (multiplicación, división, suma y resta)
PFI4	Parte-todo	Suma de fracciones y otras operaciones.

Tabla II. Respuestas de los profesores en formación inicial.

En relación a la pregunta a) PFI1, PFI2, PFI3 y PFI4 identifican parte-todo como uno de los significados que se abordan en los grados anteriores a quinto. En el caso de la PFI1 antes de hacer referencia al significado parte-todo expresa el tipo de contextos en donde se puede favorecer la enseñanza de las fracciones, en este caso continuo, además menciona algunas de sus representaciones (gráfica y numérica), identifica las partes de la fracción (numerador y denominador) y la función que desempeñan. En este sentido, PFI3, especifica la representación gráfica de una fracción desde el significado parte-todo. PFI2 es el único que identifica dos significados de la fracción (parte-todo y medida) que corresponden a los definidos por Llinares y Sánchez (1997).

Parte-todo y medida, cociente, razón y operador son los significados de las fracciones establecidos por Llinares y Sánchez (1997), por lo cual se toman como referente para ubicar las respuestas expresadas por PFI1, PFI2, PFI3 y PFI4 en las respuestas que dan a la pregunta b) ¿Cuáles significados y/o partes de la fracción se estudian en sexto grado? PFI2 menciona el significado de razón y el resto los define a partir de las operaciones con fracciones, dentro de las cuales se puede encontrar el significado de cociente y operador, pero de manera explícita no está.

Conclusiones

A partir de la información obtenida en las entrevistas semiestructuradas, se observa el KoT que los profesores en formación inicial de primaria poseen en relación al contenido disciplinar de matemáticas, presente en materiales escolares como el plan de estudios 2011 de Educación Básica y los programas de estudio de los diferentes grados de Educación Primaria (1º, 2º, 3º, 4º, 5º y 6º) tomando como objeto de enseñanza el significado de razón. Las diferentes respuestas que se presentan se convierten en indicios para explorar el conocimiento especializado que los futuros profesores tienen sobre algunas categorías del subdominio KoT (definiciones, procedimientos, registros de representación, propiedades y sus fundamentos y fenomenología).

Las primeras cuatro preguntas que se plantean en el apartado anterior, al igual que sus respuestas, muestran algunos indicios de conocimientos de la categoría *definiciones,* ya que intentan contextualizar el significado razón en la Educación Primaria, en función de lo que plantean los materiales escolares; se queda en indicios porque no se profundiza en la definición explícita de dicho significado. Una categoría más, de la cual se rescatan indicios es *registros de representación*, pues en las respuestas a las preguntas 5 y 6 se muestran algunos conocimientos de los profesores en formación inicial cuando señalan que existen diferentes formas de representación de las fracciones (gráfica y numérica) en relación al significado o significados que aborden.

En este reporte de investigación se manifiestan algunos indicios del KoT que los profesores en formación inicial poseen en una entrevista semiestruturada, previo a la aplicación de sus planificaciones para favorecer la enseñanza del significado razón en una sesión de clase en un grupo de quinto grado de primaria. Sin embargo, en investigaciones posteriores será objeto de estudio en sus clases y en otras entrevistas semiestructuradas que aporten no sólo indicios, sino evidencias del KoT de los futuros profesores.

Referencias

Albert Gómez, M. J. (2007). *La investigación educativa: claves teóricas.* España: McGraw-Hill.

Ávila, A. (2001). *La experiencia matemática en la educación primaria. Estudios sobre los procesos de trasmisión y apropiación del saber matemático escolar*. México: UNAM (Tesis doctoral).

Block, D. (2008). El papel de la noción de razón en la construcción de las fracciones en la escuela primaria. En R. Cantoral, O. Covián Chávez, R. M. Farfán Márquez, J. Lezama Andalón, & A. Romo Vázquez. *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte iberoamericano* (pp. 455 - 470). México: CLAME - Díaz de Santos.

Block, D., Mendoza, T. & Ramírez, M. (2010). *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica*. México: SM.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C. & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Defining specialized knowledge for mathematics teaching. *Actas del CERME8*. Antalya, Turquía.

Carrillo, J., Contreras, L.C., & Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M.C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina, & I. Segovia (Eds.). *Investigación en Didáctica de la Matemática* (pp. 193- 200). Granada, España: Comares.

Carrillo, J., Escudero, D. & Flores, E. (2014). El uso del MTSK en la formación inicial de profesores de matemáticas de primaria. En *FOR-MATE Revista de análisis matemático-didáctico para profesores.* Vol. 1 (1), 16-26

Gascón, J. (2013). *Razón de ser de los números negativos y racionales.* Barcelona: Universidad de Barcelona.

González, I, (2005). *Los significados de la fracción en el discurso y en la práctica de los estudiantes de 4º grado de normal.* México: UPN (Tesis de maestría).

Llinares, S. & Sánchez, M. (1997). *Fracciones.* España: SÍNTESIS.

Montes M.A., Contreras, L.C., & Carrillo, J. (2013) Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, & N. Climent (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XVII*. (pp. 403-410), Bilbao, España.

Pérez, A. (1996). Comprender la enseñanza en la escuela. Modelos metodológicos de investigación educativa. En J. Gimeno Sacristán. A. I. Pérez Gómez**.** *Comprender y transformar la enseñanza*. España: Ediciones Morata.

Ríos, Y. (2007). Una ingeniería didáctica aplicada sobre fracciones. [en línea] *Revista Omnia* vol. 13, 120-157. Universidad del Zulia, Venezuela.

Rojas, N. (2014).*Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: un estudio de casos.* Granada: España. Tesis de doctorado publicada en http://fqm193.ugr.es/produccion-cientifica/**tesis**/ver_detalles/7483/descargar/

SEP (2011). *Plan de estudios 2011. Educación Básica*. México: Autor.

----- (2011a). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica Primaria. Quinto grado.* México: Autor.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Sosa, L. (2011). *Conocimiento Matemático para la enseñanza en bachillerato. Un estudio de dos casos*. Huelva: España. Tesis doctoral publicada en http://hdl.handle.net/10272/4509

Autores

Ana María Reyes Camacho; Escuela Normal Rural Gral. Matías Ramos Santos. México; anyreca0712@hotmail.com
Leticia Sosa Guerrero; UAZ. México; lsosa@mate.reduaz.mx

ANÁLISIS DIDÁCTICO DE LA RELACIÓN PITAGÓRICA EN LIBROS DE MATEMÁTICAS DE BACHILLERATO

Carlos Rondero Guerrero, Aarón Reyes Rodríguez, Marcos Campos Nava

Resumen

Reportamos los avances de un trabajo de investigación en el cual se hace un análisis didáctico de la forma de abordar la relación pitagórica (RP) en diversos libros de matemáticas para bachillerato utilizados en México. El análisis de los libros de texto se ha identificado como un área central de investigación, ya que es útil para establecer la coherencia entre los objetivos de un programa de estudios y los medios para conseguirlos; así como el origen de algunas dificultades de aprendizaje de los estudiantes.

Palabras clave: Análisis didáctico, libros de texto, matemáticas, relación pitagórica.

Introducción

El Teorema de Pitágoras es un conocimiento ancestral del que se tiene registro en diversas culturas: babilonia, egipcia, griega, india, y china. Actualmente, la mayoría de las personas que han cursado la educación básica, asocian al Teorema de Pitágoras con la relación algebraica $a^2+b^2=c^2$. Al realizar esta asociación, las literales a, b y c se interpretan como las longitudes de los catetos y de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos cuadrados se encuentran relacionados de tal forma que es posible determinar la longitud de un tercer lado en un triángulo rectángulo si se conocen las longitudes de los otros dos lados. La expresión $a^2+b^2=c^2$ básicamente expresa la relación de los cuadrados de tres números o magnitudes, de tal manera que la suma de los cuadrados de dos de ellas es igual al cuadrado de la tercera. Sin embargo, para los griegos de la época de Pitágoras, este resultado se pensaba esencialmente como una relación entre áreas. Una consideración importante de remarcar es el hecho de que, en la perspectiva de este trabajo, es más conveniente denominar a la propiedad indicada como relación pitagórica (RP), y reservar el término Teorema de Pitágoras, para el resultado geométrico, dada la amplia variedad de ámbitos donde tiene presencia en los desarrollos matemáticos.

El Teorema de Pitágoras es uno de los resultados más importantes de las matemáticas y esto se puede observar en la cantidad de demostraciones que se han realizado del mismo. De acuerdo con Loomis (1972), solamente existen cuatro tipos de demostraciones, las algebraicas, que se basan en relaciones lineales e implican el concepto de tiempo; las geométricas, que están basadas en la comparación de áreas e implican en concepto de espacio; las quaterniónicas, basadas en las operaciones con vectores, y que implican el concepto de dirección y, finalmente, las dinámicas, basadas en la masa y la velocidad, las cuales implican el concepto de fuerza.

Por otro lado, los libros de texto son el principal recurso para apoyar el proceso de aprendizaje del que disponen profesores y estudiantes, y por ello resulta relevante analizar la forma de abordar los contenidos, así como las características de las tareas que se proponen en estos materiales. El aprendizaje de los estudiantes depende en gran medida del tipo de problemas y escenarios de instrucción a los que se enfrentan durante su educación escolarizada (Stein y Smith, 1998). En este sentido, la investigación en torno a cómo se abordan los contenidos en los libros de texto resulta relevante, porque estos materiales representan un recurso importante que tiene una fuerte influencia en las prácticas del salón de clase (Stacey y Vincent, 2009)

Contenido

La literatura de investigación en torno a los libros de texto de matemáticas ha crecido y se ha diversificado durante los últimos treinta años (Fan, 2011). Con la finalidad de identificar los diversos aportes al conocimiento en educación matemática, las investigaciones cuyo eje son los libros de texto de matemáticas se han clasificado en: (i) artículos de corte filosófico o empírico que reflexionan sobre el papel de los libros de texto en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas; (ii) investigaciones que analizan las características de los libros de texto de matemáticas, incluyendo la identificación de semejanzas y diferencias de textos que pertenecen a dos o más series, (iii) trabajos que caracterizan el uso de los libros de texto tanto por profesores como por estudiantes, o que identifican cómo los libros de texto moldean la forma de enseñar y aprender matemáticas y (iv) el resto de las investigaciones sobre los libros de texto, por ejemplo, aquellas que se interesan en los libros electrónicos y las relaciones entre los libros de texto y el desempeño de los estudiantes.

Categoría 1. En esta categoría se puede citar el trabajo de Fan y Kaeley (2000), quienes encontraron que los profesores ponen en práctica diferentes estilos de estrategias de enseñanza en función de los libros de texto que utilizan, o el trabajo de Fan (2011) quien propone un marco conceptual en el que los libros de texto se conciben como una variable intermedia en el contexto de la educación.

Categoría 2. Se incluyen trabajos que analizan libros de texto individuales o series de libros de texto, los cuales se enfocan en cómo se aborda un tema o temas particulares; así como el análisis de diferentes series de libros de texto de un mismo país o la comparación de textos de diferentes países con el objetivo de identificar las semejanzas y diferencias. Otros estudios han comparado los libros de texto de Corea y Estados Unidos con la finalidad de encontrar semejanzas y diferencias en la forma de cómo abordan la multiplicación y división de fracciones, con base en categorías que incluyen las características matemáticas de los problemas, las características del contexto, el tipo de respuesta y los requerimientos cognitivos (Son, 2005).

En esta misma línea de ideas Shield y Dole (2009), examinaron un libro de cada uno de los grados octavo, noveno y décimo, con la finalidad de determinar si éstos promueven principios pedagógicos orientados a la construcción de conexiones y la estructuración de conceptos relacionados con la proporcionalidad. Los resultados indican que los libros analizados no promueven el reconocimiento de estructuras similares para los diferentes contextos de los problemas.

Categoría 3. En esta categoría se incluyen trabajos como el de Remillard (1999) quien estudió la forma en que dos profesores de primaria usan los libros de texto, estableciendo tres modelos de construcción curricular. Por otra parte, Nicol y Crespo (2006), analizaron de qué manera cuatro profesores canadienses de matemáticas en formación usan los materiales curriculares, obteniendo como resultados que el entendimiento sobre el uso de los libros de texto cambió durante y después de las prácticas en el salón de clase.

Categoría 4. A esta categoría pertenecen trabajos como el de O'Keeffe y O'Donoghue (2011), quienes se enfocaron en determinar cuáles características de los libros de texto impactan positivamente en el aprendizaje de los estudiantes, con base en categorías tales como el contenido, la estructura, las expectativas y el lenguaje (O'Keeffe y O'Donoghue, 2011). Esta categoría también incluye trabajos enfocados en identificar cuál es la posición que el libro otorga al autor y al lector en relación con las matemáticas, el conocimiento matemático y la actividad matemática, al analizar el lenguaje utilizado (Herbel-Eisenmann y Wagner, 2005).

La presente investigación se incluye en la Categoría 2, dado que se realizó un estudio comparativo de los contenidos de algunos libros de texto de matemáticas de bachillerato, en cuanto a la presentación y uso que hacen de la relación pitagórica, en nuestro caso, bajo la consideración de que en tales ejes de análisis se incluyen formas de contextualización. Es decir, el análisis está focalizado en la RP, considerada como un referente epistemológico, dada su relevancia en la construcción de diferentes conceptos, en todas las áreas de las matemáticas; así como en la presentación que se hace de este contenido específico y las características de las tareas sobre el mismo.

Metodología

Esencialmente se analizaron siete libros de texto recomendados en los programas de estudio de bachillerato en México, García, M. A. (2009). *Matemáticas II para Preuniversitarios*; García, M. et al (2005). *Matemáticas 2 Bachillerato*; Zamora, M. et al. (2009). *Matemáticas 2 Geometría y trigonometría*; Farías, E. (2008). *Matemáticas 2 Para la Construcción del Aprendizaje*; Méndez, H. A. (2010). *Matemáticas 2* ; Baley, J. et al. (2004). Trigonometría; Swokowski, E. W. et al. (2002). Álgebra y trigonometría con geometría analítica.

El análisis se llevó a cabo considerando las siguientes categorías: (i) referentes históricos, (ii) contexto disciplinar, (iii) tareas, (iv) demostraciones y (v) articulaciones conceptuales explícitas con otros resultados. Para los fines de esta investigación consideramos que en el caso de la RP, los referentes históricos son muy importantes puesto que es un saber de gran trascendencia en la construcción del conocimiento matemático, del cual no se puede dejar de mencionar su génesis histórica aún antes del mismo Pitágoras, lo que podría tener incidencia en la didáctica al identificar las dificultades epistemológicas por las que ha transitado la humanidad para la constitución del concepto hasta su forma actual, En el contexto disciplinar principalmente se consideran los aspectos numéricos, geométricos, algebraicos y trigonométricos, pues son los que usualmente se trabajan en el bachillerato. Por su parte, los usos que se hacen de la RP tanto en lo que corresponde a sus aplicaciones como a las formas que se emplea para demostrar otros resultados y por supuesto si previamente se incluyen o no, una o varias demostraciones de la RP. Ahora bien, el aspecto de la articulación, conceptual con otros resultados, es en lo cognitivo, un elemento esencial para propiciar aprendizajes significativos en los estudiantes. El uso de cada una de estas categorías está basado en la literatura de investigación en educación matemática. Por ejemplo, Hiebert et al. (2003), consideraron como relevante el identificar en las lecciones de matemáticas a las demostraciones y a las conexiones entre conceptos e ideas matemáticas.

Mediante el empleo de tales categorías, consideramos además que es posible identificar los distintos elementos que se hacen explícitos en los libros de texto analizados, con el objeto de indagar acerca de cómo se presenta la RP, dado que la consideramos como un saber sabio de gran trascendencia en la construcción y constitución del conocimiento.

Resultados del análisis

Los resultados de este trabajo se presentan a continuación, tomando en cuenta las categorías antes mencionadas bajo la consideración de que se llevó a cabo un análisis global y un contraste entre las características más relevantes de los textos.

i) Referentes históricos

En los libros analizados se omite hacer mención del referente histórico de la RP, sólo en *Farías (2008),* al enunciar por vez primera la RP, se hace mención de su contexto histórico. Se menciona que "el teorema se conocía por pueblos que precedieron a los griegos; pero fueron los pitagóricos quienes hicieron la generalización…" (p.77); se hace también una reseña biográfica sobre Pitágoras.

Es posible resaltar que la inclusión del hecho histórico de que la RP fue conocida por las culturas sumeria y egipcia, lo que posibilita el tratar con su representación numérica, sobre todo con las llamadas ternas pitagóricas, entre otras con la más conocida (3,4,5), entendida como tres números enteros que satisfacen a la misma RP, representada como $n^2 + m^2 = k^2$. Cabe resaltar que tal tratamiento está ausente de los libros analizados.

ii) Contexto disciplinar

En esta categoría existen muchas coincidencias en el tratamiento que dan los autores de los libros de matemáticas, en todos aparece el enunciado *En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa",* expresado algebraicamente como $c^2=a^2+b^2$, seguido de esta proposición, se suele presentar la figura de un triángulo rectángulo de lados (3, 4,5) como ejemplo de una terna que satisface la relación algebraica.

Sin embargo en la mayoría de los libros analizados, no se presentan un tránsito de lo numérico a lo algebraico o de lo algebraico a lo geométrico y viceversa, por mencionar solo algunos registros de representación en los que se puede presentar la RP a los estudiantes, es decir, los autores de los libros de texto solo enuncian la RP y no extienden la discusión sobre las posibles diferentes representaciones y sus significados.

iii) Tareas

Se presentan problemas rutinarios en los que el estudiante conoce dos lados de un triángulo rectángulo y utiliza el Teorema para obtener el restante; Los problemas relacionados con la RP son meramente algorítmicos, se plantean en supuestos contextos cotidianos, por ejemplo calcular la altura de un edificio. En otros casos, no se encontraron problemas en los que sea necesario utilizar explícitamente la RP, salvo actividades ya mencionadas en el contexto numérico y geométrico.

iv) Demostraciones

Respecto a las demostraciones que se incluyen de la RP, se puede mencionar que sólo se hacen ciertas justificaciones usando figuras geométricas. Sin embargo, la RP sí se ocupa para las "demostraciones" de identidades trigonométricas como $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$; , entre otras, y también para deducir la ecuación de la circunferencia $x^2+y^2=r^2$. No se menciona la relevancia de la RP en el descubrimiento de los números irracionales, no se menciona que la RP no solo se cumple para los cuadrados de los lados del triángulo rectángulo sino que podrían ser otra clase de polígonos; sólo algunos libros mencionan que el Teorema de los cosenos es una generalización de la RP.

v) Articulaciones conceptuales

No se aprecia en el análisis un interés explícito por mostrar las articulaciones conceptuales de la RP en cada uno de los contextos usados, por ejemplo, entre lo algebraico y lo trigonométrico, pero además y de manera preponderante el papel tan trascendente que tiene la RP para transitar entre la geometría, álgebra, trigonometría y la geometría analítica, que se incluyen en las asignaturas de matemáticas en el bachillerato, pero además se tendría que hacer mención de las articulaciones que tiene la RP con otras asignaturas de matemáticas y física que se estudian en el nivel superior. En estos libros de texto se presentan omisiones o ausencias que pudieran deberse a dos causas: los autores parten del supuesto que no resultan relevantes para el aprendizaje de este tema en ese nivel educativo, o bien se asume que los propios autores las desconocen o soslayan. En todo caso, dichas omisiones o ausencias no coadyuvan para que el profesor, y en última instancia el estudiante, puedan comprender que hay toda una serie de ideas y conceptos alrededor de la RP, más allá de la simple expresión, $c^2=a^2+b^2$.

Conclusiones

A los autores de los libros de texto no les resulta relevante el detenerse a realizar una o dos demostraciones, sobre todo con la intención de reflexionar acerca de las características epistemológicas de la relación pitagórica, incluida la trascendencia que tiene en la construcción del conocimiento matemático, quizás porque no identifican la importancia de la RP como un referente epistemológico, una de cuyas funciones estriba en ser un elemento de articulación conceptual entre la aritmética, geometría, trigonometría, geometría analítica y el cálculo.

Frecuentemente la distancia entre dos puntos, una de las formas de representación de la relación pitagórica, se usa como un elemento argumentativo central para justificar y encontrar las ecuaciones de las cónicas; relaciones trigonométricas y su generalización en el teorema de los cosenos, entre otros. Los hallazgos en este sentido, también sugieren que este elemento no es suficientemente incorporado a los aprendizajes de los estudiantes.

Hay una evidente exclusión de la relevancia epistemológica de la RP, que tiene entre otras manifestaciones la de ser sólo usada cada que se requiera, pero no se manifiesta por parte de los autores tal relevancia. Este hecho trae varias consecuencias didácticas y cognitivas, al ser presentado como cualquier otro saber matemático, la mayoría de las veces descontextualizado histórica y epistemológicamente.

Otro hecho relevante que se desprende del análisis de los libros citados es el que usualmente cada que aparece cualquier expresión de la forma $x^2 + y^2 = r^2$, o esta otra, $a^2 + b^2 = c^2$, es condición suficiente para llamarle teorema de Pitágoras, considerando por parte de los autores, innecesario explicar su validez y sus propios significados según el contexto de referencia. Sin aclarar, por supuesto que aunque en apariencia sean algebraicamente equivalentes, estrictamente hablando sus representaciones y significados no son definitivamente los mismos. Pareciera que a los autores y por ende a los profesores no les interesan las consecuencias cognitivas que este hecho tiene en los estudiantes.

Es conveniente insistir que se requiere hacer una revaloración epistemológica, didáctica y cognitiva de la RP, lo que debe tener una amplia expresión en los programas y libros de texto, pues de lo contrario al quedarse como un saber con un estatus de minusvaloración, impide mostrar su trascendencia en la cimentación del conocimiento matemático.

Referencias

Baley J. D. y Sarell G. (2004). *Trigonometría* (3ª. Ed.). México: Mc Graw Hill.

Fan, L. (2011). Textbook research as scientific research: Towards a common ground for research on mathematics textbooks. Paper presented at the 2011 International Conference on School Mathematics Textbooks, Shanghai.

Fan, L., & Kaeley, G. S. (2000). The influence of textbooks on teaching strategies: An empirical study. *Mid-Wenstern Educational Researcher, 13*(4), 2-9.

Farías, E. (2008). *Matemáticas 2 Para la Construcción del Aprendizaje*. México: Fernández Editores.

García, M. et al (2005). *Matemáticas 2 Bachillerato*. México: Ed ST.

García, M. A. (2009). *Matemáticas II para Preuniversitarios*. México: Esfinge.

Herbel-Eisenmann, B. & D. Wagner (2005). In the middle of nowhere: How a textbook can position the mathematics learner. In H. L. Chick and J. Vincent (Eds.), Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (Vol. 3, pp. 121-128). Melbourne: PME.

Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Givvin, K. B., Hollingsworth, H., Jacobs, J., et al. (2003). *Teaching mathematics in seven countries: results from the TIMSS 1999 Video Study*. Washington, DC: National Centre for Education Statistics.

Loomis, E. S. (1972). *The Pythagorean proposition*. Washington: National Council of Teachers of Mathematics.

Méndez, H. A. (2010). *Matemáticas 2* (1ª ed.). México: Santillana.

Nicol, C. C., & Crespo, S. M. (2006). Learning to teach with mathematics textbooks: How pre-service teachers interpret and use curriculum materials. *Educational Studies in Mathematics, 62*(3), 331–355.

O'Keeffe, L. & O'Donoghue, J. (2011). Mathematics textbook analysis: The significance of textbook features to students learning. *Paper presented at CERME 7*. Rzeszów, Poland.

Remillard, J. T. (1999). Curriculum materials in mathematics education reform: A framework for examining teachers' curriculum development. *Curriculum Inquiry, 29*, 315–342.

Shield, M. J. & Dole, S. (2009). An analysis of middle-year school mathematics textbooks. In C. U. Hock, Wahyudi, R. P. Devadason, et al. (eds.), *Proceedings of The*

International Conference on Science and Mathematics Education (CoSMED 2009). Penang, Malaysia.

Son, J-W. (2005). A comparison of how textbooks teach multiplication of fractions and division of fractions in Korea and in the US. In H. L. Chick and J. Vincent (Eds.), Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (Vol. 4, pp. 201-208). Melbourne: PME.

Stein, M. K. & Smith M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. Mathematics Teaching in the Middle School, 3, 268-275.

Stacey, K. & Vincent, J. (2009). *Modes of reasoning in explanation in Australian eighth-grade mathematics textbooks*. *Educational Studies in Mathematics, 72*, 271-288.

Swokowski, E. W. et al. (2002). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica* (10ª ed.). México: Thomson Learning.

Zamora, M. et al. (2009). *Matemáticas 2 Geometría y trigonometría*. México: Ed. ST.

Autores

Carlos Rondero Guerrero; UAEH. México; ronderocar@gmail.com
Aarón Reyes Rodríguez; UAEH. México; aaron.reyes.rdz@gmail.com
Marcos Campos Nava; UAEH. México; mkmpos77@yahoo.com.mx

LA OPERATIVIDAD CON FRACCIONES Y SU RELACIÓN CON LA COMPRENSIÓN DE EQUIVALENCIAS

Fabiana Mahtabel Arteaga Cervantes, José Antonio Juárez López

Resumen

El trabajo mostrado a continuación corresponde a la primera etapa de una tesis de Maestría cuyo objetivo es diseñar y poner a prueba una secuencia didáctica en la que se trabaje con equivalencias de fracciones para superar las dificultades que alumnos de primero de secundaria presentan al operar con fracciones y verificar si el dominio de las equivalencias tiene una incidencia positiva en la resolución de problemas. En dicho trabajo se exponen los resultados obtenidos en el diagnóstico (pre-test) cuya intención fue identificar las dificultades que los alumnos presentan al manejar las fracciones y cómo hacen uso de las equivalencias. Los resultados del diagnóstico mostraron la falta de comprensión que tienen los estudiantes con respecto a las fracciones y sus significados. Sin embargo se pudo corroborar que cuando los estudiantes comprenden el manejo de las equivalencias y se enfrentan a una tarea relacionada con operaciones de fracciones, son capaces de resolverla sin necesidad de recurrir al algoritmo.

Palabras clave: Fracciones, equivalencias, resolución de problemas.

Antecedentes

El aprendizaje de las fracciones es un tema que desde hace varios años ha causado gran interés para ser investigado debido a que presenta múltiples dificultades en estudiantes de diferentes niveles educativos. En México la educación básica considera las fracciones uno de los temas más importantes académica y socialmente, y es por ello que se le dedica un tiempo considerable en el currículo, ya que se introduce desde el tercer grado de primaria y es revisado repetidamente en grados subsecuentes. Pese a ello muchos niños y jóvenes siguen presentando serias dificultades para operar con ellas. Perera & Valdemoros (2009) explican que una de las causas por las que se puede dificultar el aprendizaje de las fracciones es que los estudiantes, al introducirse al tema de fracciones, cuentan con escasos conocimientos previos. Nunes & Bryant (1997) argumentan que los estudiantes pueden mostrarse muy diestros al utilizar los términos fraccionarios, hablar coherentemente acerca de las fracciones e incluso resolver problemas fraccionarios, pero no captan varios aspectos cruciales de las fracciones. Incluso pueden pasar de año en año sin dominar las dificultades de las fracciones. Al respecto Kamii & Clark (1995) explican que aunque en el mejor de los casos los estudiantes son capaces de manejar el algoritmo, se muestran ineficientes al momento de resolver problemas y, en general no muestran una habilidad real en el manejo de las mismas.

Además de la complejidad que presenta el aprendizaje de las fracciones subyace un problema mayor, debido a que estas dificultades trascienden a otras áreas de la matemática ya que los problemas de comprensión en este tema trae consigo dificultades en el aprendizaje de temas subsecuentes que necesitan como principio básico a las fracciones. "*Estas lagunas, a pesar de las cuales los estudiantes habían podido igualmente proseguir en sus estudios, se revelaban mortales en el momento de tener que darlas por obvias en situaciones… más complejas*" (Fandiño, 2009; p. 19).

Numerosos estudios han revelado que uno de los principales factores que contribuye a esta complejidad es el hecho de que las fracciones comprenden una noción multifacética debido a que tiene diversos significados (parte-todo, cociente, razón, operador, medida) y que éstos están interrelacionados. Kieren (1976) fue el primero en establecer que el concepto de fracción no es de construcción simple, porque consiste de varias subconstrucciones relacionadas. Él argumenta que para entender las ideas de número racional, uno debe adquirir experiencia con sus múltiples interpretaciones. Además, Charalambous y Pantazi (2006) explican que las fracciones comprenden una noción multifacética que integra cinco subconstrucciones interrelacionadas y que entender las cinco subconstrucciones es considerado un prerrequisito para resolver problemas relacionados con el tema exitosamente".

Por otra parte cuando se trata de introducir el tema de fracciones, la mayoría de los materiales del currículo escolar tratan el número racional como objetos de cálculo; se avanza muy rápido a la operatividad con las mismas y se le da gran importancia al dominio del algoritmo, por lo que los estudiantes pierden muchas de las interpretaciones importantes del número racional. Al respecto Hasemann (1981) menciona que "para la aritmética de fracciones existen muchas reglas, y esas reglas son más complicadas que las de los números naturales. Si esas reglas son introducidas demasiado pronto, existe el peligro de que sean usadas mecánicamente y sin pensar".

Kamii y Clark (1995) explican que "no hay mucha información concerniente a las fracciones equivalentes como tal. Sin embargo la información disponible con respecto a la suma y resta de fracciones con denominadores diferentes "fáciles", evidencia la dificultad de las fracciones equivalentes… algo claramente está mal con la manera en que las fracciones equivalentes y/o comunes denominadores son enseñados". Kerslake (1986) dice que aunque los alumnos hayan logrado realizar las pruebas de equivalencia no tienen una comprensión real de las mismas y no las emplean para resolver operaciones con ellas.

De acuerdo con Fandiño (2009), para los estudiantes es más fácil manejar las equivalencias cuando éstas fracciones involucran números múltiplos entre sí; y la estrategia se reduce a multiplicar o dividir numerador y denominador por el mismo número, sin embargo les resulta más difícil encontrar una estrategia que les permita gestionar la equivalencia cuando los números involucrados no son múltiplos entre sí. Esta manera de proceder de los estudiantes refleja una falta de dominio y en consecuencia de comprensión real de las equivalencias entre fracciones, lo que podría incidir en la comprensión de otros significados de las fracciones con mayor relevancia; tanto en la resolución de problemas como en las operaciones con fracciones.

Freudenthal (1983) exponía que *"la fracción como fracturador puede ser descrita mediante un concepto de equivalencia bastante restringido: no requiere más que dividir algo en n partes iguales. Pero en la realidad de la didáctica se necesita una equivalencia de más alto alcance, así como una disponibilidad sin restricciones de objetos en cada clase de* *equivalencia. Esta necesidad no ha sido reconocida en la didáctica de las fracciones ni en la elección de modelos didácticos hasta la fecha*".

Esto evidencia entonces que las dificultades en el aprendizaje de los números racionales desde su conceptualización hasta sus múltiples representaciones no es para nada trivial y merece mucho la pena ser analizado.

Kieren (1976) explica que partir de la idea de clases de equivalencia fluye la noción de operaciones en los racionales y también sus propiedades. Además, en uno de sus estudios proporciona un listado de cuestiones previas a la suma de fracciones en el que muestra que está íntimamente relacionada con la comprensión de las equivalencias.

Post, Behr & Lesh (1984) hacen un análisis sobre la comprensión de estudiantes de 4to grado sobre el orden y la equivalencia de los racionales. Ellos mencionan que el concepto de números racionales está entre las ideas matemáticas más complejas e importantes que los niños enfrentarán antes de llegar a la escuela secundaria y que con una instrucción adecuada durante un periodo prolongado de tiempo, la mayoría de los niños a finales de 4to grado son capaces de desarrollar un pensamiento adecuado para hacer frente a preguntas del orden y equivalencias de fracciones y que la habilidad para abordar efectivamente los racionales mejora enormemente su habilidad para entender y operar con situaciones y problemas en el mundo real.

Planteamiento del problema

Con el referente anterior el problema identificado se resume a continuación:

Las fracciones es un tema que presenta muchas dificultades al momento de enseñarlo y aprenderlo por el hecho de que el concepto de fracción no es de construcción simple, ya que consiste de varias subconstrucciones relacionadas.

Pese a que es un tema que se trata durante varios años en la educación básica, muchos niños y jóvenes aún presentan serias dificultades para operar con fracciones.

Estas dificultades trascienden a otras áreas de la matemática.

Uno de los aspectos que presenta mayor dificultad es resolver problemas que implican aplicar la operatividad de las fracciones.

Muchos autores asocian las dificultades que se presentan al operar con fracciones con el dominio y comprensión real de las equivalencias.

Con tal antecedente se pretende realizar una investigación orientada por las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son las principales dificultades que presentan alumnos de 1° de secundaria al enfrentarse a tareas cuya solución implica operar con fracciones?
- ¿Es posible superar las dificultades que los estudiantes de primero de secundaria presentan al tratar de resolver problemas relacionados con la operatividad de fracciones mediante la gestión de equivalencias?
- ¿Incide de manera positiva el dominio de la gestión de fracciones equivalentes en la resolución de problemas que implican operar con fracciones?

Metodología

El estudio se realizó con 46 alumnos de primer grado de una Escuela Secundaria Técnica del estado de Puebla, que oscilan entre los 12 y 14 años. La escuela está ubicada en un contexto urbano. Dicho estudio tiene un enfoque cualitativo. En él se realizó una investigación documental que tiene como propósito conocer cuáles han sido las principales dificultades que enfrentan los estudiantes al estudiar las fracciones y la influencia que éstas tienen en la resolución de problemas. Además se realizó una investigación de campo con la intención de identificar las dificultades que los alumnos presentan al manejar las fracciones y cómo hacen uso de las equivalencias.

Existe una vasta referencia bibliográfica sobre las investigaciones que se han derivado del tema de fracciones y las dificultades que éste representa para los estudiantes. Algunas investigaciones se han centrado en la construcción del significado de fracción y cuáles son las dificultades al aprender fracciones. Otras en la enseñanza de las fracciones a nivel primaria. Algunas otras sobre la comprensión de los estudiantes en el tema de las fracciones. También existen algunas investigaciones que estudian los procedimientos empleados para operar con las fracciones, algunos de los cuales mencionan la importancia de la comprensión de equivalencias. Sin embargo no se han encontrado reportes de investigación que provean de evidencia empírica sobre la temática de equivalencias, por lo que en el presente trabajo se optó por hacer un pre-test, basado en un estudio empírico que aportara información sobre la problemática tratada y a su vez orientara la etapa de intervención.

El diagnóstico se llevó a cabo en tres etapas. Para el diseño del instrumento diagnóstico se tomaron de referencia dos textos. El primero que corresponde a Klaus Hasemann (1981) proporciona algunos ítems de diagnóstico sobre las dificultades con fracciones del cual se extrajeron los que correspondían a equivalencias, pero además provee de una clasificación con respecto al significado de fracción empleado para cada ítem y su grado de dificultad, misma que fue utilizada para clasificar todos los ítems del instrumento diagnóstico. Del segundo texto (Kamii C. & Clark F., 1995) únicamente se extrajeron los ítems de su diagnóstico ya que su investigación si se refiere a las fracciones equivalentes, sus dificultades e implicaciones educativas aunque, como se mencionó líneas previas, en tal estudio no se reporta intervención. Posterior al diseño se aplicó el instrumento y se realizó el análisis de resultados.

La clasificación que se utilizó para determinar el grado de dificultad de cada ítem fue la siguiente Klaus Hasemann (1981):

Se clasifica en tres facetas; Operaciones con fracciones, Formas de representación de los problemas y formas de operar con fracciones.

Los ítems pueden combinar varias facetas, esto implica una mayor dificultad y por lo tanto, mayor exigencia sobre lo que los alumnos deben manejar con respecto al tema de fracciones para resolver con éxito cada uno de ellos.

Análisis de resultados del diagnóstico

Algunos de los ítems contenidos en el diagnóstico, su justificación y análisis se presentan a continuación.

Ítems 1 y 2

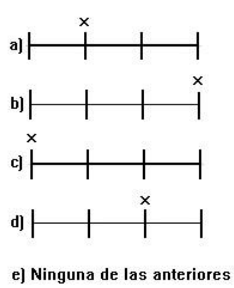
1. Una galleta redonda se repartirá entre dos niños. ¿Cómo representarías la parte que le corresponde a cada uno?
2. Con un pedazo de listón se tienen que hacer ocho moños del mismo tamaño. ¿Qué parte del listón se necesitará para cada moño?

Los ítems anteriores tienen la misma estructura, la intención de colocarlos era conocer si los alumnos, dado que ya han cursado varios grados de educación primaria en los cuáles se trata el tema de fracciones, manejaban como idea fundamental el significado de fracción parte-todo.

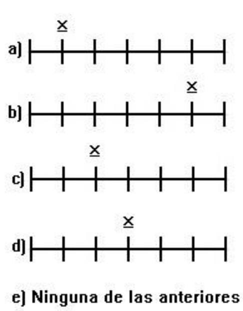
De acuerdo con los resultados del diagnóstico se pudo observar que el ítem 1; con 43 respuestas correctas (93%), no representa una dificultad para los estudiantes, sin embargo el ítem 2, que como hemos mencionado, corresponde a la misma estructura del primer ítem, si representa una dificultad importante, ya que de los 46 estudiantes el 65 % contestó incorrectamente a dicho ítem y el 9% no lo respondió. Esto pudo haber sucedido por varias causas, una de ellas puede ser la semántica ya que les es más familiar la representación simbólica de $\frac{1}{2}$ que de $\frac{1}{8}$, esta consideración es importante porque en las respuestas de los estudiantes se puede observar que algunos sí representaron gráficamente el listón fraccionado pero no fueron capaces de representarlo de forma simbólica. También pudo haber influido el contexto del problema, a los niños les resulta más familiar el contexto de la repartición de una galleta que el de cortar un listón. Otra causa posible es que los estudiantes sean sensibles al rango numérico, es decir, que para ellos sea más familiar e intuitiva la idea de fraccionar en mitades que en octavos.

Ítems 4 y 5

4. ¿En cuál de las siguientes rectas, el punto marcado con X corresponde a la fracción $\frac{1}{3}$?



5. ¿En cuál de las siguientes rectas, el punto marcado con X corresponde a la fracción $\frac{1}{3}$?

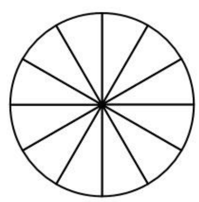


Los ítems 4 y 5 tienen la misma estructura; ambos piden ubicar en la recta numérica la fracción $\frac{1}{3}$, la diferencia en ellos es que en el primer ítem la fracción solicitada se muestra de manera directa, en el segundo ítem la fracción no se muestra directamente, los alumnos deben encontrar su equivalencia con sextos. La finalidad de colocar éstos ítems es conocer si los alumnos lograban identificar fracciones equivalentes en la recta numérica.

Estos ítems tienen la misma estructura, como se mencionó anteriormente, se trata de que los alumnos ubiquen la fracción $\frac{1}{3}$. En el ítem 4 la recta está fraccionada en tercios, por lo que los alumnos pueden identificar la fracción de forma directa, es decir, sin hacer uso de equivalencias o conversiones. En este ítem el 33% de los estudiantes contestó incorrectamente, la mayoría consideró la marca de un tercio en 0, otros la ubicaron contando los tercios del 1 hacia el 0, esto es, en la marca dos tercios. Pese a que los ítems 4 y 5 tienen la misma estructura, el ítem 5 exige hacer una conversión de un tercio a la fracción equivalente dos sextos, en este ítem se obtuvieron 59% de respuestas incorrectas. Es evidente que los estudiantes tuvieron más dificultad en identificar la fracción solicitada debido a que la recta no se encuentra fraccionada en tercios directamente.

Ítem 9

9. Sombrea $\frac{1}{4}$ del círculo, después sombrea $\frac{1}{6}$ del círculo, ¿qué fracción del círculo total tienes sombreada?



En este ítem se muestra un círculo dividido en doce partes iguales, la primera intención es observar si los estudiantes reconocen la equivalencia en doceavos de $\frac{1}{4}$ y también de $\frac{1}{6}$, finalmente se les pide sumar dichas fracciones y reconocer la parte del todo que se tiene sombreada con la intención de conocer su procedimiento para sumar fracciones. En este caso se trata de identificar si los alumnos tienen o no manejo de las equivalencias de fracciones y se espera que, si los alumnos son capaces de identificar la equivalencia en doceavos de cada una de las fracciones planteadas, la realización de la suma no represente un problema mayor.

El ítem 9 tiene varias exigencias con respecto a los ítems anteriores ya que, inicialmente se pedía a los estudiantes sombrear un cuarto del círculo, debido a que éste estaba fraccionado en doce partes, antes debía encontrarse la equivalencia de doceavos-cuartos. La segunda parte del ítem consistía en sombrear un sexto del círculo, para lo que, igual que en la primera consigna, se tenía que hallar la equivalencia sextos-doceavos. Finalmente se pedía indicar la fracción del círculo que quedaba sombreada después de haber realizado las primeras dos consignas. Esto implicaba una suma de fracciones, misma que se podía resolver de forma visual; identificando cuántos doceavos estaban sombreados o bien, sumar las fracciones equivalentes. En este ítem el 74% de los estudiantes contestó incorrectamente. De éstos, el 53% sombreó seis de los doceavos y cuatro de los doceavos, quedando sombreado finalmente $\frac{10}{12}$ (así lo expresan los estudiantes) del círculo completo. Esto pone en evidencia que los alumnos no tienen un manejo adecuado de las fracciones con respecto al significado parte-todo, debido a que, por una parte, ignoran por completo que se les ha pedido sombrear $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{6}$ del círculo y no 4 y 6 partes de las mostradas en el círculo, pero por otra si identifican que la respuesta es una fracción que corresponde a una parte de un todo. Otro grupo considerable (38% de los que respondieron incorrectamente) logra colorear $\frac{1}{4}$ o bien $\frac{1}{6}$ del círculo pero no ambas por lo que no puede responder de forma completa al ítem. Otro grupo de estudiantes mezcla las ideas anteriormente planteadas, es decir, por una parte colorea correctamente $\frac{1}{4}$ pero por otra colorea seis de las doce partes. Estos resultados ponen de manifiesto que los alumnos no comprenden del todo la noción de fracción ni del uso de las equivalencias de fracciones. Aquí es importante aclarar que todos los estudiantes que lograron identificar las equivalencias contestaron correctamente al ítem, es decir, sombrearon correctamente las fracciones equivalentes en doceavos de un cuarto y un sexto. Pero además lograron resolver la suma de fracciones la cual, de acuerdo con los resultados, fue resuelta visualmente (no hubo registro del uso de algoritmo).

Ítem 13 y 14

13. Calcula $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}$

14. Calcula $1-\frac{5}{12}$

Con estos ítems se pretendía conocer cómo es que los estudiantes operan con las fracciones, si utilizan el algoritmo convencional o hacen uso de las equivalencias.

Las operaciones con fracciones frecuentemente son resueltas por los estudiantes mediante el algoritmo convencional, pocas veces con la comprensión real de lo que se está haciendo. En estos ítems, un gran número de estudiantes; 65% y 52% respectivamente, contestan incorrectamente. Algunos de ellos tienen la tendencia a sumar numerador con numerador y denominador con denominador. Lo cual pone de manifiesto que para ellos las fracciones no representan un conjunto de números diferente de los naturales sino una combinación que además sigue conservando las mismas propiedades y que utilizan para operar indistintamente con unos y otros. Aunque los estudiantes que contestaron correctamente no muestran su procedimiento completo, de acuerdo con las respuestas obtenidas se puede suponer que si hicieron uso de equivalencias. No se muestra el uso del algoritmo convencional.

Ítem 16

16. ¿Cuál debería ser el numerador de la segunda fracción para que cada par sea equivalente? Explica la estrategia que empleaste para resolverlo.

a) $\frac{2}{4}=\frac{\square}{10}$

b) $\frac{4}{6}=\frac{\square}{15}$

c) $\frac{7}{14}=\frac{\square}{10}$

Cuando se trabaja con fracciones equivalentes es muy común observar que éstas sean obtenidas multiplicando el numerador y denominador de la fracción en cuestión por el mismo número. Sin embargo, cuando se hacen comparaciones de fracciones cuyos denominadores no son múltiplos, esta tarea les resulta más compleja. El propósito de colocar éste ítem fue identificar cómo pueden los alumnos, dar solución a estas comparaciones.

Como se esperaba que ocurriera, aun cuando los estudiantes más diestros logran manejar las equivalencias de fracciones por múltiplos, les resulta más complejo identificarlas cuando no corresponden a múltiplos de los datos en cuestión. En éste ítem solamente el 1.3% contestó correctamente. El 26 % no contestó el ítem y el resto del grupo intentó dar alguna respuesta pero no se observa la estrategia empleada para llegar a ella.

Ítem 19 y 20

19. En un club un tercio de la superficie del terreno se destinará al gimnasio, un sexto a los salones sociales y la mitad a los deportes al aire libre. ¿Quedará terreno para otras instalaciones? Explica tu respuesta.

20. El partido de futbol entre los equipos de "las águilas" y "los delfines" duró dos periodos de $\frac{3}{4}$ de hora cada uno. Hubo también un descanso de $\frac{1}{4}$ de hora y un periodo de tiempo extra que duró $\frac{1}{2}$ hora. ¿Cuánto tiempo pasó entre el primer y último silbatazo?

En el caso de los ítems 19 y 20, es preciso realizar operaciones con fracciones, específicamente sumas y restas. En estos ítems más del 70% de los estudiantes dieron respuestas incorrectas. En el ítem 19 se obtiene un porcentaje más alto de respuestas correctas que en el ítem 20 aun cuando en éste ítem se debe hacer solo una suma, no así en el ítem 19 que debe resolverse una suma primero y después una resta. Sin embargo suponemos que la dificultad en el ítem 20 fue el hecho de que muchos estudiantes no se dan cuenta que el texto del problema indica "dos periodos de $\frac{3}{4}$ de hora cada uno"; los estudiantes solo consideran un periodo al sumar. Entonces una parte de las respuestas incorrectas podría atribuirse a la lectura del problema. Los alumnos que resuelven correctamente hacen uso de equivalencias, en el diagnóstico no se observó el uso del algoritmo convencional, lo cual podría justificarse por el hecho de que los números en cuestión son múltiplos y sumarlos no representa una gran dificultad como para recurrir al algoritmo, otra explicación posible es que los alumnos no recuerden el algoritmo, sin embargo, si ellos comprenden los significados de la fracción y saben utilizarlos pueden resolver los problemas sin necesidad de algoritmos.

Conclusión del diagnóstico

Como se puede ver en los resultados, los alumnos reflejan una falta de comprensión con respecto a las fracciones, sus significados y usos. Muchos de los alumnos no han comprendido siquiera el significado parte-todo. No distinguen que las fracciones representan una clase de números diferentes de los números naturales y por lo tanto con propiedades distintas. Como un dato importante se puede apreciar que cuando se propone a los estudiantes una tarea relacionada con operaciones de fracciones aquellos alumnos que comprenden alguno de los significados, como lo es el de equivalencias, son capaces de resolver los problemas sin necesidad de recurrir al algoritmo y más si no lo recuerdan. Gran parte de las respuestas correctas en cualquiera de los ítems se logró mediante el uso de equivalencias.

Referencias bibliográficas

Behr, M., Wachsmuth, I., Post, T. & Lesh, R. (1984). Order and Equivalence of rational numbers: A Clinical Teaching Experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15 (5), 323-341.

Charalambous, C. Y. & Pitta-Pantazi, D. (2006). Drawing on a Theoretical Model to Study Students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 64, 293-316.

Fandiño, M. (2009). Las Fracciones: Aspectos conceptuales y didácticos. *Cooperativa Editorial Magisterio, Colombia*.

Freudenthal, H. (1983). Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel.

Hasemann, K. (1981). On difficulties with fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 71-87.

Kamii, C. & Clark, F. (1995). Equivalent Fractions: Their difficulty and Educational Implications. *Journal of Mathematical Behavior*, 14, 365-378.

Kerslake, D. (1986). *Fractions: Children's strategies and errors. A report of the strategies and errors in secondary mathematics project*. Windsor: NFER-Nelson.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers. In R. A. Lesh & D. A. Bradbard (Eds.), *Number and measurement: Papers from a research workshop* (pp. 101-144). Columbus, OH: ERIC Information Analysis Center for Science, Mathematics and Environmental Education.

Nunes, T. y Bryant, P. (1997). Las Matemáticas y su Aplicación: La perspectiva del niño. México: Siglo veintiuno Editores.

Perera, B. y Valdemoros, M. (2009). Enseñanza experimental de las fracciones en cuarto grado. *Educación matemática*, 21 (1), 29-61.

Autores

Fabiana Mahtabel Arteaga Cervantes; BUAP, México; hada061419@hotmail.com
José Antonio Juárez López; BUAP, México; jajul@fcfm.buap.mx

SECCIÓN C. INNOVACIÓN Y EXPERIENCIAS DIDÁCTICAS EN MATEMÁTICA

POSTURA CIENTÍFICA DE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA Y SU IMPACTO EN LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE

Jaime Huincahue Arcos, Astrid Morales Soto, Jaime Mena Lorca

Resumen

En este laboratorio, abordaremos la modelación matemática desde una carácter científico, apoyándose en un marco conceptual que incluye: ciclos de modelación, perspectivas de modelación y competencias de modelación. Se abordarán otros tópicos asociados a intervenciones del docente mientras se realizan tareas de modelación y evaluación. Se espera que los participantes del laboratorio obtengan mayor conocimiento con respecto a los distintos tipos de tareas y creación de tareas de modelación desde una posición participativa, inclusiva y crítica del tema.

Palabras claves: Modelación Matemática. Enseñanza y Aprendizaje.

Propósito y alcance

La fecunda investigación relacionada con Educación Matemática deja en evidencia la real complejidad del problema de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Comunidades de investigadores y profesores han dado evidencias de ese hecho a través de estudios sistemáticos (Blum y Niss, 1991; Blum y Borromeo-Ferri, 2009; Borromeo-Ferri, 2014; Maaß, 2006; Morales, Mena, Vera y Rivera, 2012; Kaiser, Blum, Borromeo-Ferri and Stillman, 2011), aportando información y datos empíricos en esta dirección; específicamente, en procesos evaluativos de cada país. En el caso de Chile, se realizan las pruebas SIMCE (Sistema de Medición de la Calidad de la Educación), PSU (Prueba de Selección Universitarias) como evaluaciones nacionales, e internacionales como PISA y TIMSS, que como bien sabemos responden a objetivos diferentes. En particular, OCDE (2014) afirma que:

> la prueba PISA usa (y evalúa) el concepto de cultura matemática para referirse a la capacidad de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar efectivamente la formulación, solución e interpretación de problemas en una variedad de situaciones que involucran conceptos cuantitativos, espaciales, probabilísticos o matemáticos.

Una de las maneras de poner en uso la cultura matemática es mediante la modelación, siendo una de las características de este laboratorio, el tránsito por las múltiples capacidades que son mencionadas a través de estructuras teóricas específicas (Borromeo-Ferri, 2006, Kaiser y Sriraman, 2006; Maaß, 2006).

En relación a los resultados obtenidos en Chile en este tipo de pruebas, informes tales como el de OCDE (2003, 2014) señalan que parte importante de los profesores no solo no sabe la materia sino que no tiene confianza en lo que hace. A ello se une el que hay dificultades en el resolver problemas, un tema que hoy se quiere fomentar para atender a las necesidades de nuestra sociedad, teniendo personas más competentes tanto en sus profesiones como en cuanto ciudadanos. Las investigaciones dan evidencia de la poca comprensión y la no articulación de los contenidos matemáticos que se enseñan (Artigue 1995), en consecuencia,

no están en condiciones de responder preguntas que tengan cierto grado de complejidad. Por otro lado, Moreno y Azcárate (2003) afirman que el profesor tiende a mantenerse en su papel tradicional, que la clase magistral sigue siendo el principal medio de enseñanza, "…y se potencian los aprendizajes memorísticos y mecanicistas alejados del deseado aprendizaje significativo" (Moreno y Azcárate, p. 266). En relación al Cálculo, Artigue (1995) afirma que existe gran dificultad en lograr que los estudiantes muestren una comprensión satisfactoria de sus conceptos y métodos, y que la enseñanza tradicional se limita al aprendizaje de prácticas algorítmicas y algebraicas, que son a la vez, centro de la evaluación. Se piensa últimamente que se debe incluir la modelación y la resolución de problemas en la enseñanza de la matemática y se estima que el uso de TIC ayuda en los procesos de modelación, como también ayuda a desarrollar competencias de otro carácter transversal. A esto ultimo es que nosotros hacemos énfasis por su importancia en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Las relaciones existentes entre la realidad y las matemática tienen un constante registro desde los primeros escritos matemáticos de la humanidad, un ejemplo de aquello son los problemas expuestos en el clásico Papiro de Rhind relacionado con problemas que resolvían situaciones de reparto de cantidades de onzas de pan, entre muchos otros (Robins y Shote, 1987). En la actualidad, es posible encontrar tal relación en actividades de modelizar o resolución de problemas en los presentes currículos educativos.

Es posible sintetizar lo anterior, en que un propósito de este laboratorio, es dimensionar la importancia de que los profesores incluyan tareas de modelación matemática en sus prácticas, para que los estudiantes se enfrenten también a situaciones no tradicionales y alejados de la algoritmia. En el presente, este es uno de los direccionamientos que hacen posible la conducción del aprendizaje en las Matemáticas.

Algunos fundamentos e hipótesis que creemos es que el estudiante, al abordar una situación de modelación, ve en forma natural que la matemática (construida entre un sujeto con otro, desde una comunidad) le permite abordar problemas concretos que tiene sentido para él, que puede discutir con su par, defender sus ideas inicialmente en un lenguaje y una lógica no necesariamente perteneciente al mundo de la matemática formal; pero que deberá desarrollar, precisar y convencer a sus compañeros. Logrará una dimensión de la matemática que la formación actual no está dando. Nuestra hipótesis es que existen elementos en el proceso de modelación que pueden ser realzados para lograr la necesaria conexión entre la matemática (símbolos matemáticos y su operatoria) y los modelos matemáticos que se usan en la ciencia de la ingeniería, por ejemplo; para lograr así que el estudiante pueda recurrir a toda la formación matemática y otras que ha logrado cuando le sea requerida en cursos superiores o en su desempeño profesional, es decir, lograr conocimiento matemático a un nivel funcional (Morales et al, 2012; Morales y Cordero, 2014).

Se espera que el perfil de la o el participante del laboratorio sea una persona interesada en el uso de la matemática para la enseñanza, mas allá del simple formalismo, pudiendo ser un profesor o un estudiante en formación. Se espera que la o el participante quiera aprender desde una postura muchas veces desconocida, lo que se entiende por Modelación Matemática, sus diferentes enfoques según los objetivos de aprendizaje que se pretendan fortalecer y sus distintos usos. Una persona capaz de reflexionar sobre sus propias prácticas educativas de forma continua, estableciendo un carácter autocrítico en sus labores docentes y que permanezca en la constante búsqueda de elementos de innovación.

Marco conceptual

En la última década, se ha reflejado que en pruebas internacionales como Programme for International Student Assessment (PISA) o Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS), el desarrollo del conocimiento desde dimensiones cognitivas, ha sido una herramienta ya inserta en el curriculum nacional chileno para la enseñanza y el aprendizaje de las diversas disciplinas que éste incluye, no siendo la excepción Matemáticas. En Chile, los Objetivos de Aprendizaje desde el año 2012 consideran transversalmente cuatro habilidades para Matemáticas: modelar, representar, resolver problemas y argumentar y comunicar; quedando como un constante desafío, considerar en la formación inicial y continua de profesores la inclusión en las prácticas docentes, del desarrollo de las habilidades y destrezas, de forma integral con los Estándares Pedagógicos y Disciplinarios (MINEDUC, 2012).

En los últimos 30 años, la Modelación Matemática ha adquirido un rol cada vez mas protagónico en la enseñanza y aprendizaje de la matemática, el desarrollo del conocimiento educacional e investigativo. El progreso teórico ha llevado a enriquecer las metodologías de enseñanza, líneas de investigación y desarrollo de múltiples programas de estudio en todos los niveles educacionales. En 1979, Henry Pollak (Borromeo-Ferri, 2006) considera a la Modelación Matemática como una manera de enlazar a la Matemática con "el resto del mundo", estableciendo un primer significado del devenir de progresivas posturas asociadas a la Modelación Matemática, entendimientos diferenciados dependientes del uso y contexto disciplinar que se le pueda asignar a una tarea de modelación (Barbosa, 2003); a partir de esto es que investigadores en el área han definido distintos ciclos de modelación que describen los procesos de modelación. En el trabajo de Borromeo-Ferri (2006) se reportan algunos ciclos de modelación, destacando sus diferencias y similitudes epistemológicas.

Generalmente, los procesos de modelación son descritos a partir de ciclos de modelación, implicando la existencia de varios direccionamientos según el ciclo que eventualmente pueda utilizar, y en algunos casos, si las tareas usadas son o no complejas para el estudiante (Borromeo-Ferri, 2006) para definir qué es un proceso de modelación.

En este trabajo, se entenderá como Modelación Matemática al proceso de traducción entre el mundo real y las matemáticas en ambas direcciones (Blum y Borromeo-Ferri, 2009), bajo una dimensión cognitiva desde el ciclo de modelación de Blum-Borromeo (Borromeo-Ferri, 2010).

Al abordar un problema de modelación matemática, el modelador pasa por distintas fases para llegar a resolver la tarea. Blum y Leiß (2007) proponen un ciclo de modelación, definida por seis fases dentro del proceso. Sin embargo, Borromeo-Ferri (2010) integra aspectos cognitivos en este ciclo, como se observa en la figura 1.

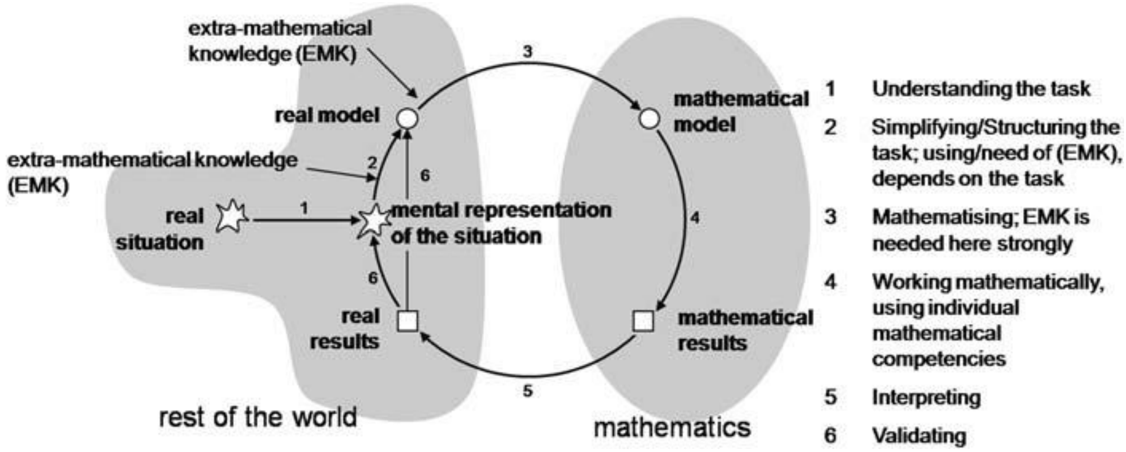


Figura 1. Ciclo de modelación de Blum-Borromeo (Borromeo-Ferri, 2010).

La situación real (RS), representa la situación que es dada en el problema, puede ser una imagen o texto. Al transitar de la RS a la MRS (mental representaction of the situation) el individuo comprende más o menos el problema, es decir, se reconstruye mentalmente la situación, aun cuando no comprenda completamente el problema puede comenzar a trabajar en él.

La construcción mental de la situación (MRS) en el individuo puede ser diferente, dependiendo del estilo de pensamiento de cada persona, por ejemplo, puede ser visual en relación con la experiencia; o la atención puede centrarse en datos numéricos y relaciones dadas en el problema, depende de las asociaciones que el individuo elija mientras comprende la tarea. La autora señala dos aspectos que hacen la diferencia entre la RS y el MRS: 1) simplificaciones inconscientes de la tarea y 2) la elección individual del como abordar el problema. En el paso de la MRS al RM (real model), tienen lugar simplificaciones e idealizaciones más conscientes en el individuo, esto se debe a que en la fase MRS el individuo ya ha tomado decisiones que influyen en el filtrado de la información, el proceso de transición puede requerir de conocimiento extra-matemático, dependiendo del tipo de tarea. Se dice que la fase de modelo real (RM) esta fuertemente relacionada con la fase de MRS, la autora menciona que es debido a que el RM es prácticamente construido a nivel interno y que las representaciones externas pueden representar al modelo real, dependiendo de las declaraciones que el individuo hace al externalizar el modelo. Al transitar del RM al MM, se hace presente un progreso individual de matematización, donde dependiendo de la tarea, es necesario recurrir también a conocimiento de tipo extra-matemático.

La fase de modelo matemático (MM), consiste de representaciones externas, expresiones matemáticas o dibujos y las expresiones del individuo que están más relacionadas con hechos matemáticos y en menor grado con la realidad. Esta fase completa el proceso de transición hacia las matemáticas. En el tránsito del MM a los resultados matemáticos, se ponen en juego las competencias matemáticas del individuo. La fase de resultados matemáticos constituye la escritura de los resultados obtenidos del modelo. Y el paso de los Resultados Matemáticos a los Resultados Reales se da mediante la interpretación. Los individuos frecuentemente son inconscientes durante la transición.

En la fase de Resultados reales, se discute la correspondencia de ellos y si es que pueden ser reales. Al validar los resultados, el individuo busca relaciones entre sus resultados reales y la MRS, lo cual puede ser correcto o no dependiendo de la forma de validación que elija: validación intuitiva (mental representation of the situation) y validación basada en el conocimiento (real model). En la primera el individuo puede descubrir por si mismo que los resultados son erróneos por razones que no es capaz de explicar o porque los resultados no corresponden a su experiencia. En la segunda se refiere a que los individuos están de acuerdo con sus resultados con base en su conocimiento extra-matemático o no. Se puede distinguir dos tipos de consciencia: basada en el conocimiento y no. Ambos tipos de validación se conectan con las reflexiones previas del individuo. La razones por las que la mayoría no valida, es que realizan una validación dentro de la matemática, validar significa determinar el modelo matemático. No conectan los resultados con la situación.

Al considerar la MM como una actividad de la persona que resuelve problemas de su realidad utilizando matemática, implica la obtención de cierta amplitud en lo que se considera como modelación, ya que muchas veces dependerá de los objetivos que se tengan en mente como profesor, los que pueden tener como foco de importancia el desarrollo, el resultado, interpretación, validación, asignación de hipótesis, barreras cognitivas, entre otros. Además, las múltiples características que son posibles encontrar en una tarea, empuja hacia una natural categorización, emergiendo las perspectivas de modelación, las que considera ciertas características asociadas a la percepción de la realidad, desarrollo de los procesos, fines de las tareas y evolución de líneas de investigadores en la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. En Kaiser y Sriraman (2006) o Blomhøj (2008), es posible encontrar un recorrido histórico sobre lo que ha sido la investigación de las perspectivas en modelación matemática, caracterizándose por una fuerte utilidad en el ámbito de la investigación. Sin embargo, es posible generar una inclusión práctica para la enseñanza de la MM en las aulas, la que puede ser reflejada como un desafío para el currículum, al establecer los conocimientos que la investigación produce, lo propuesto por el Ministerio de Educación del país y las propuestas educativas de las instituciones educativas. Kaiser (2006) define las perspectivas 1) Realista, 2) Contextual, 3) Educacional, 4) Epistemológica, 5) Cognitiva, y 6) Socio-crítica, clarificando que el parcelamiento fáctico es complicado, ya que no es difícil establecer ciertos rasgos de cada perspectiva en una sola tarea. En este caso, las perspectivas parecieran mas cercanas al investigador; sin embargo, al adquirir este conocimiento el docente, es capaz de crear de mejor manera posibles tareas según sus objetivos de aprendizaje.

Por otro lado, es importante saber la conceptualización del concepto de Competencia para un mejor entendimiento de las competencias y subcompetencias de MM. Desde la definición de Frey ((1999), citado en Jäger (2001)), una competencia “es la capacidad de una persona… de verificar y juzgar personalmente la corrección fáctica con respecto a la adecuación de enunciados y tareas, respectivamente, para transferirlos a la acción” (traducción personal). Luis Rico (2006), conceptualiza una competencia para la Matemática desde el estudio PISA, declarando que la competencia matemática es: “…la capacidad de un individuo para identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, hacer juicios fundados y usar e implicarse con las matemáticas en aquellos momentos que presenten necesidades para su vida individual como ciudadano”. Para Niss (2004, p.120) una competencia matemática es la habilidad de entender, juzgar, hacer y usar matemática en una variedad de intra y extra contextos matemáticos y situaciones en las cuales la matemática juega o podría jugar un rol (citado de Maaß (2006)). Niss acepta la fuerza de un ambiente matemático puro, en el cual se incluyan habilidades y destrezas, junto con la voluntad para ponerlas en acción desde evidencias cognitivas o de hechos. Para Rico, una competencia es desarrollada en su plenitud en la vida individual de ciudadano, además de tener mayor cercanía con la definición de Frey, ya que los hechos pueden ser mejor observados en la vida cotidiana, aceptando que los fundamentos teóricos de la resolución de una tarea son de un ambiente matemático. Necesariamente, la Modelación Matemática posee características cognitivas que trascienden de elementos fácticos y que son desarrollados en ambientes tanto matemáticos como del cotidiano, en donde no son suficientemente abordados por los conceptos de competencia y competencia matemática de Frey y Rico respectivamente; no así en la definición de Niss, ya que existe una valoración en cuanto a las actividades que son realizadas en un ambiente puramente matemático.

Para Maaß (2006), las competencias de modelación incluyen destrezas y habilidades para realizar procesos de modelación apropiadamente y orientado a objetivos, así como la voluntad de poner éstos en acción. Desde esta forma, es posible considerar las competencias y subcompetencias de modelación que definen Blum & Kaiser (1997, p.9):

1. Competencias relacionadas a comprender el problema real y la creación de un modelo basado en la realidad.
    a) Hacer supuestos para el problema y simplificar la situación.
    b) Reconocer cantidades que influencian a la situación, nombrarlas e identificarlas como variables claves.
    c) Construir relaciones entre las variables.
    d) Mirar información disponible y diferenciar entre información relevante e irrelevante.
2. Competencia para construir un modelo matemático desde el modelo real.
    a) Matematizar cantidades relevantes y sus relaciones.
    b) Simplificar cantidades relevantes y sus relaciones si es necesario y reducir su número y complejidad.
    c) Escoger apropiadamente notaciones matemáticas y representar situaciones gráficamente.
3. Competencia para resolver preguntas matemáticas con este modelo matemático.
    a) Uso de estrategias heurísticas tal como división del problema en partes, establecer relaciones a problemas similares o análogos, reformulación del problema, viendo el problema de una forma diferente, variando las cantidades o los datos de las variables, etc.
    b) Uso del conocimiento matemático para resolver el problema.
4. Competencia para interpretar el resultado matemático en una situación real.
    a) Interpretar resultados matemáticos en contextos extramatemáticos.

b) Generalizar situaciones que fueron desarrolladas para una situación especial.

c) Ver soluciones a un problema usando lenguaje matemático apropiado y/o comunicar sobre las soluciones.

5. Competencia para validar la solución.

a) Reflexionar y chequear críticamente en las soluciones encontradas.

b) Revisar algunas partes del modelo o ir de nuevo a través del proceso de modelación si las soluciones no encajan en la situación.

c) Reflexionar el problema bajo otras rutas de modelación o si las soluciones pueden ser desarrolladas de forma distinta.

d) Generalizar las preguntas del modelo.

Es posible relacionar la gran mayoría de las competencias y subcompetencias con las descripciones de las diversas fases y transiciones que describen el ciclo de modelación Blum-Borromeo.

Dentro de los múltiples problemas al incluir en aulas tareas de modelación es la evaluación. De aquí, Ikeda & Stephens (1998, p.27) dan un set de preguntas para analizar la valoración de los logros de los estudiantes (citados en Maaß (2006, p. 117)): ¿El estudiante identificó el foco matemático clave del problema? ¿Las variables relevantes fueron correctamente identificadas? ¿El estudiante idealizó o simplificó las condiciones y supuestos? ¿El estudiante identificó una variable principal para analizar? ¿El estudiante analiza satisfactoriamente la variable principal y llega a conclusiones matemáticas apropiadas? ¿El estudiante interpreta conclusiones matemáticas en términos de la presente situación modelada?.

Se pretende abordar transversalmente todos los elementos teóricos, para así, determinar una correlación teórica y práctica de los diseños propuestos y los que serán creados en el laboratorio.

Método

El laboratorio estará compuesto de tres sesiones, las cuales estarán adecuadamente articuladas para abordar los respectivos objetivos del laboratorio, que son:

1. Lograr cierta adquisición del estado del arte desde el marco conceptual presentado de la Modelación Matemática a los presentes.
2. Creación de tareas de modelación.

En la primera sesión, se pretende generar una inducción teórica de la Modelación Matemática a través de ejemplos que brindan diseños publicados en editoriales de alto impacto en el área (nos referimos, por ejemplo a CERME, ICTMA, ICMI). Para ello, se propone mostrar múltiples diseños publicados en conjunto con elementos teóricos, por ejemplo, diversos ciclos de modelación, su funcionamiento, perspectivas de modelación. Finalmente, en la última media hora, se propondrá una tarea de modelación, en donde el público reunido en grupos de no mas de 4 personas deberán resolver la tarea, pudiendo ser el diseño 2 o el diseño 4, dependerá de las características que los grupos pretendan fortalecer en una tarea de Modelación Matemática.

En la segunda sesión, se pretende retomar los aspectos teóricos trabajados en la sesión anterior, pero esta vez, se incluirán las competencias de Modelación Matemática, se pretende que los participantes destaquen distintas complejidades en una tarea de modelación, relacionen éstas a competencias y conozcan estrategias de cómo abordarlas. Se espera en esta sesión clarificar con mayor fuerza y cierta madurez, los contenidos vistos en la sesión anterior, tanto a través de ejemplos que tenga el equipo del laboratorio, como los propuestos por ellos.

La tercera sesión es muy significativa para el desarrollo del laboratorio, ya que las creencias de los docentes hacia la creación de tareas de modelación son dirigidas a su complejidad e incluso imposibilidad. Sin embargo, este equipo de laboratorio propone ir en contra de esta creencia, basándonos en experiencias de similares características realizadas por nosotros (Reunión de la Sociedad Chilena de Educación Matemática el año 2014 y experiencias de seminarios de modelación matemática en la formación inicial de profesores en dos universidades chilenas) con exitosos resultados. Para la tercera sesión, cada grupo de trabajo deberá realizar una tarea de modelación en donde se incluyan características teóricas.

Diseños didácticos

Lo que se presentará a continuación, son solamente algunos de los diseños que se utilizarán en el laboratorio, los que vienen desde fundamentos teóricos, otros con modificaciones de trabajos clásicos en la literatura de modelación científica y otros que son creación del trabajo de los autores del laboratorio.

Diseño 1:

El diseño mostrado a continuación, está documentado en Morales et al (2012), el que muestra un uso de información en un ambiente de formación inicial de profesores de matemáticas, en donde el sentido que se adquiere es a través del rol del tiempo. Esto sugiere que estamos frente a un proceso de modelación en el cual se está generando conocimiento (Morales et al, 2012).

Considere la siguiente tabla; los datos que aparecen allí representan un determinado fenómeno físico. Responda al siguiente planteamiento: usando los datos que la tabla proporciona, realice un estudio de manera que nos permita entender el fenómeno físico que está ocurriendo.

Columna 1	Columna 2	Columna 3
3	215,513	369,7725
4	234,904	349,066
5	254,295	331,6425
6	273,686	317,502
7	293,077	306,6445

8	312,468	299,07
9	331,859	294,7785
10	351,25	293,77
11	370,641	296,0445
12	390,032	301,602
13	409,423	310,4425
14	428,814	322,566
15	448,205	337,9725
16	467,596	356,662
17	486,987	378,6345
18	506,378	403,89

Diseño 2:

Este diseño es una variación del trabajo de Blum y Borromeo-Ferri (2009), el que puede ser caracterizado desde perspectivas y competencias de modelación específicas, las cuales se discutirán en el laboratorio. Además, esta actividad ejemplificará posicionamientos teóricos hacia si un enfoque cognitivo es una perspectiva, o bien, una metaperspectiva, como propone Blomhoj (2009). Es de interés de los autores de este documento "levantar" una segunda metaperspectiva, de tal forma que aborde de manera transversal las ya existentes (sin considerar a la cognitiva).

Imagina que un "ula-ula", además de jugar con él, puede ser el anillo de un gigante… ¿cuál es el número que calza de zapato el gigante?

Diseño 3:

Este diseño es una creación del trabajo de los autores. Se pretende utilizar en el laboratorio para generar distinciones entre los tipos de tareas que el profesor puede crear y/o utilizar en sus prácticas. Al igual que los otros dos diseños, se realizará un análisis desde las múltiples perspectivas y competencias que pueden fomentar.

El Puente de las Artes, es curiosamente conocido, ya que los enamorados ponen un candado en él, representado su amor eterno. Actualmente, el municipio parisino (junio 1º de 2015) ha sacado muchos candados, ya que se transformó en un peligro para el puente. Pero… ¿cómo determinar cuantos candados se pueden poner en un puente? ¿Cuántos candados pueden ser puestos en un puente peatonal? Explica.

Diseño 4:

Este diseño es una creación del trabajo de los autores. Esta tarea posee una gran diferencia con respecto a las otras tres, por lo que será fecunda en la discusión que se pretende generar en el laboratorio:

Según un estudio realizado en marzo de 2012 se estima que la población total canina en Chile es 3 millones aproximadamente y que el 25% de estos está en situación de abandono, siendo una de las principales causas la falta de control de la reproducción de ellos mismos. Suponiendo que del total de caninos en situación de abandono, un 15% son caninas en edad de procrear, además se sabe que una canina da a luz cada 6 meses y que además tienen en promedio tres crías nacidas vivas, pudiendo estas, comenzar a procrear desde el año de edad.

1. ¿Cuántos perros se encuentran en situación de calle luego del primer año de estudio?
2. ¿Cuántos perros se encuentran en situación de calle en la actualidad? Suponiendo que cada año el total de hembras nacidas vivas es un 54%.
3. Si no se da una solución a esta problemática, ¿cuanto será aproximadamente la población canina para el mes de diciembre del 2020?
4. ¿Qué tipo de solución propondrías para esta situación? ¿Cómo afectaría en el comportamiento de la población? Explique con sus “lentes matemáticos”.

El conjunto de diseños pretende mostrar la diversidad y el uso de constructos teóricos, similitudes y diferencias entre los diseños. A modo de ejemplo, el último diseño es bastante dirigido, generando problemáticas al modelador que intentan predecir fenómenos desde ciertos supuestos, tanto dados como creados por el modelador. No así en el diseño 2, ya que éste no pretende predecir, sino normalizar un fenómeno a partir de –nuevamente-supuestos dados y creados. Es documentado que desde las perspectivas de modelación (Kaiser y Sriraman, 2006), tal modelo corresponde a una perspectiva cognitiva. Sin embargo, el diseño 4 estaría mas cercano a la perspectiva socio-crítica.

El diseño 1 propone una tabulación de datos, en donde se espera que el modelador haga uso de gráficas para lograr la construcción del conocimiento matemático. Morales et al (2012) documentan que este tipo de construcción (desde la Teoría Socioepistemológica), proviniendo de un fenómeno físico, siendo lo planteado el diseño de aprendizaje de ese estudio.

El diseño 3 pretende llevar a cabo distinciones entre las perspectivas de modelación, ya que los matices de la perspectiva pragmática son evidenciables y diferenciables de los demás diseños propuestos. Además, cada uno de los diseños fomenta competencias de modelación (Blum y Kaiser, 1997) , distinguiéndose de competencias a querer promover.

Por otro lado, ciertos ciclos de modelación parecieran ser mas claros al describir cada uno de los diseños.

Referencias bibliográficas

Artigue M. (1995): La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos, en Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (eds.) Ingeniería didáctica en educación matemática, Grupo Editorial Iberoamérica: México, pp. 97-140.

Barbosa, J. C. (2003). What is mathematical modelling? In S. J. Lamon, W. A. Parder &. K. Houston (Eds.), Mathematical modelling: a way of life (pp. 227-234). Chichester: Ellis Horwood.

Blomhøj M. (2008). *Different perspectives in research on the teaching and learning mathematical modelling - Categorising the TSG21 papers*. ICME 11. 1-13.

Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications and Links to other Subjects – State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. In: Educational Studies in Mathematics, 22, No. 1, p. 37-68.

Blum, W. y Kaiser, G. (1997). Vergleichende empirische Untersuchungen zu mathematischen Anwendungsfähigkeiten von englischen und deutschen Lernenden. Unpublished application to Deutsche Forschungsgesellschaft.

Blum, W. y Leiß, D. (2007). “Filling Up”- the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. In: Bosch, Marianna (Ed.): CERME 4 – Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, 1623-1633.

Blum, W. y Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught and Learnt?. Journal of Mathematical Modelling and Application 1(1), 45-5.Blomhøj & Jensen, (2006) Teaching mathematical modelling through project work. ZDM Vol. 38 (2).

Borromeo-Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Vol. 38, 2, 86-95.

Borromeo-Ferri, R. (2010). On the influence of Mahtematical Thinking Style son learners’ modeling behavior. *J. Math Didakt* 31, 99-118.

Borromeo-Ferri, R. (2014). Mathematical Modeling - The Teachers Responsibility. In Sanfratello, A.; Dickmann, B. (Eds.). Proceedings of Conference on Mathematical Modeling Teachers College of Columbia University, NYC, p. 26-31.

Jäger, R. (2001). Von der Beobachtung zur Notengebung. Ein Lehrbuch. Landau: Verlag Empirische Pädagogik.

Kaiser G. y Sriraman B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling

in mathematics education. ZDM 38 (3). 302-310.

Kaiser G., Blum W., Borromeo-Ferri R. And Stillman G. (2011). Trends in teaching and learning of mathematical modelling ICTMA 14. New York: Springer.

Maaß K. (2006). What are modelling competences?. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik Vol.38 (2) 113-142.

MINEDUC. (2012). Curriculum en línea. Recuperado el 5 de mayo de 2015, de http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/w3-propertyvalue-49395.html

Morales, A., Mena, J., Vera, F. y Rivera, R. (2012). El rol del tiempo en un proceso de modelación utilizando videos de experimentos fisicos. Enseñanza de las Ciencias. 30(3), 237-25.

Morales, A., Cordero, F. (2014). La graficacion-modelación y la Sere de Taylor. Una Socioepistemología del Cálculo. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17(3), 319-345.

Moreno y Azcárate (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de Matemáticas acerca de las Ecuaciones Diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias*, 21(2), 265-280.

Niss, M. (2004). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The danish KOM project. In A. Gagtsis & Papastavridis (eds): 3rd Mediterranean Conference on mathematical education, 3-5 January 2003, Athens, Greece. (pp. 115-124). Athens: The Hellenic mathematical society, 2003.

OECD/UNESCO Institute for Statistics (2003), *Literacy Skills for the World of Tomorrow: Further Results from PISA 2000, PISA*. OECD Publishing: Paris.

OECD (2014), *PISA 2012 Results: What Students Know and Can Do – Student Performance in Mathematics, Reading and Science (Volume I, Revised edition, February 2014), PISA*. OECD Publishing. Doi: 10.1787/9789264201118-en

Rico, L. (2006). La competencia matemática en PISA. PNA, 1(2), 47-66.

Robins, G. y Shute, C. (1987). The Rhind mathematical papyrus. An ancient Egypcian text. British Museum Publications, London.

Autores

Jaime Huincahue Arcos; UPLA. Chile; jaime.huincahue@upla.cl
Astrid Morales Soto; UPLA. Chile; astrid.morales@pucv.cl

Jaime Mena Lorca; PUCV. Chile; jaime.mena@pucv.cl

MODELACIÓN ESCOLAR. ESTUDIO DE SITUACIONES DE VARIACIÓN

María Esther Magali Méndez Guevara, Karen Zúñiga González, Ricardo Nájera Flores

Resumen

El curso-taller se enfoca en dos direcciones; la primera consiste en reflexionar sobre la modelación matemática, la inclusión de esta en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y su implementación en el discurso matemático escolar y, desde ahí se marca una visión sobre modelación escolar. La segunda se orienta hacia el análisis de una categoría de construcción de conocimiento para la matemática escolar que acopia los elementos esenciales de la modelación matemática y provoca el desarrollo de redes de usos del conocimiento matemático, denominada modelación escolar. Se desarrolla en tres etapas; la primera se incita a compartir las experiencias sobre modelación y desde ahí, la segunda, se plantea nuestra postura socioepistemológica. Finalmente se desarrollan situaciones de variación las cuales nos darán los argumentos que muestren el funcionamiento de la categoría de modelación escolar.

Palabras clave: Modelación Matemática, Modelación escolar, Variaciones.

Propósito y alcance

La modelación como parte esencial de la construcción, difusión y aceptación del conocimiento científico, pues otorga una justificación funcional a este, además provoca la construcción de herramientas como elementos esenciales de la situación que se atiende, para representar lo que se estudia con determinados fines, de manera que pueda ser comunicado (Gilbert, 2004; Koponen, 2007). Es decir, es lo que hace posible a un grupo humano construir explicaciones de su realidad, tomar decisiones y desarrollar sus construcciones, de manera que no es ajena al ser humano, ni a la situación en la que sucede. Compartiendo esto, nuestro interés principal es hacer de la categoria de modelación escolar un marco de referencia explicito que permita elaborar diseños de situaciones para que los participes desarrollen sus usos del conocimiento matemáticos, a saber sobre; las gráficas, las tablas de datos y las expresiones algebraicas.

Para lograr nuestro propósito creemos que es necesario hacer participes a los actores principales del discurso matemático escolar, los profesores o estudiantes para profesores y los estudiantes, por ahora trabajamos con profesores o estudiantes para profesor de nivel básico y/o medio superior. Esto nos ha llevado a dos caminos; para los primeros seguir las etapas que se proponen para este curso-taller pues este ha permitido a nuestros estudiantes para profesor de matemáticas diseñar sus propios diseños y reflexionar sobre su quehacer docente futuro. El segundo es la producción de diseños de situaciones, basados en una categoría de modelación escolar (Méndez 2013) que provoque en un ambiente escolar el desarrollo de redes usos de conocimientos matemáticos, por ejemplo entorno al estudio de funciones específicas.

Marco teórico

La modelación matemática es un proceso desarrollado por un grupo de profesionales, que estudian y aprende matemáticas para resolver algo, quienes cuentan con una caja de herramientas dispuesta a ser usadas y, es ahí donde la modelación como proceso de aplicación de esos conocimientos se vuelve central para resolver un problema (Meyer, Caldeira y Malheiros, 2011).

Este hecho es una de las razones que desborda los estudios que versan sobre la inclusión de la modelación matemática en la educación, y principalmente en la educación matemática, al atribuirle el carácter funcional de los conocimientos y, como el medio que enlaza las situaciones del cotidiano con el mundo de las ideas matemáticas, más aún, al atribuirle al proceso hacer evidente que las matemáticas permiten descubrir las leyes del mundo real, además de permitir la conceptualización de la matemática según diversos colegas de la disciplina (Blomhøj, 2004; Kaiser & Sriraman, 2006; Chaves & Do Espirito Santo, 2009). Por esto, el impacto de la modelación matemática en el sistema educativo, se refleja, por ejemplo, en los programa de estudios o en los libros de texto de forma más directa.

Sin embargo de acuerdo con Lingefjärd (2011), la modelación se asume de diferentes formas en todo el mundo, con base a los paradigmas y marcos teóricos desde donde se desarrollan, evidenciando diferentes posibilidades para investigar y analizar aspectos relacionados a la enseñanza envueltos en la modelación. Desde este hecho, nosotros desarrollamos investigación al seno de una base teórica que profesa a las prácticas sociales como la base del conocimiento, en la medida en que son el sustento y la orientación para llevar a cabo una construcción social del conocimiento matemático (Cantoral, 2013, p. 52), la Socioepistemológica.

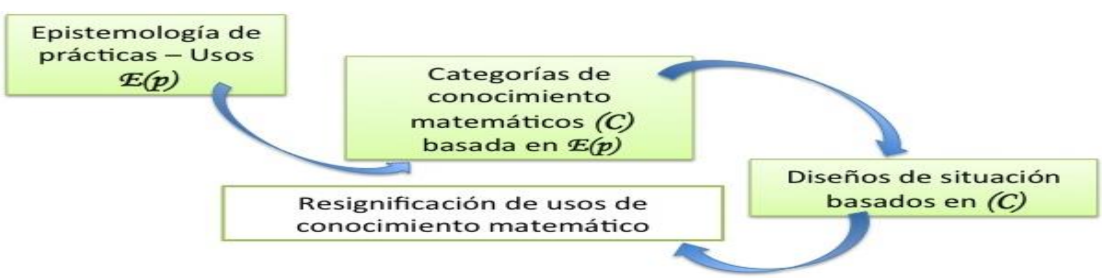


Figura 1. Proceso que sustenta la resignificación de usos (tomado de Méndez, 2013).

La socioepistemológica, ha desarrollado constructos teóricos y mecanismos que permiten acercar la teoría al aula de clase de matemática (Cordero, 1998; Cordero, 2001), esto implica un proceso (figura 1) que permite provocar la resignificación de usos de conocimientos matemáticos. Se ha formulado una categoría, llamada categoría de modelación escolar (Méndez & Cordero, 2014; Méndez, 2013; Méndez & Cordero, 2012) que nos ha permitido elaborar diseños de situación para la enseñanza básica, media superior y superior.

Así, hemos formulado una categoría de modelación escolar que funciona como el argumento que organiza patrones involucrando las condiciones o criterios de una situación específica, favoreciendo la constitución de ciertos conocimientos matemáticos. Esta funciona como un marco de referencia para la matemática escolar donde los participes pueden construir y desarrollar su conocimiento matemático.

Los elementos principales de esta categoría son; la experimentación o experiencia evocada, de donde se obtienen y tienen sentido los datos, expresados en gráficas o tablas numéricas, las cuales al ser usadas para describir o analizar comportamientos locales y globales de lo estudiado se transforman en un modelo, además al querer predecir a corto o largo plazo (o aproximar a un valor específico) se formulan las expresiones analíticas siendo estas un conjunto que simboliza las condiciones iniciales y el comportamiento general de la situación estudiada (Méndez & Cordero, 2014). Todo esto se hace tangible en diseños de situación y durante el curso analizaremos un par de ellos que involucras nociones del cálculo.

En específico los diseños se desarrollan en el análisis de las variaciones, de dos fenómenos uno de llenado de recipientes y el otro de crecimiento poblacional. El primero está enfocado principalmente al desarrollo de redes de usos de conocimientos matemáticos (Drucm) en torno a la gráfica, es decir de una variación global a lo local. Mientras el segundo se desarrolla desde lo numérico y las condiciones iniciales hasta el comportamiento a largo plazo, es decir, del estudio de variaciones puntuales-locales a las variaciones globales.

Método

Durante el curso se reflexiona sobre la modelación matemática, la inclusión de esta en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y su implementación en el discurso matemático escolar y, desde ahí se marca una visión sobre modelación que provoca el desarrollo de redes de usos del conocimiento matemático, denominada modelación escolar.

La dinámica incitará a ser participe en el desarrollo de situaciones de movimiento las cuales nos darán los argumentos que muestren el funcionamiento de la categoría de modelación escolar como un medio para la construcción de conocimientos matemáticos.

Los diseños se desarrollan principalmente en dos momentos:

El Momento 1: Está caracterizado por la emergencia de usos que explican los cambios que ocasiona la modificación de condiciones en el experimento que se realizó. Usos detonados por la situación de transformación, en donde se caracterizan variaciones globales. Es decir, por el comportamiento del tipo de variación.

El Momento 2: Está caracterizado por el estudio del cambio de una posición a otra, para determinar cuánto varia algo en ese intervalo, o bien, en los intervalos en donde sucede un cambio (propio de la situación de variación).

Sin que esto signifique el momento 3, se inhiba de hecho este surge según la comunidad que participe en la realización del diseño. Este momento se caracteriza por los usos del conocimiento cristalizados ante la intención de acercarse lo más posible a un valor específico. Estos usos se valen de las propiedades de variación en intervalos pequeños cercanos al valor que se quiere aproximar (esto sucede en la situación de aproximación). Estos tres momentos son los que provocan el Drucm (Méndez, 2013)

Diseños didácticos

El desarrollo del taller principalmente buscará provocar una reflexión sobre la acción (Parada & Pluvinage, 2014), misma que se provocará al hacer participes a los asistentes en la realización de dos diseños de situación.

El primero es el llenado de recipientes (Zúñiga & Méndez, 2013), este diseño busca desarrollar entre los participes el uso de las gráficas, plantea un escenario vivido de la experimentación y con esto se presenta un elemento primordial en la modelación, la toma de decisión con respecto a las variables que más convienen a la situación estudiada.

Este diseño se ha explorado en distintos escenarios, de divulgación de la ciencia y escolares en prácticamente todos los niveles educativos, lo que ha llevado a tener variables del mismo, una de estas es la que se analizará según los participantes.

El segundo diseño está basado en una situación evocada de crecimiento poblacional, una población rara de parásitos, que tiene ciertas condiciones que hay que comprender para lograr predecir qué pasará con dicha población, este diseño se llama, la extraña granja de Fabricio.

Ambos diseños están basados en la modelación escolar, y ambos tienen la intención de provocar los tres momentos del desarrollo de red de usos de conocimiento matemático (Drucm).

Condiciones finales

Finalmente el curso-taller busca generar una red de colegas que se interesen por incluir en sus prácticas docentes actuales o futuras actividades que provoquen el desarrollo de conocimiento en sus estudiantes, así que este espacio será una ventana a futuros trabajos colectivos.

Además este escenario también es un espacio de formación para los futuros investigadores, los jóvenes que se incluyen en una línea de investigación requieren de estos escenarios en donde puedan compartir y analizar con sus pares sus productos académicos.

Reconocimiento

Se agradece al programa para el desarrollo profesional docente, para el tipo superior, por el financiamiento al proyecto "Modelación escolar y la construcción social de conocimiento matemático" con folio UAGRO-PTC-052.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*. Barcelona: Gedisa.

Chaves, M. & Espirito Santo, A. (2008). Modelagem matemática: Una concepcao e varia possibilidades. *Bolema, 30*(21), 149-161.

Cordero, F. (1998). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso del comportamiento tendencial de las funciones. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *1*(1), 56-74.

Cordero. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4*(2), pp. 103-128.

Blomhoj, M. (2004). Mathematical modelling- A theory for practice. En Clarke, B.; Clarke, D. Emanuelsson, G.; Johnansson, B.; Lambdin, D.; Lester, F.; Walby, A. y Walby,

K. (eds.). *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics. Suecia: National Center for Mathematics Education*, pp. 145-159.

Gilbert. J. (2004). Models and modeling: Routes to more authentic science education. *International Journal of science and mathematics education, 2*, 115-130.

Gómez-Chacón, I. & Maestre, N. (2008). Matemáticas y Modelización. Ejemplificación para la enseñanza obligatoria. Enseñanza de la Matemática. *Revista de la Asociación Venezolana de Educación Matemática, 17*(1), 107–121.

Kaiser, G. & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(3), 302–310.

Lingefjärd, T. (2011). Modelling from primary to upper secondary school: finding of empirical research. In G. Kaiser, R. Borromeo, W. Blum & G. Stillman (eds.) *Trends in teaching and learning of mathematical modelling*, (pp. 9-14). Springer.

Meyer, J., Caldeira, A. & Malheiro, A. (2011). *Modelagem em educação matemática*. Brasil: Autêntica editora LTDA-coleção tendências em educação matemática.

Méndez, M. & Cordero, C. (2014). La modelación. Un eje para la red de desarrollo de usos. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27* (pp.1603-1610). México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa, A.C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Méndez, M. (2013). *Desarrollo de red de usos del conocimiento matemático: La modelación para la matemática escolar*. Tesis de doctorado no publicado. Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Méndez, M & Cordero, F. (2012a). La función de la modelación en la resignificación del conocimiento matemático. En O. Covián, Y. Chávez, J. López, M. Méndez, A. Oktaç. *Memorias del Primero Coloquio de Doctorado*, (pp. 257 – 267). ISBN: 978-607-9023-08- 9, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Cinvestav.

Parada, S. & Pluvinage, P. (2014). Reflexiones de profesores de matemáticas sobre aspectos relacionados con su pensamiento didáctico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(1), 83-113.

Zúñiga, K. & Méndez, M. (2013). La modelación. Una experiencia del uso de las gráficas. En L. Sosa, E. Aparicio y F. Rodríguez (Eds.) *Memoria de la XV Escuela en Invierno de Matemática Educativa*, (99-103). México: Red de Centros de Matemática Educativa A. C. ISBN: 978-607-95761-2-7

Autores

María Esther Magali Méndez Guevara; UAGro. México; mguevara83@gmail.com
Karen Zúñiga González; UAGro. México; kzg.93@live.com
Ricardo Nájera Flores; UAGro. México; rinajera786@gmail.com

UN ESTUDIO DE LAS PARÁBOLAS DE GALILEO DESDE LA REPRODUCCIÓN DE SUS PRÁCTICAS

Jaime Arrieta Vera, Noé Castellanos Rebolledo, Leonora Díaz Moreno, Brenda Pamela Barrios Enriquez, Ricardo Benítez Jiménez, Grecia Itzel García Hernández, Onésimo Ramos Magallón

Resumen

En las prácticas de modelación de Galileo se develan diversas herramientas, una de ellas es la parábola. Esta herramienta es utilizada con diferentes intenciones, en varios procedimientos y argumentos, configurando, así, *las parábolas de Galileo*. El estudio de estas parábolas es el centro de este laboratorio. Nos restringimos al estudio de la parábola de Apolonio, la parábola como la trayectoria de un proyectil y la parábola como la relación entre tiempos y espacios recorridos por un esfera en un plano inclinado. Se propone a los participantes del laboratorio reproduzcan prácticas semejantes a las que Galileo ejerció utilizando simulaciones digitales para múltiples dispositivos electrónicos. Con base en los folios originales de Galileo y las producciones de los participantes analizamos las parábolas como herramientas para la modelación. La perspectiva teórica que soporta este trabajo es la Socioepistemología.

Palabras claves: Parábola, Galileo, Modelación

Propósito y alcance

Las intenciones del laboratorio son dos.

1. Analizar las prácticas de modelación de Galileo, levantando hipótesis acerca de las herramientas que utilizó, los procedimientos que desarrolló y los argumentos que esgrimió.

2. Realizar una primera aproximación a la validación de las hipótesis a partir del análisis de los folios originales de Galileo en contraste con las producciones de los actores al reproducir las prácticas hipotéticas de Galileo.

La importancia del laboratorio radica en que el análisis de las prácticas de Galileo pueden servir de base para diseños de aprendizaje con base en la modelación, particularmente de la modelación del movimiento.

Perfil del participante. Este laboratorio esta dirigido a profesores de matemáticas y física de secundaria, nivel medio superior y superior, así como para estudiantes de licenciatura o posgrado de física, matemáticas o matemática educativa.

Marco conceptual

El marco teórico que soporta la propuesta es una perspectiva teórica sistémica que articula las dimensiones didáctica, cognitiva y epistemológica situadas en un contexto social. La Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa responde a la construcción de nuestros sistemas conceptuales desde tres planos. El primero trata sobre la naturaleza misma del saber. Hablar del saber no se limita, en esta perspectiva, a definir la relación que este guarda con los objetos matemáticos, sino a posicionar al ser humano, en sus distintas dimensiones, en el acto mismo de construcción de sus sistemas conceptuales, su problematización. El segundo plano se ocupa de la práctica social como normativa de la actividad humana y como base de la construcción de nuestros sistemas conceptuales. Sus mecanismos funcionales. El tercer plano, el plano teórico, se ocupa de caracterizar las articulaciones teóricas, con una fuerte evidencia empírica, de nociones, procesos y términos del modelo de construcción social del conocimiento (Cantoral, 2013).

Desde la mirada socioepistemológica, nos distinguimos de perspectivas que aluden a las nociones matemáticas como objetos que precisen ser enseñados desde la obra matemática. En esta investigación privilegiamos la matemática como herramienta además provista de intenciones, de procedimientos y argumentaciones. Una matemática que propicia formas de actuar en contextos específicos.

Concebimos a la modelación como una práctica que articula dos entidades, con la intención de intervenir en una de ellas, llamado lo modelado, a partir de la otra, llamado el modelo. La diversidad, tanto de las entidades que intervienen en la articulación como de la naturaleza de la intervención, hacen posible identificar a la modelación como una práctica recurrente en diferentes comunidades (Arrieta y Díaz, 2015).

Una entidad se convierte en modelo cuando el actor lo usa para intervenir en la otra entidad, por lo que deviene en herramienta. Los entes matemáticos al modelar, son herramientas. Desde esta perspectiva el modelo no existe independiente de la actividad de quién modela.

La articulación de los entes iniciales da lugar a un nuevo ente, al modelo, *mo*, que resulta adherido a lo modelado, *ma*. Tal articulación constituye una nueva entidad para la vivencia de quien modela y que podemos denotar (*ma*, *mo*) y que nominamos ***dipolo modélico*** (DM).

La naturaleza de la modelación radica en la potencia que imprime la articulación y la intencionalidad de intervenir. Esto implica la necesidad de interactuar con la entidad en la que se desea intervenir, es decir la necesidad de la experimentación en sentido amplio. Sin embargo, la interacción con lo que se pretende modelar, no es suficiente para caracterizar a las prácticas de modelación, esta suficiencia se establece con el acto de articular dos entes con la intención de intervenir en uno a partir del otro.

En el trabajo de Galileo articula planos inclinados, con esferas, con datos numéricos, con diferentes figuraciones y con expresiones en lenguaje natural. Para manufacturar el tiempo, Galileo construye diferentes articulaciones, el tiempo-peso, el tiempo-segmento, el tiempo-pulso y el tiempo-número. Estas son herramientas que utiliza Galileo para modelar, las utiliza con diferentes intenciones.

Lo diverso de las herramientas lo otorga la diferencia en las intenciones, argumentos y procedimientos. Esta diversidad se devela en el análisis de estos elementos que hemos llamado deconstrucción (Galicia, 2015).

Método

El laboratorio se dividirá en tres etapas. En la primera se estudiará la parábola de Apolonio, en la segunda la parábola como la trayectoria de un proyectil y en la tercera la parábola como el modelo gráfico del movimiento de una esfera descendiendo por un plano inclinado. Para ello se pone en escena un diseño de aprendizaje en cada etapa. Se utilizan simulaciones digitales, elaboradas por nosotros, para tablets, smartphone y computadoras.

En cada etapa se proponen a los participantes actividades de modelación y posteriormente se reflexiona con base en sus producciones y en los folios originales de Galileo.

La dinámica del taller implica trabajo en equipo y discusiones grupales. Los materiales de trabajo son PC´s, folios originales de Galileo, software elaborado en Unity y Geogebra y tres diseños de aprendizaje.

Diseños aprendizaje

En el laboratorio utilizaremos tres diseños de aprendizaje, uno para cada etapa.

Primer diseño

Se utiliza software elaborado por nosotros para el reconocimiento de los elementos de una parábola y se compara con la definición de Parábola de Apolonio. El trabajo se realiza en equipo de tres o dos participantes y se culmina con una discusión de todo el grupo.

Segundo diseño

Alrededor del año 1600 el plano inclinado es sugerido a Galileo por Guidobaldo del Monte para estudiar la trayectoria parabólica de los proyectiles. Guidobaldo sotiene, en el primer tratado moderno de mecánica el Liber mechanicorum (1577) (Drake, 1978) que la trayectoria del proyectil es de una parábola invertida, que está formado por la holgura de una cuerda en posición horizontal.

Figura 1. En su “Meditatiunculae” Guidobaldo anoto en 1592 sus resultados sobre la trayectoria de los proyectiles (Reen, 2009)

Galileo en el Teorema I, proposición I de su obra *Consideraciones y demostraciones* *matemáticas sobre dos nuevas ciencias*, plantea sus conclusiones sobre las trayectorias de proyectiles.

> *"Un proyectil que se desliza con un movimiento compuesto por un movimiento horizontal y uniforme y por un movimiento descendente, naturalmente acelerado, describe, con dicho movimiento, una línea semiparabólica"* (Galileo, 1638).

Sobre como llego a este resultado, y a otros mas, se ha especulado sobre si Galileo experimento o no. Desde 1939 Koyré (1990) conjeturo que sus experimentos fueron experimentos pensados. Sin embargo, hoy día, hay estudios que sostienen que Galielo realmente experimento y se conjetura como lo hizo con base en su obra, especialmente en sus manuscritos, la reproducción de sus experimentos y contrastando los datos obtenidos con los que plasma Galileo en sus folios (Settle, 1961; 1973, 1978; Álvarez y Posadas, 2003; Naylor, 1974, 1980).

Álvarez y Posadas (2003) utiliza el arreglo experimental de la figura 2 y contrasta los datos obtenidos con los que Galileo presenta en sus folios, particularmente en el folio 116 v.

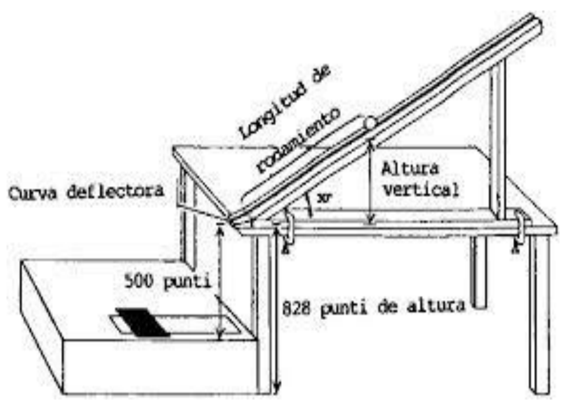


Figura 2. Arreglo experimental propuesto por Álvarez y Posadas (2003) para reproducir el experimento de Galileo

En el diseño de aprendizaje de esta etapa se propone a los participantes modelar la trayectoria de un proyectil utilizando una simulación del experimento utilizado por Galileo, elaborada por nosotros en Unity, recoger datos y ajustarlos por diferentes procedimientos. Esta actividad se desarrolla en equipos de dos o tres participantes.

Se comparten las producciones de los equipos y con base en estas y en los folios 116v y 181r de los manuscritos de Galileo se analiza, en una discusión grupal, a la parábola como modelo para la trayectoria de un proyectil. Para ello se analizan las intenciones, los procedimientos y los argumentos al modelar.

Las parábolas en esta práctica no son figuraciones del devenir del movimiento oresmianas, o gráficas cartesianas de nuestros tiempos que relaciona el desplazamiento vertical con el tiempo. El tiempo no está presente, es una relación entre desplazamientos "visibles" del móvil. El tiempo aún no entra en escena.

Tercer diseño

En la época de Galileo prevalecían diversas conjeturas entorno a la relación entre las distancia que recorrían un objeto en caída libre y sus velocidades. Por ejemplo, Leonardo Da Vinci enuncia la relación que guardan la velocidad con la distancia recorrida por un objeto en la caída libre (Álvarez, 2012): *El cuerpo que se mueve con movimiento natural adquiere en cada estadio de movimiento estadios de velocidad; tales estadios (de velocidad) se encuentran en la misma proporción el último respecto al penúltimo como el segundo respecto al primero.*

Esta formulación relaciona de forma lineal la velocidad y la distancia recorrida, que trae como consecuencia una modelo exponencial entre las distancias recorridas y el tiempo.

Galileo cree en esta relación como un "principio indudable" como lo expresa en una carta a Paolo Sarpi (1552-1623) del 16 de octubre de 1604:

> Reflexionando sobre los problemas del movimiento, para los cuales, y a fin de demostrar los accidentes por mi observados, me faltaba un *principio totalmente indudable* que pudiera poner como axioma, he llegado a una proposición que tiene mucho de natural y evidente;... Y el principio es el siguiente: Que el móvil natural va aumentando de velocidad en la misma proporción en que se aleja de su punto de partida G. Galilei, (Carta a Paolo Sarpi, citada en Koyré, 1990, p. 76).

Mas adelante Galileo corrige su error y así lo expresa en un pasaje de los Discorsi:

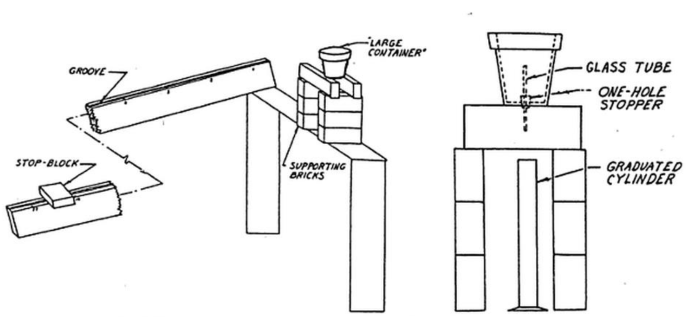
> Debemos, ahora, tratar del movimiento acelerado... en cuanto determinemos teóricamente que un movimiento es uniformemente y, del mismo modo, continuamente acelerado, cuando en tiempos iguales, se los tome de la forma que se quiera, adquiera incrementos iguales de velocidad. . . Por eso, creo que no nos apartamos en absoluto de la recta razón si admitimos ´ que la intensidad de la velocidad crece según el incremento del tiempo (Álvarez, 2012, p. 38).

La manufacturación del tiempo por Galileo fue de fundamental importancia para determinar la relación entre los tiempos, las distancias recorridas y las velocidades de un cuerpo en caída libre.

Galileo en los Discorsi relata como realizó el experimento

> En lo que respecta a la medida del tiempo, se empleaba un gran cubo lleno de agua, suspendido en alto, del cual, por un delgado canalito soldado en su fondo, caía un fino hilo de agua que se recogía en un pequeño vaso, durante todo el tiempo en que la bola descendía por el canal y por sus partes. Luego, las partículas de agua recogidas de este modo, se iban pesando cada vez con una balanza exactísima, dándonos las diferencias y proporciones de sus pesos, las diferencias y proporciones de los tiempos; y esto con tal precisión que, como ya he dicho, repetidas una y otra vez estas operaciones, nunca diferían de modo apreciable (*Discorsi*, *Opere*, VIII, pp. 212-214).

En palabras de Romo (2005, p. 20) “Su afirmación final es cuando menos chocante: su balanza tiene una precisión de 0.1 miligramos. No es extraño que, en su respuesta, Baliani ignore totalmente el método propuesto por Galileo para la medida del tiempo y, en su lugar, prefiera utilizar un péndulo de periodo conocido”.



(Left) General layout of the experimental apparatus. (Right) The timing apparatus.

Figura 3. Arreglo experimental utilizado por Settle (1961) para validar el experimento de los Discorsi

Settle (1961) con la intención de validar lo dicho por Galileo en los Discorsi, reproduce el experimento con algunos cambios y concluye que es posible la experimentación (figura 3).

Naylor (1974) refuta los resultados de Settle argumentando que no reprodujo fielmente el experimento de los Discorsi y reproduce el experimento de acuerdo a las especificaciones de Galileo en los Discorsi concluyendo que

> It does not appear plausible that Galileo confirmed his theory with the accuracy claimed, using this experiment (No es plausible que Galileo confirmara su teoría con la precisión que afirma, usando este experimento) (Naylor 1974, pp. 133).

Una conjetura sobre la manufacturación del tiempo por Galileo es la que descansa en sus habilidades musicales (Díaz y Arrieta, 2015, Naylor, 1974). Con base en esta conjetura se propone a los participantes experimentar con una esfera rodando en un plano inclinado. En este experimento el tiempo es manufacturado por medio del ritmo de los sonidos que emite la esfera al rodar por el plano inclinado.

En este tercer diseño de aprendizaje se propone a los participantes del laboratorio, organizados en equipos, modelar el movimiento de una esfera rodando en un plano inclinado reproduciendo el experimento con base en la manufacturación del tiempo por medio del ritmo de los sonidos que emite la esfera al rodar por el plano inclinado. Para la reproducción del experimento se utiliza una simulación digital, elaborado por nosotros en Unity, que se puede correr en múltiples dispositivos electrónicos. Posteriormente, con base en las producciones de los participantes y los folios 107v y 107r se analizan a la parábola como herramienta para la modelación de la distancia recorrida de la esfera al rodar por el plano inclinado, los tiempos y las velocidades.

Consideraciones finales

El laboratorio contribuirá a dilucidar las practicas de modelación del movimiento de Galileo, particularmente la emergencia de lo cuadrático. Los entendimientos al respecto sin duda contribuyen al diseño de actividades para ser incorporadas al discurso matemático escolar.

El participante distinguirá las prácticas de modelación y sus modelos, en este caso las parábolas, que se proponen en cada etapa. La parábola que se obtiene de la intersección de un cono con un plano, una "parábola estática", es utilizada por Galileo para modelar una trayectoria de un proyectil que se esta moviendo. Este hecho no es menor en la producción de Galileo, pues plantea la relación cuadrática entre los desplazamientos horizontal y vertical del proyectil. Hecho que en sus tiempos no estaba establecido. Los participantes distinguirán las parábolas que se utilizan en las dos prácticas con base en las intenciones, argumentos y procedimientos.

La relación entre la parábola de Apolonio y la trayectoria de un proyectil con los tiempos y las distancias recorridas de un objeto en caída libre es una genialidad que Galileo establece a partir de datos experimentales y herramientas numéricas, figurales y lenguaje natural (italiano y latín). Esta relación, el participante la puede vivir, al reproducir las prácticas de Galileo con herramientas tecnológicas y un diseño de aprendizaje adecuado.

Mas allá de las intenciones didácticas, en la cuestión teórica, aporta un método

1. para validar hipótesis del proceder de actores en la historia desde la cognición en conjunción con textos originales;
2. para analizar las herramientas en un doble proceso: su deconstrucción que muestra lo diverso de las parábolas y la articulación de estás en una red;
3. para el análisis situacional de las herramientas utilizadas en la práctica a partir de tres elementos: intenciones, procedimientos y argumentos.

Referencias bibliográficas

Álvarez, J. y Posadas, V. (2003). La obra de Galileo y la conformación del experimento en la física. *Revista Mexicana de Física,* 49 (1): 61–73.

Álvarez, J. (2012). El fenómeno de la caída de los cuerpos. *Revista Mexicana de Física,* 58: 36–40.

Arrieta, J. y Díaz L. (2015). Una Perspectiva de la Modelación desde la Socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa,* 18 (1): 19-42.

Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento.* Barcelona: Gedisa.

Díaz, L. y Arrieta, J. (2015). Una deriva de tiempos en la obra de Galileo. En actas de la *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática, CIAEM.* Tuxtla Gutiérrez, México. Recuperado de

http://xiv.ciaem-iacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/1196/478

Galicia, A. (2015). *Desplazamiento de la práctica de diluciones desde la comunidad de ingenieros bioquímicos a la escuela.* Tesis doctoral no publicada. Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero. México.

Galilei, G. (1890-1909). *Le Opere di Galileo Galilei.* Florencia: Edizione Nazionale.

Galilei, G. (1638). *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas* *ciencias.* Recuperado de https://cienciaescolar.files.wordpress.com/2009/05/galileo-galilei.pdf

Drake, S. (1978). *Galileo at work: his scientific biography*. Chicago: University of Chicago Press.

Koyré, A. (1980). *Estudios Galileanos*. Madrid: Siglo XXI.

Naylor, R. (1974). Galileo and the Problem of Free Fall. *The British Journal for the History of Science*, 7: 105-134.

Naylor, R. (1980). Galileo's Theory of Projectile Motion. *Isis*, 71 (4): 550-570.

Reen, J. (2009). La revolución de Galileo y la transformación de la ciencia. *Investigación y Ciencia*, 394: 50-59.

Romo, J. (2005). ¿Hacía Galileo experimentos? *Theoria*, 52: 5-23.

Settle, T. (1961). An Experiment in the History of Science. *Science*, 133: 19-23.

Autores

Jaime Arrieta Vera; Instituto Tecnológico de Acapulco. México; jaime.arrieta@gmail.com
Leonora Díaz Moreno; Universidad de Valparaíso. Chile; leonora.diaz@uv.cl
Brenda Pamela Barrios Enriquez; pamelabarrios.07@gmail.com
Ricardo Benítez Jiménez; ; benitezjimenezricardo@gmail.com
Noé Castellanos Rebolledo;
Grecia Itzel García Hernández; grecia.igh@gmail.com

Onésimo Ramos Magallón; ; orramosmagallon@me.com

MODELACIÓN GRAFICACIÓN PARA LA MATEMÁTICA ESCOLAR

Liliana Suárez Téllez, Blanca Rosa Ruiz Hernández, José Luis Torres Guerrero, Adriana Gómez Reyes, Claudia Flores Estrada, Víctor Hugo Luna Acevedo.

Resumen

El propósito de este laboratorio es presentar un ejemplo de cómo la modelación y la graficación contribuyen a la conformación un marco de referencia útil para el docente y que presumiblemente favorece el uso de la Modelación y la Graficación con uso de tecnología en la clase. A partir de este ejemplo, se espera que los participantes diseñen, de acuerdo a la asignatura de su interés y su contexto educativo, una situación de modelación del movimiento. En este escrito, desde el punto de vista teórico, se explica la conformación de una epistemología que articula la modelación, la graficación y la tecnología y el diseño de una situación de modelación para favorecer los usos de las gráficas. Desde la perspectiva de la innovación educativa, se espera discutir de manera conjunta elementos para establecer un eje de Modelación y Graficación con Tecnología que los docentes incorporen en sus prácticas en un ambiente tecnológico.

Palabras clave: modelación, graficación, precálculo, tecnología, innovación didáctica

Introducción

La incorporación de la tecnología en los salones de clases aún es un tema pendiente en el ámbito educativo (Romero, 2014). En México existen diversos esfuerzos que convocan a alumnos, profesores e investigadores a discutir, formar, construir y entender, nuevos enfoques en aprendizaje y enseñanza en matemáticas con la incorporación de las herramientas tecnológicas, sin embargo, no podemos ocultar la situación general de uso insuficiente, desinterés y desconocimiento de su potencial en la organización del estudio en matemáticas. Algunas investigaciones en Matemática Educativa han señalado la necesidad de plantear marcos de referencia para la matemática escolar que tomen en cuenta categorías de uso del conocimiento (Suárez, 2014) como su relación con la vida, con lo cotidiano (Cordero, 2014) o con la realidad (Villa-Ochoa y Jaramillo, 2011). Estos señalamientos tienen su justificación en los resultados de investigaciones que reportan cómo el conocimiento matemático cobra una mayor significación en la relación del aprendizaje de las matemáticas con los aspectos personales, profesionales y cotidianos de un individuo. En una revisión de los planes de estudio de bachillerato del Instituto Politécnico Nacional, desde una perspectiva de uso de las gráficas (Cordero, Cen y Suárez, 2010), fue sorprendente ver el amplio espectro de gráficas que se trabajan en los seis semestres. Por otro lado, en otras materias y en otros contextos, estudiantes y profesores se encuentran inmersos en un mundo que recurre de maneras diversas a ese universo de gráficas. En el mejor de los casos, reconocen la necesidad de un dominio de este conocimiento pero para los profesores surge el cuestionamiento sobre lo poco que saben los estudiantes del uso de las gráficas. Situaciones similares podríamos encontrar si revisamos el papel de la modelación, sobre todo con el uso de la tecnología. El contraste entre lo que la sociedad demanda en los ámbitos mencionados y lo que efectivamente logran los estudiantes revela una brecha que requiere articular los resultados de la investigación que aporten al docente profesional elementos para diseñar innovaciones (Ortega, Ramírez, Torres, López, Servín, Suárez, y Ruiz, 2007) y organizar un aprendizaje de los estudiantes más pertinente.

Marco teórico. La modelación desde una perspectiva de prácticas sociales

Existen diversos elementos de construcción a tomar en cuenta si se quiere mirar a la Modelación desde una perspectiva socioepistemológica. La búsqueda de resignificación del conocimiento, la búsqueda de categorías de conocimiento, el rompimiento del carácter universal de la construcción y la formulación de nuevas acciones para el diseño de situaciones que modelen la actividad humana requieren de una aproximación sistémica. Los elementos didácticos, cognitivos y epistemológicos conforman una de las visiones sistémicas más aceptadas en la disciplina. Sin embargo la diversidad de marcos teóricos y aproximaciones de investigación tienen un menor o mayor énfasis en estos elementos.

La aproximación socioepistemológico los retoma pero los permea con hipótesis propias de construcción social de conocimiento:

- Nos interesa la matemática funcional (Buendía y Cordero, 2005), es decir aquel conocimiento matemático que deberá integrarse a la vida para transformarla, reconstruyendo significados permanentemente.
- El volumen y el carácter de los conocimientos adquiridos por el hombre vienen determinado por el nivel de desarrollo de las prácticas sociales (Arrieta, 2003, Muñoz, 2006), es decir, por el grado de su dominio sobre el mundo exterior.
- La construcción del conocimiento matemático está en correspondencia con la modelación y el uso de la matemática (Castañeda, 2004) manifestado en un lenguaje de herramientas que resulta de la actividad humana.
- El rediseño del discurso matemático escolar requiere de la formulación de nuevas epistemologías (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez-Sierra, 2006) basadas en las prácticas sociales.

La explicación teórica central será la caracterización de un uso de las gráficas en la modelación y se recurrirá a los elementos del funcionamiento y de la forma del uso del conocimiento tal y como Cordero y Flores lo mencionan:

“Se trata de formular una epistemología del ‘uso de las gráficas’ que determine su desarrollo institucional ante situaciones específicas. El ‘uso’ es la función orgánica de la situación que se manifiesta por las ‘tareas’ que componen la situación, y la forma del ‘uso’ serán la clase de esas ‘tareas’. Las tareas pueden ser actividades, acciones, ejecuciones y alternancias de dominios. (Cordero y Flores, 2007, 13).

La situación específica en este proyecto es la modelación de las ideas matemáticas del cambio y la variación. Las tareas estarán relacionadas con la modelación y la simulación del movimiento y se tendrán evidencias de ellas con las actividades que cumplan en las situaciones planteadas, en las acciones y ejecuciones sobre las gráficas y en la alternancia de dominio que sucederá cuando expliquen ideas matemáticas a través de las características de la situación de movimiento. El propósito del diseño de una epistemología y su puesta a prueba es “Cuando la alternancia de tareas sucede se genera una nueva función orgánica que debatirá con las formas de los usos. A este acto de ‘uso’ se la llamará resignificación de la gráfica de la función en el marco socioepistemológico del Cálculo, donde la graficación es la modelación de las funciones. Esta modelación estará influida por justificaciones funcionales. (Cordero y Flores, 2007, 13).

La búsqueda de las nuevas estructuraciones y concepciones de la matemática escolar y su fundamentación dependen del conocimiento de referencia y de una forma distinta de entender la construcción del conocimiento. La idea nueva es no considerar el carácter universal de las formas de construcción sino la consideración de distintas construcciones.

Dentro de las aportaciones de tomar como centro a la actividad humana se tienen aquellos resultados que nos muestran que la construcción de un conocimiento está ligada a las herramientas que se usan en dicha construcción. El resultado de la investigación de Suárez (2014) es el planteamiento de una epistemología para la modelación escolar caracterizada a través de un uso de las gráficas. Esta epistemología está conformada por dos aspectos de construcción social de conocimiento, el funcionamiento, es decir, aquellas circunstancias relacionadas con el uso y la modelación, que hacen de un conocimiento útil para resolver un problema o para integrar una teoría y la forma, es decir, las clases de tareas que quedan determinadas por el funcionamiento a través de las actividades, acciones y ejecuciones y alternancias de dominio que realizan los estudiantes en una situación específica.

La aproximación socioepistemológica consiste en el estudio sistémico del uso del conocimiento matemático en situaciones específicas. El estudio del Tractatus de Oresme sobre la Figuración de las Cualidades proporciona una explicación de transformación de uso de las matemáticas de la época para abordar la problemática de las situaciones de cambio y variación, esta transformación, caracterizada en este trabajo a partir del debate entre el funcionamiento y la forma del uso de las figuras geométricas, es una explicación de resignificación y aporta los principales elementos de nuestra hipótesis epistemológica sobre el uso de las gráficas en situaciones de modelación del movimiento para resignificar el cambio y la variación.

Método y Diseños didácticos

En este apartado describimos 1) la conceptualización de las actividades llamadas Situaciones de Modelación del Movimiento (SMM) y los elementos que consideramos para su diseño, 2) Los momentos de la SMM que están en relación con los aspectos teóricos del apartado anterior y establecen una secuencia de actividades a llevar a desarrollar y 3) los elementos principales de la que esperamos constituyan las realizaciones didácticas por parte de los participantes del laboratorio.

Diseño de una Situación de Modelación del Movimiento

La *Situación* entendida como el conjunto de condiciones de un fenómeno o pregunta que propicie una problematización, será el instrumento metodológico que permita el desarrollo de acciones en el sistema didáctico. Se usa el término Situación en un sentido amplio derivado del propuesto por Brousseau (1999). Él menciona "*Hemos llamado 'situación' al modelo de interacción de un sujeto con cierto medio que determina un conocimiento dado como el recurso del que dispone el sujeto para alcanzar o conservar en este medio un estado favorable.*". De esta manera una 'situación de modelación del movimiento' será el conjunto de características de las tareas y clases de tares que realizará el estudiante y que están condicionadas por los datos epistemológicos que aporta la categoría Modelación-Graficación.

Como una consecuencia de los supuestos teóricos y con la finalidad de observar el 'uso de las gráficas en la modelación' el diseño de las secuencias de enseñanza se encuentra soportado por la epistemología y se centra en una situación que incluye un conjunto de tareas que determinan los siguientes tipos de actividades, acciones y alternancias de dominios en los estudiantes.

Momento I. Establecimiento de la forma del nuevo funcionamiento de las gráficas en la modelación. (SMM-MI)

- Presentación de la situación de movimiento. El profesor narra las características de una situación de movimiento y pide a los estudiantes que hagan una gráfica de la situación del movimiento. Con esta actividad se genera en el estudiante una necesidad de usar sus conocimientos personales sobre gráficas y funciones para modelar la situación de movimiento planteada.
- Modelo gráfico. Se organiza el grupo en equipos de tres o cuatro estudiantes para realizar la tarea de hacer a papel y lápiz un bosquejo de la gráfica del movimiento. Se observa por medio de un monitoreo en cada equipo el tipo de decisiones que toman para realizar la tarea asignada.

Momento II. Construcción de argumentos en el uso de las gráficas en la modelación. (SMM-MII)

- Descripción del modelo gráfico. Los equipos exponen sus gráficas a todo el grupo y explican porqué corresponden con la situación de movimiento. También escuchan y discuten las gráficas de otros equipos.
- Simulación del movimiento. Los estudiantes trabajan en equipo para simular físicamente las condiciones de la situación de movimiento que se estudia. Usan calculadoras y sensores para obtener las gráficas. Se promueve que los estudiantes hagan realizaciones múltiples, identifiquen patrones, realicen ajustes en las condiciones del movimiento (tiempo, distancia, velocidad) en la simulación para obtener las gráficas deseadas. Se espera que los estudiantes desarrollen explicaciones del contraste entre las gráficas de los modelos gráficos que conjeturaron, a papel y lápiz, y las gráficas obtenidas en la simulación, a través del uso de tecnología.

Momento III. Puesta en funcionamiento del uso de las gráficas en la modelación (SMM-MIII)

- Nueva descripción del modelo gráfico. Los estudiantes usan los argumentos construidos para coordinar el comportamiento de las gráficas con las características del movimiento.

Realización didáctica. La instrumentación de la Situación de Modelación del Movimiento

El propósito de la instrumentación de los Diseños de Situación de Modelación del Movimiento es buscar evidencias para construir un argumento que confirme nuestra hipótesis de investigación y, así, aportar algunos elementos para explicar la institucionalización de una *práctica de modelación escolar*. En esta sección se explica la manera en cómo se instrumenta la SMM, quiénes participan, qué instrumentos tecnológicos se utilizan, cuál es la dinámica de trabajo, en qué escenario se aplica y en qué tiempos

Consideraciones para la puesta en escena

La puesta en escena de una Situación de Modelación del Movimiento requiere de un grupo interesado de estudiantes con algunos elementos de graficación de funciones. Se requiere de un espacio físico, materiales e instrumentos tecnológicos para realizar y registrar la simulación del movimiento. Además, para fines de la investigación se sugiere contar con equipo de grabación y registro. En este caso se obtendrán datos en videos, reportes del trabajo realizado, pantallas de calculadoras y, si es posible, registros con notas del monitoreo de los equipos.

Los participantes y la dinámica

Las Situaciones de Modelación del Movimiento que aquí se presentan se han instrumentado con diversos grupos de participantes en diferentes contextos: en talleres extracurriculares de estudiantes, en clases cotidianas con estudiantes de cursos de Precálculo o Cálculo, en programas de formación de profesores y en talleres enmarcados en congresos nacionales e internacionales (Suárez, Carrillo y López, 2005, Suárez, Flores, Gómez y Licona, 2004). A continuación describimos quienes son los participantes y en cuáles son sus principales roles.

Los actores de esta puesta en escena son: un profesor, los estudiantes organizados en equipos de tres o cuatro integrantes y los monitores. El rol principal del profesor es coordinar a todos los actores con el propósito de que los estudiantes realicen las tareas marcadas por los tres momentos del diseño de la Situación de Modelación del Movimiento.

Los profesores	**Los estudiantes**	**Los monitores**
-Organizan a los estudiantes en equipos de tres o cuatro integrantes. Entregan un conjunto de problemas a resolver en la sesión. - Hacen recomendaciones para el trabajo en equipo y la elaboración de reportes. - Participan, básicamente con preguntas y sugerencias, según los lineamientos de cada problema. Regulan su intervención en la validación de las soluciones de los equipos. - Atienden al trabajo de todos los equipos para decidir el orden de la presentación de las soluciones.	- Trabajan en equipos de hasta cuatro integrantes en la resolución de un conjunto de problemas. - Elaboran un reporte escrito, por equipo, que registra, lo más fielmente posible, el proceso de solución. - Organizan su presentación oral de sus soluciones a todo el grupo de estudiantes de la sesión.	- Contribuyen a la organización del trabajo del equipo por medio de recomendaciones sobre la elaboración de reportes, el trabajo en equipo y la discusión matemática. - Atienden al trabajo del equipo y participan, básicamente con preguntas y sugerencias, según los lineamientos preestablecidos. - Apoyan en el uso de la calculadora y los sensores.

Tabla 1. La resolución del problema en equipo. Tomado de Suárez, 2000.

El trabajo en equipo y la discusión grupal son las modalidades de trabajo de los estudiantes durante las sesiones del taller de modelación. Los estudiantes trabajaban en equipos de tres o cuatro integrantes bajo el monitoreo de un profesor. El monitoreo tenía varios propósitos, 1) contribuir a que el equipo no se paralizara contribuyendo con preguntas en la resolución del problema, 2) hacer recomendaciones para que hubiera un trabajo en equipo 'genuino' procurando la participación de todos los integrantes en la actividad y para que escribieran un reporte con sus avances 3) registrar observaciones sobre el trabajo desarrollado por el equipo y, 4) atender las dudas del equipo con respecto al manejo de la tecnología o el propósito de la actividad. La discusión grupal tenía como propósito poner en común en todo el grupo el trabajo realizado en los equipos.

Los profesores	**Los estudiantes**	**Los monitores**
-Formulan explícitamente sus expectativas con respecto a cada uno de los equipos que presentan su solución. - Dirigen la discusión de las soluciones según el guión de la discusión del problema correspondiente.	- Presentan, por equipo, si se les solicita, sus soluciones al resto del grupo. - Intervienen en la presentación de las soluciones de los otros equipos con el propósito de validarlas como grupo.	-Toman nota para elaborar el documento que contrasta lo que ocurrió en el equipo y se registró en el reporte y lo que se presentó al grupo y se discutió. -Participan en la discusión de las soluciones según el guión de la discusión del problema.

Tabla 2. La presentación y la discusión de soluciones. Tomado de Suárez, 2000.

La actividad de aprendizaje, un ejemplo

Epifanía

"Valentina llegó temprano a su clase de música. A punto estaba de sentarse cuando advirtió que había olvidado su cuaderno en su refugio predilecto: la siempre cómoda y acogedora biblioteca. No podía perderse el comienzo de la clase, así que fue a la biblioteca, cogió su cuaderno y regresó a su asiento, a tiempo para comenzar su, probablemente disfrutable, clase de música. Pero en el camino se encontró a su bienamado Juan y se detuvo a intercambiar algunas muestras de su muy auténtico cariño, lo que le llevó 4 minutos, pero de los largos, lo que la obligó a recuperar estos instantes, tan bien aprovechados, porque cuando salió del salón no previó la Epifanía".

La biblioteca está en un punto diametralmente opuesto del salón de música en el patio circular, que tiene 500 metros de diámetro, de la escuela. Valentina tardó en total 9 minutos.

1) Construye una gráfica que describa los cambios de posición de Valentina en su trayecto de ida y vuelta con respecto al tiempo.
2) Todos hemos escuchado o hecho descripciones de objetos en movimiento, que incluyan expresiones como 'detenido', 'rápido', 'lento', 'más rápido', 'disminuyó su velocidad', 'más alejado', 'aceleró más', y muchas otras que seguramente te han asaltado la memoria. Identifica en la gráfica algunas partes con estas expresiones y describe las características de la gráfica que les corresponden.
3) Convengamos en que la velocidad de Valentina es positiva cuando se dirige a la biblioteca y negativa en sentido contrario. Identifica en la gráfica intervalos en los que la velocidad sea negativa, positiva o nula, y describe las características de la gráfica, al igual que en el párrafo anterior, introduce matices en la descripción de la velocidad y anota las características

correspondientes de la gráfica.

Simulación (Instrucciones proporcionadas en forma verbal)

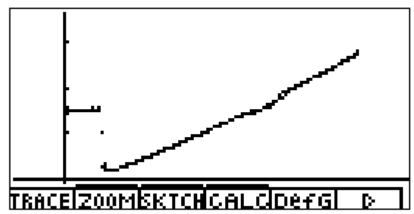
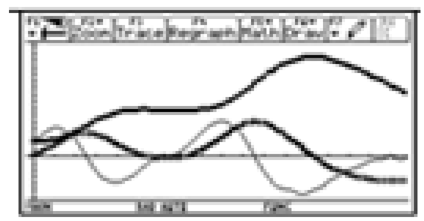
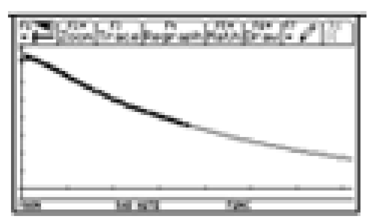
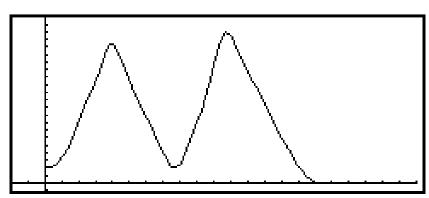
1) Diseña una simulación del movimiento de Valentina tomando en cuenta el alcance del sensor (de medio a seis metros).

1) Realiza el movimiento frente al sensor, discute las gráfica que obtuviste.

Figura 1. Texto de la secuencia propuesta en la Sesión 3 del taller TEMM.

Ideas para el diseño de situaciones de modelación del movimiento

En la siguiente tabla se identifican usos de las gráficas para introducir ideas matemáticas a través de una modelación graficación de las funciones que se trabajan en los planes y programas de estudio de bachillerato (Cordero, Cen, Suárez, 2010).

	Aspectos matemáticos y problematización del cambio	**Uso de las gráficas**
I	La linealidad Movimiento de una persona con velocidad constante	
II	Tratamiento simultáneo de dos o tres órdenes de variación. Gráficas de posición, velocidad y aceleración de un móvil.	
III	Lo asintótico Lo exponencial Decaimiento de la temperatura.	
IV	Lo derivable Gráfica de posición con picos	

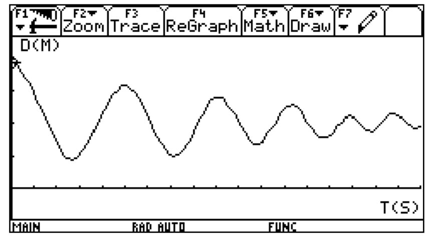
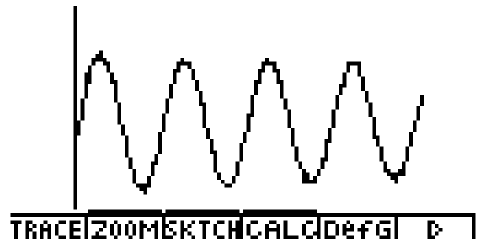
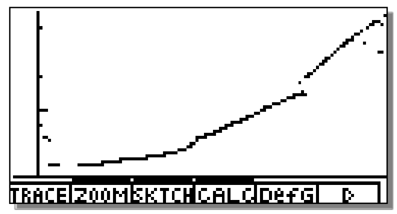
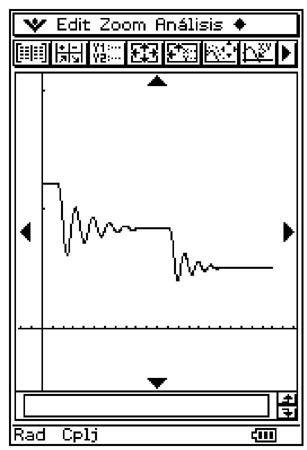
V	Estabilidad Lo periódico Movimiento amortiguado	
VI	Periodicidad Movimiento pendular	
VII	Discontinuidad Funciones a trozos Movimiento de dos o más móviles	
VIII	Estabilidad Funciones a trozos Continuidad Derivabilidad Solución de ecuaciones diferenciales Movimiento oscilatorio de un móvil durante la acción de dos fuerzas	

Tabla 3. Diversos usos de las gráficas en la problematización del cambio. Tomado de Suárez, 2014.

Las gráficas han sido obtenidas con propósitos exploratorios en ambientes tecnológicos donde se han trabajan Situaciones de Modelación del Movimiento S(MM). Hay una excepción, en el caso III se ha trabajado con una situación de disminución de temperatura. Se cumplen las características de una S(MM) pero la toma de datos es con un sensor de temperatura. La problematización del cambio a partir del estudio del movimiento nos ha proporcionado evidencias de la resignificación de la variación, sin embargo, algunas experiencias exploratorias con otras variables, como en el caso III de la tabla anterior hacen plausible la extensión hacia el estudio del uso de las gráficas a otros fenómenos. Esta variedad de experiencias propuestas para desarrollar una modelación escolar en el bachillerato basada en la categoría Modelación-Graficación delinea una línea de investigación a desarrollar.

Consideraciones finales

Recapitulando, en el Diseño de la Situación de Modelación del Movimiento entran en juego un conjunto de elementos de la siguiente manera. Por un lado, 1) la situación establecerá como condición el uso de las gráficas para estudiar un fenómeno de variación, de tal manera que sea propensa a generar, por parte del estudiante y el profesor, un conjunto de preguntas sobre la variable con respecto al tiempo, o sobre cómo cambia, esta variable será, principalmente la distancia de un móvil a un punto fijo de referencia, pero se pueden usar en otras variables físicas, 2) la situación será susceptible a simularse mediante una toma de datos de la variable (distancia, temperatura) en diversos instantes de tiempo generando por parte del estudiante múltiples realizaciones, identificación de patrones, realización de ajustes y desarrollo en el razonamiento, 3) en el Diseño de Situación de una Situación de Modelación del Movimiento se espera encontrar la construcción de argumentos relacionados con el funcionamiento del uso de las gráficas en la modelación, se espera que los estudiantes realicen una reorganización de sus conocimientos para establecer una nueva forma del uso de las gráficas para la realización de estas tareas y, también se espera, que los estudiantes hagan funcionales algunos de los argumentos construidos. Es por eso que, para fines de análisis del D(SMM) se identifican tres momentos, que por lo descrito anteriormente no se espera que aparezcan de forma secuencial.

En una Situación de Modelación del Movimiento se problematiza el cambio y la variación. El hecho de plantear preguntas en una gráfica sobre cómo cambia, aumenta o disminuye, la posición de un móvil que se desplaza de un lugar a otro, propicia la creación de los argumentos que establecen relaciones entre la situación de movimiento y las características de la gráfica: la velocidad como la inclinación de una recta que da la inclinación en los puntos de la curva, la comparación de la distancia recorrida en un tiempo determinado y los patrones de ‘ida y vuelta’ o ‘aceleración’ o ‘desaceleración’. Con un diseño de situaciones con estas características se establece un discurso que permite al estudiante resignificar la variación mediante un nuevo uso de las gráficas que inicia con un interés por estudiar fenómenos de variación a través de gráficas y pasa por tres etapas en las que primero toma decisiones, asigna significados y genera procedimientos estableciendo la forma del conocimiento para construir argumentos que pondrá en funcionamiento, completando un ciclo en el que tiene una resignificación de la variación. El hecho de que no hayan surgido de manera espontánea el tratamiento analítico de la situación propuesta es coherente con el planteamiento de que la modelación-graficación es una categoría que puede configurar una construcción independiente al desarrollo analítico del Cálculo. Esta construcción puede constituirse como un eje que recorra, por ejemplo, los seis semestres de matemáticas del bachillerato, trabajando a la par que se introducen las funciones lineales, cuadráticas, polinomiales, trigonométricas, exponenciales, logarítmicas, discutiendo las características de éstas que pueden relacionarse con sus gráficas estableciendo relaciones a través de la discusión de la variación que condensan las funciones.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula. Tesis de Doctorado no publicada del Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav–IPN.

Brousseau, G. (1999). Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación Matemática*, 12, 1, 5-38.

Buendia, G. y Cordero, F. (2005). Prediction and the Periodical Aspect as Generators of Knowledge in a Social Practice Framework: A Socioepistemological Study. *Educational Studies in Mathematics*, 58, 3, 299-333.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J., Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking. L. Radford & D'Amore, B. (Guess Editors) 27-46.

Castañeda, A. (2004). Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión. Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN, México.

Cordero, F. (2014). Matemáticas y el Cotidiano. Diplomado Desarrollo de estrategias de aprendizaje para las matemáticas del bachillerato: la transversalidad curricular de las matemáticas Módulo III, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N., Departamento de Matemática Educativa, México, D.F.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 10, 1, 7-38.

Cordero, F., Cen, C. y Suárez, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13, 2*, 187-204.

Luna, V.H. y Suárez, L. (2013). Elements of Graphic Contrast in a Situation of Modeling and Variation. In M. Martinez & A. Castro Superfine (eds.) Proceedings of the 35th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Chicago, IL: University of Illinois at Chicago. P. 1197.

Muñoz, G. (2006). Dialéctica entre lo conceptual y lo algorítmico relativa a un campo de prácticas sociales asociadas al cálculo integral: aspectos epistemológicos, cognitivos y didácticos. Tesis de Doctorado no publicada del Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Ortega, P., Ramírez, M.E., Torres, J.L., López, A.E., Servín, Y., Suárez, L. y Ruiz, B. (2007). Modelo de innovación educativa. Un marco para la formación y el desarrollo de una cultura de la innovación. *RIED: revista iberoamericana de educación a distancia*. 10, 1-2, 145-173.

Romero, P. (2014). Integración de las TIC en la práctica de la docencia, el caso de la ESIME Unidad Profesional Ticomán. Tesis No Publicada de la Maestría en Docencia Científico y Tecnológica del CIECAS-IPN: México, D.F.

Suárez, L. (2014). Modelación-graficación para la matemática escolar. Diaz de Santos: México.

Suárez, L. y Ruiz, B. (2010). Matemática Educativa en la Innovación Educativa. Memorias de la XIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa. ITESM, Campus Monterrey. Pág. 262- 266.

Suárez L., Carrillo C, y López J. (2005). Diseño de gráficas a partir de actividades de modelación. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 18, 405-410.

Suárez, L.; Flores, C.; Gómez, A. y Licona, R. (2004). Uso de las Gráficas a través de Actividades de Modelación Matemática con Calculadoras y Dispositivos Transductores". Resumen del taller presentado en el Quinto encuentro de televisión y nuevas tecnologías educativas. DTE-IPN

Villa-Ochoa, J. & Jaramillo, C. (2011). Sense of Reality Through Mathematical Modelling. In G. Kaiser et al. (eds.), Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling, International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling. Springer Science+Business.

Autores

Liliana Suárez Téllez; IPN. México; lsuarez@ipn.mx
Blanca Rosa Ruiz Hernández; ITESM. México.
José Luis Torres Guerrero; IPN. México.
Adriana Gómez Reyes; IPN. México.
Claudia Flores Estrada; IPN. México.
Víctor Hugo Luna Acevedo; IPN. México.

MATEMÁTICA FUNCIONAL. RESULTADOS DE UN PROGRAMA SOCIOEPISTEMOLÓGICO

E. Johanna Mendoza Higuera, Claudio Opazo Arellano, Rosario Pérez López, Irene Pérez-Oxté, Julio Yerbes González

Resumen

La discusión y reflexión del laboratorio está centrado en caracterizar la evolución de los aportes teóricos, el tratamiento a un modelo de comunidad de conocimiento matemático y los usos del conocimiento que se han logrado identificar hasta el momento dentro de un Programa Socioepistemológico. De tal suerte que en un futuro se puedan articular y ofrecer modelos que favorezcan formas de intervención al sistema educativo. Para ello, se analizarán trabajos desarrollados bajo este programa en tres momentos: el reconocimiento del discurso matemático escolar como problemática fundamental, la matemática funcional y las categorizaciones del conocimiento del nativo.

Palabras clave: matemática funcional, usos del conocimiento matemático, discurso matemático escolar

Propósito y alcance

Los participantes cuyo perfil pueden ser estudiantes, investigadores en formación o profesores podrán incorporarse a un ambiente de reflexión sobre los alcances y los resultados que se han realizado dentro de un Programa Socioepistemológico. Se pretende dirigir la reflexión en tres momentos: una crítica al discurso matemático escolar como problemática fundamental, en esta crítica la intención es evidenciar y ejemplificar los fenómenos de Opacidad, Exclusión y Adherencia que se encuentran presentes en tal discurso, de tal suerte que esto nos lleve a plantear la pertinencia de construir marcos de referencia a partir de los usos del conocimiento matemático. En un segundo momento se pretende discutir la matemática funcional y su posible intervención en el sistema educativo, es así que al considerar la intervención tiene cabida el tercer momento donde se pretende exhibir las categorías del conocimiento matemático que han surgido a partir de los usos del conocimiento matemático en comunidades específicas.

Introducción

El presente escrito dibuja el proceso de construcción y desarrollo de investigaciones que se enmarcan en un Programa Socioepistemológico. En estas se reconoce que el discurso matemático escolar (dME) es la problemática fundamental por lo que es necesario rediseñarlo. Es así que a partir de la Teoría Socioepistemológica se propone que la Construcción Social de Conocimiento Matemático debe ser la clave para el rediseño del discurso matemático escolar (Cordero en prensa). Por ello, se pretende analizar y caracterizar marcos de referencia que den cuenta de elementos propios en el uso del conocimiento matemático en comunidades específicas.

En Cordero (en prensa) se explicita que la categoría de modelación es lo que se tendría que desarrollar en el sistema educativo, para poder obtener resignificaciones del conocimiento matemático apoyándose de los marcos de referencia que se construyen a partir de los usos del conocimiento matemático que tienen lugar en determinadas prácticas, las cuales una vez identificadas deben ser reinterpretadas con una intencionalidad para que puedan ser integradas al sistema didáctico.

El presente laboratorio didáctico se estructura en tres momentos, de tal suerte que en un primer momento, se desea subrayar la importancia de los objetivos de la Matemática Educativa como disciplina científica. Según Cantoral y Farfán (2003), se ocupa del estudio de los fenómenos didácticos ligados al saber matemático, así como también de la necesidad de dotar a la investigación de una aproximación sistémica y situada, que incorpore las cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento matemático: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza.

Específicamente, la teoría Socioepistemológica ha propuesto al dME como la problemática central que denuncia la centración que existe al objeto matemático, desde los distintos consensos y formas de establecer la matemática escolar (Cantoral, 2013). Así, se pretende exhibir como se sitúa al dME como una fuente de estudio permanente y a la vez, como una oportunidad de proponer un marco de referencia que permita rediseñarlo.

En un segundo momento, se profundiza sobre la matemática funcional en donde la naturaleza de la situación específica genera argumentos de la Construcción Social del Conocimiento Matemático, (Cordero, 2001 y 2008), de ahí que se resalta la necesidad de estudiar el cotidiano de la gente

Finalmente, en un tercer momento, el análisis pretende ubicar categorizaciones del conocimiento del nativo, dicho de otra manera, del sujeto que aprende (Cordero, en prensa). Trastocar la epistemología dominante obliga al reconocimiento y la inclusión de la pluralidad epistemológica a través del diálogo horizontal y recíproco. La transversalidad y funcionalidad de los usos del conocimiento matemático conformarán el marco de referencia que fundamenta la intervención en el sistema educativo.

Marco teórico

La estructura del laboratorio adquiere fundamento en un programa de investigación dentro de la Teoría Socioepistemológica cuyo objeto de estudio es la Matemática funcional.

La postura está en los *usos del conocimiento matemático*, el reconocimiento de *otra epistemología* de naturaleza diferente a la que existe en la matemática escolar, en ese sentido se reconoce que existen varios conocimientos: el de la gente, la matemática escolar y por supuesto el de la obra matemática.

En lo anterior es posible reconocer el objeto de estudio de la Matemática Educativa, en Cordero (en prensa) se hace referencia a los estudios transversales en diferentes escenarios como son, la escuela, el trabajo y la ciudad, aquí se reconocen usos que son resignificados en situaciones específicas y donde la mayoría de las veces la matemática no es el objeto de estudio, por mencionarse algunos, véase Gómez, (2015); Parra, (2015); Pérez, (2012) y Torres, (2013).

La pertinencia de construir una Matemática Funcional surge a la luz de considerar una problemática fundamental centrada en rescatar usos del conocimiento matemático donde intervienen significaciones o resignificaciones con sus respectivos procedimientos que se van construyendo de acuerdo con las operaciones que los participantes son capaces de hacer, con las condiciones que ellos son capaces de capturar y transformar y con los conceptos que van construyendo progresivamente (Cordero, en prensa).

Reflexión didáctica

El laboratorio se divide en tres momentos de reflexión y discusión.

Momento 1. El discurso matemático escolar como fuente de estudio y la pertinencia de construir marcos de referencia.

En este momento la discusión está en reconocer una problemática fundamental del discurso matemático escolar. Por ejemplo, los fenómenos de Opacidad, Adherencia y Exclusión, (Gómez, Silva-Crocci, Cordero y Soto, 2014).

Por ejemplo, el trabajo de Opazo-Arellano, (2014) exhibe cómo el fenómeno de Opacidad está presente en el uso de las gráficas en los estudiantes de pedagogía en matemáticas en Chile. Para ello se analiza la realidad educativa, de la cual se observa una inequidad y olvido, debido a que los trabajos desarrollados en el seno de la Teoría Socioepistemológica, permiten hacer visible la ausencia de un diálogo entre el conocimiento matemático de la escuela y el del cotidiano de la gente. Dicho cotidiano a nuestro parecer expresa una realidad, Cordero, (en prensa), la cual está permeada actualmente por una postura dominante desde una hegemonía y homogeneidad del conocimiento matemático escolar. Que tiene como fundamento, aquellos consensos y bases de comunicación que permean el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática escolar, es decir, el discurso Matemático Escolar.

En este sentido, el dME provoca el fenómeno de opacidad, esto quiere decir que no se hacen visible los usos del conocimiento matemático de la gente, para el caso que se reporta en Opazo-Arellano, (2014), el de los docentes en formación en Chile. Tal situación provoca de manera natural una exclusión de la construcción del conocimiento matemático ya que favorece una adherencia a los significados, procedimientos y argumentaciones que son particulares del dME.

Por otro lado, en el marco del Programa Socioepistemológico donde tiene sustento este laboratorio, se considera que si hay conocimiento, existe una comunidad que lo construye Cordero, Méndez, Parra y Pérez, (2014). Es así que con base en ello, se ha estudiado de manera particular los usos del conocimiento matemático de los docentes en formación a partir del caso de la derivada. Ahí se aprecia una ausencia de diálogo entre las argumentaciones que se proveen en la escuela y aquellas que son particulares de la comunidad de docentes en formación.

Por ejemplo, la escuela presenta la derivada desde la secante que deviene tangente y el límite incremental, acentuando la iteración de funciones, particularmente desde procesos algebraicos. Donde basta adquirir la noción de calcular la primera derivada para determinar con posterioridad cualquier otra solicitada. En contra parte, encontramos el uso del conocimiento matemático de los docentes en formación, donde se aprecia en el estudio del cambio y la variación, argumentos distintos como es el comportamiento tendencial en el análisis local y global de aquello que cambia, (Opazo-Arellano, 2014).

Ahora bien, en Opazo-Arellano, (2014), se propone una epistemología del uso de la gráfica con objeto de controlar la conformación de las actividades y las argumentaciones que proporcionaron los docentes en formación. En ese sentido, también se logra poner a la gráfica como un argumento en sí mismo, el cual soporta el análisis y desarrollo de usos de la gráfica en términos de favorecer la discusión de la simultaneidad de las derivas. Algo relevante en la investigación es que, no se aprecian a simple vista las argumentaciones de la comunidad estudiada, un dialogo entre la propuesta del dME y las argumentaciones de los docentes en formación ya que aparentemente, el primero se aprecia como el verdadero.

De esta manera, la escuela trivializa la reciprocidad, la intimidad y localidad del conocimiento matemático, ya que sostiene una violencia simbólica reiterada desde la instrucción que propone, Soto, (2010). Así, sostener este proceso, no sería justo para la gente, de ahí que tiene sentido cuestionarse por el uso del conocimiento matemático de comunidades de conocimiento específicas, con base a situaciones del mismo orden de tal forma de recuperar esta triada.

En este sentido, el uso del conocimiento matemático del docente en formación queda opacado desde un proceso de exclusión de la construcción del conocimiento matemático. Lo cual repercute necesariamente en lo que hoy día dentro de este programa llamamos identidad disciplinar. Ya que desde nuestra postura, es el uso del conocimiento matemático quién expresa dicha identidad disciplinar, donde los funcionamientos y formas dan características para analizar a la luz de entender que éstas, marcan una tendencia sobre la traída que se sostiene desde una institucionalización e identidad.

En lo que corresponde al fenómeno de exclusión, se toma como referencia lo caracterizado por Soto, (2010), donde se busca evidenciar la legitimidad de la cual goza la matemática escolar, donde los actores del sistema didáctico no han logrado integrarse a la construcción de conocimiento matemático.

El modelo de exclusión acusa que el discurso Matemático Escolar es un sistema de razón que produce una violencia simbólica, ya que genera una imposición de significados, argumentaciones y procedimientos, los cuales excluyen a los actores del sistema didáctico de la construcción del conocimiento matemático. El dME, se caracteriza por atomizar los conceptos, poseer un carácter hegemónico de argumentaciones y significados, considerar a la matemática como un conocimiento acabado, continuo y utilitario, además, promueve la no búsqueda de marcos de referencia que resignifiquen la matemática escolar (Soto, 2010).

Un ejemplo que evidencia el fenómeno de exclusión, es el análisis del teorema de l'Hospital. Éste es presentado hoy día, en los libros de texto, de manera utilitaria. Es decir, como una regla para resolver un límite cuando la función es indeterminada. Los significados se centran en la función, el límite y el proceso de derivación. Al analizar la obra de l'Hospital, se resalta una situación que hace emerger el teorema, la cual es soslayada en el dME. Lo que realmente se plantea es un problema donde "dos curvas cuyo cociente que conforma a otra curva, se interceptan en el eje de las x, preguntándose qué sucede con esa curva que es representada por el cociente" (Soto, 2010, pp. 84)

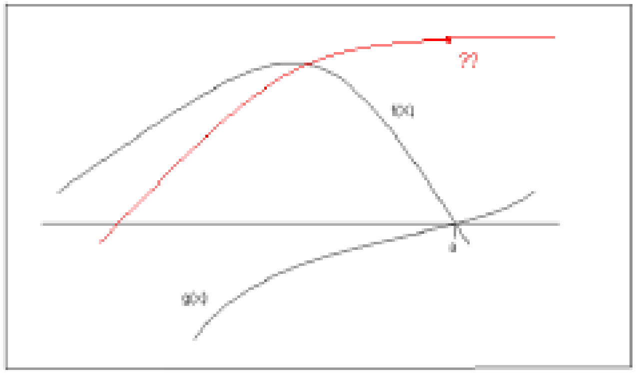


Figura 1. Argumentación gráfica del Teorema de l'Hospital (Soto, 2010, pp.85)

Expresado el teorema de l'Hospital graficamente, la situación genera una argumentación que es justamente la intersección de dos curvas en el eje x cuyo cociente representa una tercera curva.

Soto, (2010), reporta que docentes del nivel superior, conocen la regla de l'Hospital, pero no logran argumentos gráficos acerca de ella. Además afirma que el dME, como por ejemplo, lo expresado en los libros de texto de cálculo, permiten evidenciar cómo este teorema es presentado como una regla que corresponde a la problemática de indefinición de un cociente, llevando al docente a resolver una tarea: "el cáclulo del límite cuando una función es indeterminada en un punto". Según Soto, (2010), las argumentaciones que norman la situación hacen ver la regla como un objeto matemático útil para la resolución de ejercicios que presenten la dificultad de calcularlos.

Por otra parte, el procedimiento que se asocia al teorema se encuentran en los procesos matemáticos, en este caso: la derivada. Es así que la investigación citada anteriormente, hace ver que las argumentaciones, los significados y los procedimientos del cual nos provee el dME son impuestos. Por lo cual, no permiten al actor del sistema didáctico incluirse en la construcción del conocimiento matemático.

Finalmente Soto afirma que:

> Con este ejemplo y a partir de nuestro mapa de exclusión del dME, hemos podido dilucidar que el dME presente en los textos de estudio generan una violencia simbólica, en el sentido de que imponen una única argumentación, y los significados y procedimientos que emergen de ella giran en torno a los objetos matemáticos, no considerando el papel de los actores del sistema didáctico en la construcción de estos (Soto, 2010, pp. 88).

Momento 2. La matemática funcional.

Este momento está enfocado en ejemplos que se han desarrollado en un programa socioepistemológico. Por ejemplo, en Cordero y Flores (2007), se reporta el síntoma de la gráfica presentada en los libros de texto de la educación primaria, de la misma manera el trabajo de Torres (2013) da evidencia del uso de la gráfica en una comunidad de ingenieros químicos. Estos y otros trabajos realizados en diferentes ámbitos, tales como el trabajo, la escuela y la ciudad han provocado la construcción de un modelo de comunidad de conocimiento matemático que se plasma a partir de López (2012). Este se encuentra regido por dos ejes, institucionalización e identidad, en donde para la construcción del conocimiento matemático propio de cada comunidad se involucran la *localidad, intimidad* y *reciprocidad*.

En lo que respecta al ámbito escolar, en Cordero y Flores, (2007), se presentan diversos usos de las gráficas en los libros de texto del nivel básico, es pertinente aclarar que en educación primaria como tal las gráficas de funciones no figuran de manera explícita en el currículo, sin embargo, se realizan ciertos tratamientos temáticos sobre gráficas si hacer de manera explícita alusión al concepto función.

El síntoma de la gráfica que se describe en Cordero y Flores, (2007), está caracterizado por diversas gráficas del espacio, las cuales se consideran como un antecedente a la gráfica de la función que tiene lugar dentro de la educación secundaria. En esta investigación se pretende evidenciar el uso de la gráfica en los libros de texto mediante el análisis del "uso" que se le da a las gráficas con respecto a sus funcionamientos y a sus formas según las situaciones específicas.

Un ejemplo del uso de las gráficas en los libros de texto se muestra en la Figura 2, donde se le solicita al estudiante la reproducción de una figura formada en su mayoría por líneas rectas plasmadas sobre una retícula punteada, en esta se identificó un funcionamiento del uso de la gráfica como la reproducción de una figura un "perrito" y la forma es el patrón de las tareas en al cual se reproduce esa figura, es decir por la retícula específica donde se carece de ejes de referencia para la reproducción.

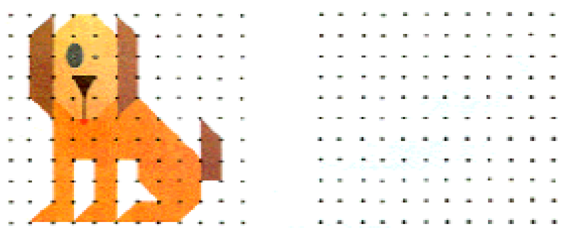


Figura 2. Ejemplo de uso de la gráfica en el nivel básico (Cordero y Flores, 2007)

Otro ejemplo, que evidencia la matemática funcional que promoverá un rediseño del discurso matemático escolar, es la investigación de Torres (2013). En esta, se estudian los usos de la simultaneidad de las derivadas y la estabilidad en el quehacer de una Comunidad de Conocimiento Matemático de la Ingeniería Química en un escenario del trabajo, en una situación denominada el diagnóstico del estado de los transformadores eléctricos de la Comisión Federal de Electricidad, región pelinsular.

Torres (2013) reporta que las gráficas que analiza la comunidad no son constantes, sino que representan múltiples variaciones. Identifica cuatro situaciones distintas de modelos gráficos en el quehacer de la comunidad, una situación ideal y tres reales: sin falla, con falla y una situación extraordinaria. La forma como la comunidad de conocimiento emplea los modelos gráficos en una situación ideal, así como el diagnóstico de una situación real sin falla, se puede observar analizando las siguientes gráficas correspondientes a cada uno de los gases que se producen en el aceite de un transformador, considerando que de éstos, tres son los gases que determinan fallas en el equipo, estos son: hidrógeno, etileno y acetileno. Por lo que de manera normal el transformador no debe producirlos, así en la Figura 3, se muestra el comportamiento ideal de cada uno de los gases.

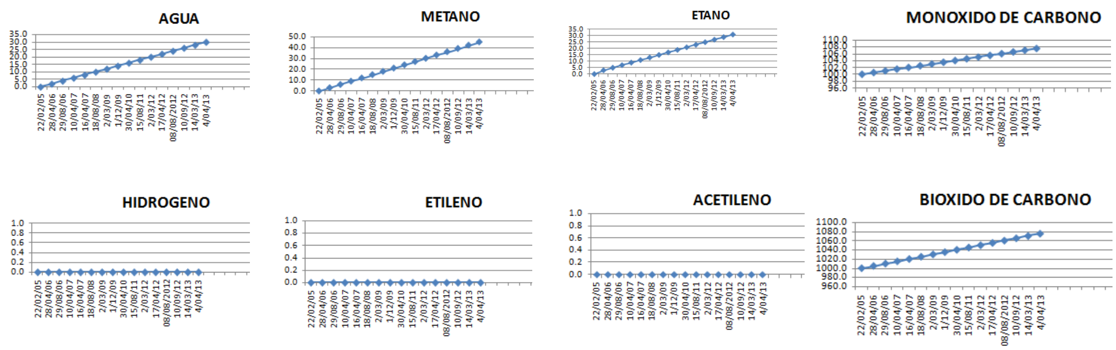


Figura 3. Gases en un transformador. Situación ideal. (Torres, 2013)

En la Figura 4, se muestran las gráficas reales de un transformador, el cual a pesar de presentar múltiples variaciones no tiene problemas en su funcionamiento.

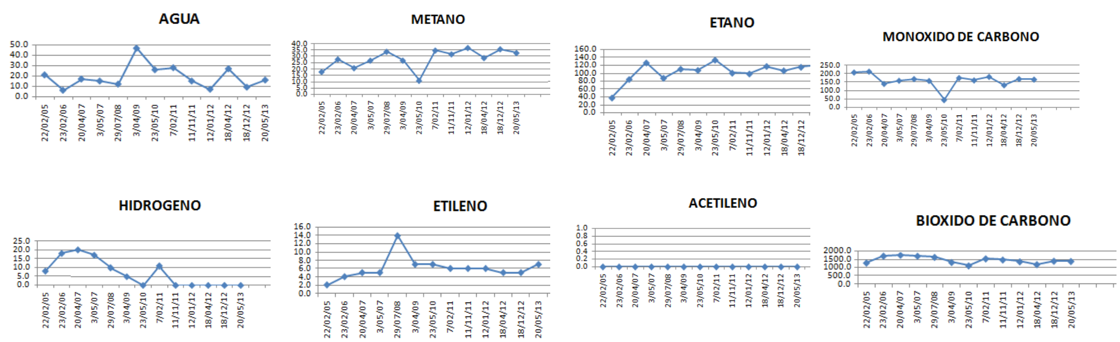


Figura 4. Gases en un transformador. Situación real. (Torres, 2013)

Así, a través del análisis de los modelos gráficos de las concentraciones de los gases disueltos en el aceite del transformador, la comunidad de conocimeinto diagnostica los equipos y determina sus acciones al respecto. Torres (2013) identificó que en la comunidad, en el empleo de modelos gráficos, se centra en la estabilidad y la simultaneidad, esto es, el énfasis de los análisis se encuentra en que los gases se mantengan estables, ya que esto representa la estabilidad del transformador. Sin embargo, cuando la estabilidad de los gases se pierde, entran en juego los comportamientos tendenciales de las curvas, pero no de manera aislada sino que es necesario el análisis simultáneo dado que si varían simultáneamente de la misma forma no está ocurriendo algún problema en el equipo.

Dentro del análisis de la simultaneidad interesa determinar qué, cómo y cuánto varia la concentración de los gases, esto se observa cuando el ingeniero hace un análisis puntual de las gráficas, es decir, analiza los niveles de concentración (qué), la velocidad de generación de los gases (cuánto) y al mismo tiempo pone atención a la concavidad de las curvas (cómo) ya que esto determina si puede o no ocurrir alguna falla. Así, de manera implícita, se identifica a la derivada como conocimiento matemático empleado en el análisis de la comunidad (Torres, 2013).

Las investigaciones antes citadas en la descripción dejan ver una problemática que se reconoce a través de la Teoría Socioepistemológica, que es la inexistencia de quién construye conocimiento matemático dentro de los modelos teóricos; es decir, se olvida a quienes aprenden, se omite cómo construyen y por qué construyen de cierta manera tal conocimiento.

Los conocimientos matemáticos que se construyen en el colectivo o comunidad dentro de sus prácticas sociales, aportan elementos para crear marcos de referencia que conlleven al rediseño del discurso matemático escolar. En este sentido, surge el Modelo de Comunidad de Conocimiento Matemático que intenta caracterizar lo propio, donde vive y se construye el conocimiento matemático.

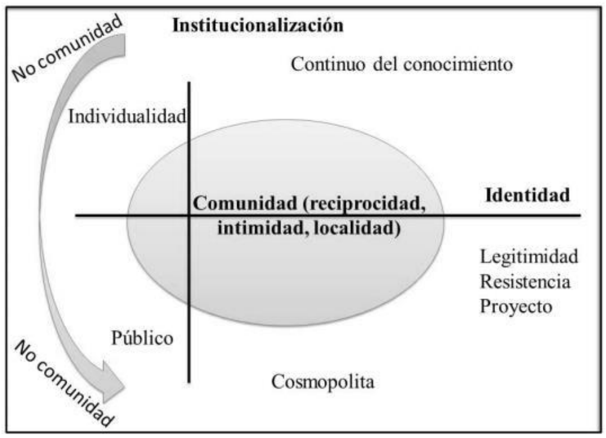


Figura 5. Comunidad de conocimiento matemático como un constructo de la TSE (Cordero, 2011).

- *Reciprocidad*. El conocimiento se genera por la existencia de un compromiso mutuo.
- *Intimidad*. Es el uso del conocimiento propio y privado que no es público.
- *Localidad*. El conocimiento es local, se da cuando existe una coincidencia en ideas, una jerga disciplinar, trabajo u oficio, intereses, la región, entre otros.

Esta triada se encuentra ligada a dos ejes fundamentales: la *institucionalización* y la *identidad*. Dado que en este modelo, reúne elementos que caracterizan de manera general el conocimiento propio que se construye, también considera importante la continuidad de ese conocimiento, de ahí que, toma como eje fundamental la institucionalización de ese conocimiento local, recíproco e íntimo que se basa en la identidad de ese colectivo, de esta manera, la identidad pasa a formar parte de otro eje en el modelo.

Momento 3. Rediseño del discurso matemático escolar.

El objetivo de este tercer momento, está en exhibir un rediseño a partir del cuadro que a continuación se muestra de las categorías del conocimiento matemático que se han dibujado a la luz de los usos del conocimiento matemático rescatados de diversas situaciones específicas.

	SITUACIONES			
Elementos de construcción	**Variación**	**Transformación**	**Aproximación**	**Selección**
Significaciones	Flujo Movimiento Acumulación Estado permanente	Patrones de comportamientos gráficos y analíticos Comportamientos tendenciales de las funciones	Límite Derivación Integración Convergencia	Patrones de adaptación
Procedimientos	Comparación de dos estados	Variación de parámetros	Operaciones lógico formales (cociente)	Distinción de cualidades
Instrumento útil al humano	Cantidad de variación continua	Instrucción que organiza comportamientos	Formas analíticas	Lo estable
Argumentación	**Predicción**	**Comportamiento tendencial**	**Analiticidad de las funciones**	**Optimización**

Figura 6. Una Socioepistemología del Cálculo y del Análisis

La pertinencia de dicha Socioepistemología del Cálculo y del Análisis está en reconocer que es producto de la experiencia de la gente que construye conocimiento. El cuadro adquiere sentido al ponerse en juego con una comunidad de conocimiento matemático.

Un ejemplo de cómo dicha epistemología se pone en juego en una comunidad de Ingenieros Químicos Industriales en formación, se encuentra en el trabajo de Pérez-Oxté (2015). En éste se asume el fenómeno de Opacidad de los usos del conocimiento matemático que existe en el discurso Matemático Escolar (dME), y se formula una epistemología que los rescata y los hace explícitos en la matemática escolar. Una expresión del Rediseño del discurso Matemático Escolas (RdME) está en la construcción de una *Situación de Aprendizaje* (*SA*) que expresa la funcionalidad del conocimiento matemático y por ende rescata los usos de ese conocimiento. La formulación de una epistemología que expresó la transversalidad del uso de la gráfica fue el sustento para la *SA*, la cual se evidenció en una problemática específica de una *Comunidad de Conocimiento Matemático de Ingenieros Químicos Industriales* en el escenario del trabajo: el diagnóstico de transformadores eléctricos.

El estudio anterior, reveló el *desarrollo de usos* de la gráfica como modelos de comportamientos de las concentraciones de gases en el aceite de un transformador eléctrico. Se evidenciaron *argumentaciones* de la predicción, del comportamiento tendencial y de la optimización en las *resignificaciones* de la gráfica, donde se caracterizaron *funcionamientos* y *formas*, con lo que se comprobó que la articulación de las situaciones de Variación, Transformación y Selección fueron producto de la experiencia de esa comunidad de ingenieros en formación.

Este ejemplo, es una contribución de un marco de referencia compuesto de una *categoría funcional de la matemática*, donde intervienen conocimientos articulados bajo una lógica funcional y no utilitaria; que adquieren sentido según la comunidad en cuestión. Todo eso, deja ver la pertinencia de realizar estudios orientados a centrar la atención en la transversalidad del conocimiento matemático para un acercamiento al RdME.

Es así que la presente propuesta, se enfoca en caracterizar la evolución de los aportes teóricos, el tratamiento al modelo de una comunidad de conocimiento matemático (Cordero, en prensa) y los usos del conocimiento que se han logrado identificar hasta el momento. A futuro, se pretende articular estos resultados y ofrecer modelos que favorezcan formas de intervención al sistema educativo.

Consideraciones finales

Este laboratorio, pretende que la comunidad reconozca la importancia de estudiar los usos del conocimiento matemático en comunidades específicas, y que conozcan una propuesta de cómo es que estos usos pueden llegar al aula. De la misma manera se pretende exhibir que no es un proceso inmediato el llevar los usos al sistema educativo.

Por otro lado, con el tercer momento se pretende reafirmar la postura de la Teoría Socioepistemológica en cuanto al estatus de la matemática funcional, ya que nuestra postura es que ésta no es un puente ni es la base para llegar al objeto matemático, sino que está a la par de la matemática escolar.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, V. 6 (1). pp. 27-42.

Cordero, F. & Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10 (1), 7-38.

Cordero, F. (2001). La distinción entre las construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4(2), 103-128.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano.* México, Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.- Díaz de Santos. Pp. 265-286.

Cordero, F., Méndez, C., Parra, T., y Pérez, R. (2014). Atención a la diversidad. La Matemática Educativa y la Teoría Socioepistemológica. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7 (3), 71-90.

Cordero, F. (2011). Matemáticas y el cotidiano. Comunidad de conocimiento como un constructo en la teoría socioepistemológica. *Material de trabajo del diplomado Desarrollo de Estrategias de Aprendizaje para las Matemáticas del Bachillerato: La transversalidad Curricular de las Matemáticas*. 1-26.

Cordero, F. (en prensa). La matemática y lo matemático. Transversalidad y modelación: un programa socioepistemológico. En Díaz y Arrieta (Eds). *Investigaciones latinoamericanas en Modelación Matemática Educativa*. Barcelona: Gedisa

Gómez, K. (2015). *El fenómeno de opacidad y la socialización del conocimiento. La matemática de la ingeniería agrónoma*. (Tesis de maestría no publicada). Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, Distrito Federal, México.

Gómez, K., Silva-Crocci, H., Cordero, F. y Soto, D. (2014). Exclusión, Opacidad y adherencia. Tres fenómenos del discurso matemático escolar. En Lestón, P. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 27*, .1457- . México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

López, S. (2012) La matemática del ciudadano. *Tesis de maestría no publicada*. Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México.

Opazo-Arellano, C. (2014) El uso de las gráficas y el fenómeno de opacidad. El caso del concepto de derivada en los estudiantes de pedagogía en matemáticas en Chile. *Tesis de maestría no publicada*. Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México

Parra, T. (2015). *Los usos de la cantidad en una comunidad de conocimiento matemático Hñähñu. Del trueque y la curación al comercio de papel amate* (Tesis doctoral no publicada). Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, Distrito Federal, México.

Pérez, R. (2012). *Usos de la oralidad numérica Ñuu savi* (Tesis de maestría no publicada). Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, Distrito Federal, México.

Pérez-Oxté, I. (2015). Los usos de la gráfica en una comunidad de ingenieros químicos industriales en formación. Una base para el diseño de una situación de aprendizaje. Tesis de maestría no publicada. CINVESTAV-IPN, México, D.F

Torres, L. (2013). *Usos del conocimiento matemático, La simultaneidad y la estabilidad en una comunidad de conocimiento de la ingeniería química en un escenario del trabajo.* Tesis de maestría no publicada. CINVESTAV-IPN. México.

Soto, G. (2010). *El discurso Matemático Escolar y la Exclusicón. Una visión socioepistemológica*. Tesis de maestría no publicada. Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN. México.

Autores

E. Johanna Mendoza Higuera; CINVESTAV, IPN. México; ejmendoza@cinvestav.mx
Claudio Opazo Arellano; CINVESTAV, IPN. México; opazoferrari_claudio@hotmail.com
Rosario Pérez López; CINVESTAV, IPN. México; rperezl@cinvestav.mx
Irene Pérez-Oxté; CINVESTAV, IPN. México; iperezo@cinvestav.mx

Julio Yerbes González; CINVESTAV, IPN. México; jjyerbes@cinvestav.mx

SIMULACIÓN DE FENÓMENOS PROMOTORES DEL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Jesús Enrique Hernández Zavaleta, Vicente Carrión Velázquez

Resumen

Actualmente existen investigaciones que estudian modelos que exhiben dinámicas descentralizadas; por ejemplo, la propagación de una epidemia, el comportamiento de las variables económicas, fenómenos ecológicos y la dinámica de ciudades, entre otros. Este taller pretende que los profesores de nivel secundaria, medio superior y superior utilicen el Software *NetLogo* para modificar los parámetros de un modelo referente a la dinámica de interacción de un grupo de organismos con la finalidad de fomentar la discusión de nociones, que se encuentran intrínsecas en la dinámica, como son la autoorganización, el caos y la estabilidad y son promotoras del principio de la estabilidad del cambio que bien puede ser un modo de pensar y hacer matemáticas que se encuentra en ámbitos intra y extra escolares.

Palabras clave: Modelación, Descentralización, Netlogo

Propósitos y alcances del taller

En el taller se pretende que los asistentes utilicen el software *NetLogo* para modificar los parámetros de un modelo referente a la dinámica de interacción de un grupo de organismos con la finalidad de fomentar la discusión de nociones, que se encuentran intrínsecas en la dinámica, como son la autoorganización, el caos, emergencia de patrones, la estabilidad y la noción de descentralización. En el uso de éstas se pueden vislumbrar acciones en las que se presentan los niveles de *constantificación* mencionados en Cantoral (1990) y (2013) como parte fundamental del desarrollo de la Teoría Socioepistemológica.

También se discutirá y reflexionara sobre una posible caracterización del pensamiento intrínseco a este tipo de sistemas, se analizarán ejemplos de la vida cotidiana que nos lleven a este pensamiento y se verá la pertinencia en el currículo o si se encuentra actualmente en ella. Este taller se ha implementado con estudiantes del Instituto de Educación Media Superior del D. F. México. La mirada de los diferentes fenómenos, a través del paradigma de la complejidad, ha obligado a la emergencia o modificación de técnicas que permitan su entendimiento. Sin duda la matemática normada por el determinismo newtoniano ha provocado que gran parte de los discursos científicos y escolares de la actualidad se presenten, de la misma forma que hacia Newton en sus *Principia*. Sin embargo, en las últimas décadas se ha vislumbrado una crisis de este paradigma, haciendo que una parte de las nuevas generaciones de investigadores se orienten hacia una forma diferente de hacer y pensar las matemáticas (Lesh, 2010).

Un factor importante, que ha influido en esta crisis, ha sido el desarrollo acelerado de los medios tecnológicos alentado la diversidad de formas en el quehacer matemático. En este sentido las computadoras han cambiado la forma de descubrir y utilizar la matemática en la escuela, dejando de lado la formalidad de las demostraciones; un ejemplo de lo anterior lo podemos encontrar en la propuesta para el estudio del precálculo hecha por Cantoral y Montiel (2013). En este sentido podemos mencionar diversos softwares orientados a los procesos de enseñanza aprendizaje, como CAS, geometría dinámica, Geogebra, entre otros. Para el desarrollo de este taller utilizaremos el software *NetLogo,* que gracias a su interfaz gráfica permite la simulación de sistemas en donde intervienen una gran cantidad de variables.

Marco conceptual

Estudiaremos un sistema que involucra el estudio de muchos actores y sus interacciones. Sabiendo que los actores pueden ser átomos, peces, gente, organizaciones o naciones. Sus interacciones pueden consistir en atracción, combate, acoplamiento, comunicación, comercio, asociación o rivalidad (Axelrod, 1997). Puesto que el estudio de un gran número de actores con patrones de interacciones cambiantes a menudo se vuelve demasiado difícil para una solución matemática, una herramienta primordial para este tipo de investigación es la simulación por computadora. El truco consiste en especificar cómo interactúan los agentes y luego observar las propiedades que se dan al nivel de sociedad completa.

Durante el taller trabajaremos el ejemplo particular de la agregación de una colonia de amebas (*acrasiomicetes*) con un comportamiento particular, mientras en su entorno existe suficiente alimento cada individuo vive de forma independiente deambulando por el ambiente alimentándose. Cuando los recursos comienzan a escasear su comportamiento cambia sorpresivamente y comienzan un proceso de agregación culminando en la conjugación de un ser pluricelular que tiene la capacidad de traslado a sitios donde existen los recursos suficientes para la supervivencia de la colonia. La particularidad de este mecanismo se encuentra en que no existe un líder que oriente este comportamiento (Resnick, 2001). *NetLogo* permite hacer este tipo de estudios ya que es un ambiente de modelación computacional basado en agentes que pone énfasis en un paradigma descentralizado, es decir, no existe un agente explicito que gobierne la dinámica, de tal modo que los comportamientos del sistema provienen de la auto – organización del colectivo. Este sistema fue creado principalmente para realizar simulaciones de fenómenos espacio – temporales pero también su diseño contempló fines didácticos desde su antecesor StarLogo que pretendía ser un ambiente virtual para la exploración de la geometría.

La actividad a desarrollar durante el taller mostrará que es ejemplo claro de la Modelación Basada en Agentes (AMB por su siglas en inglés), cuyo objetivo principal es la descripción y predicción del comportamiento de un sistema dinámico simulando la interacción entre sus partes (llamadas agentes), a partir de reglas básicas que le permiten evolucionar en el tiempo, mostrando un comportamiento macroscópico auto-organizado (Castiglione, 2006). Mediante el análisis de la variación de parámetros los participantes podrán intervenir en los posibles cambios en la estructura de los patrones, modificando las condiciones del sistema en tiempo real reconociendo que se necesita llegar a cierto umbral en la población de agentes para que exista la emergencia de comportamientos estructuralmente estables y de esta forma conjeturar sobre los cambios abruptos en la dinámica, caracterizar los puntos de bifurcación y encontrar los parámetros de estabilidad. En ese mismo sentido, en años más recientes, Hurford (2010) y por su parte Lesh (2010) proponen que la complejidad y la modelación, a partir de datos reales son importantes para la cultura del siglo XXI, colocando esta perspectiva como una propiedad intrínseca a la enseñanza y aprendizaje de este nuevo milenio.

Método

Momento 1

El taller iniciará mostrando el fenómeno dinámico de los organismos “acrasiomicetes”, dando ejemplos de otros fenómenos que se comportan de forma similar. Posteriormente se abrirá y guiará la discusión sobre las nociones de complejidad, autoorganización, estabilidad, la noción de descentralización y predicción, éstas son fundamentales para continuar el desarrollo del taller.

Momento 2

Los participantes se organizarán en equipos para comenzar a discutir las actividades planteadas para el desarrollo del taller, se les entregará material impreso para trabajar “Reglas básicas de un autómata unidimensional” con la finalidad de comprender las nociones de autómata y las matemáticas que se ponen en juego en este concepto, se discuten diferentes ejemplos.

Momento 3

Se continúa con la organización en equipo para discutir las matemáticas detrás del “Autómata celular bidimensional” se resuelven actividades en materiales impresos y se discuten ejemplos vistos en las computadoras.

Momento 4

A cada equipo se le asigna una computadora para trabajar el “Modelo de los acrasiomicetes” en NetLogo, se da una explicación breve sobre el funcionamiento de los botones y barras de variación para después realizar las actividades del material impreso y responder las preguntas.

Momento 5

A partir de los resultados obtenidos en las actividades de los momentos anteriores se realiza la discusión final en la que se plantea la pertinencia y funcionalidad de esta matemática y forma de pensar en el currículo y si de alguna forma aparece en él. A manera de cierre se les pide a cada equipo que elaboren un documento, breve, en el que relaten los acontecimientos de esta discusión y resalten los tópicos que les parecieron más importantes para compartirlos con los otros equipos.

Desarrollo del taller

Reglas básicas de un autómata unidimensional

Los Autómatas Celulares (AC) fueron propuestos por Von Newman (1966) como una forma de estudiar los sistemas autorreplicantes. Desde esa época los AC han propuesto una nueva forma de investigar en matemáticas, debido a la presencia de comportamientos complejos provocados por la simplicidad de sus reglas. Los AC han mostrado su flexibilidad para incidir en diferentes aplicaciones para la Física, la Biología, las Ciencias Sociales, además de proveer herramientas para el estudio y desarrollo de la inteligencia y vida artificiales. Por su parte, los fenómenos autoorganizados como parte de la teoría de los sistemas dinámicos no lineales, han sido de gran importancia para su desarrollo.

1. Un AC se genera a partir de un conjunto de reglas que especifican lo que se debe hacer en el tiempo siguiente. Una característica importante es que sus comportamientos pueden ser presentados de forma gráfica. Las reglas para un AC tienen la forma $x_i^{t+1} = f(x_{i-1}^t,\ x_i^t, x_{i+1}^t)$, donde i denota la posición en el espacio y t el tiempo, con $x_i \in \{0, 1\}$.

   a) ¿Cuántos elementos posibles podría tener el dominio de la función? Escríbanlos en una tabla.

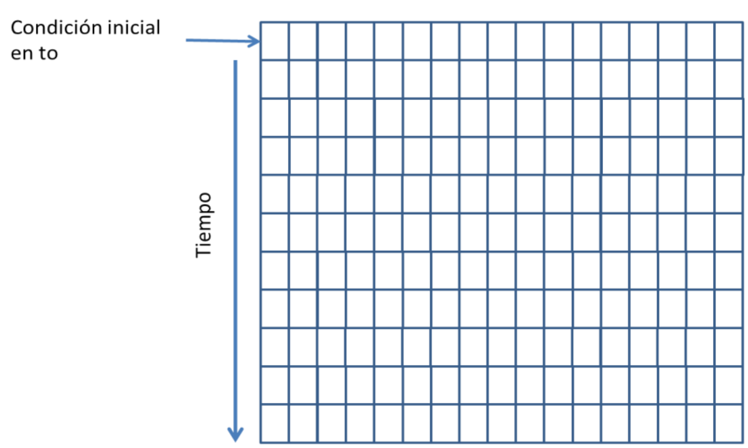
   b) ¿Cuántos elementos a lo más tiene la imagen de la función?

   c) ¿Cuántas funciones se pueden generar con todos los elementos del dominio y su imagen?

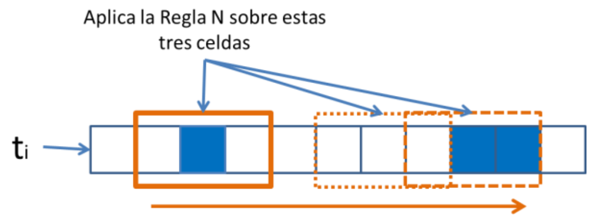
   d) ¿Cuántas funciones suprayectivas existen?

   e) ***Discusión grupal y consenso:*** el número de funciones encontradas corresponde al número de reglas existentes, en los AC unidimensionales. Discutan una forma para enumerarlas (Hint: Cambios de base).

Una vez que las reglas de un AC se encuentran definidas, se introduce, una forma de representar, el tiempo y las condiciones iniciales. En la siguiente imagen se muestra que la condición inicial se establece en el primer renglón y el tiempo corre de arriba hacia abajo, la expresión del sistema dinámico se construye en la misma dirección.



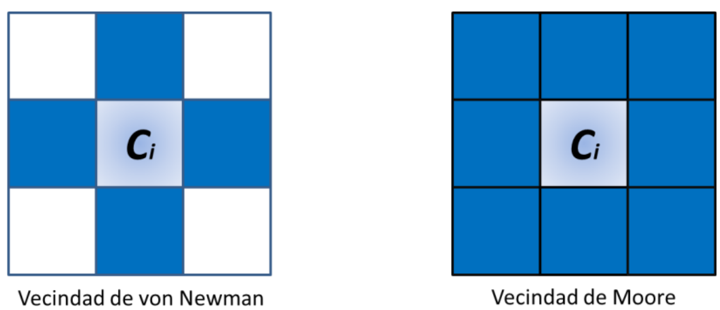
Otro factor importante se basa en, lo que llamaremos, el ***corrimiento de ventana***; es decir, para cada tiempo existe un arreglo horizontal y sobre él correrá una ventana de tamaño *tres celdas,* la información en cada arreglo la utilizará para aplicar la *Regla* que se haya escogido, este procedimiento se ilustra como sigue:



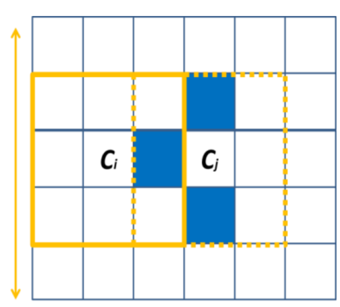
Autómatas celulares bidimensionales

John Horton Conway propuso un juego, utilizando autómatas bidimensionales, que fue publicado y descrito por Martin Gardner en su columna de Juegos Matemáticos de la revista Scientific American (Gardner, 1970). El ***juego de la vida,*** así lo llamaba, por su analogía con el nacimiento, la muerte y los ciclos presentes una sociedad virtual de "organismos vivos". Ahora se ha convertido en un ejemplo para la compresión de dinámicas de AC de dos dimensiones.

A diferencia de los AC 1D, las condiciones iniciales se dan en una latís de dos dimensiones, el tamaño de las *ventanas de corrimiento* es de tres por tres celdas y el tiempo es considerado adimensional. En esta configuración cada celda tiene ocho celdas vecinas, así que se pueden considerar dos formas de trabajar con las vecindades: la primera es la llamada vecindad de Von Newman que considera solo los vecinos que se encuentran al norte, sur, este y oeste de celda C_i y la segunda es la vecindad de Moore (Moore & Langdon, 1968) que considera todos los vecinos de C_i en la siguiente Figura se muestran sombreados los vecinos a considerados.



El *juego de la vida de Conway* utiliza la vecindad de Moore, para la actualización de sus estados. Como habíamos dicho el *corrimiento de ventana* se realizará tomando arreglos de celdas de tres por tres con centro C_i, este proceso es ilustrado en la siguiente Figura.



El *juego de la vida de Conway* tiene cuatro reglas básicas, en el cual se define una **celda viva** como una **celda sombreada** y una **celda muerta** como una **celda blanca**.

a) *Cualquier celda **viva** con menos de dos vecinos vivos muere, a causa de su poca interacción social.*

b) *Cualquier celda **viva** con más de tres vecinos vivos muere, a causa de sobrepoblación y escasez de recursos.*

c) *Cualquier celda **viva** con dos o tres vecinos vivos, se mantiene viva en la siguiente generación.*

d) *Cualquier celda **muerta** exactamente con tres vecinos vivos toma vida en la siguiente generación.*

El modelo de los acrasiomicetes

El ambiente virtual *NetLogo* es apto para la programación de autómatas celulares, pero también cuenta con características gráficas y de programación que permiten la manipulación de sistemas con un gran número de elementos (agentes o tortugas). De esta forma el prefijo, en su nombre *Net,* evoca a la modelación de fenómenos con elementos interconectados y de naturaleza descentralizada.

Cuando hablamos de fenómenos descentralizados, nos referimos a sistemas que presentan un comportamiento, visiblemente regular, el cual carece de alguna forma de liderazgo que lo oriente; por ejemplo, los insectos sociales como las hormigas son capaces de construir estructuras, tan complejas y firmes, como sus hormigueros sin necesidad de que exista una "hormiga líder del proyecto"; en realidad, las interacciones simples a corto alcance entre ellas llevan al trabajo comunitario que tiene como consecuencia un comportamiento emergente. Resnick (2001) propone otros ejemplos de estos fenómenos como el vuelo de una parvada, el nado de cardúmenes, el tránsito vehicular, el funcionamiento de algunas instituciones sociales etcétera, mostrando una investigación sobre el desarrollo del pensamiento descentralizado con estudiantes a nivel secundaría en E. U.

Uno de los ejemplos tratados es el fenómeno biológico de los organismos llamados Acrasiomicetes. Estas amibas, unicelulares, se mueven aleatoriamente buscando bacterias en el ambiente para alimentarse y reproducirse por división celular. Su comportamiento cambia cuando el alimento comienza a escasear, su reproducción se detiene y comienzan a buscar a otras células formando cúmulos de miles de ellas. En este momento su individualidad se pierde y comienzan a actuar como un todo unificado con un único propósito, la búsqueda de comida. Cuando este cúmulo encuentra un lugar adecuado a sus necesidades, comienza un proceso de diferenciación celular, formando un tallo con una masa esférica, que contiene esporas, en su parte superior que posteriormente se rompe liberándolas en el nuevo ambiente como organismos, nuevamente, unicelulares comenzando así el ciclo. La Ilustración 1 muestra el ciclo completo de los Acrasiomicetes

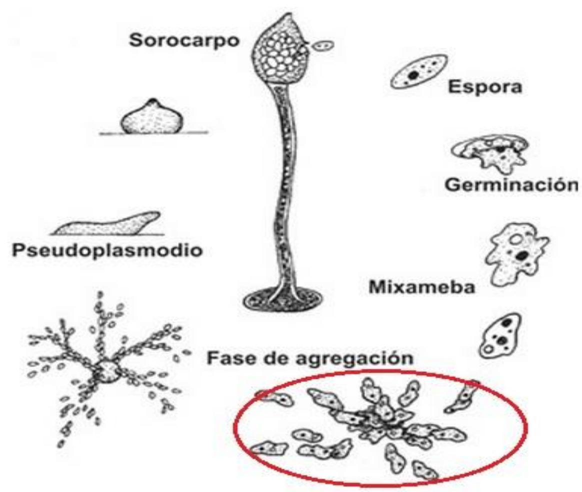


Ilustración 1 Ciclo vital de los acrasiomicetes. Encerrada en rojo se encuentra fase que se modela en NetLogo.

La Modelación Basada en Agentes (AMB por su siglas en inglés) tiene como principal objetivo la descripción y predicción del comportamiento de un sistema dinámico simulando la interacción entre sus partes (llamadas agentes), a partir de reglas básicas que le permiten evolucionar en el tiempo, mostrando un comportamiento macroscópico auto-organizado (Castiglione, 2006). De esta forma *NetLogo* es el escenario pertinente para la visualización y análisis de este tipo de dinámicas. En la Ilustración 1 se muestra el ciclo completo de los acrasiomicetes y en rojo se resalta la fase donde encontramos la conducta descentralizada, la esencia de nuestro modelo computacional será captar el proceso de agregación de la forma más simple posible. Un dato importante a considerar, es que desde la década de los 70, se ha documentado que las amibas se siguen unas a otras debido a la secreción de un tipo de feromona.

NetLogo considera los siguientes elementos para el modelado:

Agentes: pueden ser hormigas, pájaros, personas, tortugas, etcétera. Son los elementos del sistema que actuarán sobre las parcelas.

Parcelas: las parcelas (celdas) conforman el espacio en donde los agentes interactúan y pueden ser dotadas de propiedades con el fin de proveer un ambiente heterogéneo.

En la Ilustración 2 se muestra a un agente sobre una latís cuyas celdas componen las parcelas.

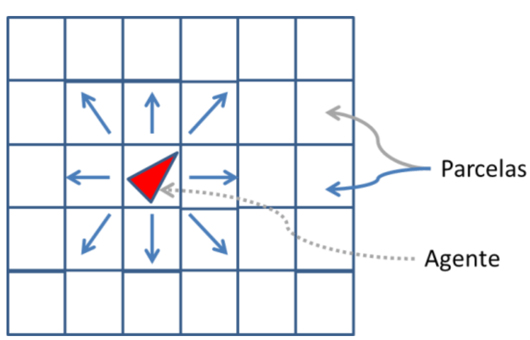


Ilustración 2 Se muestra en rojo a un agente que tiene libre movimiento en las parcelas vecinas.

El proceso de simplificación de las variables se realizó tomando en cuenta aquellas que hacen una mejor descripción de la dinámica global además de tener presentes los alcances y limitaciones del software.

Sobre los agentes (organismos unicelulares)

1. Movimiento aleatorio.
2. Secreción de feromona.
3. Olfateo de feromona (movimiento siguiendo el gradiente de feromona que dejan otros agentes)

Sobre las parcelas

1. La feromona se evapora
2. La feromona se dispersa a parcelas vecinas

Algunos diseños didácticos

Reglas básicas de un autómata unidimensional

Utilizaremos la notación de los AC, en el siguiente arreglo se muestra las asignaciones espaciales (celdas) de los elementos del dominio de f y su respectiva imagen, donde f es alguna de las funciones encontradas en el inciso (c).

x_{i-1}^{t}	x_{i}^{t}	x_{i+1}^{t}
	x_{i}^{t+1}	

a) Siguiendo el arreglo anterior, en los cuadros sombreados, escribe la ***Regla 254.***

1 1 1	1 1 0	1 0 1	1 0 0	0 1 1	0 1 0	0 0 1	0 0 0

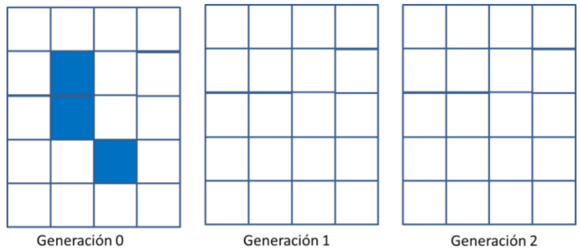
b) Dados los siguientes arreglos, a qué ***Regla*** corresponden

1 1 1	1 1 0	1 0 1	1 0 0	0 1 1	0 1 0	0 0 1	0 0 0
0	0	0	1	1	1	1	0

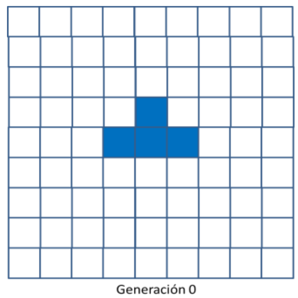
Autómatas celulares bidimensionales

1. Veamos qué pasa con algunos patrones iniciando con organismos compuestos de tres (trinominos) y cuatro (tetranominos) celdas. Aplique la vecindad de Moore a cada arreglo durante tres generaciones (cada arreglo representa una generación).

a)



b) Para la siguiente condición inicial, realice el cálculo de su configuración hasta la cuarta generación.



2. Ahora abra la aplicación *NetLogo* y siga la ruta *Archivo*> *Biblioteca de Modelos* >*Computer Sciencie* > *Cellular Arutomata* > ahí encontrará el programa llamado *Life*. El programa le permitirá dos modos dar condiciones iniciales al azar o escogerlas. En el modo de escoger corrobore que las condiciones dadas en el inciso anterior llevan a los resultados que obtuvo.

El modelo de los acrasiomicetes

Los parámetros que se considerarán para la simulación del modelo son los siguientes:

a) Tamaño de la población

b) Ángulo de búsqueda (Wiggle angle): se refiere al mayor ángulo de contoneo de un agente al desplazarse. Su valor por default es 40°.

c) Promedio direccional (Wiggle bias): cuando Wiggle-bias = 0 el agente se moverá en línea recta. Si Wiggle-bias > 0 el agente tenderá a moverse hacia la derecha y en otro caso tenderá a un movimiento hacia la izquierda. Su valor por default es 0.

d) Umbral de olfateo (Sniff threshhold): se refiere a la menor cantidad de químico presente en una parcela sobre la que se encuentra un agente. Su valor por default es 1.0.

e) Ángulo de olfateo (Sniff angle): se refiere al mayor ángulo de movimiento que realizará un agente, para la búsqueda de la mayor concentración de feromona en sus celdas vecinas. Su valor por default es 45°.

1. Variación sobre el parámetro de población.

a) Describan detalladamente, en un escrito, cuál es el comportamiento global de los agentes, si el número de población es menor a 400 y los demás parámetros se mantienen en su valor por default.

b) Después de unas 2000 iteraciones, pausen el programa y respondan ¿se llegará a formar un solo cúmulo? Justifiquen su respuesta.

c) Utilizando la herramienta ***inspect turtle*** sigan a uno de los agentes y describan su actuación para enriquecer el escrito anterior.

d) Lo mismo que a) - c) pero utilizando valores mayores o iguales a 400.

e) Al hacer variar el parámetro población encuentre el valor o el intervalo en el cual la dinámica cambia significativamente.

f) El valor por default de ángulo de olfateo, hace que los agentes busquen en tres direcciones: 45° a la izquierda, enfrente, 45° a la derecha. Si se aumentan la cantidad de direcciones para el olfateo; por ejemplo, 90° izquierda, 45° izquierda, enfrente, 45° derecha, 90° derecha. ¿Cómo altera este mejor sentido del olfato la dinámica del sistema? ¿Habrá más o menos grupos? ¿Los grupos tendrán mayor o menor cantidad de agentes?

g) **Sobre la estabilidad de los cúmulos:** A medida que el andar aleatorio varía se hace interesante la dinámica, los agentes no estarán ligados a los grupos que los unen, hagan variar Ángulo búsqueda y promedio direccional para responder ¿qué pasa si los agentes transitan de un cúmulo a otro? ¿en algún momento la cantidad de cúmulos cambiará? Si es así, de qué forma (incremento o decrementa)? ¿Qué es lo que pasará respecto a la estabilidad de los cúmulos si su cantidad incrementa y también cuando decrementa? ¿En algún momento podrá existir un cúmulo único?

Consideraciones finales

El software NetLogo es una herramienta tecnológica que nos permite entablar nuevas relaciones con la modelación de fenómenos en los que interactúan una gran cantidad de elementos y promueven comportamientos autoorganizados. La forma en que se explican y comprenden estos fenómenos incide en modos de pensamiento que nos hacen vivenciar nuestro entorno desde otra perspectiva.

Los estados estables en estos sistemas se encuentran en momentos de transición que dependen de valores umbrales en los parámetros elegidos para su modelado. La predicción cobra sentido cuando queremos realizar inferencias sobre el comportamiento, de los agentes, en estados subsecuentes, nos percatamos que los estados inestables lo hacen fuera de lo esperado al no estar acostumbrados a tratar con este tipo de variación. Sin embargo las diferentes configuraciones pueden ser deducidas partir del estudio de los parámetros del sistema, es en este punto donde se pueden vislumbrar los dos momentos de constantificación (Cantoral, 1990) y como entran en juego al realizar diversas acciones para describir estados futuros del fenómeno.

Finalmente cabe señalar que los conceptos de este taller no aparecen de forma explícita en el currículum actual, pero los visualizamos como una propuesta para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en diferentes niveles educativos. Por otro lado se promueve, en los profesores, una mirada de la ciencia y los procesos escolares distinta a la normada por el paradigma newtoniano. Este taller se ha llevado acabo con estudiantes de educación media superior y con profesores e investigadores en el marco de la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa número 28 y ha mostrado que la variación de parámetros es parte de las acciones promotoras de la práctica predictiva.

Referencias Bibliográficas

Axelrod, R. (1997). *La complejidad de la cooperación: Modelos de cooperación y colaboración basados en agentes.* México: FCE.

Cantoral, R. (1990). *Categorías Relativas a la apropiación de una base de significaciones para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las Funciones Analíticas. Simbiosis y Predación entre las nociones de "el Prædiciere y lo Analítico".* México: Tesis de Doctorado, CINVESTAV.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento matemático.* México: Gedisa.

Cantoral, R., & Montiel, G. (2013). *Precálculo: un efoque visual.* México: Pearson.

Castiglione, F. (2006). *Agent Based Modeling.* Obtenido de http://www.scholarpedia.org/article/Agent_based_modeling

Gardner, M. (1970). *The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game "life" Scientific American.* Obtenido de http://ddi.cs.unipotsdam.de/HyFISCH/Produzieren/lis_projekt/proj_gamelife/ConwayScientificAmerican.htm

Huford, A. (2010). Complexity Theories and Theories of Learning: Literature Reviews and Syntheses. En *Theories on mathematic education* (págs. 567-589). Heidelberg, London: Springer.

Lesh, R. (2010). The Importance of Complex Systems in K-12 Mathematics Education. En *Theories on mathematic education* (págs. 563 - 566). Heidelberg, London: Springer.

Moore, F. R., & Langdon, G. G. (1968). A generalized firing squad problem. *Information and Control*, 212-220.

Resnick, M. (2001). *Tortugas, termitas y atascos de tráfico: exploraciones sobre micromundos masivamente paralelos.* España: Gedisa.

Von Newmman, J. (1966). *Theory if self-reproducing automata.* Chicago, Illinois: Urbana.

Autores

Jesús Enrique Hernández Zavaleta; CINVESTAV, IPN. México; jherza@gmail.com
Vicente Carrión Velázquez; CINVESTAV, IPN. México; vcarrionv@cinvestav.mx

GEOMETRÍA DINÁMICA: EL CASO DE LAS CURVAS TRASCENDENTES

Marcela Ferrari Escolá, Cira Saligan Pérez, Gustavo A. Meneses Cisneros

Resumen

Para nuestro laboratorio proponemos trabajar con actividades de aprendizaje diseñados con geometría dinámica, en particular con GeoGebra. La construcción geométrica de diferentes curvas será el disparador de una red de modelos que conllevará reflexionar sobre covariación. Percibir y estudiar la covariación, es decir, la simultaneidad de dos variaciones diferentes que se afectan mutuamente nos permitirá fortalecer nuestro acercamiento al concepto de función. La socioepistemología es la visión teórica en la que basamos los diseños de aprendizaje así como la gestión del taller. Trabajaremos principalmente con funciones trascendentes, es decir, funciones como la exponencial, la logarítmica y las trigonométricas.

Palabras clave: funciones trascendentes – covariación – geometría dinámica

La apropiación de "función", en el ámbito escolar, ha sido estudiada desde diferentes miradas teóricas (e.g. Dubinsky & Harel, 1992; Olimpio Junior, 2007; Falcade, Laborde & Mariotti, 2007; Trigueros & Martínez, 2010; Tall, 2012) y se ha constituido como eje central del estudio del Cálculo en cuanto al desarrollo del lenguaje y pensamiento variacional. Un primer acercamiento escolar a la noción de función se percibe en la Educación Básica Mexicana donde se introducen las funciones lineales y cuadráticas incentivando el diálogo entre sus expresiones algebraicas, la tabulación de sus datos y su gráfica. En el nivel medio superior y superior, se fortalece el estudio de diferentes funciones así como de sus operaciones. Cada uno de estos acercamientos ha sido tópico de variadas investigaciones, varias de las cuales introducen la noción de covariación para abordar el concepto de función (Saldhana & Thompson, 1998; Carlson, Jacobs, Coe, Larsen & Hsu, 2002; Oehrtman, Carlson & Thompson, 2008; Moore, Paoletti & Musgrave, 2013; Nagle, Moore-Russo, Viglietti & Martin, 2013; Weber & Thompson, 2014; Johnson, 2015).

Varios investigadores, interesados en estudiantes de nivel medio superior, coinciden en la necesidad de propiciar un acceso intuitivo al concepto de función desde la noción de covariación, privilegiando las representaciones gráficas antes de presentar expresiones algebraicas. Hitt y González (2015) trabajan con representaciones gráficas de funciones mediante material manipulable; Hoffkamp (2011) propone un acercamiento cualitativo estructural al cálculo escolar utilizando geometría dinámica mientras que Saldhana y Thompson (1998) exploran sobre cómo describir el movimiento de un objeto respecto a dos puntos fijos. Estos investigadores sostienen que la comprensión de gráficas, que representan un continuo donde covarían estados de cantidades, no es trivial y no debe darse por sentada.

En el nivel superior, Carlson *et al.* (2002) y Johnson (2015) usan el llenado de botellas para estudiar la variación y el cambio en eventos dinámicos. Por su parte, Moore *et al.* (2013) analizan la representación gráfica de funciones en los sistemas de coordenadas cartesianas y polares. Weber y Thompson (2014) abordan funciones de dos variables y sus representaciones gráficas mientras que Nagle *et al*. (2013) analizan la conceptualización de la pendiente. Todas estas investigaciones han sido realizadas con estudiantes universitarios y tienen como fin encontrar evidencias sobre el razonamiento covariacional en diferentes actividades matemáticas que, si bien coinciden en la complejidad de desarrollar el razonamiento covariacional en estudiantes, lo consideran un prerrequisito para construir la noción de función.

En general, se reflexiona sobre la noción de "función" partiendo del hecho que conocer sus características mediante su lenguaje algebraico, numérico y gráfico, permite a los estudiantes comprender cualquier función específica. Se reporta a la comunidad de matemáticos educativos todo tipo de acercamientos, discusiones, propuestas y explicaciones acerca de función, pero pocos son los que reflexionan sobre funciones particulares tales como funciones cuadráticas (Ellis, 2011), funciones periódicas (Dreyfus & Eisenberg, 1983; Buendía, 2010), funciones exponenciales (Confrey & Smith, 1994 y 1995; Castillo-Garsow, 2010), funciones trigonométricas (Martínez-Sierra, 2012; Moore, 2014), función logarítmica (Ferrari & Farfán, 2010; Park & Choi, 2013; Kenney & Kastberg, 2013) entre otras. Vemos así, que se va desdibujando el paradigma imperante años atrás sobre el estudio global de función dando lugar al estudio de funciones específicas.

En este laboratorio proponemos compartir y explorar diseños de aprendizaje, pensados para estudiantes de bachillerato o de licenciatura, algunas de las funciones trascendentes que propicien la reflexión sobre covariación, es decir, sobre aquella simultaneidad de dos variaciones diferentes que se afectan mutuamente y cuya abstracción fortalece el acercamiento al concepto de función.

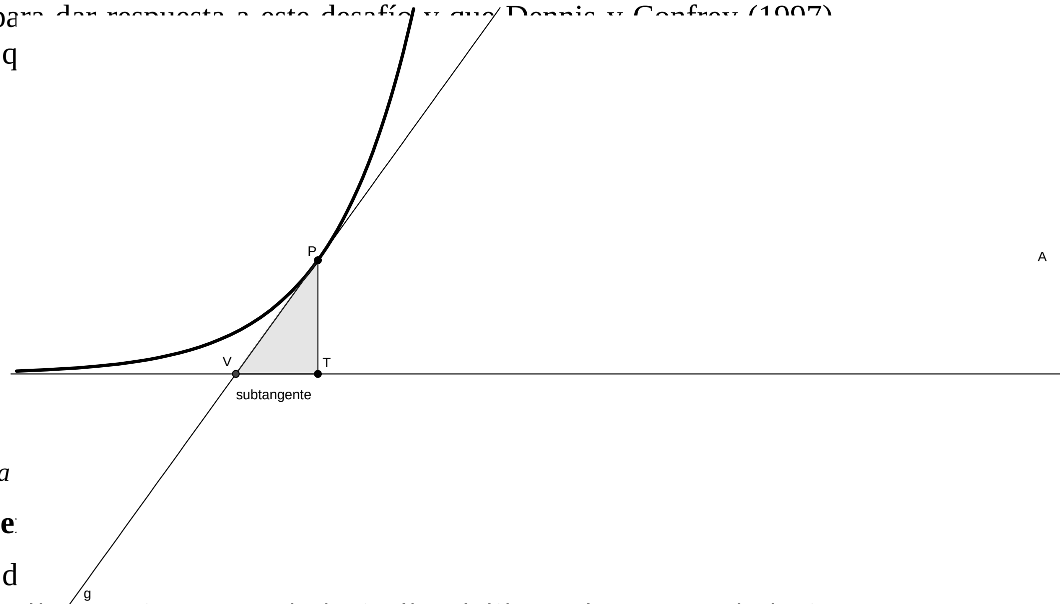
Marco teórico

Como socioepistemólogos partimos de la necesidad de realizar estudios sistémicos, donde se entremezclan las prácticas escolares inherentes a la transmisión del saber, las prácticas de referencia que reflejan el desarrollo de ese saber, las prácticas sociales que hablan de interacciones y herramientas así como las prácticas discursivas que evidencian la significación y consensos adoptados todo lo cual nos anuncia, en definitiva, comunidades que entrelazan sus producciones, donde el tiempo y el lugar, los sujetos y sus interrelaciones, los argumentos y herramientas, los avances y retrocesos, van construyendo el conocimiento.

La socioepistemología, sustento teórico de los diseños de aprendizaje que proponemos para este laboratorio, propicia la confluencia y relación dialéctica de aspectos que consideramos fundamentales al abordar un fenómeno didáctico. Contemplar y analizar el devenir de una noción a un objeto de saber; caracterizar las concepciones de los alumnos; dar cuenta de cómo vive una noción en las aulas y el discurso matemático escolar que se genera, ser conscientes que la matemática es un bien cultural inmerso en una sociedad y tiempo determinados que condiciona su comunicación y apropiación (Cantoral, 2013) conlleva profundizar en la reorganización de la obra matemática, en la reconstrucción de significados y en la matemática como actividad humana (Cordero, Cen & Suárez, 2010).

En nuestro trabajo, coincidimos con Confrey y Smith (1995) respecto a que: "*the construction of a counting and a splitting world and their juxtaposition through covariation provide the basis for the construction of an exponential function*" (p.80), idea que extendemos a la función logarítmica y que se percibe en la obra de Huygens (1678/1981) y de Agnesi (1748) cuya cuidadosa revisión nos dio luz para el diseño de las actividades de aprendizaje.

Efectivamente, consideramos importante reflexionar sobre la epistemología de las curvas logarítmicas del siglo XVII y su modelación. Rastreamos entonces, los argumentos que utilizó Huygens (1678/1981) en su intento por describir la caída de un objeto en un medio viscoso, así como los utilizados por Agnesi (1748) al dar un giro didáctico a la resolución que propone Leibnitz, en 1684 (Hairer & Wanner, 1996) para "*Encontrar una curva y*(*x*) *tal que, para cada punto P, la distancia entre V y T, puntos donde la vertical y la línea tangente cortan al eje x, sean siempre iguales"* (ver Figura 1), desafío que Debeaune lanza a principios del siglo XVII. Retomamos también el análisis de construcciones geométricas propuestas por Descartes para dar respuesta a este desafío y que Dennis y Confrey (1997) discuten desde una mirada q



Figura

Desde el trabajo de Huyge

En el análisis del trabajo d
logarítmica es aquel isomorfismo entre un crecimiento lineal (tiempo) y un crecimiento exponencial (velocidad-espacio). Es decir, se articula el movimiento en el fenómeno de la caída en un medio viscoso con el cambio de sus cambios. Descubrir ciertas regularidades y percibir algunas proporcionalidades, que cobran vida al reconocer progresiones, nos permite predecir distancia y velocidad (ver Figura 2) de un objeto en cierto medio.

La práctica de multiplicar sumando, característica insoslayable de los logaritmos, nos regresa a lo numérico, a lo cuantificable. La forma de la curva se complejiza al desear unir los puntos construidos geométricamente o calculados numéricamente, pues entra en juego la continuidad de la función, aceptada con naturalidad al describir la caída de cuerpos en un medio viscoso y que Huygens soluciona suponiendo que las resistencia son como las velocidades.

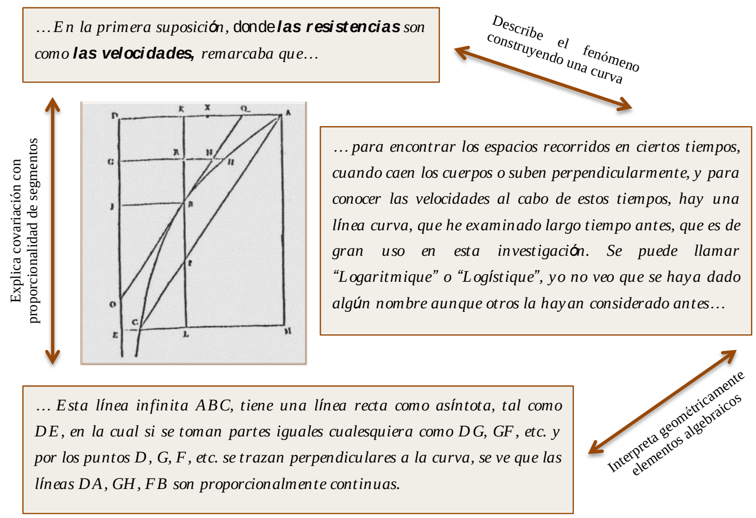


Figura 2: Esquema de elementos presentes en la obra de Huygens (1678/1981, pp. 1-2)

Desde el trabajo de Agnesi

Agnesi (1748) por su parte, modela un fenómeno particular descrito no por la observación de un cuerpo cayendo, práctica frecuente en la comunidad de los físicos, sino por un desafío geométrico, típica actividad de la comunidad de matemáticos. Es aquí donde la semejanza de triángulos, que se percibe, conforma la herramienta principal del modelo geométrico. Descubrir otras regularidades, que cobran vida al reconocer progresiones en la construcción de los catetos de los triángulos rectángulos, nos permite predecir el siguiente segmento sin construirlo, sino calculándolo. Nuevamente la práctica de multiplicar sumando nos regresa a lo numérico, a lo cuantificable, en tanto que la forma de la curva nos desafía a unir los puntos construidos geométricamente o calculados numéricamente, y nos cuestiona sobre su crecimiento o decrecimiento, que Agnesi soluciona desde lo infinitesimal (Figura 3).

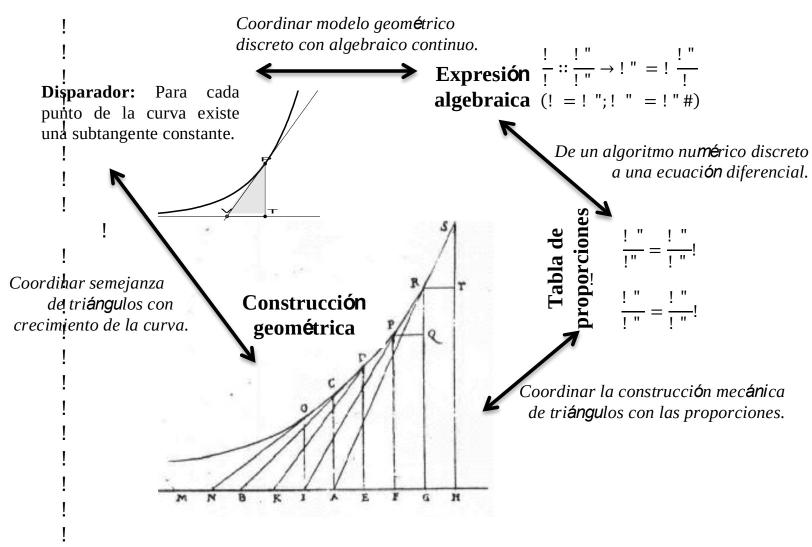


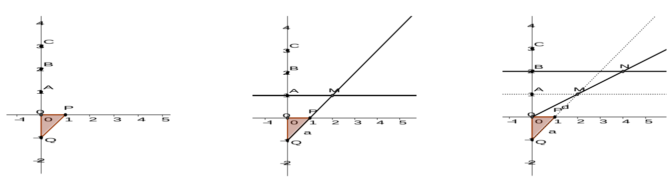
Figura 3: Esquema de elementos presentes en la obra de Agnesi (1748)

Tanto Huygens como Agnesi se afanan en describir formalmente fenómenos que se imbrican en una *covariación logarítmica*, es decir, aquella coexistencia entre una variación regida por diferencias constantes y otra por razones constantes; una donde se puede reconocer una progresión aritmética y en la otra una progresión geométrica, es decir, una, respondiendo a un crecimiento lineal y la otra a un crecimiento exponencial. Lo complejo no radica en cada una de estas variaciones, sino justamente en su co-existencia, su co-dependencia, su co-construcción, dando vida a una función logarítmica o a una función exponencial dependiendo de qué variación juega como independiente y cual como dependiente. En su empresa, utilizan ciertas herramientas matemáticas conocidas, crean otras, articulan los modelos logrados, actividades que constituyen el basamento de nuestros diseños de aprendizaje.

Ejemplificando los diseños de aprendizaje

Las actividades parten de una construcción geométrica, desafiando a los participantes a construir más puntos y describir la curva utilizando distintos modelos. Uno de los diseños que presentamos ha sido probado con estudiantes de bachillerato (Ferrari, 2008) y es el que compartimos en este apartado para ejemplificar el tipo de actividades que proponemos trabajar en el laboratorio.

Presentamos la construcción geométrica de la función logarítmica de base 2, adecuando la construcción geométrica de Agnesi la cual invita a construir una familia de semirrectas que al intersectarse con ciertas rectas horizontales genera puntos donde se percibe una progresión aritmética en sus ordenadas y una progresión geométrica en sus abscisas, emergiendo así la covariación logarítmica (ver Figura. 6).



1.- Construir el triángulo *OPQ* siendo *P* el punto $(0,1)$ de la curva y particionar el eje *y* usando el segmento como unidad.

2.- Construir el punto *M* como la intersección de la semirrecta *PQ* y una horizontal trazada por (0,)

3.- Construir el punto *N* como la intersección de la semirrecta *OM* y una horizontal trazada por (0,)

4.- Construir el punto *R* como la intersección de la semirrecta *AM* y una horizontal trazada por (0,)

5.- Construir más puntos. Trazar la semirrecta que pasa por el último punto construido y el punto (0,) utilizado para trazar la horizontal anterior. Por el punto (0, +) trazar la nueva horizontal que determina la ordenada del punto a construir. Etiquetar el punto de intersección de ambas rectas.

Figura 6: Construcción geométrica de una función logarítmica

En el laboratorio nos interesa replicar este diseño ya trabajado con estudiantes de bachillerato y discutirlo desde la construcción geométrica que proponen Dennis y Confrey (1997) basándose en el trabajo de Descartes y, por otro lado de las ideas de Rodríguez y Sarmiento (s/f) respecto a otras funciones usando GeoGebra. Los nuevos diseños implican también el uso de geometría dinámica siendo, en la construcción de una curva, el círculo unitario y ciertas rectas tangentes y secantes elementos importantes, sustentando la evolución de los puntos en la semejanza de triángulos. Ideas similares utilizaremos para la construcción de curvas especiales donde la covariación imperante emergerá de ciertas regularidades, haciendo hincapié en aquellas curvas geométricas que en el siglo XVIII las separaron de las funciones algebraicas.

Conclusiones

Es Euler quien distingue, en el siglo XVIII, entre funciones algebraicas y trascendentes en su obra *Introductio in analysin infinitorum*:

> "*Functiones dividuntur in Algebraicas & Trascendentes; illæ"sunt, quæcomponuntur per operationes algebraicas solas, hævero in quibus operationes trascendentes insunt"*. [Las funciones se dividen en algebraicas y trascendentes; las primeras están formadas únicamente a través de operaciones algebraicas y las segundas suponen, en su formación, operaciones trascendentes. (Tomado de Martínez, 2008, p. 77)]

Martínez (2008) advierte que "*lo que está en el fondo de esta definición es el hecho de que las funciones algebraicas son aquellas que se obtienen a través de un número finito de operaciones elementales y las segundas mediante un número infinito de operaciones elementales*" (p.78). Argumento que emerge del desarrollo en serie de potencias de funciones como la exponencial, la logarítmica y las trigonométricas, manteniéndose en el discurso matemático de la época y fortaleciéndose a la par del análisis matemático.

En los programas de Bachillerato Tecnológico (2013), por ejemplo, encontamos que en cuarto y quinto semestre se desarrollan los cálculos diferencial e integral, invitándonos a reflexionar sobre la variación y la acumulación, en tanto que en sexto semestre se espera articular los saberes matemáticos en la unidad de aprendizaje "matemática aplicada", ideas que se retoman y profundizan en el nivel superior que se extiende incluso al uso de varias variables.

En este Laboratorio nos interesa disparar las reflexiones sobre funciones trascendentes de una variable desde un pa
geométrica (Figura 7) de la
invitando así a los inter
covariación y enriquecerno

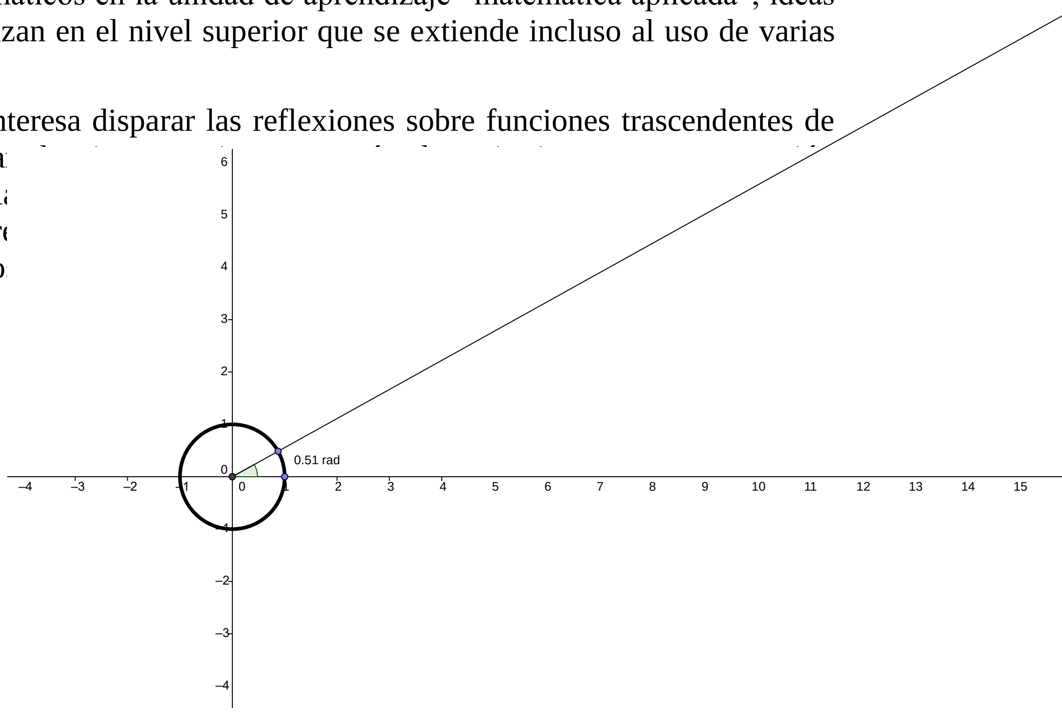


Figura 7: Esquema disparador de reflexiones

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Agnesi, M. (1748). *Instituzioni analitiche ad uso della gioventú italiana. Libro Secondo del Calcolo Differenziale.* Milano, Italia: Nella Regia Ducal Corte.

Buendía Abalos, G. (2010). Articulando el saber matemático a través de prácticas sociales. El caso de lo periódico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(4-1), 11–28.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. España: Gedisa.

Castillo-Garsow, C. C. (2010). *Teaching the Verhulst model: A teaching experiment in covariational reasoning and exponential growth*. (Tesis de doctorado no publicada). USA: Arizona State University.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 352–378.

Confrey, J. & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics 26*(2-3), 135-164.

Confrey, J. & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(1), 66–86.

Codero, F., Cen, C. & Suárez, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 13*(2), 187-214.

Dennis, E. & Confrey, J. (1997). Drawing Logarithmic Curves with *Geometer's Sketchpad*: A Method Inspired by Historical Sources. En J. King & D. Schattschneider (Eds.), *Geometry Turned On: Dynamic Software in Learning, Teaching and Research*. Washington D.C., USA: Mathematical Association of America.

Dreyfus, T. & Eisenberg, T. (1983). The function concept in college students: Linearity, Smoothness and periodicity. *Focus on learning problems in mathematics 5*(3-4), 119-132.

Dubinsky, E. & Harel, G. (1992)(Eds.) *The concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, Washington, DC, USA: MAA Notes 25.

Ellis, A. (2011). Middle school algebra from a functional perspective: A conceptual analysis of quadratic functions. En L. R. Wiest, & T. Lamberg (Eds.), *Proceedings of the 33rd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Reno, NV: University of Nevada Reno.

Falcade, R., Laborde, C. & Mariotti, M. A. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics 6*(3), 317-333.

Ferrari, M. & Farfán, R. M. (2010). Una socioepistemología de lo logarítmico. [Número especial]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13*(4), 53-68.

Ferrari, M. (2008). *Un acercamiento socioepistemológico a lo logarítmico: de multiplicar sumando a una primitiva*. Tesis de Doctorado. Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Hairer, E. & Wanner, G. (1996). *Analysis by Its History*. New York, USA: Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag.

Hitt, F., & González-Martín, A. S. (2015). Covariation between variables in a modelling process : The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. *Educational Studies in Mathematics 88*(2), 201–219.

Hoffkamp, A. (2011). The use of interactive visualizations to foster the understanding of concepts of calculus: Design principles and empirical results. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *43*(3), 359–372.

Huygens, C. (1981). *Discours de la cause de la pesanteur*. Reeditado por IREM de Dijon, Francia. [Original publicado en 1678].

Johnson, H. L. (2015). Together yet separate: Students' associating amounts of change in quantities involved in rate of change. *Educational Studies in Mathematics 89*(1), 89-110.

Kenney, R. & Kastberg, S. (2013). Links in Learning and Transferable Skills. *Australian Senior Mathematics Journal*, *27*(1), 12–20.

Martínez, C. (2008). El concepto de función en la obra de Euler: un recorrido a través de la constitución del Análisis Matemático Moderno. *Revista Miscelánea Matemática 46*, 73-91.

Martínez-Sierra, G. (2012). Concepciones y matemática escolar: Unidades de medida de las funciones trigonométricas en el nivel medio superior *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 15*(1), 35-62.

Moore, K. C., Paoletti, T., & Musgrave, S. (2013). Covariational reasoning and invariance among coordinate systems. *Journal of Mathematical Behavior*, *32*(3), 461–473.

Moore, K. C. (2014). Quantitative Reasoning and the Sine Function: The Case of Zac. *Journal for Research in Mathematics Education*, *45*(1), 102–138.

Nagle, C., Moore-Russo, D., Viglietti, J., & Martin, K. (2013). Calculus Students' and Instructors' Conceptualizations of Slope: a Comparison Across Academic Levels. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *11*, 1491–1515.

Oehrtman, M., Carlson, M. P. & Thompson, P. W. (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' understanding of functions. En M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics education* (pp. 150-166). USA: Series: MAA.

Olimpio Junior, A. (2007). Primeiro Ano num Curso de Matemática: a definição de função e a dualidade local/global em conceitos de Cálculo. *Bolema 20*(28), 39-67.

Park, E. J., & Choi, K. (2013). Analysis of student understanding of science concepts including mathematical representations: pH values and the relative differences of pH values. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *11*(July 2012), 683–706.

Rodriguez, Y. & Sarmiento, B. (s/f). *Construcción geométrica de las funciones trigonométricas*. Universidad Pedagógica Nacional. Disponible en: http://www.matvirtual.com/articulos/Cons-

Truccion_Trigonometricas.pdf

Saldanha, L. & Thompson, P. W. (1998). Re-thinking convariation from a quantitative perspectivie: Simultaneous Continuous Variation. En W. N. Berensah y S. B. Coulombe (Ed.), *Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education - North America.* Raleigh, N.C: North Carolina State University.

Trigueros, M. & Martínez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics. 73*(1), 3-19.

Tall, D. A. (2012). Sensible approach to the Calculus**.** En F. Pluvinage & A. Cuevas (Eds.) *Handbook on Calculus and its Teaching.* **Disponible en:** http://www.davidtall.com/, **Consultado en enero de 2012.**

Weber, E., & Thompson, P. W. (2014). Students' images of two-variable functions and their graphs. *Educational Studies in Mathematics 87*(1), 67–85.

Autores

Marcela Ferrari Escolá; UAGro. México; mferrari@uagro.mx
Cira Saligan Pérez; UAGro. México.

Gustavo A. Meneses Cisneros; UAGro. México.

VISUALIZANDO LA CONVERGENCIA DE LA SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER

Fabián Wilfrido Romero Fonseca, Rosa María Farfán Márquez

Resumen

En este laboratorio se realizarán actividades que apoyarán en la visualización de la convergencia de la Serie Trigonométrica de Fourier. Esta secuencias de actividades tienen sus fundamentos teórico en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, en investigaciones donde se ha problematizado este saber. La Serie Trigonométrica de Fourier es un tema complejo para su aprendizaje en el nivel superior, donde por lo general se mecaniza el proceso sin comprender del todo su convergencia, se quiere comprobar que con actividades que apoyen en ese tránsito de lo algebraico a lo geométrico, haciendo uso de la herramienta tecnológica, se puede comprender mejor la noción de convergencia de esta serie.

Palabras clave: Serie Trigonométrica de Fourier; Convergencia; Socioepistemología; Uso de Tecnología.

Propósito y Alcance

La Serie Trigonométrica de Fourier (STF) juega un rol fundamental dentro del cálculo, ya que históricamente jugó un papel primordial en el desarrollo del Análisis Matemático y fue un punto importante para la evolución del concepto de función tal y como lo conocemos hoy en día, además, como lo mencionan Muro *et al* (2007) la STF es un tema fundamental en cursos avanzados de ingeniería, por lo que debemos brindarle especial atención.

Diversas investigaciones se han preocupado por la enseñanza de dicho tema con el propósito de que se logren aprendizajes, en este sentido Montiel (2005) menciona que la STF es el estadío más avanzado de las funciones trigonométricas y que para legar a ese punto las funciones seno y coseno deben estar construidas como objeto en los estudiantes, es decir, que deben ser susceptibles de manipulación, por lo que el tránsito entre los diferentes registros de representación es muy importante, en este sentido con el uso de un software de geometría dinámica (Geogebra) se busca crear una serie de apoyos didácticos para complementar el abordaje de las series de Fourier.

Primeramente se abordará la noción de convergencia, pues este es un elemento importante al buscar aprendizajes acerca de la serie de Fourier, seguidamente se abordará la visualización como una estrategia para complementar la enseñanza de las series de Fourier, para finalmente dar una secuencia de actividades que permitan complementar el aprendizaje de dicho tema, especialmente en lo que concierne a la convergencia de la STF.

Perspectivas Teóricas

En el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, diversos estudios se han preocupado por el abordaje de la STF, estas investigaciones se han fundamentado el la

Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, las cuales han seguido una aproximación sistémica para la construcción social del conocimiento, mediante la articulación de cuatro componentes: la naturaleza epistemológica, la dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y la dimensión didáctica (Cantoral, 1999), en este sentido nos interesan los resultados de investigación que propiciaron el diseño de la secuencia didáctica planteada.

Acerca de la noción de convergencia

La comprensión de la convergencia de la serie de Fourier es un asunto complejo cuando se habla de su enseñanza y aprendizaje (Muro et al., 2007), la idea de que una suma infinita de senos y cosenos se aproxime a una función arbitraria es difícil de asimilar por los estudiantes, prueba de esto es el estudio realizado por Farfán (1986, 1994, 2012) donde se evidencia que esta noción es un obstáculo epistemológico, ya que este mismo "inconveniente" se le presentó a grandes matemáticos como Euler y D'Alembert. Euler al referirse a la solución del problema de la cuerda vibrante indica:

> Pero tal vez puede argumentarse que la ecuación,
>
> $$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{l} + \beta \sin \frac{2\pi x}{l} + \cdots,$$
>
> debido a que contiene una infinidad de términos […] aún cuando se aumente el número de términos al infinito, poseen ciertas características que las distinguen de todas las demás curvas […] Así pues, si la curva dada a la cuerda al comienzo no tiene estas propiedades es seguro que no estará encerrada en la ecuación. (Farfán, 2012, p. 66)

Se puede identificar como las propiedades de periodicidad e imparidad de la función seno provocan que se tienda a pensar que la función inicial también deba cumplir estas mismas propiedades, lo que hace que se reste importancia al hecho de que la suma infinita de las mismas pueda converger a la función inicial arbitraria, este obstáculo epistemológico que dicta que la suma de una serie debe tener las mismas propiedades que los términos de la serie es conocido como el principio de permanencia de Leibniz.

Farfán (2012) indica que un estudio cualitativo de la convergencia exige movilizarse entre los contextos algebraico y geométrico, por lo que la visualización juega un papel importante para el aprendizaje de la serie de Fourier.

Acerca de la Visualización

Podemos entender la visualización como la habilidad para representar, transformar, generar, documentar y reflejar información visual (Cantoral & Montiel, 2014), Desde este punto de vista la visualización es una herramienta que se utiliza frecuentemente en el pensamiento matemático.

Sin embargo, Calvillo y Cantoral (2007) comentan que se da mayor importancia a los aspectos formales de la teoría (convergencia de sucesiones numéricas infinitas) y que no se toman en cuenta aspectos visuales, por esta razón se utilizará un software de geometría dinámica (Geogebra), el cual permite el tránsito hacia lo visual, para complementar la enseñanza de la serie de Fourier. Además según Rodríguez (2009) en una secuencia didáctica donde se trabaje desde distintos registros de representación aproximándose a los conceptos de manera visual el estudiante será capaz de:

- Comprender los conceptos matemáticos.
- Desarrollar su visualización matemática y en consecuencia potenciar y evolucionar su pensamiento matemático.
- Hacer el pensamiento matemático una parte inherente así mismo.

Método

La secuencia consta de una introducción y tres tareas, cada tarea está conformada por varias actividades. Bajo la perspectiva de que el conocimiento se construye en sociedad, se espera que las actividades se desarrollen de manera grupal, dos o tres personas por grupo, salvo la tercer tarea que busca la institucionalización del saber.

El docente a cargo de implementar la situación tendrá un rol de mediador, propondrá las actividades a los participantes y estará en constante revisión de lo que estén realizando los grupos de trabajo.

Al finalizar cada tarea se espera que los participantes expongan a los demás los argumentos que utilizaron para resolver la actividad, no es necesario que todos expongan, pero es importante en este punto la acción del docente, pues él debe decidir que grupos expondrán sus argumentos pensando en la mayor variedad posible y así promover la discusión.

Al finalizar el laboratorio se espera comentar con los docentes la intencionalidad y las razones dentro de la epistemología de la STF que guiaron la construcción de la secuencia.

Sobre la Secuencia de Actividades

De manera introductoria se ubica a los participantes en la situación de contexto, el movimiento de los cuerpos celestes tal y como lo modelaron los astrónomos alejandrinos (323 a. C. - 30 a. C.), este modelo se considera de importancia epistémica, ya que fue el modelo que imperó hasta el siglo XVII. Para esto se utiliza un applet en Geogebra con la finalidad de que comprendan el comportamiento del modelo de movimiento de los planetas, superposición de movimientos circulares (Ver Figura 1).

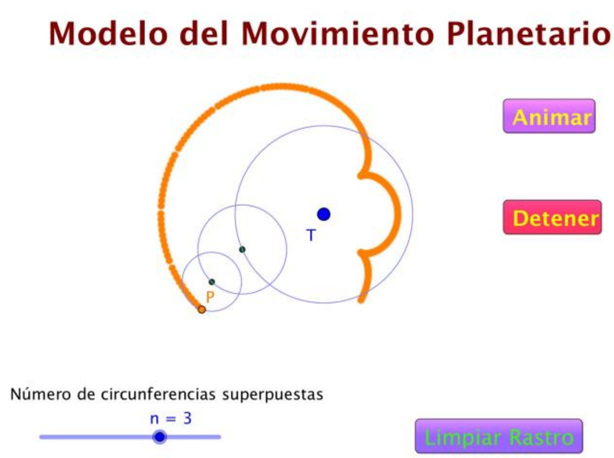


Figura 1. Superposición de movimientos circulares.

El modelo de movimiento de los planetas consistía en una circunferencia centrada en la Tierra y sobre su perímetro se mueve un punto, este punto es el centro de otra circunferencia, y sobre el perímetro de esta última se mueve otro punto, el cual es centro de otra circunferencia y así sucesivamente, todos los puntos se mueven con velocidad angular uniforme y en sentido antihorario.

En la Tarea #1 la situación representa circunferencias en donde en el estado inicial (tiempo igual a cero) los centros son colineales (Ver Figura 2).

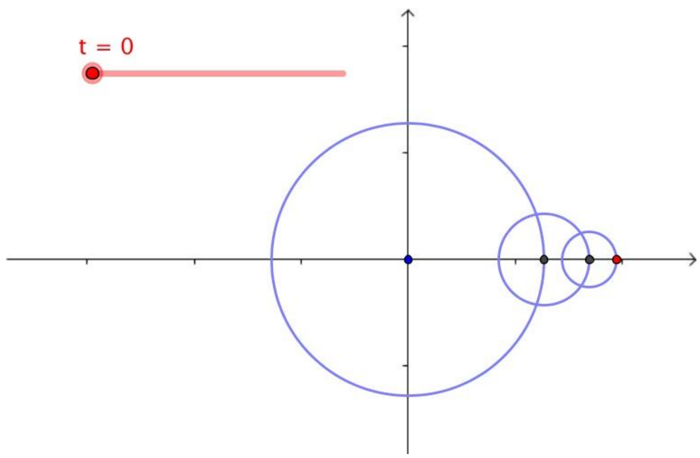


Figura 2. Situación inicial de la tarea #1.

Las actividades de esta tarea buscan que los participantes, en un sistema de coordenadas, determinen las coordenadas del punto que representa al planeta en función del tiempo transcurrido, se hace de manera inductiva, primero se estudia el modelo con una circunferencia, luego con dos, a partir de esto los participantes deben hacer una construcción en Geogebra del modelo con tres circunferencias, esto con ayuda del docente (Ver Figura 3).

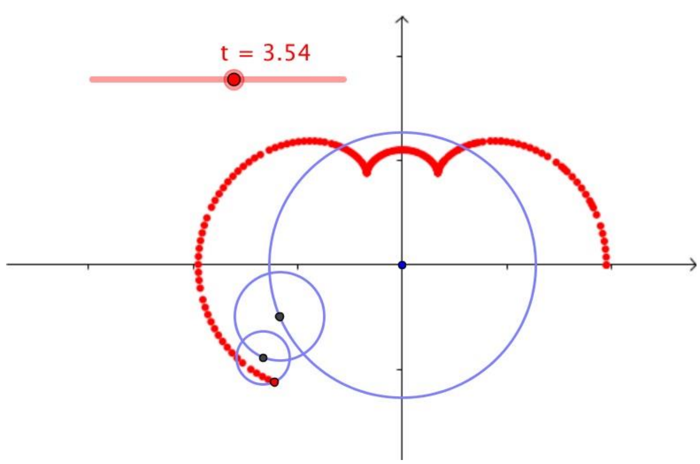


Figura 3. Modelo de tres circunferencias.

Para el final de esta tarea se busca que los participantes construyan y visualicen la convergencia de una serie trigonométrica particular, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(w_n t)$ donde A_n es la sucesión de los radios de las circunferencias que se superponen y w_n es la sucesión de las velocidades de movimientos de los centros de cada circunferencia, para esto se les mostrará un applet de Geogebra con el modelo donde pueden variar el número de circunferencias y el tiempo.

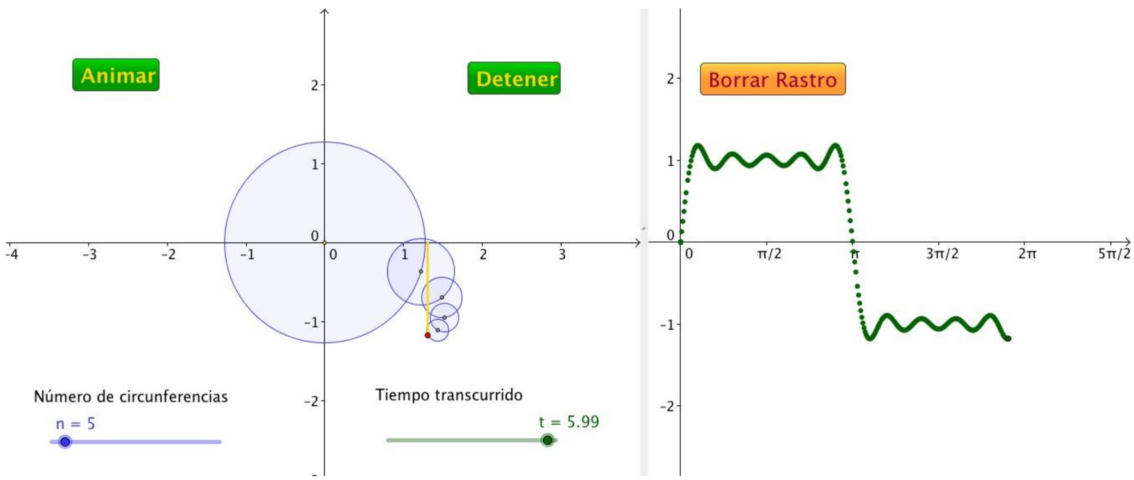


Figura 3. Modelo de n circunferencias de la tarea #1.

Con la Tarea #2 se busca generalizar aún más el modelo, la diferencia principal con la Tarea #1 es que los participantes deben modelar una situación en la cual los centros de las circunferencias no son colineales en su tiempo inicial y "la Tierra" no está centrada en el origen del sistema de coordenadas (Ver Figura 4).

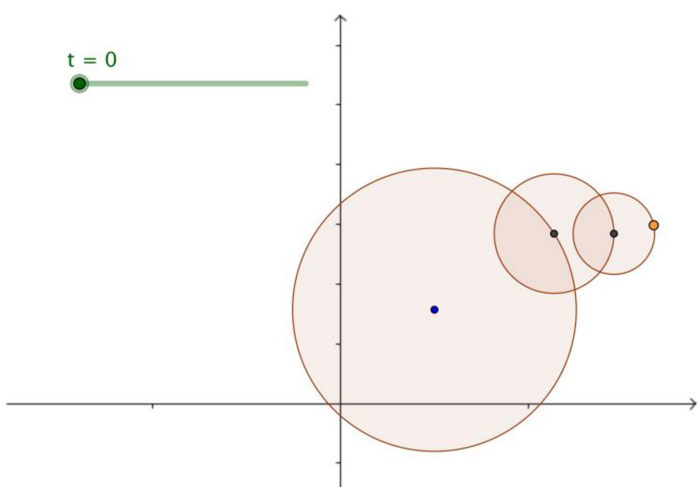


Figura 4. Situación inicial de la tarea #2.

Siguiendo una serie de actividades similares a las de la Tarea #1 deben construir el modelo para *n* circunferencias donde aparecerá la serie $\sum_{k=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(w_n t + \theta_n)$ donde A_n es la sucesión de los radios de las circunferencias que se superponen, w_n es la sucesión de las velocidades de movimientos de los centros de cada circunferencia y q_n el ángulo que forma el punto con la horizontal al inicio del movimiento, es decir, cuando el tiempo igual a cero.

Para finalizar se les presentará un applet de Geogebra con el modelo donde pueden variar el número de circunferencias y el tiempo, para que así puedan determinar la convergencia de la serie (Ver Figura 5).

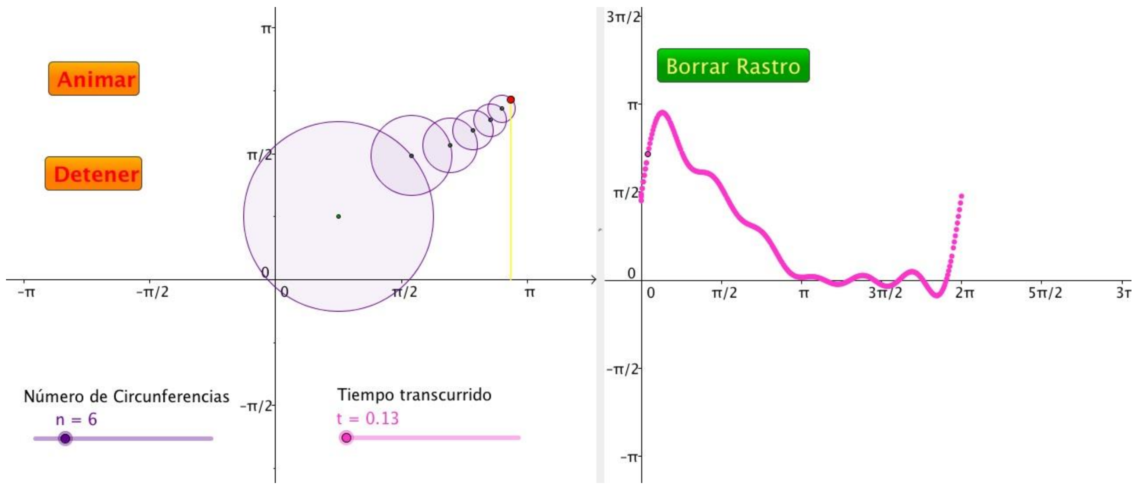


Figura 5. Modelo de n circunferencias de la tarea #2.

La Tarea #3, busca la generalización del modelo anterior, esto pues en las tareas #1 y #2 se dan los radios específicos, las velocidades específicas y la medida del ángulo inicial, por lo que se busca construir un modelo para las coordenadas del punto para *n* circunferencias (ver Figura 6).

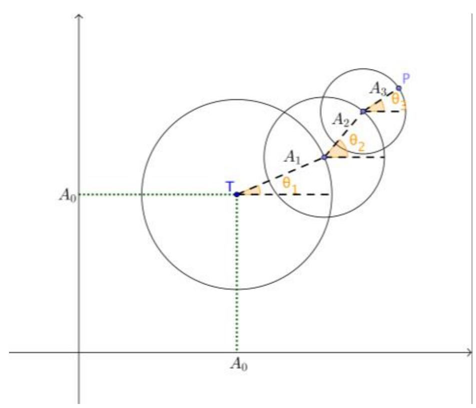


Figura 6. Modelo general del movimiento de los planetas.

Para finalizar se presentará un applet en Geogebra con el fin de buscar una similitud del modelo descrito con la Serie Trigonométrica de Fourier, y buscar condiciones que provoquen la igualdad (Ver Figura 7).

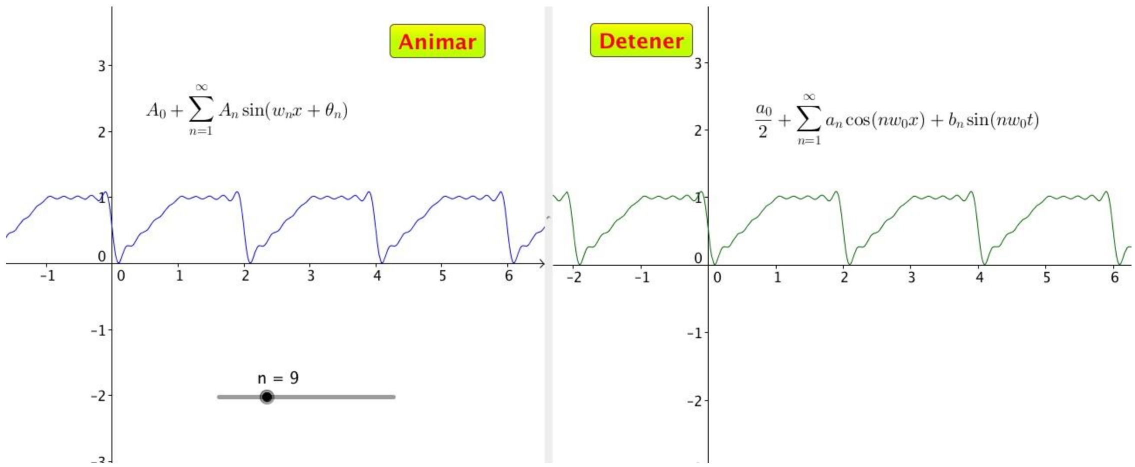


Figura 7. Comparación del modelo construido con la stf.

Consideraciones Finales

Este diseño, hasta la fecha, ha sido piloteado dos veces, la primera con un grupo de estudiantes del programa de Maestría en Matemática Educativa del Cinvestav-IPN con el fin de revisar redacción, claridad de las ideas, tiempo de ejecución, entre otros factores; la segunda vez se implementó en un taller con profesor de nivel medio superior y superior, buscando revisar si las correcciones hechas a partir del primer pilotaje fueron acertadas, los resultados fueron satisfactorios, se espera a futuro implementarla con estudiantes de ingeniería.

Como se mencionó antes, la comprensión de la noción de convergencia de una serie de Fourier no es simple, por lo que se buscó crear apoyos para complementar el aprendizaje de la Serie Trigonométrica de Fourier, es decir, los materiales aquí expuestos no son, ni serán suficientes para comprender todas las nociones relacionadas con la STF, la idea es utilizarlos para apoyar la visualización de la noción de convergencia de la SFT.

Referencias

Calvillo, N., & Cantoral, R. (2007). Intuición y visualización: demostración en la convergencia de sucesiones. In C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamerica de Matemática Educativa 20* (pp. 554–559). Clame.

Cantoral, R. (1999). Approccio socioepistemologico alla ricerca in Matematica Educativa: un programma emergente. *La Matematica E La Sua Didattica*, *3*, 258–270.

Cantoral, R., & Montiel, G. (2014). *Precálculo un enfoque visual*. México D. F.: Pearson.

Farfán, R. M. (1986). *Acerca de la representación de una función "arbitraria" en serie trigonométrica (Ensayo Histórico)*. Cinvestav-IPN.

Farfán, R. M. (1994). *Construcción de la noción de convergencia en ámbitos fenomenológicos vinculados a la ingeniería*. Cinvestav-IPN.

Farfán, R. M. (2012). *Socioepistemología y ciencia. El caso del estado estacionario y su matematización* (Primera Ed). Barcelona, España: Editorial Gedisa.

Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la función trigonométrica*. Instituto Politécnico Nacional.

Muro, C., Camarena, P., & Del Carmen, R. (2007). Alcances de la teoría de Vergnaud en la representación de un problema complejo de ingeniería. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *10*(3), 401–419.

Rodríguez, M. (2009). *Una matemática funcional para el ingeniero. La serie trigonométrica de Fourier*. Cinvestav-IPN.

Autores

Fabián Wilfrido Romero Fonseca; CINVESTAV, IPN. México; fwromero@cinvestav.mx

Rosa María Farfán Márquez; CINVESTAV, IPN. México; rfarfan@cinvestav.mx

EL USO DE LA GRÁFICA A TRAVÉS DE LA MODELACIÓN-GRAFICACIÓN CON SENSORES DE MOVIMIENTO

Fredy de la Cruz Urbina, Hipólito Hernández Pérez

Resumen

Con la Modelación-Graficación de fenómenos de movimiento se provoca el uso de las formas de representación numérico, gráfico y algebraico de un fenómeno, por medio de las cuales es posible visualizar y reconocer patrones o comportamientos, analizar la variación y establecer reglas que permitan comprender e influir en la situación. Por tanto, desarrollar argumentos y significados sobre las formas de representación de un fenómeno es una tarea imprescindible para entender la funcionalidad de los objetos matemáticos y poder usarlo con intención. En esta propuesta se favorecen estos constructos a partir de la Resignificación de la función cuadrática.

Palabras claves: Modelación-graficación, gráfica, funcionalidad, movimiento

Propósito y alcance

Se propone desarrollar argumentos y significados sobre *el uso de la gráfica* a partir de la Modelación-graficación como práctica social, con la finalidad de utilizarla como una herramienta de argumentación del fenómeno. Desde la mirada socioepistemológica se articula la situación y la participación de los asistentes en la construcción del conocimiento. Estos elementos no se soslayan como en el discurso escolar dominante sino se favorecen con la intención de provocar el *uso* del conocimiento matemático.

El propósito del taller es dar a conocer el diseño de una secuencia didáctica que tiene como fundamento la Modelación-graficación de fenómenos de movimiento para resignificar las formas de representación de la función cuadrática, concepto que debe estudiarse en el tercer grado de nivel secundaria y el primer semestre de bachillerato. Con esta puesta en escena se pretende que los partipantes desarrollen elementos para hacer uso de la gráfica como herramienta de argumentación.

El taller está dirigido a profesores de nivel secundaria y bachillerato que en su quehacer docente deben favorecer estos constructos, además, atendiendo a la Reforma Integral para la Educación Media Superior (RIEMS) considera a la Modelación como estrategia de enseñanza y la inclusión de la tecnología para proporcionar un escenario pertinente que favorezca de acuerdo con el plan de estudios en comento:

> El desarrollo de la creatividad y el pensamiento lógico y crítico entre los estudiantes, mediante procesos de razonamiento, argumentación y estructuración de ideas que conlleven al despliegue de distintos conocimientos, habilidades, actitudes y valores, en la resolución de problemas que en sus aplicaciones

> trasciendan el ámbito escolar (Secretaría de Educación Pública, 2013, p. 6).

De manera general el taller considera y favorece estos elementos a partir de la práctica social que es la generadora del conocimiento matemático y el referente para rediseñar el discurso matemático escolar donde deviene la funcionalidad del conocimiento matemático (Morales y Cordero, 2014).

Marco teórico

El presente trabajo está enmarcado bajo la Teoría Socioepistemológica (TS), desde esta perspectiva se asume que las Matemáticas es producto de una construcción social y que por ello no deben soslayarse los problemas sociales y culturales que acompañan a la actividad humana. "Cada época en la historia de la enseñanza produce, mediante sus prácticas sociales cotidianas, conocimiento" (Cantoral, 2013, p. 105).

> La Socioepistemología, como sistema teórico para la investigación en Matemática Educativa, se ocupa específicamente del problema que plantea la conformación del saber matemático. Es importante precisar que en este enfoque asumimos la legitimidad de toda forma de saber, sea este popular, técnico o culto, pues en su conjunto constituyen la sabiduría humana (Cantoral, 2013, p. 26).

La TS considera a la actividad humana como la fuente de reorganización de la obra matemática y del Rediseño del Discurso Matemático Escolar (RDME), "Para ello, se construye la situación donde la práctica se transforma en el argumento, como el eje o núcleo para generar el conocimiento matemático que responda a la situación" (Cordero, 2003, p. 77).

Las investigaciones de Cantoral (2001), Arrieta (2003) y Suárez (2008), constituyen un referente con base a la investigación de Oresme para hacer uso de la gráfica en la modelación de fenómenos de movimiento (modelación-graficación) para resignificar el *aspecto funcional* de las funciones con *el cambio y la variación*, es por ello que nos valemos de esta práctica como medio para generar conocimiento matemático partiendo desde la situación.

Habiendo realizado una revisión histórica-epistemológica de la función cuadrática, nos dimos cuenta que a lo largo de la historia han existido conceptos que fueron abonando a la idea de función. Cantoral menciona que la utilización del *Teorema del grado medio* en forma reiterada para el estudio de la variabilidad, el cambio y la dependencia inició el proceso de consolidación de la noción de *función analítica* (Cantoral, 2001).

El estudio del concepto de Función Cuadrática (FC) en el discurso escolar se desarrolla en el tercer grado de educación secundaria y en el primer semestre de bachillerato según los planes de estudio (SEP, 2013). Una revisión de estos planes sugiere para favorecer el estudio de este concepto matemático el tratamiento analítico de ecuaciones (utilización de despejes y factorizaciones), elaborar e interpretar gráficas y tablas a partir de situaciones diversas, identificar la variación de parámetros, obtener la ecuación de la función y propone realizar ejemplos de situaciones reales que impliquen el uso de la FC y de la tecnología, en otras palabras la "modelación" de situaciones.

Para desarrollar y articular estos constructos nos apoyamos del estudio epistemológico, en el cual sobresale la contribución de los babilonios y de Al-khuwarizmi en el tratamiento gráfico de las expresiones algebraicas, porque aluden "formas de representación" que infieren un nuevo uso de las figuras geométricas y que ayudan a comprender y desarrollar propiedades del fenómeno que sin el uso de ellas es más difícil o no es posible visualizarlas y construirlas, por tanto, la REPRESENTACIÓN GRÁFICA constituye un elemento primordial en la resignificación de la Función Cuadrática.

Por otro lado es trascendente desde este planteamiento, la noción de conceptualización de número de los pitagóricos y desde esta perspectiva el uso que se le puede dar, partiendo que para ellos los números no eran ideas abstractas sino puntos o partículas. Y como ejemplo hablaban de números triangulares, cuadrados, pentagonales, etc. como colecciones de puntos colocados en esas formas geométricas (Kline, 2006). Visualmente pueden observarse relaciones y variaciones con esta conceptualización de donde deviene un ANÁLISIS NUMÉRICO.

Finalmente de estas relaciones, identificación de patrones y comportamientos, surge el *síntoma de la razón de cambio* y la necesidad de *Establecer Reglas* que encapsulen o representen estas propiedades provocándose con esta intención la REPRESENTACIÓN ALGEBRAICA.

Estas "formas de representación" (Gráfica, numérica y algebraica) con base a estos elementos epistemológicos y a las prácticas sociales favorecen la *resignificación* del concepto de función cuadrática; en la figura 1 se presenta de manera esquemática estas ideas que se sustentan con los elementos epistemológicos antes mencionados.

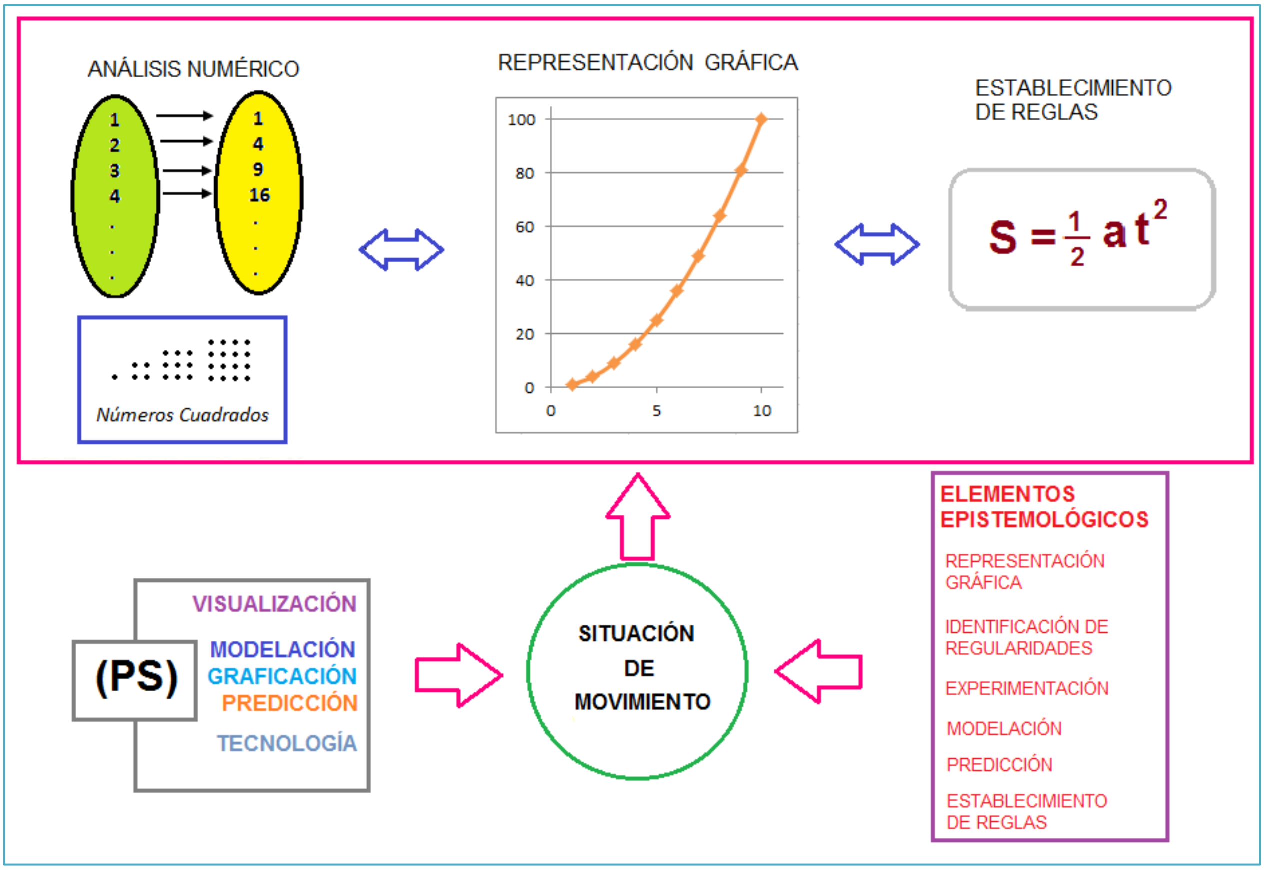


Figura 1: Elementos históricos epistemológicos

Método

La propuesta didáctica que se presenta tiene como fundamento la Modelación-graficación inicialmente documentada en los trabajos de Suárez y Cordero (2005) y Suárez (2008), en las cuales se sustenta que la **graficación** es la *categoría* que articula la **modelación** con la **tecnología**.

Por otro lado, conviene mencionar que el concepto de **función** desde la perspectiva Socioepistemológica y tomando como base las investigaciones de Cordero (2001) es vista como una *instrucción que organiza comportamientos*. En este sentido, Solís (2012) trabaja con una función prototipo y su gráfica en la cual se hacen variar sus parámetros (a, b, c, d) y se observan los efectos de estos sobre su gráfica; la expresión $y = af[(bx + c)] + d$, se puede ver como un conjunto de instrucciones. Por su parte Suárez (2008) argumenta considerando el análisis epistemológico de la obra de Oresme sobre la "Figuración de las cualidades" que *la gráfica antecede a la función y es argumentativa*.

Con estos elementos se plantea de entrada que la gráfica es más que la representación de una función, expresa en sí misma un modelo, ya que la Graficación es vista como una forma de modelación. Se espera que esta nueva visión proporcione un uso de la gráfica asociado al fenómeno y que sirva de herramienta para entender e interpretar comportamientos y retomando la postura de Arrieta (2003)… que además sirva para transformarlo.

Con esta propuesta se articula la situación con la participación del estudiante a través de la modelación de situaciones de movimiento, por lo que se necesitan dispositivos que permitan "recopilar y visualizar datos" para que a partir de ellos se tomen decisiones, se visualicen patrones, se identifiquen variaciones y se propongan nuevas situaciones que produzcan resultados deseados a través de la variación de parámetros de las situaciones a modelar, el proceso se realiza las veces que sean necesarias, este argumento justifica el porqué de la inclusión de la *tecnología*.

La idea de modelar el movimiento es retomar una "situación real" y vincularla o llevarla a un "escenario escolar" para dar cuenta que el conocimiento que existe en la escuela responde a situaciones de lo cotidiano como lo es una caminata o el simplemente movernos de un lugar a otro y cómo las diversas formas que implica el movimiento como "quedarse parado" "avanzar más rápido" "avanzar menos" origina cambios en la estructura de la gráfica considerada como una *forma de representación o modelo* de la situación.

Tomando como referentes las investigaciones de Cordero (1998, 2001), Arrieta (2003) y Suárez (2008); encontramos evidencias del uso de la modelación en los fenómenos de movimiento abordados desde el marco de la Socioepistemología donde la componente social es relevante en el diseño de las secuencias, de allí que se pretende resignificar la función cuadrática en su *aspecto funcional* en una situación de modelación-graficación del movimiento teniendo como referente la TS.

Retomando estas ideas conformamos el esquema metodológico, figura 2; donde el alumno se involucra en un escenario de Modelación- Graficación partiendo de una situación de movimiento (SDM) y el uso de la tecnología (sensores de movimiento, emulador, proyector, computadora), donde se favorece el tránsito entre las formas de representación del fenómeno a través de las *Realizaciones múltiples, Identificación de patrones, Ajustes y Desarrollo del Razonamiento*; desarrollándose así, argumentos y significados que servirán de herramientas para la construcción de un "nuevo" modelo matemático que representa la situación, desde nuestra perspectiva es un "nuevo modelo" porque ha pasado por un proceso de *resignificación*.

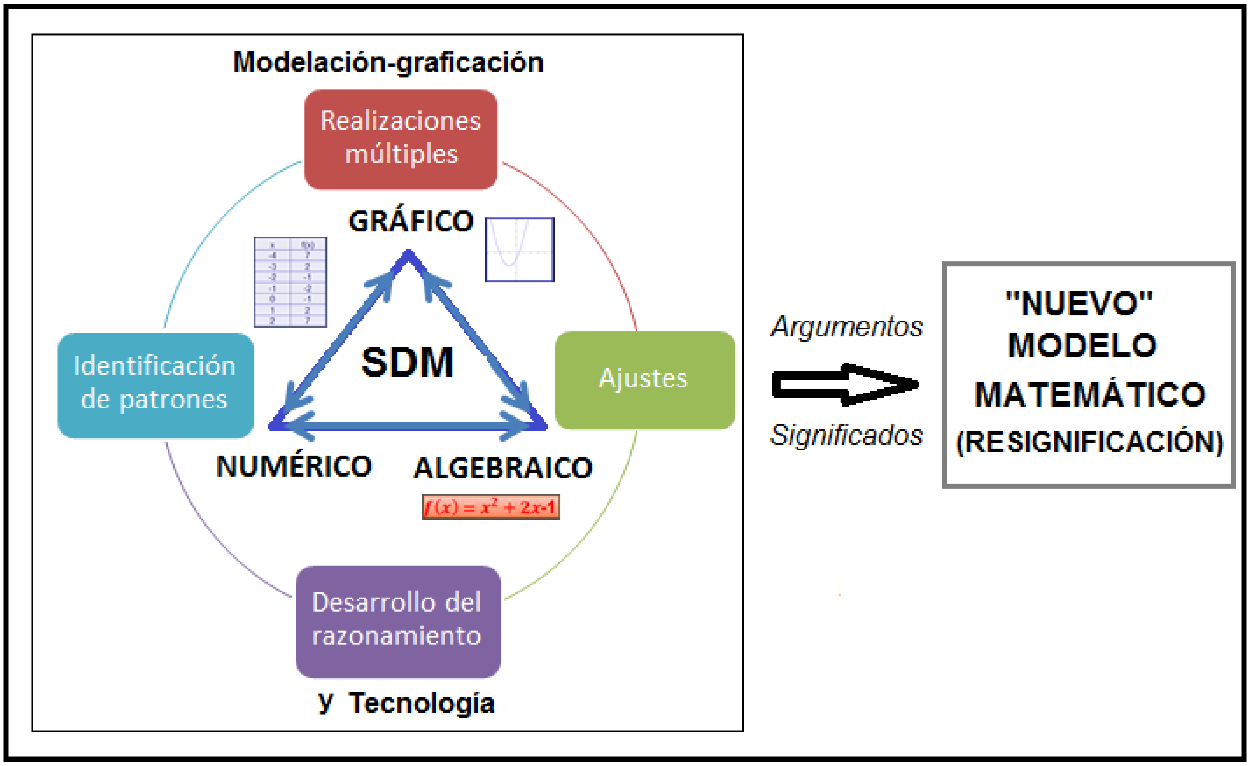


Figura 2: Esquema metodológico

Diseños didácticos

El diseño de la secuencia didáctica contempla las siguientes fases:

Fase de inducción: Esta etapa tiene como propósito inducir al alumno en la búsqueda de "*patrones o reglas*" que están presentes en una situación, donde ponga en uso el análisis numérico. Se pretende que el alumno *identifique patrones y variables* de una tabla numérica, se provoca que los alumnos establezcan relaciones entre variables y le conduzcan a formular expresiones que representan dicha situación. Se favorece la relación entre las formas de representación: numérico, algebraico y gráfico. Se proponen también ejercicios de visualización para la identificación de patrones y relaciones entre variables presentes en situaciones que implican lo lineal y lo cuadrático.

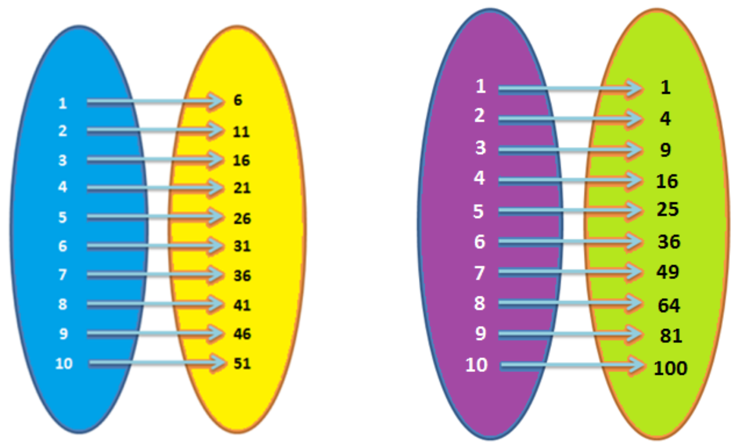
Fase de modelación-graficación I: Se modela una situación de movimiento haciendo uso de la tecnología (sensores de movimiento, emulador o software, proyector, computadora) para obtener y visualizar datos sobre el fenómeno en términos de la gráfica posición-tiempo. Con ello pretendemos que el alumno *visualice comportamientos* en términos de variación de parámetros tanto en la gráfica como numéricamente. Se *realizan ajustes* para construir la gráfica que modela una situación específica y se identifica lo que hace que varíe. Se favorece también la relación entre las tres formas de representación comentadas.

Fase de modelación-graficación II (Resignificación): En esta etapa se construye con el uso de la tecnología diferentes tipos de gráficas (realizaciones múltiples) en torno a la función cuadrática, se espera que el estudiante proponga escenarios considerando la *variación de patrones* en los fenómenos de movimiento para construir una gráfica deseada (Realización de ajustes). Se espera que el alumno visualice cómo la gráfica cambia al modificar los parámetros y realice ajustes para construir el modelo matemático que representa una situación específica. Se analizarán qué argumentos construyen sobre lo cuadrático y las herramientas que usan para validar sus respuestas (Desarrollo del razonamiento). Finalmente se propone una actividad donde se propicia la interacción entre los tres contextos (gráfico, numérico y algebraico).

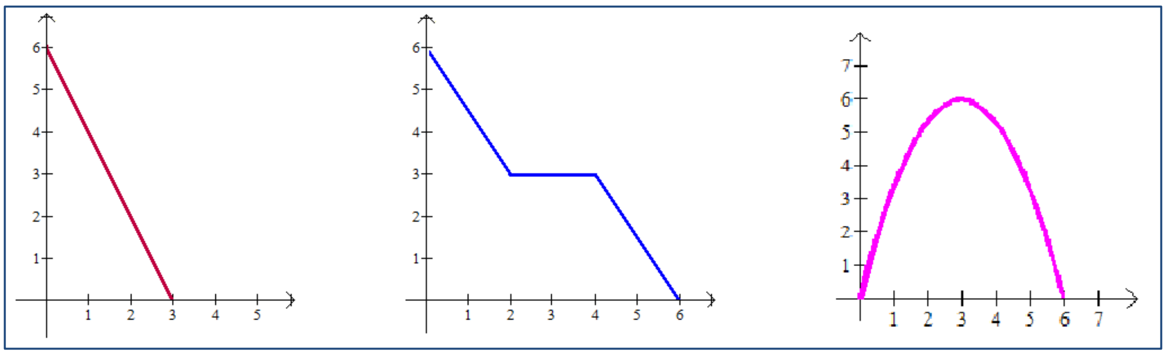
A continuación se describe de manera general la clase de tareas a realizar.

1. Actividades de inducción: Identifica la regla o patrón presente en las siguientes situaciones

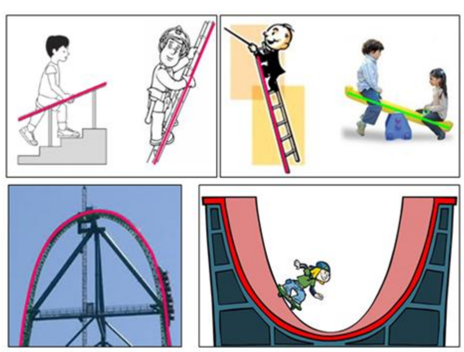
2	x	1	=	2
2	x	2	=	4
2	x	3	=	6
2	X	4	=	8
2	x	5	=	10
2	x	6	=	12
2	x	7	=	14
2	x	8	=	16
2	x	9	=	18
2	x	10	=	20



2. ¿Qué información interpretas de las siguientes gráficas?



3. Actividad de Visualización: Observa las situaciones, compara y argumenta

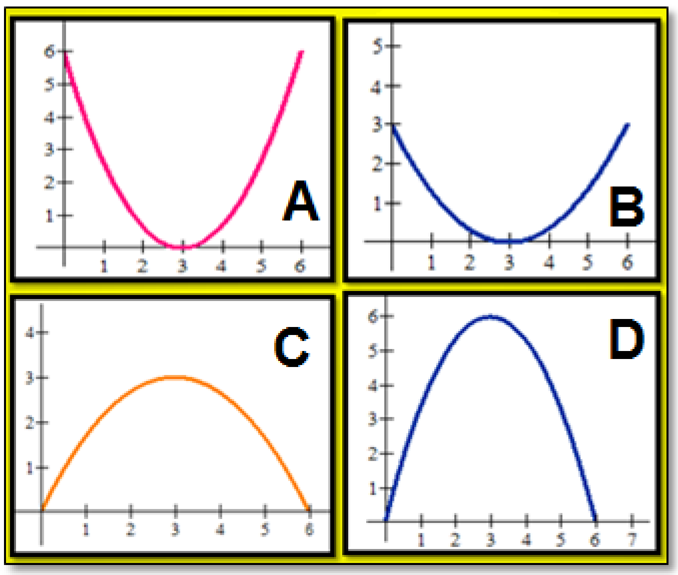


4. Actividad de Modelación: Apoyados de la tecnología (sensor de movimiento, emulador) registra el movimiento de una persona, observa lo que sucede en la

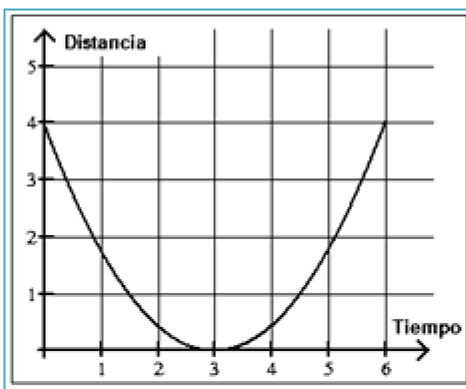
representación gráfica. ¿Cómo crees que sería la gráfica si la persona se desplaza más rápido? ¿Cómo sería la gráfica si la persona se desplaza más lento? Con los datos numéricos recopilados por el sensor completa la tabla, identifica la regla o patrón de la situación-fenómeno.

Tiempo (segundos)	Distancia (metros)
0.5	
1	
1.5	
2	
2.5	
3	

5. Plantea la situación para construir las siguientes gráficas:



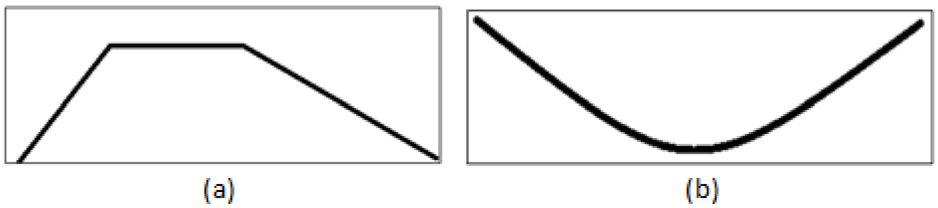
6. Considera la siguiente situación, completa la tabla con la información de la gráfica, identifica el patrón y calcula la distancia para un tiempo de 10 segundos.



Tiempo (segundos)	Distancia (metros)
1	
2	
2.5	
3	
3.25	
4	
5	

7. Contesta las siguientes preguntas: ¿De qué depende que...?

i) La gráfica sea más abierta o cerrada
ii) Abra hacia arriba o hacia abajo
iii) Esté más arriba o hacia abajo
iv) Sea más alta o más baja
8. ¿Qué hace que varíe la gráfica?
9. ¿Cuál sería el valor de la distancia para un tiempo de *t* segundos?
10. ¿Que representan las siguientes gráficas?



Consideraciones finales

Las actividades abordadas en la secuencia favorecen el desarrollo de habilidades al transitar de un ambiente a otro (numérico, gráfico y algebraico) permitiendo contar con más herramientas para construir argumentos y significados sobre el concepto de función. A través de estas actividades los participantes conocieron el proceso de construcción de una recta y una curva (parábola), en dónde la situación participa en el discurso y las formas de representación gráfica y numérica tienen sentido y significado en términos de la situación de movimiento.

Con respecto a los planes de estudio de bachillerato (Matemáticas I) pudo lograrse desde el papel del profesor proponer ejemplos pertinentes e innovadores donde destaca el uso de la tecnología y la modelación como estrategia de enseñanza, en cuanto al currículo los alumnos construyen, identifican e interpretan la gráfica de una función cuadrática, visualizan la variación de parámetros, elaboran e interpretan gráficas y tablas a partir de una situación real que involucra el uso de la función cuadrática y el uso de la tecnología en la modelación de la función cuadrática.

De estas actividades de Modelación-Graficación que proponemos emergieron dos cosas muy interesantes: La necesidad de contar con referentes o puntos de apoyo para argumentar y el uso de símbolos que surgen como apoyo en la argumentación. El uso de estos referentes y símbolos van cargados de la intencionalidad de transmitir "un significado", expresa también la funcionalidad de los objetos matemáticos que son usados con intención y en una situación específica. En la figura 3 se observa la interpretación de dos gráficas considerando las actividades de modelación-graficación trabajadas.

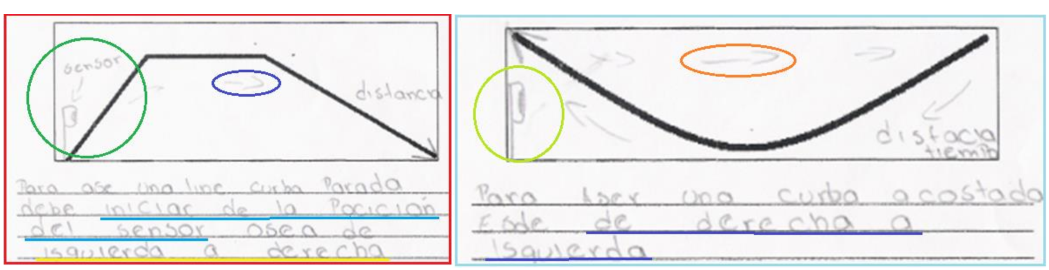


Figura 3: La interpretación de la gráfica a partir de la situación

La Modelación-Graficación juega un papel muy importante como medio para contrastar las propuestas de los participantes ("hipótesis") con la situación real, de donde surgen "nuevos modelos" siguiendo el proceso de la categoría de M-G (Realizaciones múltiples, identificación de patrones, realización de ajustes y desarrollo del razonamiento), estos "nuevos modelos" se resignifican cada vez que se ponen en escena permitiendo construir un patrón o modelo deseado así como la construcción del conocimiento. De allí que la M-G como práctica social implícita en una SDM, es la que guía el proceso, es la que provoca que surjan estos constructos y la que nos mueve a actuar.

Por otro lado la visualización es una herramienta que ayudó mucho en el proceso, permitió identificar elementos que caracterizan al objeto matemático (recta y parábola) y que sirvieron de base para comprender las actividades de la fase de modelación-graficación. Favoreció también en el reconocimiento de patrones e intervalos en la gráfica, así como de causar el "síntoma" de la *razón de cambio* al identificar la cantidad que varía y observar comportamientos en términos gráficos donde ésta es la misma, esta evidencia puede verse e la figura 4.

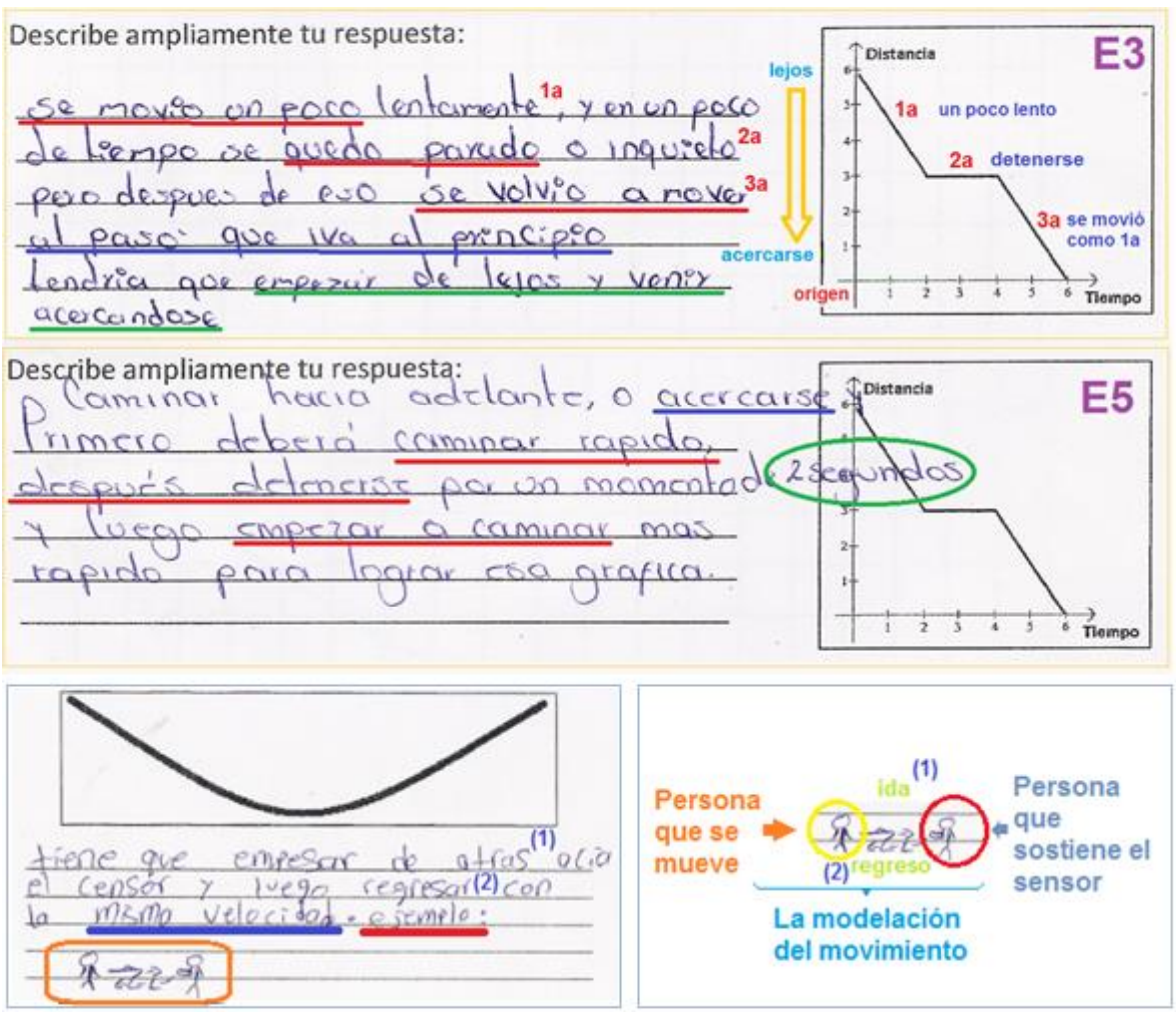


Figura 4: Reconocimiento de intervalos, patrones y evidencia del "síntoma de la razón de cambio"

Los argumentos construidos con la secuencia permitieron a los participantes interpretar una gráfica en términos del movimiento, la situación se hace presente en la argumentación, la gráfica tiene significado y sentido para ellos. Identifican cambios en la forma de la gráfica con relación al movimiento (velocidad, aceleración), desarrollan un nuevo uso de la gráfica a través de la resignificación del movimiento con los elementos de la categoría de M-G. Con respecto a lo numérico permitió identificar la cantidad que varía, sirvió de apoyo para predecir estados futuros y a través de esta inquietud *establecer la regla* que representa la situación aunque solo se lograron en algunos casos, comprendieron la relación que existe entre la tabla numérica y la gráfica y cómo una puede construirse a partir de la otra, pero sobre todo que provienen de una situación de lo cotidiano, no son conceptos abstractos sino que *son usados con intención*.

Se produjeron acercamientos interesantes a la conceptualización de la función cuadrática y a sus elementos que lo caracterizan tales como la concavidad, el vértice, el lado recto, así como el punto de intersección de la curva con el eje vertical; es importante señalar que estos conceptos se desarrollaron teniendo como sustento la SDM. La situación se hace presente en la argumentación, de allí que estos conceptos son entendidos a partir de su aspecto funcional, de manera que la concavidad depende del cómo se produce el movimiento a partir del sensor (que representa un punto clave o bien identificado también como centro del sistema de referencia), el lado recto de la parábola es entendido cotidianamente como qué tan ancha o cerrada es la curva y eso depende de la forma en que se mueve la persona (relación tiempo- distancia) y así cada concepto es interpretado con relación a la SDM; de manera que los alumnos pueden interpretar una gráfica a través de la SDM y gracias a la M-G.

Finalmente se observó que la tecnología ayuda a desarrollar los contextos gráfico, numérico y algebraico de un fenómeno, permite establecer relaciones entre ellos a través de la visualización de la gráfica y el análisis numérico, así como obtener el modelo algebraico de la situación. Básicamente permite recopilar información en tiempo real y hacer múltiples realizaciones de las propuestas de la SDM que posteriormente es analizada a través de la gráfica y la tabla numérica, en la que es posible identificar patrones, hacer ajustes y desarrollar el razonamiento a partir de las confrontaciones que suceden entre las propuestas y las situaciones de modelación-graficación (SDM-G), en este sentido el papel de la tecnología es relevante.

En general se presentó a los alumnos una nueva propuesta de aprender matemáticas, una propuesta que toma en cuenta sus conocimientos, sus experiencias y sus intenciones; que no excluye a la situación y que toma en cuenta al alumno en la construcción de su conocimiento, creemos que esa es la esencia de la Socioepistemología y que ha llamado la atención de los alumnos al involucrarlos y ser parte de la situación, de manera que *sin humanos no hay conocimiento*.

Referencias Bibliográficas

Arrieta, J. L. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios avanzados del IPN. México.

Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa. Un estudio de la formación social de la analiticidad.* D. F., México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la matemática educativa: Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa.

Cordero, F. (1998). El entendimiento del algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso de comportamiento tendencial de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 2(1)*, 56-74.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, *4*(2), 103-128.

Cordero, F. (2003). Lo social en el conocimiento matemático: Reconstrucción de argumentos y de significados. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, *16*(1), 73-78.

Kline, M. (2006). *Matemáticas la pérdida de la certidumbre.* D. F., México: Siglo veintiuno editores.

Morales, A., y Cordero, F. (2014). La graficación-modelación y la serie de Taylor. Una Socioepistemología del cálculo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(3), 319-345.

Secretaría de Educación Pública. (2013). *Documento Base del Bachillerato General.* Recuperado el 11 de Noviembre de 2014 de http://www.dgb.sep.gob.mx/02-m1/03-iacademica/programasdeestudio.php

Solís, M. (2012). *Las gráficas de las funciones como una argumentación del cálculo. Caso de la predicción y la simulación en las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.* Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios avanzados del IPN. México.

Suárez, L. (2008). *Modelación – Graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio Socioepistemológico.* Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios avanzados del IPN. México.

Suárez, L. y Cordero, F. (2005). Modelación en Matemática Educativa. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18*, 639-644. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Autores

Fredy de la Cruz Urbina; UNACH. México; frecu@hotmail.com

Hipólito Hernández Pérez; UNACH. México; polito_hernandez@hotmail.com

RESIGNIFICANDO A PARTIR DE LOS USOS DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

Gisela Montiel Espinosa, Gabriela Buendía Abalos

Resumen

En este laboratorio, trabajeremos en el marco socioepistemológico, a partir de ejemplos e ilustraciones relativas a la resignificación; esto es, sobre la construcción del conocimiento matemático a partir de reconocer sus usos. Se trata de una categoría epistemológica a la luz de la cual se evidencia la naturaleza social del saber matemático. Mediante resultados de la investigación reciente en el área, discutiremos en primera instancia aspectos teóricos y metodológicos así como implicaciones hacia el aula de matemáticas. Durante la última parte del laboratorio, propondremos junto con los asistentes aspectos de posibles resignificaciones para que en el análisis de lo presentado se pongan en juego las herramientas teórico-metodológicas necesarias para evidenciar o al menos reflexionar en la resignificación en el aula de matemáticas.

Palabras clave: Resignificación, usos del conocimiento matemático, Socioepistemología

Propósito y alcance

En la enseñanza de las matemáticas, éstas suelen ser percibidas especialmente después de la educación básica, como un conjunto de verdades finamente acabadas y en consecuencia, la escuela suele privilegiar la metáfora del objeto dentro de sus aspectos didácticos. En consecuencia, el objetivo al enseñar un objeto matemático -una definición, una propiedad, un algoritmo, un concepto- está en desarrollar estrategias didácticas, secuenciadas lógicamente, para enseñarlo *lo mejor posible* o de la manera *más fácil*. No suele haber cabida para cuestionar aquello que se está enseñando o si esa secuencia lógica se articula de alguna manera con otras fuentes del conocimiento mismo ya sea al seno de la escuela con otras asignaturas escolares o con una fuente como el cotidiano del estudiante.

Se trata entonces de presentar a la matemática escolar como un conjunto de entidades objetivadas y jerarquizadas que el alumno tiene que construir o adquirir. Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini (2015) señalan que una consecuencia de este fenómeno de centración en el objeto es el abandono escolar de una gran cantidad de estudiantes desde la educación secundaria hasta el bachillerato. Ante ello, buscamos discutir en este laboratorio una mirada alternativa en la que considerando la naturaleza social de la matemática escolar y sus usos puedan ser considerados como una categoría epistemológica para analizar la construcción del conocimiento matemático. Esta noción de uso del conocimiento será el tipo de saber matemático que nos importa desarrollar en el aula

En consecuencia, propondremos diferentes aspectos de posibles resignificaciones para que en conjunto los trabajemos en el Laboratorio. Esto nos permitirá entender cómo o al menos reflexionar sobre cómo evidenciar resignificaciones, cómo reconocer el papel de usos y prácticas ante tales resignificaciones.

Así, el Laboratorio está dirigido a profesores e investigadores en el área de la Matemática Educativa y en particular, que estén interesados en la visión socioepistemológica. No es necesario estar realizando investigación en el área aunque se sugiere que si lo han hecho o está en ciernes, compartan algunos aspectos al material que se impartirá en el Laboratorio.

Marco teórico

Cordero (2008) menciona que los sistemas educativos se han preocupado por lo que sabe un estudiante o un docente -por ejemplo, saber interpretar una función, lograr graficarla; saber comprobar una propiedad- pero no por cómo se usa ese saber lo cual tiene mucho más relación con una matemática escolar funcional y articulada.

Buscamos poner al uso del conocimiento matemático en el centro del análisis, pero no como una aplicación de lo aprendido o como su empleo cotidiano, sino hacer notar su papel en la construcción de un conocimiento matemático. Dada la visión propuesta por la Socioepistemología, los aspectos epistemológicos reconocen a la actividad humana como una organización social en la que se construye conocimiento matemático por lo que sus explicaciones consideran no sólo la producción matemática del individuo, sino todo aquello involucrado en el quehacer del hombre haciendo matemáticas (Buendía, 2012).

La perspectiva socioepistemológica no mira a los conceptos y sus diferentes estructuraciones de manera aislada, sino que atiende a las prácticas que producen, favorecen y norman la generación de dichos conceptos. A decir de Cantoral (2013) se intenta crear un modelo que refiera la construcción social del conocimiento matemático; el reto es formular epistemologías de prácticas sociales en las que el uso del conocimiento es el saber que referirá necesariamente a la matemática como una construcción social.

Discutiremos entonces la naturaleza compleja de la noción *uso* la cual trae consigo el contexto sociocultural, esto es, un conocimiento matemático totalmente situado social, cultural y hasta históricamente. Exige por supuesto de un usuario que nos permitirá reconocer los argumentos y herramientas -como el conocimiento matemático mismo- que se pone en juego. Este enfoque deja de lado a los objetos matemáticos -su adquisición, su estructuración lógica, etc- como la metáfora principal en la construcción del conocimiento matemático.

Al cambiar la mirada del desarrollo de objetos matemáticos hacia el conocimiento en uso, podemos reconocer que aunque dicho objeto –una definición, una propiedad- no se conozca en toda su extensión y complejidad, sí se usa. Y que cuando se usa irá adquiriendo y desarrollando diferentes formas y funcionamientos acorde a las situaciones particulares que el humano vaya enfrentando (Cordero, 2008; Buendía, 2012). Por forma entenderemos tanto la apariencia perceptible del objeto o concepto matemático en cuestión como la manera en la que el sujeto actúa con él o sobre él; el funcionamiento será para qué le sirve el objeto al sujeto, es el rol que juega en una tarea específica. Entonces, la noción de uso nos puede permitir analizar el saber matemático entendido como un conocimiento en uso. Podremos hablar entonces de una significación y resignificación continua del conocimiento matemático

Método

En Montiel y Buendía (2012) presentamos un esquema metodológico producto de la observación y análisis de diferentes trabajos de investigación realizados en el área. Si bien no toda investigación socioepistemológica se ajusta al esquema, la importancia de dicho trabajo fue mostrar cómo cualquier intervención didáctica que se pretenda realizar en el aula (un diseño, un cambio curricular) puede tener como base una epistemología de prácticas y usos de tal manera que es la resignificación que dicha epistemología logra, el tipo de construcción de conocimiento matemático que nos interesa favorecer.

A partir de esa fecha, se ha realizado mucha investigación en el área de tal manera que hoy contamos con ejemplos e ilustraciones que evidencian dicha resignificación en distintos aspectos: en el rediseño del discurso matemático escolar, propuestas escolares, la profesionalización docente en distintos niveles educativos. Este será el centro de actividades a discutir y desarrollar durante el laboratorio.

Consideramos además que se trata de la propuesta de una comunidad socioepistemológica, por lo que además de las actividades propuestas, se espera conocer y manejar en el laboratorio aspectos de usos del conocimiento hacia diferentes resignificaciones que los asistentes consideren discutir en comunidad.

Referencias

Buendía, G. (2012), El uso de las gráficas cartesianas. Un estudio con profesores. *Educación Matemática*, 24 (2), 9-35.

Cantoral R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. España: Gedisa.

Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini (2015). El programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: el caso de Latinoamerica. Editorial. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (2015) *18* (1): 5-17

Cordero F. (2008) El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En Cantoral R, Covián O, Farfán RM, Lezama J, Romo, A. editores. *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C. y Díaz de Santos S.A; p. 285-309.

Montiel, G. y Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: ejemplos e ilustración. En A. Rosas y A. Romo (eds) *Metodología en matemática educativa: visiones y reflexiones* (pp. 61-88). México: Lectorum.

Autores

Gisela Montiel Espinosa; CINVESTAV, IPN. México; gmontiele@cinvestav.mx

Gabriela Buendía Abalos; Colegio Mexicano de Matemática Educativa. México; buendiag@hotmail.com

ALGUNAS DIDÁCTICAS DE CAMPO EN LA ENSEÑANZA DE HERRAMIENTAS DE MODELAMIENTO MATEMÁTICO PARA INGENIERÍA

Luis Fernando Plaza Gálvez

Resumen

Por medio del presente trabajo, se pretende implementar algunas estrategias didácticas, que permita modelar matemáticamente fenómenos y/o procesos que hagan parte de varios conceptos de ingeniería, los cuales se tomaran como sistemas dinámicos, siendo estos un desafío motivador para los estudiantes, en la que experimenten la opción de describir y comprender situaciones de la vida cotidiana. La mayoría de las prácticas usaran herramientas conocidas en el aula y entre las que se encuentran, Análisis de Fourier, el Excel y la diferenciación numérica que permitirán originar Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden, por medio de métodos estadísticos como el ajuste por mínimos cuadrados como la regresión lineal, logarítmica y potencial, que son resueltas por separación de variables, tomando en cuenta el Coeficiente de Determinación (R^2). Algunos de dichos procedimientos podrán ser repetidos con otros fenómenos a modelar.

Palabras Clave: Ecuación Diferencial, Ingeniería, Modelamiento Matemático,

Propósito y alcance

El mayor propósito presente en este laboratorio, es generar en el docente del área de Matemáticas de los programas de Ingeniería, un carácter innovador, por medio de estrategias didácticas a implementar, permitiendo a sus estudiantes observar el real uso de la matemática aplicada a modelos que deban ser implementados como tarea externa de aula. El laboratorio va dirigido especialmente a estudiantes de un nivel básico de los programas de Ingeniería, que tengan entre sus haberes, inicialmente estar inscritos en un curso de Ecuaciones Diferenciales ordinarias de primer orden, donde al menos tengan conceptos básicos de Mínimos cuadrados, por medio de los diferentes tipos de regresión que nos brinda la herramienta de la Estadística Inferencial y además iría dirigida a estudiantes que tengan la necesidad de implementar un modelo a fenómenos cíclicos haciendo uso de la herramienta que nos brinda el análisis de Fourier en un curso de Matemáticas avanzadas. El modelamiento matemático permite crear lazos entre la matemática y la ingeniería generando motivación en los procesos de aprendizaje.

Marco Teórico o conceptual

Los modelos matemáticos pueden asumirse como método de enseñanza y de investigación, Biembengut y Hein (2006) en la que induce a los estudiantes un incremento del concepto matemático, permitiendo interpretar, formular y resolver problemas de ingeniería en especial. Adicionalmente estudios realizados por Camarena (2009 y 2012), han caracterizado el modelamiento matemático como estrategia didáctica en la formación de futuros ingenieros como contexto de las ciencias. Algunos autores como Rodriguez (2010) han trabajado las ecuaciones diferenciales como herramienta de enseñanza en

Modelamiento matemático, y Guerrero, Camacho y Mejía (2010) utilizando un enfoque lógico semiótico, modelan problemas resolviendo ecuaciones diferenciales.

Método

La propuesta metodológica, de las práctica a realizar sobre modelamiento se presentan como herramienta de enseñanza – aprendizaje, y si en su defecto de investigación. Se presentan algunas situaciones de la vida cotidiana como objeto de ser modeladas, se trata luego su matematización con el apoyo de algunas herramientas, se procede a su solución y en últimas se expresa dicha solución en términos matemáticos. Lo anterior se hace por medio de unidades didácticas, permitiendo conocer aspectos epistemológicos, heurísticos y cognitivos de los estudiantes a los que se les brindaría dichas prácticas finalmente.

Al querer modelar fenómenos y/o procesos (W) que varíen con respecto al tiempo, denotaremos a W=f(t), siendo *W* la variable dependiente y *t* la variable independiente, mediante observación, se analizaran como varían directamente las variables de la siguiente manera: A) *t* vs *W*, B) W vs *dW/dt*, C) W vs *1/W*dW/dt*, en las que tienen en cuenta comportamientos de variación de la variable en cuestión con respecto al tiempo, así como la respectiva tasa relativa de crecimiento de la variable a modelar.

Diseños Didácticos

- Para el tipo A, se tiene la modelación de fenómenos cíclicos, como los latidos del corazón, las olas del mar, el nivel de las mareas, el movimiento de una cuerda de guitarra, etc., pero para nuestro caso se desea implementar la modelación de la temperatura en un lugar determinado, tomando datos de Temperatura en intervalos de 30 minutos (0.5 h) durante un lapso de 72 horas y para su objetivo se tendrán a disposición 3 métodos y estos son: Observación, Mínimos cuadrados y por último Series de Fourier (Para tres niveles de formación distintos en Ingeniería). Se demostrará que $W = A*sen\,(Bt + C) + D$. El trabajo consiste en obtener las constantes A, B, C y D. Al final se podrá encontrar el momento de la máxima temperatura, de la mínima temperatura, así como los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la temperatura que permitan tomar criterios decisorios respecto a márgenes de seguridad. Estudios de este tipo han sido recomendados por Stewart, Redlin y Watson (2007) y Swokowski y Cole (2006). El procedimiento se expone en Plaza (2011) y en la que se deben tomar muestras de los datos como evidencia aparece en la figura No. 1, y donde los datos deben quedar consignados como en la tabla No. 1.

Fig. No. 1. Elementos necesarios para Laboratorio de Fenómenos cíclicos.

Hora reloj	Tiempo transcurrido = t (h)	Temperatura = T(°C)
6:00 p.m	0	T_1
6:30 p.m.	0.5	T_2
7:00 p.m.	1	T_2

Tabla No. 1. Toma de datos en Laboratorio de Fenómenos Cíclicos.

- Para el tipo B, se tiene el análisis de la Ley de Enfriamiento y/o Calentamiento de Newton, así como el vaciado de tanque. Para la primera práctica se toman datos de Temperatura y tiempo en lapsos de cada un minuto. Los elementos necesarios son un termómetro digital con termocupla, un beaker, una estufa pequeña de una boquilla y un cronometro o reloj (para toma de tiempo transcurrido), ver figura 2. La práctica consiste en llevar 100 ml de agua a un beaker. Luego hacerlo pasar por una fuente de calor (una estufa eléctrica de una boquilla) hasta obtener su punto de ebullición A partir de ese instante se toman datos de temperatura cada minuto, hasta tratar de llegar a la temperatura ambiente y donde los datos deben quedar consignados como en la tabla No. 2. Esta práctica es recomendada por Zill (2009) y fue expuesta en Plaza (2013).

Fig. No. 2. Elementos necesarios para Laboratorio Ley de Enfriamiento.

Tiempo Transcurrido = t (min)	Temperatura = T (°C)	dt/dt, con Δt= 1, Diferenciación numérica a 3 pasos

0	T_0	
1	T_1	$(T_2 - T_0)/2$
2	T_2	$(T_3 - T_1)/2$
3	T_2	$(T_4 - T_2)/2$

Tabla No. 2. Toma de datos en Laboratorio de Ley de Enfriamiento.

Demostrándose con una buena aproximación se puede modelar con al apoyo de la Regresión Lineal, pues $dT/dt = k^* (T\text{-}T_0)$, siendo T_0 la temperatura ambiente, y en la que está también se puede expresar como $dT/dt = aT + b$, el cual representa el comportamiento lineal de la variación de la temperatura con respecto al tiempo.

En la práctica del vaciado de Tanque, se puede encontrar la variación de la altura del nivel de un líquido *H*, a través de un tanque, después del inicio de un proceso de vaciado, sin tener en cuenta la geometría del recipiente, el agujero de entrada y salida del líquido, los cuales si son tenidas en cuenta en la Ley de Torricelli, tal como aparece en la figuras No. 3 y 4. Para eso se monitoreo el vaciado del tanque tomando datos de altura y tiempo en lapsos de 30 segundos (0.5 minutos) y la información es consignada en la tabla No. 3.

Fig. No. 3. Elementos necesarios para Laboratorio Vaciado de Tanques.

Fig. No. 4. Proceso de toma de datos en el Laboratorio Vaciado de Tanques.

Tiempo Transcurrido = t (min)	Altura = H (cm)	dH/dt, con Δt= 0.5, Diferenciación numérica a 3 pasos
0	H_0	
0.5	H_1	$(H_2 - H_0)/1$
1	H_2	$(H_3 - H_1)/1$
1.5	H_3	$(H_4 - H_2)/1$

Tabla No. 3. Toma de datos en Laboratorio de Vaciado de Tanques.

Haciendo uso del método de Diferenciación numérica inicialmente a tres pasos se puede obtener la derivada para los dos casos antes expuesto, como lo expone Chapra y Canale (2000) y luego mediante el uso de Mínimos Cuadrados, se puede hacer uso de la mejor Regresión que permita la distribución de los datos, tal como se expone en Walpole, Myers y Myers (1998). Se demuestra con una regresión potencial que la variación de la altura obedece a una expresión del tipo $dH/dt = aH^b$. Esta práctica fue expuesta en Plaza (2014).

Los parámetros *a* y *b* de las dos regresiones expuestas pueden ser encontradas con ayuda de una hoja de cálculo como el Excel. En ambos casos se originan Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden que son resueltas por el método de Separación de Variables. Las constantes de Integración son resueltas por medio de la condición inicial en la toma de datos.

- En el tipo C, se tiene el análisis de crecimiento (comportamiento de la evolución del peso), en el caso de especies menores (ovejas, cerdos, cabras, pollos y cuyes, como producción animal en explotaciones pequeñas, ver Ortegón, 2012). Donde se puede aportar información para la toma de decisiones que ayudan a mejorar la producción bilógica agropecuaria como es el peso en función del tiempo, la velocidad de crecimiento, la tasa relativa de crecimiento y una fecha ideal de sacrificio, para llegar a una optima producción. En esta oportunidad, la toma de datos puede variar, debido a la vida útil de cada uno de los animales en cuestión, y la práctica puede ser llevada a cabo en un espacio mayor a cuatro meses, por lo que podría ser una dificultad como proyecto de período académico, pero sí como tarea de investigación. En esta oportunidad se puede monitorear el crecimiento de aves (pollo parrillero) por su corta vida útil. Los datos pueden tomarse con lapsos de una semana cada uno, tal como aparece en la figura No. 5 y lo ideal es contar con la fecha de parto o nacimiento, según sea el caso, como dato inicial. Su evolución puede verse en la figura No. 6. Las diferentes formas de regresión de la tasa relativa de crecimiento nos arroja varias opciones de solución. Aquí se logra obtener una expresión de la forma $1/W*dW/dt = aW + b$, cuya solución es conocida como el Modelo Logístico. Otra solución es de la forma $1/W*dW/dt = aLn(W) + b$, cuya solución es conocida como el Modelo de Gompertz.

Fig. No. 5. Elemento necesario para Laboratorio de Crecimiento de aves.

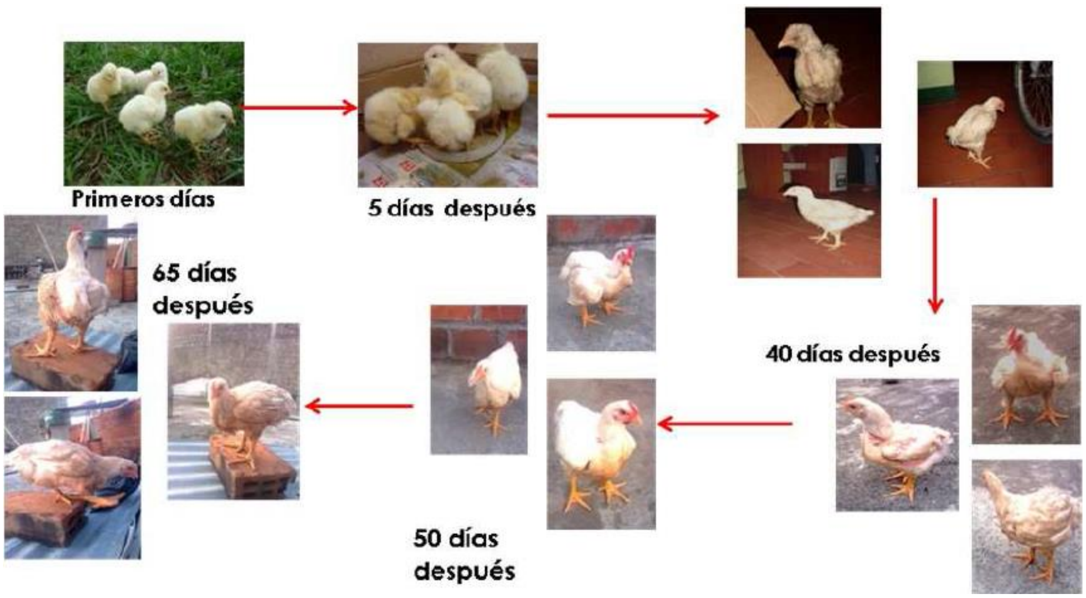


Fig. No. 6. Evolución de crecimiento de aves.

Una toma de datos, para el crecimiento de especies menores, sería similar a la siguiente

Tiempo Transcurrido = t (días)	Peso, W (g)	W’ = dW/dt, con Δt= 7, Diferenciación numérica a 3 pasos	W’/W Tasa relativa de crecimiento
0	W_0		
7	W_1	$(W_2 – W_0)/14$	$(W_2 – W_0)/(14\ W_1)$
14	W_2	$(W_3 – W_1)/14$	$(W_3 – W_1)/(14\ W_2)$
21	W_3	$(W_4 – W_2)/14$	$(W_4 – W_2)/(14\ W_3)$

Tabla No. 4. Toma de datos en Laboratorio de Crecimiento de Aves.

Otra práctica importante en este tipo de análisis es el Pelado de Frutas, como un caso particular de medida de productividad, midiendo el rendimiento de una unidad económica en un período determinado, ver INEG (2013). Se espera obtener una expresión que permita medir el numero de bananos pelados, y, en función del tiempo, ósea $y = f(t)$. Siendo t, el tiempo real transcurrido, por lo que deben ser tenidas en cuenta las interrupciones de la producción tales como: las pausas activas, la parada para consumo de alimentos, etc., modelando así la eficiencia de un empleado, así como los costos en los que puede incurrir la empresa debido a mano de obra. La práctica se debe hacer durante una semana, por jornada de trabajo, por empleado, distinguiendo género y antigüedad, en la medida de las posibilidades. Los datos deben ser tomados cada 30 minutos. Al comportamiento de 1/y*dy/dt vs y, se le hace análisis de regresión lineal, logarítmica y potencial, para luego resolver las respectivas ecuaciones diferenciales a las que haya lugar, con la misma condición inicial, en forma análoga como en la práctica anterior.

Consideraciones finales

Las prácticas de laboratorio permiten inducir en el estudiante de ingeniería, contribuir para que este construya matemáticas, pues los fenómenos abordados permiten describir otro tipo de experiencias que junto al análisis del tipo grafico, simbólico, etc. (análisis cualitativo y cuantitativo) pueden generar nuevo conocimiento, o permiten refutar o confirmar otros ya existentes.

Una conclusión importante es que un modelo que emergen en una situación, puede ser aplicada en otro contexto, como es el caso de los modelos de crecimiento y la aplicación en curvas de aprendizaje asociadas a producción.

Este tipo de actividades didácticas, en las que se usa el Modelamiento Matemático como herramienta de Enseñanza – Aprendizaje, permite acercar al estudiante de ingeniería con su profesión, por medio de conceptos tales como:

- Funciones, pues a pesar de que se está trabajando variables que dependen de una sola variable, puede ser la base para un análisis multivariado.
- Cálculo como la derivada (variaciones) y el límite (comportamientos asintóticos) especialmente cuando se desea conocer el valor de la función a modelar para valores muy grandes del tiempo, como es el caso del momento ideal para el sacrificio de una especie menor, o en un caso de producción un momento de fatiga.
- Estadística, con aplicaciones de Máximos y Mínimos en varios tipos de Regresión.
- Ecuaciones diferenciales, aquellas que son obtenidas a partir del punto anterior.
- Análisis de Fourier, cuando se enfrenta a fenómenos periódicos.

Agradecimientos

Es importante brindar especialmente agradecimiento a las directivas de la UCEVA (Unidad Central del Valle del Cauca) con sede en la ciudad de Tuluá, Colombia, quien en nombre de la Vicerrectoría de Investigaciones, permitió llevar a cabo durante cerca de cuatro la investigación que origino dichas prácticas de laboratorio

Referencias bibliográficas

Biembengut M. y Hein N. (2006). Modelaje Matemático como método de Investigación en clases de Matemáticas. Ponencia en Evento: V Festival internacional de Matemática, Puntarenas, Costa Rica.

Camarena P. (2009). La matemática en el contexto de las Ciencias. *Revista Innovación Educativa*, Vol. 9 No. 6, 15 – 25.

Camarena P. (2012). La modelación matemática en la formación del ingeniero, *Revista Brasileira de Ensino de Ciencia e Tecnologia*, 5 (3), 1-10.

Chapra S., Canale R. (2000). Métodos numéricos para Ingenieros, Mc Graw Hill, 3 ª edición, México D.F.

Guerrero C., Camacho M. y Mejía H. (2010). Dificultades de los estudiantes en la interpretación de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias que modelan un problema, *Enseñanza de las Ciencias*, 28 (3), 341-352.

INEG (Instituto Nacional de Estadística y Geografía). (2013). *Índices de productividad laboral y del costo unitario de la mano de obra. Metodología, Cuadros y gráficas. Cuarto trimestre 2012*, Secretaría de Trabajo y Prevención social, México D.F.

Ortegón A. (2012). *Especies Menores*, Documento de Trabajo, Instructor SENA – CEDEAGRO.

Plaza L. (2011). Modelamiento Matemático de Fenómenos Cíclicos, *Revista Scientia et Technica*, 16 (48). 145 – 150.

Plaza L. (2013). Ley de Enfriamiento de Newton. Laboratorio de Ecuaciones Diferenciales, *Revista Páginas de Ingeniería*, 1 (1). 7 - 12.

Plaza L. (2014). Modelamiento Matemático en Ingeniería. Vaciado de Tanques Ponencia en Evento: VI Congreso Internacional de Modelación y Formación en Ciencias Básicas. Medellín, Colombia.

Rodriguez R. (2010). Aprendizaje y enseñanza de la modelación: el caso de ecuaciones diferenciales, *Relime*, 13 (4-1). 191-210.

Stewart J., Redlin L., Watson S. (2007). Pre cálculo, Matemáticas para el cálculo, Editorial CENGAGE Learning, México D.F. 459- 465.

Swokowski E., Cole J. (2006). Algebra y trigonometría analítica, Editorial THOMSON, 11ª Edición, México D.F., 469.

Walpole R., Myers R., Myers S. (1998). Probabilidad y Estadística para ingenieros, Editorial Pearson Educación, 6ª Edición, México D.F., 362.

Zill D. (2009). Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado, Cengage

Learning Latin America, 9a edición, México D.F.

Autores

Luis Fernando Plaza Gálvez; UCEVA. Colombia; lplaza@uceva.edu.co

DESARROLLO DE APPLETS PARA LA CONCEPTUALIZACIÓN DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Jesús Eduardo Hinojos Ramos, Diana del Carmen Torres Corrales, Evaristo Trujillo Luque, Rafael Antonio Arana Pedraza, Julia Xóchilt Peralta García, Omar Cuevas Salazar

Resumen

La propuesta metodológica de Salinas, Alanís, Pulido, Santos, Escobedo y Garza (2012) para la enseñanza del Cálculo Integral, introduce la necesidad de calcular la magnitud de un todo, dividiéndolo en partes por medio de conceptos de Geometría y sumándolas para calcular aproximaciones para una magnitud bajo estudio, mejorando dichas aproximaciones al aumentar el número de divisiones, hasta deducir las *fórmulas de integración* utilizadas para encontrar el valor exacto. Este procedimiento en la práctica normalmente se realiza a mano, pero si se cuenta con los medios tecnológicos, el capacitar a los profesores en el uso de las nuevas tecnologías permite mejorar la práctica docente, por lo que se desarrolla un taller donde a través de la construcción de *applets* de GeoGebra se profesionaliza al profesor en su uso para el posterior desarrollo de actividades didácticas.

Palabras clave: Cálculo, integral definida, applet, GeoGebra.

Propósito y alcance

El todo es igual a la suma de sus partes, esta es la idea central para la propuesta metodológica de Salinas, Alanís, Pulido, Santos, Escobedo y Garza (2012) para la enseñanza del Cálculo Integral, donde se introduce la necesidad de calcular la magnitud de un todo, dividiéndolo en partes y sumándolas, donde por medio de conceptos de Geometría se muestra un procedimiento que permite calcular aproximaciones para diferentes magnitudes, entre ellas: Longitud de arco, Área bajo la curva y Volumen de sólidos de revolución; donde al aumentar el número de divisiones hasta que se tiende a un valor infinito de las mismas, se deducen las *fórmulas de integración* utilizadas para encontrar el valor exacto de dichos cálculos.

Este proceso de segmentar un todo en diversas partes en la práctica normalmente se realiza a mano, utilizando el pizarrón y posteriormente utilizando un paquete computacional de hoja de cálculo (o calculadora y pizarrón) para encontrar los valores aproximados; pero si una institución cuenta con los medios tecnológicos, es necesario capacitar a los profesores en el uso de las nuevas tecnologías y software especializado que permiten mejorar la práctica docente.

Un ejemplo de software especializado para la clase de Matemáticas es GeoGebra, que al ser libre no tiene ninguna restricción de licencias, además de posibilitar cambios en tiempo real, reproducción instantánea y precisión en las construcciones, entre otros.

GeoGebra tiene el potencial de ayudar al docente a diseñar herramientas didácticas que en conjunto con el desarrollo de la actividad en el aula de clase permiten a los estudiante obtener una mejor comprensión de los fenómenos que se estudian por medio de modelos matemáticos manipulables en un ambiente digital.

Debido a que la mayoría de los profesores desconocen las bondades de este programa, se propone la creación de un taller para la asignatura de Cálculo Integral donde por medio de la construcción de *applets* en sintonía con la temática del libro de Salinas, *et al* (2012) se le enseñe al profesor cómo utilizarlo para el diseño y desarrollo de actividades didácticas para otros temas.

En este taller se tiene como objetivo la construcción de 4 *applets*:

1. La interpretación gráfica del Método de Euler
2. El valor aproximado para Longitud de arco
3. El valor aproximado del Área bajo la curva
4. El volumen aproximado de Sólidos de revolución

Dado el nivel de complejidad de los *applets*, es deseable que los participantes en el laboratorio tengan habilidades básicas en la resolución de integrales, manejo de computadora y experiencia en el uso de GeoGebra a nivel básico o intermedio. Los asistentes pueden ser profesores de los niveles medio superior y superior o estudiantes de posgrado interesados en las temáticas de profesionalización docente y el uso de la tecnología en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas.

Marco teórico

Los *applets* que se diseñarán toman como punto de partida las ideas intuitivas sobre el cálculo del cambio acumulado a través del Método de Euler como secciones de área infinitamente pequeña debajo de la curva (Euler, 1988) (adaptándolo a la necesidad de calcular Longitud de arco, Área y Volumen). Considerando que estas ideas intuitivas permiten al estudiante crear o reforzar la imagen mental del objeto matemático que sea acorde con la definición formal (Tall y Vinner, 1981) y las nociones de la integral como el cambio acumulado, considerando que las Matemáticas necesitan ser construidas mediante sus usos y no solamente aprendidas con base en demostraciones rigurosas (Moreno, 2012).

La tecnología en el aula de Matemáticas actualmente es un actor casi imprescindible, sin embargo esta puede con facilidad considerarse una herramienta que sólo vuelve más ágil el trabajo que normalmente se realiza de forma manual o incluso puede considerarse como un suplente a la presencia del docente. Estas dos formas de considerar a la tecnología están muy alejadas del objetivo principal de incluirlas al aula, puesto que deben considerarse como un agente que permita cambios significativos en las prácticas de pensamiento y de enseñanza de contenidos por parte de los profesores; para lograr esto, es necesario que el docente (al ser el intermediario entre los objetos matemáticos y el alumno) tenga la capacidad de utilizarlos en su quehacer en el aula de manera que estos impacten de manera positiva en el desarrollo cognitivo y pragmático de los alumnos (Rojano, 2003).

Otro aspecto importante a considerar es la transposición informática (Balacheff, 1994) que determina el tipo de prácticas, objetos y ambientes que pueden crearse a través de medios informáticos (como la computadora) al ser implementados en el aula de matemáticas (Del Castillo y Montiel, 2009), ya que los ambientes tecnológicos permiten manejar de forma más directa los diferentes registros de representación de los objetos matemáticos que normalmente están fuera del alcance al no tener clara la imagen mental de dichos objetos, y es por medio de la actividad, la observación y la reflexión, que es posible construir el significado de los objetos matemáticos (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez, 2006).

Método

La primera sesión (después de la presentación del laboratorio, su propósito, alcances, objetivo y marco teórico que lo respalda) se aplicará una encuesta a los asistentes donde se les preguntará su punto de vista sobre la inclusión de la tecnología aplicada al aula de matemáticas y sus experiencias utilizándola en su práctica docente.

Posteriormente se trabajará de manera individual resolviendo integrales definidas donde se pedirá que se encuentre la longitud de arco, área o volumen de un sólido de revolución, modelados por medio de una función, se hará énfasis en la libertad para resolverlas, ya sea que se utilicen integrales directas o métodos de aproximación.

Una vez terminada la actividad de las integrales se reflexionará acerca los procedimientos utilizados para resolverlas y sobre cómo podría crearse un ambiente tecnológico que permita plantear y resolver estos mismos problemas, a través de herramientas computacionales que aproximen los resultados y a partir de dichas aproximaciones deducir el procedimiento analítico que permite calcular los valores exactos.

La segunda y tercera sesiones estarán enfocadas al trabajo por equipos y a la construcción de los *applets* para interpretar de forma gráfica: Método de Euler, Longitud de arco, Área bajo la curva y Volumen de un sólido de revolución, utilizando GeoGebra; después de cada construcción se reflexionará acerca de su pertinencia y dinamismo para la actividad docente y la adaptación del *applet* a los niveles medio superior y superior por medio del diseño de actividades didácticas.

Diseños didácticos

Primera sesión:

Esta sesión se dividirá en distintos momentos, donde en primera instancia no se trabajará con el medio tecnológico, sino que se reflexionará sobre las herramientas, procedimientos o técnicas que actualmente utilizan los profesores al resolver problemas y por qué las utilizan.

El primer momento será la *presentación*, donde se utilizará PowerPoint para mostrar el propósito, alcances y objetivo del laboratorio, así como la fundamentación teórica; esta tendrá una duración aproximada de 10 minutos.

Terminada la presentación se procederá al momento de la *encuesta*, por medio de la aplicación de un instrumento diagnóstico donde se les preguntará a los presentes su opinión acerca de la inclusión de la tecnología en el aula de matemáticas y su experiencia en el uso de la misma; para contestar este instrumento se necesitarán aproximadamente 10 minutos.

El siguiente momento será el de *problemas de introducción*, donde se plantearán problemas de integrales definidas y de manera individual se solicitará a los asistentes que los resuelvan, dando libertad de utilizar la estrategia y herramientas que se deseen; el tiempo aproximado para esta actividad será de 20 minutos.

Terminada la actividad se organizará a los asistentes en equipos para un *debate*, donde los miembros discutirán la forma y estrategias empleadas para resolver o tratar de resolver los problemas, se recomendará hacer énfasis en las herramientas matemáticas utilizadas y su fundamentación; se espera que esta actividad se realice en un tiempo de aproximadamente 20 minutos.

Terminado el *debate* seguirá el momento final de la sesión denominado *reflexión*, pues con base en las observaciones, intervenciones y comentarios del momento anterior, se reflexionará sobre cómo el uso de herramientas tecnológicas permite crear entornos o ambientes de aprendizaje donde la actividad del aula puede desarrollarse de forma más fluida y enriquecedora, puesto que la visualización de los procesos intuitivos del Cálculo permiten deducir, aproximar e incluso resolver un problema cuando no es posible o resulta muy complicado resolverlos de forma analítica; esto se realizará en un tiempo aproximado de 30 minutos.

La duración total de la primera sesión será de 90 minutos aproximadamente.

Segunda y tercera sesiones:

Se trabajará sobre la construcción de los *applets* utilizando GeoGebra, durante la segunda sesión se comenzará con la guía para construir la representación gráfica del Método de Euler utilizando las diversas herramientas disponibles en el programa, entre ellas las Vistas Gráficas y Hoja de Cálculo, para vincular de esta forma al menos 3 diferentes maneras de representar el mismo objeto matemático y observar cómo la modificación de una de ellas refleja los mismos cambios en todas las representaciones.

Durante esta misma sesión se trabajará sobre la construcción de un segundo *applet*, tomando como base las ideas desarrolladas en la construcción del anterior, pero esta vez para encontrar el valor aproximado de la Longitud de arco de una función en un intervalo determinado, dividiendo la longitud total en segmentos de recta, donde al realizar una modificación a los valores o parámetros de la construcción, se podrán observar en tiempo real los cambios globales y la magnitud aproximada de la longitud de arco mediante la suma de las longitudes de los segmentos, la visualización final de ambos *applets* puede verse en las figuras 1 y 2 respectivamente.

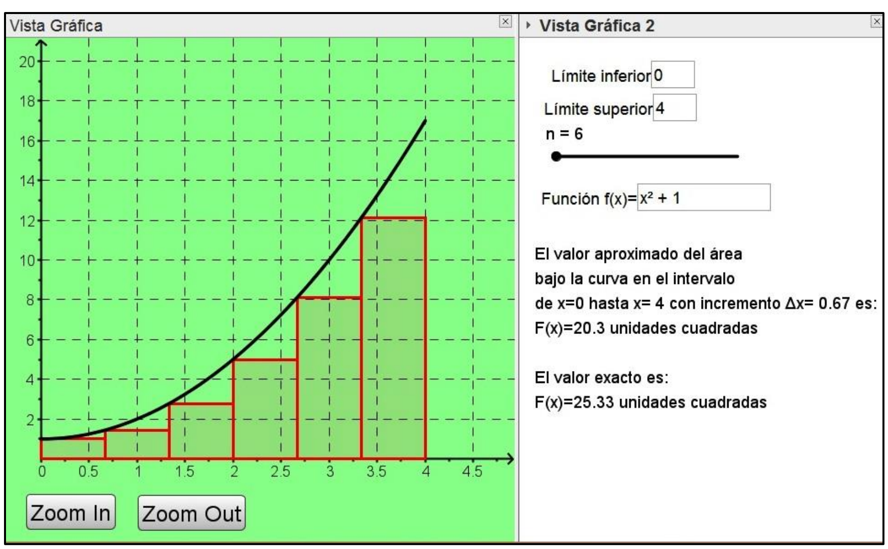


Figura 1. Construcción final del applet del Método de Euler.

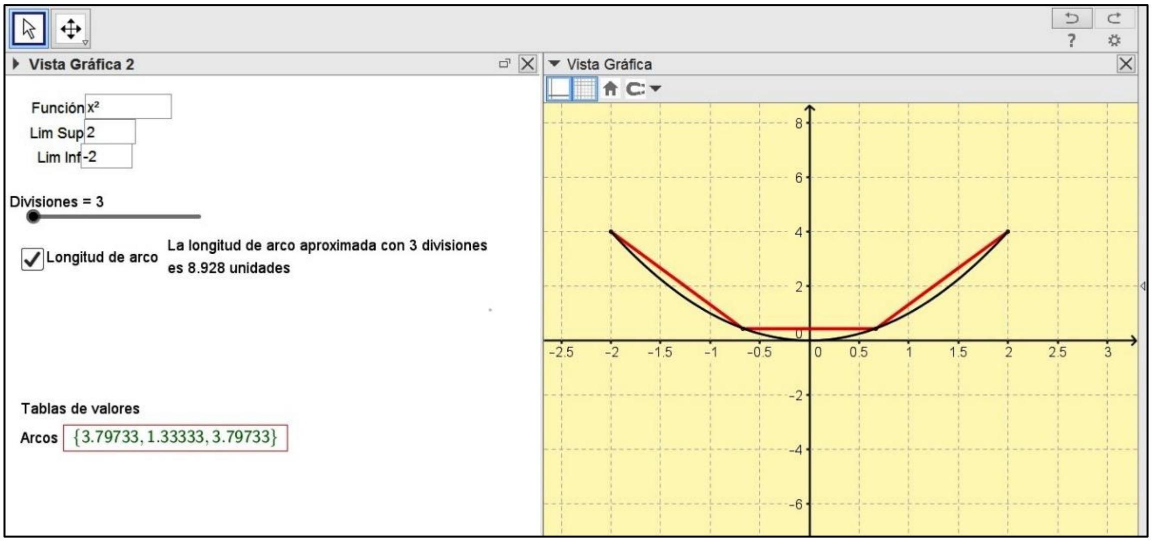


Figura 2. Construcción final de la Longitud de Arco.

Durante el desarrollo de la tercera sesión, se trabajará sobre encontrar el Área bajo una función y el Volumen del sólido de revolución generado al girar la región delimitada sobre el *eje x*, construyendo un *applet* para cada uno.

Tomando como base la construcción realizada para encontrar aproximaciones para la Longitud de arco de una función, se modificará la misma para generar trapecios que dividirán al área total bajo la función en segmentos con igual longitud de base, del cual se puede encontrar el área total, mediante la suma de todas las áreas de los trapecios generados, y donde al modificar algún parámetro de la construcción, pueden observarse de forma instantánea los cambios globales generados, la construcción final del *applet* puede observarse a continuación en la figura 3.

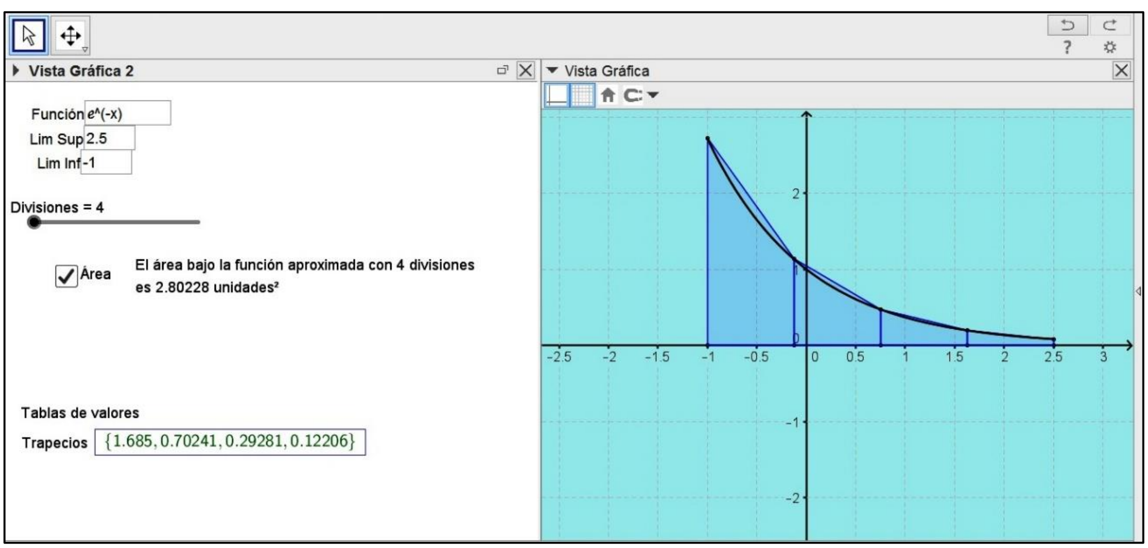


Figura 3. Construcción final del Área.

La tercera sesión cerrará con la construcción de un cuarto *applet*, donde el objetivo es encontrar el valor aproximado del volumen de un Sólido de revolución, para ello se dividirá el sólido en conos truncados, donde los segmentos del *eje x* corresponderán a las alturas de cada uno de ellos, al incrementar el número total de conos, el volumen se aproximará cada vez más al valor exacto del volumen, además de esto, el *applet* permite visualizar de manera directa el proceso de generar las divisiones y vincular de forma directa el proceso de realizar las particiones con una representación gráfica, el *applet* terminado se muestra a continuación en la figura 4.

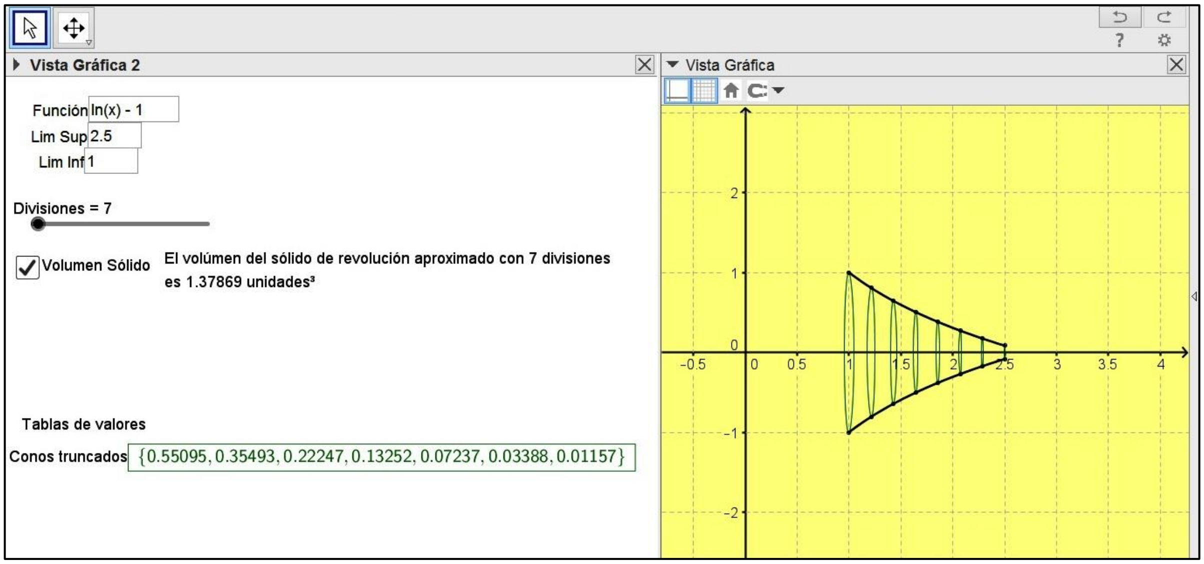


Figura 4. Construcción final del Volumen del Sólido de revolución.

Consideraciones finales

Este curso aporta a los docentes las herramientas necesarias para el uso de GeoGebra como apoyo en el diseño o desarrollo de actividades didácticas para la enseñanza del Cálculo y como una herramienta para el desarrollo cognitivo de los estudiantes, pues el uso de los diferentes registros de representación de un mismo objeto matemático y la construcción de los conceptos nuevos con base en la precisión, manipulación y agilidad en procesamiento que permiten los recursos tecnológicos.

Además se incide de manera positiva en el proceso de aprendizaje, haciendo más fluida y eficaz la interacción entre el docente, el estudiante y el contenido bajo estudio, permitiendo de esta forma crear un entorno donde la tecnología es el medio que permite apropiarse del saber.

Agradecimientos

Un agradecimiento especial al Instituto Tecnológico de Sonora y al Departamento de Matemáticas del mismo, por proporcionar la infraestructura y los medios necesarios para el desarrollo del presente laboratorio.

Referencias bibliográficas

Balacheff, N. (1994). Didactique et intelligence artificielle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(172), 9-42.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J. y Martínez, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en*

Matemática Educativa. Número especial sobre Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático, 27-46.

Del Castillo, A. y Montiel, G. (2009). ¿Artefacto o instrumento? Esa es la pregunta. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 459-467. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Euler, L. (1988). *Introduction to Analysis of the Infinite* (J.D. Blanton, Trans.). New York: Springer-Verlag.

Moreno, L. (2012). Intuición y Rigor: Una danza interminable. En C. Cuevas, F. Pluvinage, J. Dorier, F. Hitt, D. Tall, H. Madrid, S. Dufour, A. Flores, L. Moreno, M. Martínez, R. Cantoral, J. Soto y M. Parraguez (Eds.). *La enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral. Compendio de investigaciones y reflexiones para profesores, formadores e investigadores en materia educativa. 4*, 85-105. México: Pearson.

Rojano, T. (2003). *Incorporación de entornos tecnológicos de aprendizaje a la cultura escolar: Proyecto de innovación educativa en matemáticas y ciencias en escuelas secundarias públicas de México*. Recuperado el 30 de Julio de 2014 de http://lets.cinvestav.mx/Portals/0/SiteDocs/MediatecaSS/lets_sur_mediateca_rojano_Incorporaciondeentornos.pdf

Salinas, P., Alanís, J., Pulido, R., Escobedo, J. y Garza, J. (2012). *Cálculo aplicado*: Competencias Matemáticas a través de contextos. Tomo II. México: Editorial Cengage Learning.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics, *Educational Studies in mathematics*, 12, 151-162.

Autores

Jesús Eduardo Hinojos Ramos; ITSON. México; *jesus.hinojos@itson.edu.mx*

Diana del Carmen Torres Corrales; ITSON. México; *diana.torres@itson.edu.mx*

Evaristo Trujillo Luque; ITSON. México; *evaristo.trujillo@itson.edu.mx*

Rafael Antonio Arana Pedraza; ITSON. México; *rafael.arana@itson.edu.mx*

Julia Xóchilt Peralta García; ITSON. México; *julia.peralta@itson.edu.mx*

Omar Cuevas Salazar; ITSON. México; *ocuevas@itson.edu.mx*

ANÁLISIS Y DISEÑO DE ACTIVIDADES DIDÁCTICAS EN EL CONTEXTO DE LAS RAZONES Y FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS UTILIZANDO GEOGEBRA

Diana del Carmen Torres Corrales, Gisela Montiel Espinosa, Omar Cuevas Salazar, Jesús Eduardo Hinojos Ramos, Evaristo Trujillo Luque, Mucio Osorio Sánchez

Resumen

El estudiante y/o profesor en servicio de nivel básico (secundaria), medio superior y/o nivel superior será capaz de analizar y diseñar actividades didácticas referentes a las razones y funciones trigonométricas con el uso del software GeoGebra. Esto será posible a través de la epistemología de la construcción social de conocimiento trigonométrico de Montiel (2013) y de una organización didáctica desde la perspectiva de evidencia en la acción que propone Molina (2013) y caracterizada de cinco momentos por Torres (2014). En el cual se propiciará la necesidad de utilizar las razones trigonométricas a partir de la construcción de un círculo, para favorecer la transición a las funciones trigonométricas a través del análisis gráfico de acuerdo a sus parámetros, logrando con ello la resignificación del pensamiento trigonométrico (uso coherente de nociones previas, de proporcionalidad y de construcción geométrica).

Palabras clave: razones y funciones trigonométricas, enseñanza-aprendizaje, actividad didáctica, resignificación.

Propósito y alcance

Que el profesor sea capaz de:

- Reconocer el contenido matemático previo y nuevo de la enseñanza-aprendizaje de las razones y funciones trigonométricas:
    - esto será posible a través del análisis de las prácticas sociales para la construcción del conocimiento trigonométrico que menciona Montiel (2011) en los momentos de introducir las razones y funciones trigonométricas.
- Reflexionar sobre la forma didáctica de la enseñanza-aprendizaje del tema de Trigonometría en el contexto de las razones y funciones trigonométricas:
    - por ello se busca una organización didáctica denominada evidencia en la acción.
    - contrastar la costumbre didáctica que mencionan Montiel y Jácome (en prensa) de introducir la enseñanza-aprendizaje de las razones trigonométricas con el triángulo rectángulo.
    - reconocer que el círculo es más que un medio didáctico para la transición de las razones a las funciones trigonométricas, pues como menciona Montiel (2011), éste

es la verdadera esencia de lo trigonométrico, que surge de desentrañar su naturaleza geométrica.

- Hacer el ejercicio de situar la enseñanza-aprendizaje de las razones y funciones trigonométricas a través del análisis y generación de actividades didácticas con GeoGebra prevaleciendo el pensamiento trigonométrico (proporción y construcción geométrica).

La trascendencia de este laboratorio es la resignificación del proceso de enseñanza-aprendizaje de las razones y funciones trigonométricas, de forma que el profesor pueda analizar y diseñar actividades didácticas con el uso de GeoGebra prevaleciendo el pensamiento proporcional y coherente de estos saberes matemáticos.

Es deseable que el perfil del participante de este laboratorio sea estudiante y/o profesor en servicio de nivel básico (secundaria), medio superior y/o nivel superior, que tenga conocimiento o haya impartido asignaturas donde se utilicen las razones y funciones trigonométricas; además de tener nociones básicas del uso del software GeoGebra.

Marco teórico

Desde el enfoque teórico de la Socioepistemología se toma la epistemología de la construcción social de conocimiento trigonométrico (*ver* Tabla 1) de Montiel (2011) en los momentos donde emerge el uso de la razón y función trigonométrica.

Práctica Social		
	Anticipación	*Predicción*
Práctica de Referencia	Matematización de la Astronomía	Matematización de la Física
Contexto	Estático-Proporcional	Dinámico-Periódico
Lenguaje	Geométrico-Numérico	Curvas-Ecuaciones
Racionalidad	Helenística- Euclidiana	Física-Matemática
Herramienta	Razón Trigonométrica	Función Trigonométrica
Variables	(longitud) en ángulos (en grados)	(distancia) tiempo (radián-real)
Escala de tiempo	Finita	Infinitesimal-Infinito

Tabla 1. Principios básicos para la construcción social del conocimiento trigonométrico en un escenario histórico Nota. Fuente: Montiel (2011).

En estos dos momentos de construcción social del conocimiento trigonométrico, la autora identifica un cambio en el paradigma que rige la actividad matemática y que es necesario para estudiar el movimiento, en el paso de la anticipación a la predicción (Montiel 2011, citado en Torres, 2014).

La Socioepistemología reconoce que son las prácticas sociales las que norman la construcción del conocimiento matemático, por lo que es necesario reconocer su manifestación a través de sus usos en distintos escenarios, por ejemplo, el histórico, el profesional, el cotidiano, e incluso el escolar, cuando se experimentan diseños no tradicionales (Montiel y Buendía, 2012).

Producto del discurso matemático escolar, es que el verdadero significado del saber trigonométrico se diluye, transforma e incluso se pierde, provocando fenómenos didácticos. En la epistemología de prácticas mostrada en la Tabla 1, la autora caracteriza dos fenómenos didácticos, (1) aritmetización trigonométrica, cuando se introduce a las razones trigonométricas y (2) extensión geométrico-analítica, en el paso de las razones a las funciones (Montiel, 2011).

Es por ello, que se vuelve fundamental buscar la resignificación de este saber trigonométrico con aquellas condiciones que le dieron origen y que siguen siendo válidas para las problemáticas del entorno actual del estudiante. La componente geométrica, por ejemplo, es una de las principales que se ha perdido en el avance y tecnicismo del Álgebra, difuminado su verdadero significado y sentido para el escenario donde emerge su uso, y efectivamente son los procesos de construcción geométrica los que dan la base a la epistemología de prácticas y que, por lo tanto, constituyen el contexto en el que se resignifica la razón trigonométrica (Montiel y Jácome, en prensa).

Desde la Socioepistemología el término resignificar se utiliza para referirse al proceso continuo de darle significado al saber matemático a través de sus usos, esto es, la significación que subyace a la actividad y no necesariamente al objeto matemático (Montiel y Buendía, 2012).

Para lograr la resignificación en este laboratorio es que la organización didáctica será realizada a través de la perspectiva de evidencia en la acción (*ver* figura 1) que propone Molina (2013), caracterizada en Torres (2014); esta metodología se elige por la evidencia empírica de resignificación de las razones trigonométricas que tiene la investigación de Torres (2014) con estudiantes de ingeniería.

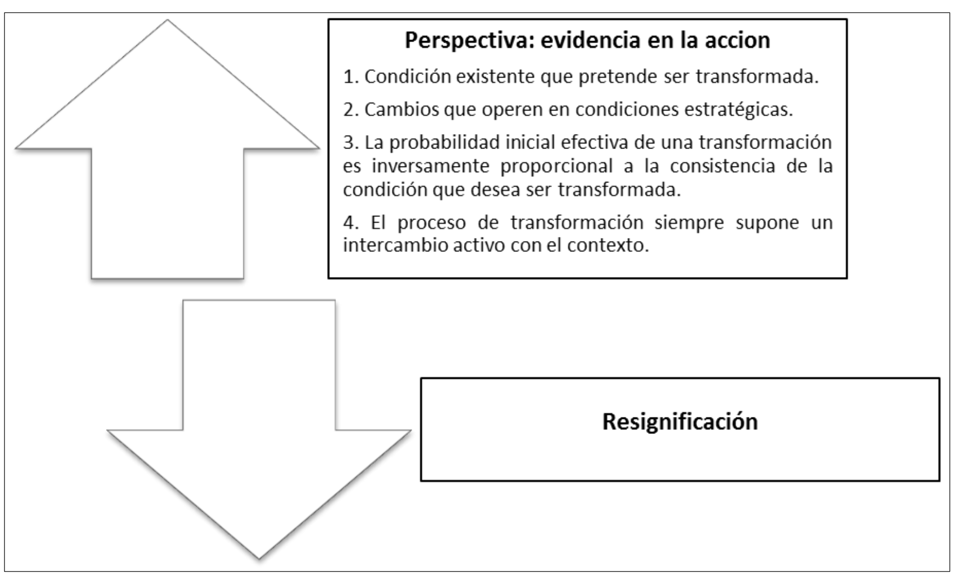


Figura 1. Perspectiva de evidencia en la acción para la resignificación.

Una forma concreta de entender el funcionamiento de esta metodología, es reflexionar sobre la estrategia publicitaria de las empresas para vender un producto. Por ejemplo, una empresa dedicada a la venta de salchichas de pavo desea que el aumento de utilidades, para ello identifica la necesidad de vender más. Para logarlo establece la estrategia de la permanencia en medios masivos de comunicación de forma que el cliente, escuche y lea permanentemente el producto, por ello la consistencia en los medios de difusión es la clave de venta. Para lograr el aumento de utilidades, además de la publicidad lleva hasta el cliente su producto en supermercados y tiendas de autoservicio de forma que el cliente lo pruebe sin comprarlo, creando con ello la necesidad y la convicción de querer adquirirlo.

Para el caso del presente laboratorio, la condición existente que pretende ser transformada es el fenómeno didáctico producto del discurso matemático escolar al hacer uso de las razones y funciones trigonométricas. Para lo cual, se hará uso de condiciones estratégicas de diseño en el círculo y una organización didáctica fundamentada en la epistemología de prácticas de lo trigonométrico. Con estas condiciones se pretende dar la resignificación ya que se analizará la actividad matemática desde el individuo a través de sus prácticas, porque son estas últimas las que dotan de nuevas significaciones a los objetos y conceptos, pese a la pobreza de sus antiguos usos. Dado lo anterior se establece un contexto basado en el análisis y diseño de construcciones geométricas con el uso de GeoGebra para dar coherencia a las nociones matemáticas (Torres, 2014).

Método

En una activa participación de los estudiantes y/o profesores, las estrategias de enseñanza a seguir para la realización de este laboratorio son:

- Momento 1: se realizará una lluvia de ideas de manera grupal sobre el contenido matemático (conocimiento previo y nuevo que se utilizará), la forma didáctica de la enseñanza-aprendizaje y las dificultades que ha identificado se presentan en Trigonometría en el contexto de las razones y funciones trigonométricas.
- Momento 2: se contextualizará el momento escolar donde se aborda la Trigonometría por primera vez en el currículo mexicano a través de documentos oficiales de la Secretaria de Educación Pública (SEP), en el contexto de las razones y funciones trigonométricas, para hacer el ejercicio de situar su proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Momento 3: se hará una construcción geométrica en GeoGebra sobre la necesidad de utilizar las razones trigonométricas y a partir de ella se solicitará a los asistentes que diseñen una actividad didáctica para su enseñanza-aprendizaje.
- Momento 4: se realizará y analizará una actividad didáctica donde se definen las razones trigonométricas básicas (seno, coseno y tangente) a partir de la construcción del seno.
- Momento 5: se realizarán dos construcciones geométrica de la función seno de un ángulo, una a partir del círculo en GeoGebra donde se pedirá a los asistentes diseñen

una actividad didáctica para su enseñanza-aprendizaje y una construcción más sobre el estudio de los parámetros de la función seno.

Diseños didácticos

Para el primer momento del laboratorio se llenará una tabla (*ver* Tabla 2), la cual se dará de forma individual a cada participante en papel y será llenada de manera grupal. Posteriormente esta lluvia de ideas será el insumo para generalizar las dificultades de las razones y funciones trigonométricas, identificar los elementos de la forma didáctica de la enseñanza-aprendizaje y los contenidos matemáticos necesarios.

El primer momento es clave para el análisis del resto de las actividades, puesto que en él se enfatizará sobre las prácticas sociales y los elementos de la construcción social de lo trigonométrico de Montiel (2011) para utilizar las razones y funciones trigonométricas. Además aquí se busca que los participantes reflexionen sobre la costumbre didáctica enseñanza-aprendizaje de las razones trigonométricas mediante el triángulo rectángulo y las funciones trigonométricas a través del círculo, considerándose este último solo un medio didáctico para dicha transición.

Lluvia de ideas de Trigonometría				
Herramienta	**Contenido matemático**		**Forma didáctica de la enseñanza-aprendizaje**	**¿Qué dificultades presenta el estudiante?**
	¿Qué herramientas matemáticas previas necesita el estudiante para aprender?	¿Qué nuevas herramientas matemáticas aprenderá el estudiante?	¿Cuál es la manera de enseñar? • Organización didáctica. • Rol del profesor. • Rol del estudiante. • Tecnología (pizarrón, libro de texto, hojas de trabajo, calculadora, software).	Especifique qué concepciones erróneas tiene, qué hace o que omite hacer.
Razones trigonométricas				
Funciones trigonométricas				

Tabla 2. Lluvia de ideas de Trigonometría, elementos para el análisis y diseño de actividades didácticas
Nota. Fuente: Elaboración propia (2015).

Para el segundo momento se realizará un recorrido por el portal de la Secretaría de Educación Pública (SEP), para identificar que en México el tiempo escolar donde se introduce por primera vez la Trigonometría es en el tercer año de educación básica secundaria, en el penúltimo tema del contenido del curso. En este tema el programa de estudio 2011 (*ver* figura 2) muestra que los lados de un triángulo rectángulo guardan proporción al referirse a un mismo ángulo en grados y posteriormente hace el uso explícito de las razones trigonométricas (seno, coseno y tangente) como cociente de los lados de un triángulo rectángulo. También se propone que para profundizar la comprensión de las razones trigonométricas se realice a través del círculo unitario, el uso de la calculadora y calcular lados y ángulos faltantes que se formen con el eje x. Se menciona explícitamente la construcción del círculo unitario con el software GeoGebra (*ver* figura 3).

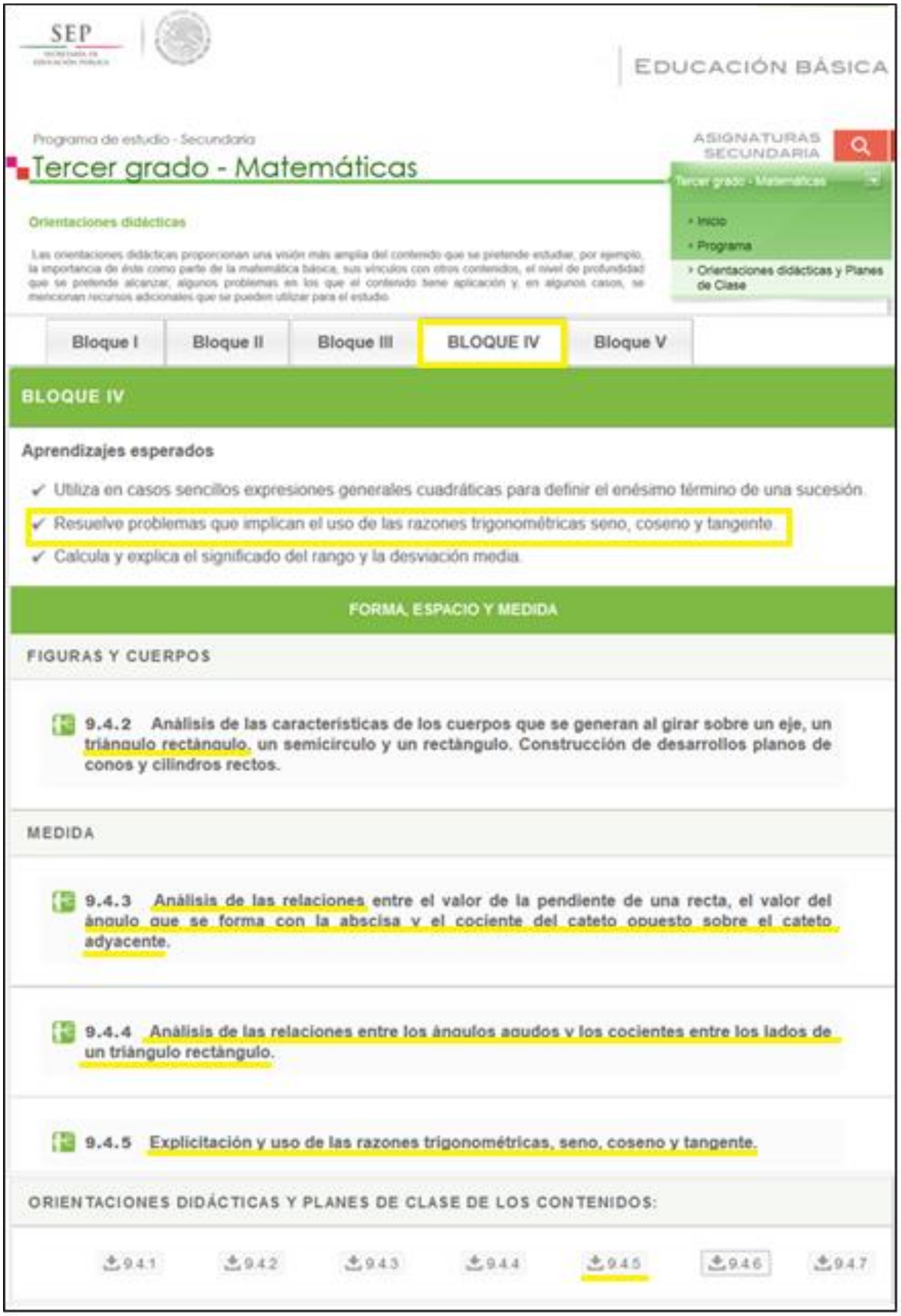


Figura 2. Las razones trigonométricas en el plan de estudios de secundaria mexicana. Adaptado de SEB, 2011.

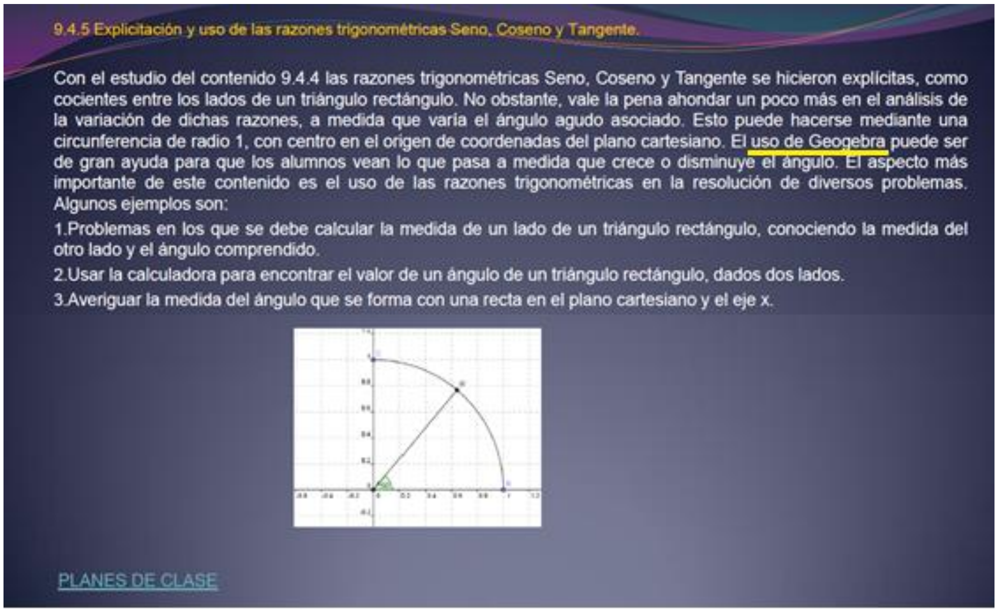


Figura 3. Recomendaciones de enseñanza-aprendizaje de las razones trigonométricas en el plan de estudios de secundaria mexicana. SEB, 2011.

En la educación media superior, se retoma en un tópico las razones trigonométricas y posteriormente se estudian las funciones trigonométricas. En México ante la diversidad de direcciones y enfoques de educación media superior, se tienen bachilleratos en modalidad escolarizada (especializados por áreas, con carreras técnicas, telebachillerato) y en modalidad abierta (SEMS 2014).

De igual manera en la educación superior, se tienen diferentes planes de asignatura de acuerdo a las necesidades de los programas educativos que dependen de la institución. En los programas de ingeniería, por ejemplo, se abordan las razones trigonométricas en asignaturas de Precálculo y las funciones trigonométricas en Cálculo Diferencial y Cálculo Integral. En el Instituto Tecnológico de Sonora, es utilizada la propuesta metodológica de Salinas, Alanís, Pulido, Santos, Escobedo y Garza (2012), donde en el tema 7 se aborda el estudio de las funciones trigonométricas predominando la graficación y aplicación en problemas de contexto.

En un tercer momento se elaborará una construcción geométrica con GeoGebra (ver figura 4) y a partir de ella se solicitará a los asistentes que diseñen una actividad didáctica en equipos enfocada a estudiantes del nivel educativo que trabajen, con el objetivo de que sean utilizadas las razones trigonométricas para determinar los lados del triángulo y el valor del ángulo faltante. Esta construcción geométrica fue elaborada a partir de la perspectiva constructivista de Moore (2009, 2010) que señala "el uso coherente de nociones previas a la razón trigonométrica, la acción colaborativa en situaciones problema y con el uso de tecnología (*applets* de GeoGebra) permiten una profunda comprensión".

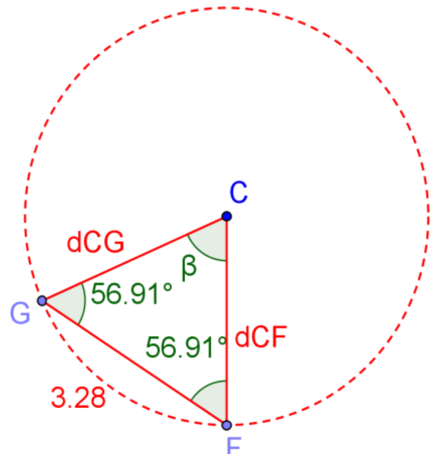


Figura 4. Construcción geométrica para diseñar una actividad didáctica con el uso de razones trigonométricas.

Para el cuarto momento se abordará el caso de las razones trigonométricas mediante el uso de GeoGebra y el análisis de una actividad didáctica donde se definan las razones seno, coseno y tangente a partir de la construcción del seno de un ángulo que varía (*ver* figura 5). Esta actividad didáctica fue diseñada principalmente para el estudio de las razones trigonometrías en Precálculo, la cual puede ser útil en la educación secundaria y media superior. Esta construcción geométrica fue elaborada a partir del análisis de los diseños de Vohns (2006) y Weber (2008) para la enseñanza-aprendizaje de conceptos trigonométricos, donde prevalece la proporción a partir de círculos de distintos tamaños, pues "lo trigonométrico se desarrolla con razonamientos de medición y estructuración geométrica" (Vohns, 2006).

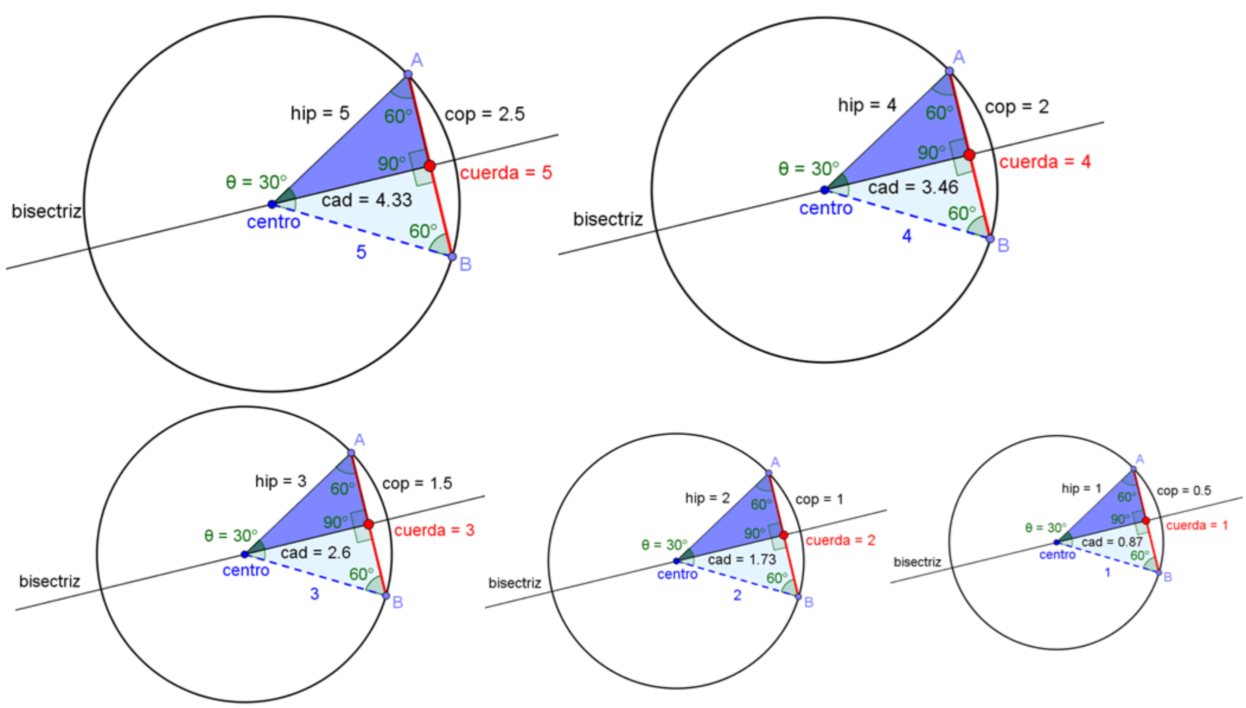


Figura 5. Construcción de la razón trigonométrica seno de un ángulo.

En un quinto momento se realizará la construcción geométrica de la función seno del ángulo en GeoGebra a partir del círculo y se pedirá a los asistentes diseñen una actividad didáctica para su enseñanza-aprendizaje (*ver* figura 6). Este diseño pretende que se vinculen las razones y las funciones trigonométricas ya que parten del círculo, con la formación del triángulo rectángulo inscrito y los ángulos están dados en grados y radianes; se elige la construcción del seno de un ángulo para dar un ejemplo del contexto para la transición de las razones a las funciones trigonométricas.

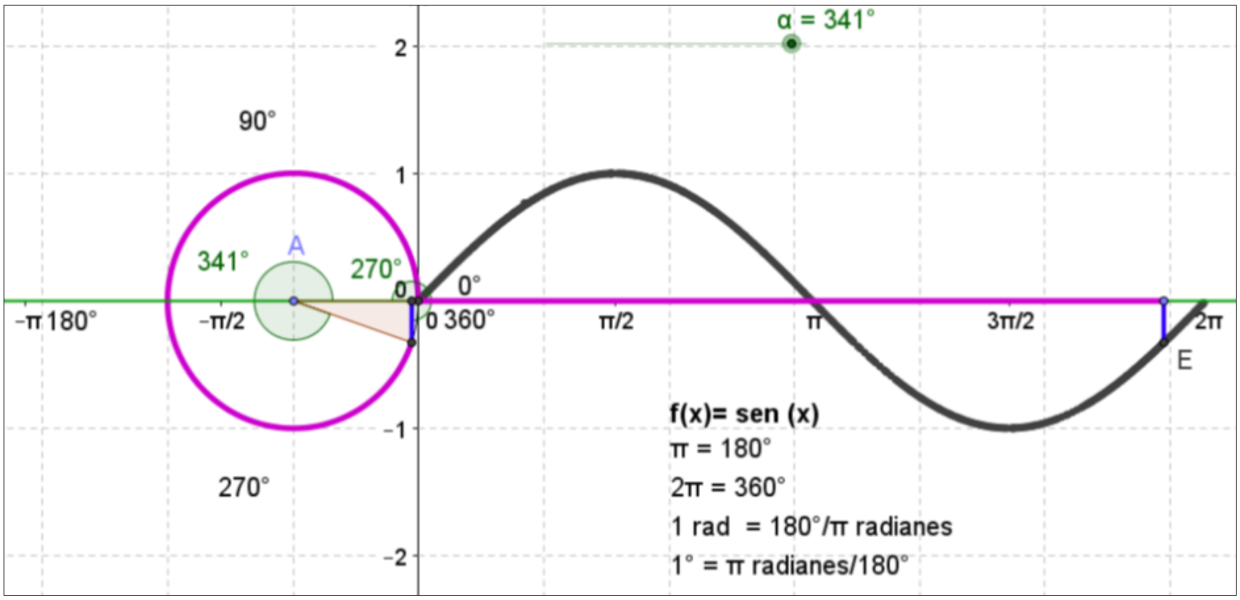


Figura 6. Construcción geométrica para diseñar una actividad didáctica con el uso de la función trigonométrica seno a partir del círculo.

Una vez que se ha vinculado las razones y funciones trigonométricas se estudiará la función seno respecto a sus parámetros amplitud, balance vertical, compresión y desfase horizontal (*ver* figura 7). La enseñanza-aprendizaje de la función trigonométrica vista de esta manera está enfocada principalmente en el nivel superior, en la asignatura de Cálculo Integral desde la propuesta del libro de Salinas *et. al.*, (2012).

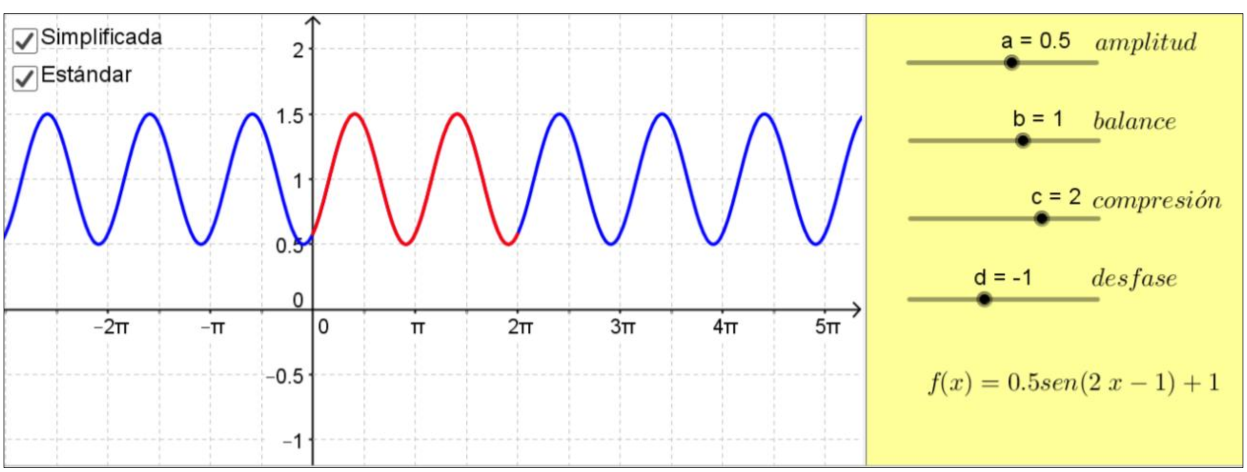


Figura 7. Construcción geométrica para el análisis de los parámetros de la función trigonométrica seno.

Consideraciones finales

Este laboratorio pretende que el participante reflexione, analice y diseñe actividades didácticas con el uso de GeoGebra de las razones y funciones trigonométricas, de forma que resignifique sus conocimientos previos sobre la forma de enseñanza-aprendizaje que ha realizado.

Los diseños analizados y elaborados en el presente laboratorio fueron experimentados en cuatro poblaciones de estudiantes de ingeniería en el Instituto Tecnológico de Sonora. Tres puestas en escena fueron sobre las razones trigonométrica, una de ellas fue en aula extendida (de manera voluntaria y sin calificación) en la asignatura de Fundamentos de Matemáticas (curso de Precálculo) producto de la tesis de maestría de la primera autora de este laboratorio. Dos puestas en escena en grupos de clase en el semestre agosto-diciembre 2014 y enero-mayo 2015. En el contexto de las funciones trigonométricas se realizó una puesta en escena en el aula de clases en un curso de Cálculo I en el semestre enero-mayo 2015; todas las puestas en escena fueron en aulas de cómputo que cuentan con una computadora para cada estudiante con GeoGebra, pizarrón, videoproyector y hojas de trabajo.

De las cuatro puestas en escena, se tienen evidencias de la resignificación lograda por los estudiantes al interactuar en el contexto del círculo para la enseñanza-aprendizaje de las razones y funciones trigonométricas. Dicha resignificación fue interpretada bajo la epistemología de prácticas de lo trigonométrico de Montiel (2011), pues esta permite reconocer las prácticas y elementos propios de la razón y función trigonométrica de forma situada en una población.

En las cuatro puestas en escena mencionadas, se reconoce a la resignificación como aquellas argumentaciones verbales y escritas de los estudiantes, los usos de saberes matemáticos como el ángulo en grados y radianes, la resolución de problemas en cálculo de ángulos y longitudes en triángulos rectángulos, la gráfica generada de la función seno y coseno con efectos de amplitud, desfase horizontal y vertical y periodo para la modelación de problemas de contexto de ingeniería.

Agradecimientos

Con respeto y gratitud para los profesores y compañeros del Departamento de Matemáticas que hicieron recomendaciones al presente trabajo y al Instituto Tecnológico de Sonora por facilitar los medios para logarlo.

Referencias bibliográficas

Molina, N. (2013). Discusiones acerca de la resignificación y conceptos asociados. *Patrimonio: Economía Cultural y Educación para la Paz (MEC-EDUPAZ) (3)*, 39-63.

Montiel, G. (2011). *Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio Socioepistemológico*. México: Ediciones Díaz de Santos.

Montiel, G. y Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: Ejemplos e ilustraciones. En A. Rosas y A. Romo (Eds.).

Metodología en Matemática Educativa: Visiones y reflexiones, 55-82. México: Lectorum.

Montiel, G. (2013). *Desarrollo del pensamiento trigonométrico*. Distrito Federal, México: Secretaría de Educación Pública.

Montiel, G. y Jácome, G. (en prensa). Significado trigonométrico en el profesor. Aceptado para su publicación en *Boletim de Educação Matemática (Bolema).*

Moore, K. C. (2009). An investigation into precalculus students' conceptions of angle measure. Paper presented at the Twelfth Annual Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education (SIGMAA on RUME) Conference, Raleigh, NC: North Carolina State University.

Moore, K. C. (2010). The role of the radius in students constructing trigonometric understandings. In P. Brosnan, D. B. Erchick y L. Flevares (Eds.), *Proceedings of the 32nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* , 815-822. Columbus, OH: The Ohio State University.

Salinas, P., Alanís, J., Pulido, R., Escobedo, J. y Garza, J. (2012). *Cálculo aplicado*: Competencias Matemáticas a través de contextos. Tomo I. México: Editorial Cengage Learning.

Subsecretaría de Educación Básica (SEB) (2011). Orientaciones didácticas y Planes de Clase de Matemáticas del Tercer Grado de Secundaria. Recuperado el 18 de mayo de 2015 de http://www.curriculobasica.sep.gob.mx/index.php/sec-mat-tercer-grado?sid=748

Subsecretaría de Educación Media Superior (SEMS) (2012). Educación media superior en México. Recuperado el 18 de mayo de 2015 de http://www.sems.gob.mx/es_mx/sems/reforma_educativa_educacion_media_superior

Torres, D. (2014). *Un entorno geométrico para la resignificación de las razones trigonométricas en estudiantes de Ingeniería* (Tesis de maestría). Instituto Tecnológico de Sonora, México.

Vohns, A. (2006). Reconstructing basic ideas in geometry–an empirical approach. *ZDM 2006 38(6)*, 498-504.

Weber, K. (2008). Teaching Trigonometric Functions: Lessons Learned from Research. *Mathematics Teacher 102(2*), 144-150.

Autores

Diana del Carmen Torres Corrales; ITSON. México ; diana.torres@itson.edu.mx

Gisela Montiel Espinosa; CINVESTAV-IPN. México; gmontiele@cinvestav.mx

Omar Cuevas Salazar; ITSON. México ; omar.cuevas@itson.edu.mx

Jesús Eduardo Hinojos Ramos; ITSON. México ; jesus.hinojos@itson.edu.mx

Evaristo Trujillo Luque; ITSON. México ; evaristo.trujillo@itson.edu.mx

Mucio Osorio Sánchez; ITSON. México; mucio.osorio@itson.edu.mx

UNA ESTRATEGIA PARA EL APRENDIZAJE DE LA PROPORCIONALIDAD

Olivia Alexandra Scholz Marbán, Sandra Areli Martínez Pérez, Miguel Ángel Huerta Vázquez

Resumen

Se diseñó una actividad para abordar los aprendizajes de la unidad 2 "Variación directamente proporcional y funciones lineales" de la asignatura de Matemáticas I en el Colegio de Ciencias y Humanidades; la actividad se pensó para poder abarcar varios aprendizajes del contenido temático y que sea el estudiante quién a partir de la manipulación concreta de un rompecabezas elabore su concepto de proporcionalidad y un obtenga un método para determinar la constante de proporcionalidad. Los resultados obtenidos fueron que mediante trabajo colaborativo los alumnos obtienen un método y una explicación de cómo obtener la medida proporcional del problema propuesto.

Palabras claves: proporcionalidad, pensamiento variacional, didáctica.

Introducción

La actividad planteada a los estudiantes se encuentra ubicada en el tema de proporcionalidad directa. Los aprendizajes involucrados corresponden a razón, proporción, operador y cociente. Se plantea la reproducción de un rompecabezas con diferente tamaño y determinar sus nuevas dimensiones, agregando con esto la noción de constante de proporcionalidad.

Se considera que el razonamiento proporcional es la parte final de la aritmética elemental y el principio básico de aquello que le sigue, el álgebra. Por tanto, ocupa una posición crucial en los programas escolares de matemáticas y ciencias. Siendo deseable que los estudiantes posean y desarrollen el pensamiento variacional que es un tema transversal en el programa de estudios del Colegio de Ciencias y Humanidades en el área de matemáticas, e incluso puede apoyar el estudio de temas de la asignatura de física como son la velocidad, fuerza, conversión de medidas y en la asignatura de matemáticas apoya el aprendizaje de fracciones equivalentes, porcentajes, proporción y razón, problemas del valor medio, por mencionar algunos ejemplos.

Se espera que al aprender conceptos y propiedades de las razones y las proporciones, los estudiantes apliquen la proporcionalidad como una herramienta conceptual en los procesos de resolución de problemas y en la construcción de conocimientos. Una de las primeras acciones consistió en buscar e identificar un problema que involucrara la movilización de conocimientos de proporcionalidad

Fundamentación

El acto de resolver un problema es un proceso que transita por diferentes etapas relacionadas entre sí, que parte del hecho de que el individuo reconozca y valore la situación como un problema, hasta el punto en que evalúa la solución hallada y el procedimiento empleado.

Desde hace ya varias décadas Polya identificó y describió varias etapas o categorías en el proceso de resolver problemas. Inicialmente habla de la fase del entendimiento del problema. Es aquí donde es importante entender la información del enunciado del problema y las posibles relaciones. Luego ubica la etapa relacionada con la concepción de un plan y el proceso de llevarlo a cabo. Finalmente, Polya identifica la fase de evaluación de la solución o soluciones y lleva a cabo una visión retrospectiva del potencial del problema. Es decir, aquí no solamente se incluye la actividad de revisar los cálculos y operaciones, sino también evaluar el sentido de la solución y el análisis de las posibles extensiones o conexiones del problema. (Polya, 1945).

Vale la pena destacar que la resolución de problemas implica la puesta en acción de estrategias. Analizar, planificar, actuar y evaluar indican diferentes acciones o momentos de una manera de proceder denominada *estrategia*. La estrategia se relaciona directamente con la resolución de problemas, de tal suerte que no hay estrategia sin una finalidad práctica de superar un problema; esto es, no hay estrategia sin pasar por la planificación, coordinación, realización y evaluación de una serie de acciones dirigidas a la resolución de problemas.

Schoenfeld (1987) considera que no solamente es importante discutir las estrategias generales identificadas por Polya, sino también las subestrategias que cada una genera. Sugiere además que, para entender cómo intentan los estudiantes resolver los problemas y en consecuencia proponer actividades que pueden ayudarlos, es necesario discutir problemas en diferentes contextos y considerar dimensiones o categorías en la instrucción matemática que influyen en el proceso de resolver un problema.

Las dimensiones o categorías a las que Schoenfeld se refiere son:

1) dominio del conocimiento o recursos,
2) estrategias cognitivas o métodos heurísticos,
3) estrategias metacognitivas y
4) sistemas de creencias.

Los *recursos*, según Schoenfeld (1985), son inventario de lo que un individuo sabe y de las formas en que adquiere ese conocimiento. El uso de unos u otros recursos en la resolución de un problema está determinado por una serie de factores, entre los que se encuentran aquellos asociados al problema, como su grado de complejidad, las formas de representación existentes y las herramientas con las que se puede resolver, tanto intelectuales como técnicas; lo cual genera que el individuo responda o actúe de cierta manera al resolver el problema. De acuerdo con este autor, hay cinco tipos de conocimientos que impactan en el uso de los recursos:

1) Conocimiento informal e intuitivo respecto del dominio (la disciplina) o del problema por resolver, conocimiento que en muchas de las ocasiones impide a los estudiantes entender el concepto matemático bajo estudio.
2) Hechos y definiciones que los estudiantes deben utilizar como parte del proceso de resolución de un problema, al plantear o seleccionar alguna vía de solución. El conjunto de recursos incluye tanto los conocimientos, hechos y definiciones básicas,

como la forma en que ellos recuerdan este conocimiento y tienen acceso a él para resolver el problema.

3) Procedimientos rutinarios o técnicas no algorítmicas que los estudiantes utilizan para resolver ciertos tipos de problemas. Son procedimientos que se ubica en un nivel táctico; esto es, son técnicas separadas de las habilidades de nivel estratégico.
4) Conocimiento acerca del discurso del dominio, que se refiere a las percepciones de los estudiantes respecto de las reglas al resolver un problema, lo cual establece la dirección y los recursos utilizados en el proceso de solución.
5) Recursos débiles o errores consistentes que los estudiantes cometen en procedimientos simples, lo cual conduce a pensar que se trata de un mal aprendizaje.

En esta experiencia de aula el contexto del problema propuesto es de geometría y del tipo de proporcionalidad directa. La resolución consiste en transformar la figura original en otra semejante o a escala, para lo cual se debe iniciar con la comparación de las medidas de dos lados conocidos de cada figura la original y la escalada que sean correspondientes.

El planteamiento consiste en aumentar o disminuir las dimensiones de la figura original y hallar en cuánto aumentan o disminuyen las demás cantidades en la figura a escala, mediante proporciones con un valor faltante o regla de tres simple.

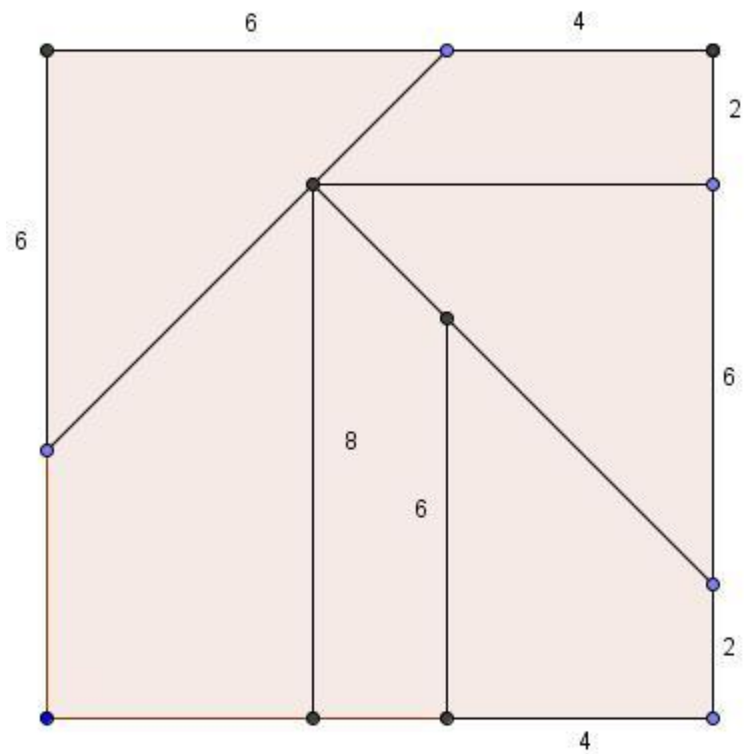
Método. Experiencia en clase

Se aplicó el problema con diversos grupos de matemáticas de primer semestre tanto del turno matutino como del vespertino del ciclo 2014 -2015 en el Colegio de Ciencias y Humanidades plantel Azcapotzalco.

La rúbrica de la actividad planteada es la siguiente:

Rúbrica de la actividad didáctica	
Nombre:	Rompecabezas
Materia:	Matemáticas I
Unidades:	Números y Operaciones Básicas Variación Directamente Proporcional y Funciones Lineales
Temática:	Números racionales Razón Operaciones básicas con números enteros y racionales Situaciones que involucran cambio. Introducción a la noción de variación. Problemas de variación proporcional directa.

Aprendizajes:	Decide sobre las operaciones adecuadas y su secuencia de ejecución en la resolución de problemas numéricos. Formula conjeturas sobre situaciones y problemas numéricos, mismos que comprueba mediante el uso de ejemplos y contraejemplos, método de ensayo y error, etcétera. Utiliza los algoritmos tradicionales de suma, resta, multiplicación y división con números enteros y racionales. Ante una serie de datos, una tabla o situación verbal, en donde exista variación proporcional directa, el alumno: Obtiene los valores que se indiquen de y o de x, auxiliándose del reconocimiento de patrones o de la regla de tres. Obtiene o identifica, según el caso, la constante de proporcionalidad
Conocimiento matemático requerido por el profesor	Números Reales Concepto de razón Concepto de proporción Semejanza y proporcionalidad Geometría Euclidiana
Conocimiento previo de los estudiantes	Números racionales Operaciones básicas con números racionales Proporcionalidad Geometría básica, construcciones geométricas, perímetro.
Objetivos:	Enriquecer el pensamiento aritmético del alumno. Revisar y dar significado a los diversos algoritmos de las operaciones básicas a través del planteamiento de problemas. Iniciar el estudio de la variación.
Descripción:	Se diseña un rompecabezas con medidas enteras, no se proporcionan todas las medidas, pero si las necesarias para calcular el resto. Se recomienda que las figuras del rompecabezas sean triángulos, y paralelogramos, porque son las figuras geométricas que los alumnos conocen y podrían trabajar con ellas y sus medidas. Se forman equipos de seis integrantes. Se les entrega el rombecabezas impreso en una hoja de papel o se dibuja en el pizarrón para que ellos lo tracen en papel con las medidas exactas y lo recorten. El rompecabezas consta de seis piezas (se puede variar el número de

	piezas), una vez que las han recortado se les indica que cada integrante elija una pieza del rompecabezas. El profesor le indica a cada equipo que rehaga el rompecabezas con nuevas medidas, el rompecabezas es el siguiente:  El equipo 1 hará que el lado que mide 4 ahora mida 6 El equipo 2 hará que el lado que mide 8 ahora mida 12 El equipo 3 hará que el lado que mide 4 ahora mida 3 El equipo 4 hará que el lado que mide 8 ahora mida 6 Cada integrante trabajará su pieza del rompecabezas y al finalizar de construirla integrarán todas las piezas para formar nuevamente el cuadro con las nuevas medidas. Si alguna de las piezas no cumple con las nuevas medidas el rompecabezas no se podrá armar.
Material a utilizar:	Hojas de papel cuadriculadas Regla Tijeras
Desarrollo:	Se presenta el rompecabezas al grupo y se les pide que se integren en equipos de seis integrantes, en una hojas cuadriculada dibujarán el rompecabezas y recortarán las piezas.

	Cada integrante del equipo elige una pieza del rompecabezas. El profesor indica que cada equipo realizará un rompecabezas de distintas medidas y presenta las nuevas medidas para cada equipo. Cada integrante trabaja en realizar su pieza con las nuevas medidas. Al finalizar deben unir las piezas y formar nuevamente el cuadro pero será de dimensiones más grandes o más pequeñas según la indicación recibida de las nuevas medidas.
Observaciones:	Al trabajar la actividad los estudiantes muestran su propio razonamiento de proporcionalidad, al inicio no detectan que se trata de proporciones pero conforme arman las nuevas piezas y ven que no embonan en el rompecabezas descubren que no deben aumentar o disminuir todos los lados en la misma medida y expresan con sus propias palabras la proporcionalidad, algunos lo ven como regla de tres, otros como porcentajes, otros como equivalencia de fracciones y un equipo lo planteó como la proporción por unidad de medida. En la actividad falta plantear una hoja de trabajo para los equipos en los que registren las medidas del cuadrado, las nuevas medidas que obtienen para las piezas, que redacten su procedimiento, que escriban la constante de proporcionalidad.
Bibliografía	Flores, R. (2010) Tesis “Significados asociados a la noción de fracción en la escuela secundaria”. CICATA, IPN. Programa de estudios de Matemáticas Semestres I a IV. UNAM, CCH, Área de matemáticas

Resultados

Al aplicar este problema como parte de una investigación, Block (2006) menciona que los estudiantes que resolvieron la actividad calcularon la diferencia o la suma y de esta manera obtuvieron las demás medidas, esto es, pusieron en práctica una estrategia aditiva una cantidad a las demás medidas originales.

El propósito de aplicar este problema obedece fundamentalmente a dos situaciones: por un lado, corresponde a un tipo de problema que es típico dentro de los problemas de proporcionalidad. Es un problema de valor faltante, pero la figura sufre una transformación (se aumenta o se disminuye) y de lo que se trata es de hallar los valores indicados, bajo el criterio de que la transformación debe realizarse manteniendo las características de la figura original; es decir, la segunda figura debe ser proporcional a la primera.

Por otro lado, resulta interesante observar el tipo de estrategia que aplican los estudiantes en la resolución, por ejemplo en la aplicación algunos usaron regla de tres, otros fracciones equivalentes, otros porcentajes y uno más explicó que su procedimiento consistió en obtener la variación por unidad

El interés por destacar estas respuestas es mostrar evidencias de que los recursos de los estudiantes en este caso *uso de conocimientos matemáticos* no solo impactan de manera directa en la estrategia que han de seguir para resolver problemas, sino que además contemplan como necesario ejecutar ciertos procedimientos que no son únicos, o bien que provienen de "otra lectura" del problema.

Conclusiones

Los estudiantes logran a partir de lo concreto y la manipulación de los objetos del problema obtener la constante de proporcionalidad mediante la experimentación a través de prueba y error, al obtenerlo son capaces de explicar a sus pares el procedimiento utilizado para la obtención de la solución y además al compartir sus métodos se percatan que no existe un solo camino de solución sino que son varios y todos son válidos.

Referencias

Block, D. (2006). Notas sobre el papel de la noción de razón en la construcción de las fracciones en la escuela primaria. En Secretaria de Educación Pública, *Matemáticas. Antología. Primer Taller de Actualización sobre los programas de estudio 2006. Reforma de la Educación Secundaria*. México: SEP.

Polya, G. (1945). How to solve it: A new aspect of mathematical model.

Schoenfeld, A. H. (Ed.). (1987). *Cognitive science and athematics education*. Psychology Press.

Autores

Scholz Marbán Olivia Alexandra; CCH, UNAM. México; scholzalexa@gmail.com
Martínez Pérez Sandra Areli; CCH, UNAM. México; miarelin@hotmail.com
Huerta Vázquez Miguel Ángel; CCH, UNAM. México; mhuertav@gmail.com

LA ARITMÉTICA EN LA FORMACIÓN DE DOCENTES

Aleida Cecilia Quiroz Rivera

Resumen

La formación de docentes involucra la adquisición de diversos tipos de conocimientos que se entrelazan unos con otros. En el desarrollo de la enseñanza de las matemáticas, los programas de formación de los futuros docentes deben dar una respuesta a cuestionamientos que incluyen el cómo enseñar y el qué enseñar. La siguiente experiencia docente describe una experiencia de trabajo con alumnos del primer semestre de la Licenciatura en Educación Primaria que estudian la asignatura de “Aritmética: su aprendizaje y enseñanza”. Los resultados presentados dan cuenta de las respuestas y reacciones de los futuros docentes ante la sesión diseñada y su relación con las finalidades formativas básicas que la Secretaría de Educación Pública describe para los docentes.

Palabras clave: Formación de docentes, aritmética, competencias.

Introducción

Desde el 2006, la Secretaría de Educación Pública ha emprendido una serie de reformas a los Planes y Programas de Estudio de la Educación Básica. A partir del 2011, en el currículum de la educación primaria se incluyen adecuaciones a los contenidos y también a los enfoques de enseñanza. Ello demanda a los docentes una preparación específica tanto en su formación inicial como en la continua. Fue en el año 2012 cuando finalmente se reestructuraron los planes y programas de la Licenciatura en Educación Primaria.

Entre los principales cambios, se encuentra la inserción de una serie de “nuevas” asignaturas, que ahora los futuros docentes deben de conocer, dominar y trabajar con el propósito de desarrollar las competencias necesarias que los lleven a ser los profesores del futuro y se constituyan en verdaderos multiplicadores de la actual metodología de aprendizaje propuesta de la reforma.

La enseñanza de las matemáticas pasó de ser ubicada en dos asignaturas (Plan 1997) a incorporarse algunas más específicas, entre ellas: Aritmética, Álgebra, Geometría y Estadística. La primera de ellas: Aritmética: aprendizaje y enseñanza tiene como propósito llevar a los docentes en formación a la adquisición no solo de contenidos que los ayuden a dominar la materia, sino también su didáctica dentro del aula.

La presente experiencia pretende mostrar los resultados de una sesión de trabajo con los alumnos de primer semestre que cursan esta asignatura. El diseño de la clase buscó el desarrollo de una serie de competencias propias de los futuros docentes mediante la proposición de diversos tipos de actividades que permitieron reflexiones profundas entre los alumnos.

Fundamentación

El propósito fundamental de la Educación Normal es la de "Formar profesionales con un alto sentido de responsabilidad social, con bases teóricas, disciplinarias y metodológicas sólidas, con herramientas didácticas y técnicas que puedan ser usadas en contextos específicos de acuerdo con los modelos y enfoques vigentes en educación básica, es un reto que exige nuevas y novedosas estrategias de formación para la docencia" (SEP, 2011,13).

La Reforma en la Educación Normal involucró diferentes aspectos innovadores en referencia a las anteriores, entre los que podemos encontrar la centralidad en el aprendizaje, la flexibilidad, el desarrollo de competencias, el impulso de una alfabetización mediada por el uso de TICs, la mejora continua y la evaluación permanente. Uno de los principales aspectos de cambio es la acentuación en el dominio de las disciplinas académicas, siendo una de las principales las matemáticas.

Es por ello que, se ha integrado en el primer semestre, la asignatura llamada: Aritmética: su aprendizaje y enseñanza. La aritmética, es una rama de las matemáticas en la que, los conceptos numéricos que en ella se aprenden, marcan la base sobre la cual pueden desarrollarse elevadas competencias numéricas (Resnick, 1989). La incorporación de la aritmética en la Escuela Normal pretende que el futuro docente además de ampliar sus conocimientos acerca de la noción de número, y de las operaciones aritméticas de suma, resta, multiplicación y división; desarrollar competencias didácticas para diseñar estrategias y aplicarlas con los alumnos de educación primaria. (SEP, 2011).

Más específicamente, la asignatura tiene como finalidades formativas las siguientes:

- Profundizar conocimientos de las estructuras teóricas, principios y categorías de la matemática.
- Conocer los principios y desarrollar competencias pedagógicas para organizar la enseñanza.
- Analizar y comprender el Plan de Estudios y programas escolares de educación básica.
- Elaborar dispositivos de evaluación de los aprendizajes.
- Comprender los procesos de aprendizaje escolar.
- Valorar la riqueza y la complejidad de la diversidad en el aula y adquirir instrumentos para trabajar con ella.
- Crear ambientes propicios para el aprendizaje.
- Promover el conocimiento y la utilización de diferentes medios que les permitan interpretar la realidad, actuando como transformadores.

De esta manera, el futuro docente debe sentir la necesidad de profundizar en los diferentes saberes matemáticos, debe ser capaz de articularlos en diferentes ocasiones para resolver sus propios problemas, pero a la vez debe lograr asumirlos como un objeto de aprendizaje para su enseñanza, siempre revisando la manera en que el niño interactúa con éstos en situaciones reales, buscando siempre una forma de enfrentar la enseñanza de algún contenido matemático.

Esta relación con las matemáticas, a través de sus aplicaciones, busca superar lo expresado por Kamil (1994) quien indicaba que los conocimientos aritméticos a los que la escuela dedica mucho tiempo no son asimilados por los niños cuando se pretende transmitirlos mecánicamente, ya que éstos, deben ser productos de construcciones de pensamiento autónomo.

Por mucho tiempo, la enseñanza escolar, presta atención a los símbolos aritméticos y no a las cantidades que ellos representan, es decir, según Resnick (1989) hay una preferencia por una actuación sintáctica sin ninguna referencia semántica.

Metodología

El diseño, la recolección y el análisis de datos están basados en un enfoque cualitativo. El tema específico abordado es el 2.4 Estimación y Cálculo Mental, ubicado en la unidad de aprendizaje dos: Problemas de enseñanza relacionados con las operaciones aritméticas. El tema busca el desarrollo de elementos cognitivos y procedimentales para el manejo del sistema numérico, su origen y significado en la evolución histórica de la humanidad, así como las diversas aplicaciones e impacto en los contextos educativo, científico, económico, social y cultural en general.

Así mismo se pretende que el estudiante normalista se forme una perspectiva cognitiva amplia y profunda acerca del desarrollo de la noción de número, mediante el análisis y resolución de situaciones problemáticas y en este proceso vincule el número con los variados significados comunes y formales de las operaciones aritméticas básicas y arribe a niveles de abstracción.

El diseño de la secuencia desarrollada buscó la incorporación de actividades innovadoras que llevaran al diálogo entre la formación en la disciplina y la didáctica específica de ésta (Díaz - Barriga, 2010). Además, la propuesta de actividades buscó la proposición de situaciones y dilemas que el futuro docente enfrentará en su práctica y que lo lleve a la reconstrucción de saberes, creencias y formas de actuación en el aula, como lo establece la SEP (2012).

Una de las características más importantes de las actividades propuestas fue la experimentación de los futuros docentes de recursos y estrategias que les ayudarán a trabajar posteriormente con sus alumnos en la escuela primaria, pero a su vez el desarrollo propio de sus habilidades matemáticas como el cáclulo mental.

La Tabla 1 muestra el desarrollo didáctico de un tema elegido de entre los contenidos de la asignatura de Aritmética: su aprendizaje y enseñanza para su trabajo con los estudiantes de educación normal:

No.	Actividad	Descripción
1	Práctica de ejercicios de cálculo mental sencillo. Completar los resultados de las sumas. (Juego en el link: *http://www.vedoque.com/juegos/juego.php?j=escondite*.)	Esta página presenta operaciones sencillas para niños de primero o segundo de primaria. Esta actividad permitirá a los estudiantes normalistas un primer acercamiento al tema de cálculo mental.
2	Trabajo con el juego: Carrera a 20. (SEP, 1993).	Los estudiantes trabajarán en equipos debiendo colocar números comenzando con el 1 o 2, y luego sumando 1 o 2 por turnos a la cifra que vaya quedando, ganando el jugador que llegue al número 20.
3	Completar algunas pirámides	Se llenarán conociendo los números de abajo y sumándolos para obtener los números de más arriba hasta llegar a la cima. La dificultad de las pirámides

	numéricas	aumenta según lo “alta” que ésta sea por la cantidad de operaciones que hay que realizar y el creciente número que hay que sumar
4	Utilizar su cálculo mental y estimación para resolver actividades.	Se utilizarán acertijos matemáticos tales como: • ¿Cómo medirías los 11 minutos que son necesarios para cocer un pastel, con dos relojes de arena de 8 y 5 minutos respectivamente? • Continúe la sucesión de números e identifíquela: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377
5	Encontrar algunas formas (conclusiones) que les ayuden a calcular mentalmente resultados de manera más sencilla, describiendo algunos de esos “trucos”	Los estudiantes confrontarán sus resultados y presentarán al grupo algunos “caminos” sencillos que encontraron para alcanzar los resultados, se pretende que los alumnos elaboren pequeñas ayudas para futuros problemas.

Tabla 1. Diseño de la secuencia

Resultados

Si bien, la innovación es un proceso creativo que implica asumir riesgos y errores, pues no se conocen a priori ni el camino ni los resultados, no conduce automáticamente al éxito deseado (Díaz-Barriga, 2010), la innovación es el camino que nos llevará al futuro y a enfrentar cada uno de los retos que se presentan. Se presentan a continuación los resultados de cada actividad:

Actividad 1. Durante el desarrollo de la actividad los estudiantes se presentaron muy animados y trabajaron con motivación e interés al observar recursos interactivos con los cuales podían desarrollar cálculos mentales muy elementales y sencillos pero que los involucraron poco a poco en el tema que se quería trabajar. Además fue de gran aporte, pues en semestres posteriores los normalistas tendrán que enfrentarse a planear clases para ir a las Jornadas de Observación y Práctica Intensiva a las escuelas primarias, por lo que el contacto con algunos recursos útiles para preparar sus intervenciones con los niños.

Actividad 2. Durante la actividad desarrollada por equipos se utilizó la competencia como un detonante para la motivación de los estudiantes, ya que al mismo tiempo al estar ubicados en parejas trataban de llegar a la meta del juego, o a ganar el juego en el menor tiempo posible. Lo anterior obligaba a los estudiantes a no simplemente colocar números “sin pensar” sino el ir analizando lo que estaba pasando con los números e ir ideando alguna estrategia no sólo para ganar sino para hacerlo en el menor tiempo posible.

A través de la realización de esta actividad los futuros docentes, lograron fortalecer su cálculo mental, así como la estimación de los números que el compañero colocará, creando en su mente alguna estrategia para poder ganar el juego. Es importante que los estudiantes analicen el hecho de que, además de estar sumando, ellos debieron de haber “mirado más allá”, y formular el camino de los números que los llevarían a la victoria.

En lo que respecta a las actividades 3 y 4, los estudiantes trabajaron con sus habilidades de cálculo mental, al utilizarlas para resolver los diferentes ejercicios que se les propusieron, algunos de ellos los trabajaron en menor tiempo, mientras que otros tardaron un poco más en encontrar las respuestas correctas. Fue importante durante el proceso dar a cada normalista su espacio para pensar y encontrar la solución al conflicto que se le presentaba, pues a través de ellos se dan cuenta que los grupos de clase son heterogéneos y que así como ellos son diferentes, cuando trabajen con sus niños en la escuela primaria, se encontrarán con que cada estudiante tendrá su ritmo de trabajo, ayudando con ello a la finalidad mencionada anteriormente que versa: "Valorar la riqueza y la complejidad de la diversidad en el aula y adquirir instrumentos para trabajar con ella".

Actividad 5. Para cerrar el trabajo se propusieron a los estudiantes problemas en los que su agilidad mental fue puesta a prueba, muchos de ellos trataron de rendirse y dejar de buscar la respuesta, pero al estar trabajando en conjunto, unos y otros aportaron para encontrar las soluciones adecuadas. El aprendizaje llegó cuando al comparar las respuestas los alumnos elaboraron algunas conclusiones con respecto de las formas de encontrar una respuesta más rápida, entre las que se incluyeron: Cuando se suman dos parejas de números a las que tan solo separa una unidad, el resultado es igual al doble de la pareja que se salta; si los números que se suman son consecutivos, se calcula el doble de la cifra más baja y al resultado se le suma 1; las sumas resultan más sencillas si el primer número es mayor que el segundo, por lo que conviene usar la propiedad conmutativa de la suma; es válido aplicar el redondeo, sobretodo en restas y multiplicaciones, entre algunas otras. Al final se puede decir que los normalistas lograron ampliar sus habilidades matemáticas, contribuyendo con esto al logro de una de las finalidades de la asignatura de Aritmética: su aprendizaje y enseñanza, enumeradas con anterioridad.

Conclusiones

A través del trabajo desarrollado en la asignatura se logró que a través de las diversas actividades los futuros docentes se apropiaran de nociones, conceptos y procedimientos relativos al cálculo mental con los cuales favorecieron la asignación de significados para los contenidos aritméticos que se abordan en la escuela primaria buscando que en un futuro los usen con propiedad y fluidez en la solución de problemas.

Además a través del desarrollo de las diversas actividades se permitió que los estudiantes encontraran y conocieran algunas actividades que les pudieran ser útiles al trabajar en la educación primaria, además de reconocer que, a partir de un "juego" se pueden encontrar conclusiones que den lugar a aprendizajes.

En estas actividades se les presentaron a los estudiantes actividades para fortalecer su cálculo mental, un espacio que le será útil ya que, son actividades que se puede utilizar con los niños en la escuela primaria y esto reporta múltiples beneficios en la mejora de las habilidades matemáticas. Se recomienda que se refiera al texto para analizar los diferentes niveles de dificultad que se pueden implementar, de acuerdo al grado y contexto del grupo.

El contenido tratado en particular, la aritmética en específico y las matemáticas en lo general, guardan una importancia trascendental y un impacto profundo en la vida de la humanidad y es de destacar que el docente tiene la responsabilidad de tener un acervo amplio de la ciencia matemática y de desarrollar competencias que le permitan convertirse en experto en el aprendizaje de la disciplina.

La enseñanza de las matemáticas en la educación primaria, es un reto que cada uno de los docentes tiene dentro del aula, no importa si trabaja con primero o sexto grados, pues en todos ellos existe un alto grado de complejidad para lograr que los estudiantes (en su nivel), se adentren y dominen el mundo de los números y sus aplicaciones.

El diseño de aprendizaje por competencias en matemáticas representa un verdadero reto para docentes de la escuela normal y docentes en su formación inicial. Realizar actividades con los alumnos que los lleven a construir sus aprendizajes, involucrarlos en la resolución de situaciones problemáticas así como buscar que alcancen la comprensión de cada uno de los contenidos matemáticos que se les imparten a diario en la escuela, demanda de una gran preparación y conocimiento del enfoque didáctico de las matemáticas de parte del docente.

El impacto que las matemáticas - su contenido y estrategias didácticas - en la formación inicial de docentes, resulta de una gran importancia pues el futuro decente debe incluir en su acervo cognitivo en general que le permita intervenir con conocimiento científico en situaciones de aprendizaje situado en un aula de trabajo de educación primaria.

Referencias

Diaz – Barriga, R. (2010). *Los profesores ante las innovaciones curriculares*. Issue: Tlaxcala.

DGSU. Recuperado el 28 de octubre de 2013, de http://www.dgesu.ses.sep.gob.mx/principal/glosario.aspx#IIbid

Gobierno de México, Diario Oficial de la Federación, Acuerdo 649, 2012.

Kamii, C. (1994). *El niño reinventa la aritmética*. Madrid: Visor.

Resnick, L. (1989). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. España: Paidós.

SEP (1993). *Juega y Aprende matemáticas*. SEP: México.

SEP (1997). *Plan y Programas de Estudio de Licenciatura en Educación Primaria*. SEP: México.

SEP (2009). *El Modelo de Gestión Educativa Estratégica, México.*

SEP (2011), *Programa de Aritmética: aprendizaje y enseñanza.* SEP: México.

SEP (2011), *Plan y Programas de Estudio de Educación Primaria*. SEP: México.

SEP. Recuperado el 30 de octubre de 2013, de: http://www.ses.sep.gob.mx/wb/ses/ses_glosario?page=9&#_Toc208924798

Sumas y restas. Recuperado el 30 de octubre de 2013, de: *http://www.vedoque.com/juegos/juego.php?j=escondite*.

Autor

Aleida Cecilia Quiroz Rivera; Escuela Normal "Profesor Serafín Peña". México; aleidac.quiroz@gmail.com

FORTALECIMIENTO DE LAS COMPETENCIAS TECNOLÓGICAS EN EL PERFIL DE LOS FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Gricelda Mendivil Rosas, Leidy Hernández Mesa, Daniel Everardo Amador Bartolini

Resumen

Se presenta la experiencia didáctica de una facultad formadora de docentes en matemáticas adscrita a una universidad pública estatal, que consiste en la instrumentación de asignaturas semipresenciales en un plan de estudios escolarizado y que tiene como propósito fortalecer las competencias tecnológicas en el perfil profesional de los futuros profesores de matemáticas, los cuales se desenvuelven en aulas de Educación Secundaria y Media Superior.

Palabras claves: Formación inicial, modalidad semipresencial, competencias tecnológicas, docente formador.

Introducción

La experiencia didáctica que se presenta atiende a la descripción de una práctica docente que se ha desarrollado desde el año 2013 en el Programa Educativo de la Licenciatura en Docencia de la Matemática de la Facultad de Pedagogía e Innovación Educativa, institución adscrita a la Universidad Autónoma de Baja California (UABC). Ésta consiste en la impartición de asignaturas en la modalidad semipresencial, a través de un diseño instruccional desarrollado en la plataforma Blackboard que es utilizada de forma institucional y se caracteriza por administrar cursos y asignaturas a través de internet y que la UABC utiliza como apoyo en diversas modalidades dentro de sus programas educativos.

La propuesta que se trabajó está orientada a la importancia de gestionar ambientes de aprendizaje donde las tecnologías de la información y comunicación (TIC) son parte fundamental en la formación inicial de profesores de matemáticas, por lo que se necesita desarrollar en ellos competencias tecnológicas que apliquen de forma didáctica cuando ejerzan su profesión.

Fundamentación

Ante un contexto globalizado, la educación plantea en sus propósitos favorecer la inserción en la sociedad del conocimiento, por lo que busca promover el desarrollo de competencias tecnológicas en los diversos planes de estudio de los tres niveles educativos. De acuerdo a lo anterior, el docente se posiciona como el principal actor para el desarrollo de estas competencias, puesto que las tecnologías le permitirán incorporar elementos creativos e innovadores a su práctica educativa, en la que buscará que sus estudiantes sean capaces de utilizar las TIC para: buscar, analizar y evaluar información; producir y publicar información de forma responsable; comunicarse y colaborar con otros; así como solucionar problemas y tomar decisiones, donde se manifieste su contribución a la sociedad (UNESCO, 2008).

Si bien es cierto los planes y programas de estudio actuales poseen características que involucran el desarrollo de competencias relacionadas con el uso y manejo de tecnología, por lo que la formación docente y particularmente la formación inicial de profesores de matemáticas, demanda el desarrollo de competencias tecnológicas para ser aplicadas a su futura práctica docente, pero para desarrollar una competencia, se exige que los estudiantes-profesores sean capaces de localizar y procesar información, utilizar herramientas para resolver problemas reales y que aplicar los conocimientos aportados por las ciencias para comprender el mundo y tomar decisiones (INEE, 2008).

En el caso de la docencia, se puede decir que para ser competente se requiere poseer diversos conocimientos habilidades y actitudes para saber qué enseñar (matemática y currículum), cómo enseñar (didáctica y pedagogía) y para qué enseñar (necesidades del contexto educativo).

En la actualidad la inmersión de la tecnología ha demandado que un profesor posea además de competencias matemáticas y didácticas, competencias tecnológicas, mismas que posibilitan la utilización adecuada de las tecnologías en el proceso de enseñanza aprendizaje (Raposo, Fuentes y González, 2006) y que permiten que los docentes formadores y estudiantes-profesores tomen las bondades y ventajas de las TIC, para fomentar la construcción de conocimientos y habilidades matemáticas.

Debido a la gran importancia de un docente, es preciso destacar las competencias tecnológicas que éstos deben desarrollar sobre todo durante su formación inicial, para ello Prendes (2010) plantea las siguientes:

- Competencias técnicas e informacionales: utilizar las herramientas tecnológicas para realizar varios tipos de documentos que utilicen texto, imágenes, audio, entre otros. Así como seleccionar fuentes de información que apoyen el desarrollo de su práctica docente.
- Competencias sociales y del medio: fomentar la inclusión y el acceso a los recursos tecnológicos, practicar la ética en la utilización de éstos y promover la utilización del software libre, además de la producción intelectual de entornos libres.
- Competencias docentes: promover diversas estrategias didácticas para integrar las TIC en su docencia, seleccionar y utilizar los recursos tecnológicos que fomenten el aprendizaje en los estudiantes, utilizar las tecnologías para la producción y difusión de material didáctico.
- Competencias comunicativas: utilizar las diversas herramientas TIC para compartir sus ideas, opiniones y propuestas con pares, grupos, comunidades, entre otros.
- Conocer competencias de gestión: manejar las tecnologías como apoyo a las actividades de carácter administrativo dentro de la docencia.

Lo interesante ahora es saber cómo desarrollar en los futuros profesores las anteriores competencias, es aquí donde el principal compromiso del docente formador será instrumentar situaciones de aprendizaje que fomenten el desarrollo de estas competencias, además deberá mantenerse actualizado en el uso de las TIC, para poder aplicarlas de forma didáctica y estratégica en diferentes ambientes de aprendizaje (SEP, 2008).

Con base a lo antes mencionado, la aplicación de las tecnologías se ha traducido en la generación de materiales educativos en diversos formatos multimedia que acompañan al proceso de enseñanza-aprendizaje dentro del salón de clases o como recursos de aprendizaje a distancia por medio de plataformas, sin embargo, "crear un ambiente virtual no es trasladar la docencia de un aula física a una virtual…Se requiere conocer todos los recursos tecnológicos disponibles, así como las ventajas y limitaciones de éstos para poder relacionarlos con los objetivos, los contenidos, las estrategias y actividades de aprendizaje y la evaluación" (Martínez, Arrieta y Canul, 2005). Es decir, ser congruentes con la modalidad de aprendizaje que se utilice, puesto que cada una de ellas tiene sus propios atributos, ventajas y desventajas.

Una de las principales características de la modalidad semipresencial es que en ella se promueve el aprendizaje autónomo e independiente, donde se desarrolle la capacidad de aprender a aprender y de reflexionar en la forma en que se aprende, para actuar en consecuencia (Díaz Barriga, 2010). Esto atiende a lo que la UABC expone en su modelo educativo, donde promueve que sus programas educativos centren al alumno en el proceso de enseñanza-aprendizaje, para ello propone que en la aplicación de los planes de estudio se impulsen las competencias relacionadas con el uso de herramientas digitales y de las TIC; por lo que apoya la instrumentación de modalidades de aprendizaje semipresenciales y en línea, mismas que suponen nuevos escenarios de aprendizaje, en los que el trabajo autónomo es de gran importancia (UABC, 2013).

De acuerdo a esto, la FPIE busca fortalecer y potencializar las competencias tecnológicas alineadas a los propósitos de la didáctica de la matemática, entendida como la disciplina que estudia e investiga los problemas que surgen en educación matemática y propone actuaciones fundadas para su transformación (Godino, 2000).

TIC y el aprendizaje de matemáticas

Entre todas las competencias curriculares, una de las más beneficiadas por las nuevas tecnologías es la competencia matemática, la red ofrece numerosos portales temáticos que complementan la enseñanza de esta asignatura, pues el Internet promueve el autoaprendizaje, ya que la formación va más allá de lo que se impone al considerar las preferencias de los alumnos (Cabero, 2007). Las TIC ofrecen interacción, participación activa, aprendizaje colaborativo e individual, facilitación del estudio y además ofrecen "espacios para que el estudiante pueda vivir nuevas experiencias matemáticas (difíciles de lograr por medios tradicionales), en los que puede manipular directamente los objetos matemáticos dentro de un ambiente de exploración" (Santiesteban y Catombela, 2015). Su éxito radica en que el aprendizaje de las matemáticas no se fundamenta en la memorización de datos o en la comprensión de conceptos, sino que para comprender significados abstractos requiere el desarrollo previo de destrezas, habilidades y capacidades en las que la observación, el descubrimiento y la práctica son fundamentales, lo que dota a los alumnos un papel muy activo.

De acuerdo a esto, la enseñanza de las matemáticas está influenciada por los nuevos avances de las herramientas digitales y de un mejor conocimiento de la naturaleza del mundo matemático. La introducción y ampliación de las TIC en el área de las matemáticas obliga, por tanto, a un nuevo planteamiento, tanto en los contenidos como en la metodología, es por esto y por las múltiples habilidades de los estudiantes que el docente requiere dominar las competencias tecnológicas, dado que se han convertido en un área de oportunidad para ellos, pues se encuentran ante una restructuración en el diseño y aplicación de actividades didácticas digitales que tengan como finalidad lograr aprendizajes significativos en los alumnos, ante esta situación es importante incorporar las bondades de las TIC a la enseñanza de las matemáticas, ya que a través de los medios y recursos interactivos y multimedia, los alumnos pueden representar conceptos y recrear actividades matemáticas en ambientes de aprendizaje virtuales, lo que estimula la motivación en el aprendizaje de éstos, además de permitir una especie de proceso de simulación, que facilita, en menos tiempo y a bajo coste, el estudio y la experimentación de diferentes situaciones.

Para que las TIC incidan de manera favorable en el aprendizaje, su aplicación debe promover la interacción de los alumnos entre sí y con el profesor, durante la realización de las actividades didácticas. Debe evitarse que el uso de la tecnología no se utilice sin aportar un uso significativo para el aprendizaje, por lo que se debe promover modelos de utilización de las TIC que permitan nuevas formas de apropiación del conocimiento, en las que los alumnos sean agentes activos de su propio aprendizaje, pongan de manifiesto sus conjeturas y reflexionen sobre lo que aprenden.

Con base en ello, es pertinente mencionar que el principal agente de cambio en las aulas es el docente, por tanto es quien decide atender o no las nuevas formas de aprendizaje y enseñanza que requiere la utilización de las TIC, precisamente esta es la complejidad a la que se enfrenta la formación inicial de profesores, se requiere de estrategias que empleen los docentes formadores para el desarrollo del compromiso social que implica involucrar las tecnologías al proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que los estudiantes-profesores deben poseer conocimientos, habilidades y actitudes relacionadas con el uso didáctico de las TIC, para facilitar la innovación en los procesos de enseñanza.

Método

Para la Facultad de Pedagogía e Innovación Educativa (FPIE) es de gran importancia el desarrollo de la creatividad e innovación en sus estudiantes (futuros profesores), por lo tanto exhorta a sus docentes formadores a promover en éstos el desarrollo de competencias tecnológicas en el proceso de enseñanza-aprendizaje, por medio de diversas actividades y de la gestión de ambientes de aprendizaje.

La experiencia didáctica que se realizó consistió en la instrumentación de seis asignaturas del programa educativo de la Licenciatura en Docencia de la Matemática (LDM) en una modalidad semipresencial, con el objetivo de fortalecer las competencias tecnológicas en los estudiantes-profesores y éstos pudieran aplicarlas en sus prácticas escolares, promoviendo así el uso didáctico de las tecnologías, para el desarrollo de aprendizajes matemáticos significativos en estudiantes de Educación Secundaria y Media Superior.

La modalidad semipresencial ofrece que el docente formador estructure y tenga una claridad en todo momento de lo que debe enseñar al estudiante-profesor, cómo hacerlo y de qué forma evaluarlo, esto le da una certeza a éste de lo que aprenderá y lo que requiere para lograr sus metas profesionales.

La población de estudio son los estudiantes-profesores, donde el desarrollo de las competencias tecnológicas son sumamente importantes en su formación inicial, sin embargo para ello se necesita de los docentes formadores, los cuales deben de tener un perfil orientado al uso de las TIC en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En este caso, el papel del docente formador es clave para el fortalecimiento de las competencias tecnológicas, por lo que se busca que cumpla con ciertos requisitos y criterios antes de impartir una materia en modalidad semipresencial, por ejemplo haber impartido la materia por lo menos en dos ocasiones, estar capacitado en la incorporación de las TIC al proceso de enseñanza-aprendizaje (sobre todo gestionar ambientes de aprendizaje con herramientas tecnológicas), dominar las herramientas de la Plataforma Blackboard, así como apegarse a los criterios y lineamientos institucionales del diseño instruccional de la UABC.

En cuanto a los requerimientos de diseño instruccional para que una asignatura se imparta en modalidad semipresencial, se debe contar mínimamente con los siguientes elementos:

- Datos de identificación del curso.
- Descripción de la competencia de la asignatura.
- Establecimiento de metas, de acuerdo a la unidad temática planteada.
- Diseño de actividades para el cumplimiento de cada meta.
    - Utilización de las diversas herramientas de blackboard (blogs, chat, aula virtual, diarios, grupos de colaboración, wikis y foros de discusión).
    - Descripción de los recursos y materiales didácticos que se utilizarán.
    - Indicaciones de los requerimientos de cada actividad.
    - Ubicación de la actividad en la plataforma (evaluaciones, actividades, materiales, etc.)
- Indicadores que describen el complimiento de la meta.
- Criterios de evaluación de cada actividad.

Esta experiencia se ha realizado a partir del ciclo escolar 2013-2, donde han colaborado seis asignaturas con una participación de 360 alumnos. En la tabla 1 se muestra el desglose:

Asignatura	Ciclo escolar	Alumnos participantes
Diseño de actividades didácticas en matemáticas	2013-2, 2014-1, 2014-2 y 2015-1	107
Medios y recursos tecnológicos didácticos	2013-2, 2014-1, 2014-2 y 2015-1	104
Desarrollo conceptual de la matemática	2013-2, 2014-1 y 2014-2	48
Diseño de objetos de aprendizaje en matemáticas	2014-1 y 2014-2	35
Enfoques de enseñanza en Matemáticas	2014-2	40
Didáctica de la matemática	2015-1	26
Total	-	360

Tabla 1. Relación de alumnos participantes en asignaturas de la modalidad semipresencial por ciclo escolar.
Nota: Las asignaturas se incorporaron en la modalidad semipresencial de forma emergente, por lo que se instrumentaron en diferentes ciclos escolares.

Las asignaturas participantes poseen dentro de sus competencias generales y propósitos características con aplicaciones didácticas tales como prácticas escolares donde deben diseñar, aplicar y evaluar situaciones de aprendizaje apoyadas de las tecnologías.

La estructura de cada curso está organizada de acuerdo a los propósitos y características del programa de la asignatura, pero sobre todo, el diseño instruccional está marcado por la esencia del profesor formador, ya que es él quien decide qué materiales, recursos, herramientas y estrategias poner a disposición del estudiante-profesor, qué actividades diseñar para fomentar sus aprendizajes, cómo evidenciar su desempeño y evaluar su aprendizaje, es decir, quien diseña tiene el compromiso y responsabilidad de enriquecer el dominio de las competencias tecnológicas, así como de aquellas relacionadas con la didáctica de la matemática, puesto que la finalidad principal de utilizar las TIC es desarrollar aprendizajes significativos.

Resultados

Esta experiencia de trabajo ha traído grandes ventajas en el proceso de formación inicial de los profesores de matemáticas, debido a que han fomentado la creación de una amplia variedad de materiales didácticos que han utilizado en sus prácticas frente a grupo, por ejemplo en la realización de materiales didácticos donde se explican conceptos, teoremas y algoritmos (videos tutoriales, materiales visuales, interactivos, juegos, etc.), diseño de objetos de aprendizaje que tienen como objetivo fomentar el estudio de las matemáticas, creación de materiales didácticos interactivos que propicien la motivación por el aprendizaje de las matemáticas, entre otros, mismos que les han permitido gestionar ambientes de aprendizaje virtuales. A demás, de acuerdo a las actividades propias de cada asignatura han potencializado sus habilidades en el área de didáctica de la matemática y en la utilización de TIC en el aprendizaje.

La principal forma de visualizar los resultados de esta experticia es en las reuniones de academia del programa de la LDM, ya que se comparte la práctica realizada y los productos más sobresalientes de los estudiantes-profesores. Dentro de la discusión de la academia, se ha identificado que la modalidad semipresencial es muy funcional y pertinente para la formación inicial de los profesores de matemáticas, porque además de desarrollar las competencias tecnológicas y del curso, fortalecen habilidades como la organización, administración del tiempo, resolución de problemas, aprendizaje autónomo, pero sobre todo las relacionadas con las tecnologías y su utilización en entornos de aprendizaje, ejemplos de ello es el diseño de actividades en ambientes virtuales y materiales didácticos creativos que coadyuvan el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, en la tabla 2 se mencionan los más destacados:

Asignatura	**Productos obtenidos**
Diseño de actividades didácticas en matemáticas	Videos, materiales didácticos y blogs.
Medios y recursos tecnológicos didácticos	Blogs, interactivos, materiales didácticos.
Desarrollo conceptual de la matemática	Videos, materiales didácticos, historietas y revistas digitales.

Diseño de objetos de aprendizaje en matemáticas	Blogs, sitios web, materiales didácticos y objetos de aprendizaje.
Enfoques de enseñanza en Matemáticas	Materiales didácticos, libros y revistas digitales.
Didáctica de la matemática	Materiales didácticos, juegos y videos

Tabla 2. *Productos obtenidos en las asignaturas de la modalidad semipresencial*

Nota: Todos los productos están apegados a los contenidos temáticos de los programas educativos de Educación Secundaria y Media Superior.

Para la creación de estos productos se han utilizado las herramientas TIC, principalmente para plasmar textos e imágenes; procesar datos y presentar información; crear videos, audios, simulaciones y diversos formatos interactivos (SEP, 2011). Además del manejo de navegadores de Internet, buscadores de información, plataformas virtuales, sitios para la presentación de información (Movenote, Prezi, Slideshare, Wix), herramientas de almacenamiento de datos (Dropbox, Google Drive, Onedrive), blogs (Edmodo, Edublog y Blogger) y redes sociales (Facebook, Google+, Instagram, Twitter); así como la utilización de programas básicos (Word, Power Point y Excel) y de software libre para el apoyo de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Geogebra y Graph).

Con forme a lo anterior se destaca que las competencias tecnológicas que se fortalecieron a partir de las asignaturas semipresenciales en los estudiantes-profesores, son las siguientes:

- Manejar hardware y software para la facilitación de su práctica profesional.
- Diseñar situaciones didácticas que fomenten el desarrollo de aprendizajes significativos apoyados por la utilización de las tecnologías.
- Gestionar ambientes de aprendizaje a través de las TIC.
- Crear materiales didácticos digitales y objetos de aprendizaje que faciliten el estudio y el aprendizaje de las matemáticas.
- Desarrollar técnicas e instrumentos apoyados de las herramientas digitales, para la evaluación de los aprendizajes matemáticos.
- Promover el trabajo colaborativo por medio de las TIC.
- Utilizar las TIC para promover la motivación hacia el aprendizaje de las matemáticas.
- Seleccionar las herramientas y recursos tecnológicos viables para aplicarlos en su práctica educativa.

A partir de los buenos resultados obtenidos en las asignaturas semipresenciales respecto al fortalecimiento de las competencias tecnológicas, es necesario mencionar que a partir de ello han surgido otras dos actividades que fortalecen estas competencias y benefician la formación inicial de los profesores de matemáticas, estos son:

- Ofertar un diplomado que integra asignaturas optativas para el desarrollo de competencias digitales en entornos educativos.

- Diseñar y ofertar asignaturas durante el semestre y en periodos intersemestrales (receso escolar) en modalidad semipresencial y en línea. Estas asignaturas son:

- Competencias digitales
- Educación abierta y a distancia
- TIC para el aprendizaje
- Diseño de objetos de aprendizaje
- Medios y recursos tecnológicos didácticos
- Tecnologías aplicadas a la educción

Es por ello que cuando se inician prácticas que representan un éxito para el fortalecimiento del perfil de los estudiantes-profesores, la institución apoya propuestas encaminadas a los mismos objetivos, lo cual ofrece mejorar los procesos en la formación inicial de profesores de matemáticas.

Conclusiones

Fomentar prácticas diferentes que promuevan el desarrollo y el fortalecimiento de competencias tecnológicas en la formación inicial de profesores es una tarea de gran responsabilidad y compromiso para la institución, pero sobre todo para los profesores formadores, puesto que diseñar un curso en una modalidad semipresencial, requiere de la creación de ambientes de aprendizaje virtuales óptimos para potenciar aprendizajes significativos, ya que esto le permitirá al estudiante-profesor obtener las herramientas necesarias para generar el diseño de sus propias estrategias, actividades y materiales didácticos para enseñar matemáticas.

Entonces el papel del profesor formador es de gran relevancia, ya que es él quien diseñará las actividades necesarias para fortalecer las competencias tecnológicas y que además representa el principal ejemplo para el futuro profesor, por lo que requiere diseñar estrategias originales y creativas que fomenten conocimientos y habilidades tecnológicas, a través de diferentes ambientes de aprendizaje.

Los beneficios de esta experiencia impactan de forma positiva al estudiante-profesor al fortalecer sus competencias tecnológicas, al docente formador que experimentó diferentes entornos de aprendizaje donde aprovechó las ventajas de las TIC en su instrumentación didáctica, a la institución formadora pues le ha permitido promover formas de enseñanza innovadora y por su puesto a los estudiantes de Educación Secundaria y Media Superior quienes gozaron de prácticas creativas en su proceso de aprendizaje.

Se destaca la satisfacción de los estudiantes-profesores al visualizar lo que desarrollaron a lo largo del curso y verlo plasmado al finalizarlo, es un logro a resaltar que realizó la academia de docencia de la matemática. Sin embargo es consciente que requiere formalizar el proceso de seguimiento, además de realizar una investigación que analice el impacto, donde se documenten de forma estandarizada las experiencias de cada asignatura y grupo, así como constituir un repositorio digital de todas las creaciones realizadas para poder compartirlas y promover que su alcance sea más allá de los lugares donde fueron aplicadas.

Esta práctica es considerada exitosa para el programa de LDM, debido a que los estudiantes-profesores han logrado fortalecer sus competencias tecnológicas, mismas que han sido logradas a través de acciones trabajadas en colaboración de académicos comprometidos con la formación inicial de profesores de matemáticas.

Referencias

Cabero, J. (2007). *Nuevas tecnologías aplicadas a la educación*. Madrid, España: McGraw-Hill.

Díaz, F. (2010). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo: una interpretación constructivista*. México: McGraw-Hill.

Godino, J. (2000). *Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica*. Departamento de Didáctica de la Matemática Universidad de Granada. España. Recuperado de: http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos_teoricos/perspectiva_ddm.pdf

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE). (2008). PISA en el Aula: Matemáticas. Recuperado de:

http://publicaciones.inee.edu.mx/buscadorPub/P1/D/409/P1D409.pdf

Martínez, E., Arrieta, J. y Canul, A. (2005). Laboratorio Virtual de matemáticas. En J. Lezama, M. Sanchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18*, 785-790. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO). (2008). Estándares de competencias en TIC para docentes. Recuperado de:

http://www.eduteka.org/pdfdir/UNESCOEstandaresDocentes.pdf

Prendes, M. (2010). Competencias TIC para la docencia en la universidad pública española: indicadores y propuestas para la definición de buenas prácticas. Recuperado de:

http://www.um.es/competenciastic/informe_final_competencias2010.pdf

Raposo, M., Fuentes, E. y González, M. (2006). Desarrollo de competencias tecnológicas en la formación inicial de maestros, *Revista Latinoamericana de Tecnología Educativa*, 5 (2), 525-537.

Santiesteban, E. y Catombela, M. (2015). *La enseñanza de las matemáticas y su influencia en el desarrollo del pensamiento reflexivo*. Colombia: Redipe.

Secretaría de Educación Pública. (2008). *Acuerdo Secretarial Número 447 por el que se establecen las competencias docentes para quienes impartan educación media superior en la modalidad escolarizada*. México: SEP.

Secretaría de Educación Pública. (2011). *Curso Básico de Formación Continua para Maestros en Servicio: Relevancia de la profesión docente en la escuela del nuevo milenio*. México: SEP.

Universidad Autónoma de Baja California (2013). *Modelo Educativo de la Universidad Autónoma de Baja California*. Mexicali, México: UABC.

Autores

Gricelda Mendivil Rosas; UABC. México; gmendivil@uabc.edu.mx
Leidy Hernández Mesa; UABC. México; leidyhm@uabc.edu.mx
Daniel Everardo Amador Bartolini; UABC. México; damador@uabc.edu.mx

INTRODUCCIÓN A LAS TESELACIONES: EXPERIENCIA DE UN TALLER

Ilse Domínguez Alemán, Itzel Domínguez Alemán, Esbeidy Abigail García Espinal, Gema Rubí Moreno Alejandri

Resumen

En el marco del programa "Atención educativa a niñas, niños y jóvenes con aptitudes sobresalientes y talentos específicos de jóvenes guerrerenses" la Secretaría de Educación Guerrero, en la fase de "enriquecimiento extracurricular", la Unidad Académica de Matemáticas ofertó una serie de talleres para dar atención a este programa. Los participantes fueron 16 jóvenes de educación secundaria. En este trabajo se presenta los fundamentos, la actividades desarrolladas y los resultados de uno de los talleres denominado Explorando Teselas".

Palabras Clave: Teselaciones, Ángulos interiores de un Polígono, Movimientos isométricos, Enseñanza Problémica.

Es ampliamente aceptada la visión de la Geometría Euclidiana como una fase insustituible en el desarrollo de la racionalidad humana, considerando que constituye un paso obligado en el proceso que, del lenguaje ordinario, conduce al formalismo matemático (Camacho y Morales, 1994). De manera que, la Geometría Euclidiana, es considerada como la disciplina más adecuada para desarrollar la capacidad de razonamiento del alumno y despertar su interés por las Matemáticas en todos los niveles.

En la escuela, la enseñanza de la geometría está presente desde los inicios de la formación académica de los estudiantes. En los primeros niveles educativos, es preferente poner énfasis en la argumentación informal, apoyada fuertemente en la visualización. Sin embargo, resulta conveniente proponer actividades que encaminen a una argumentación formal que haga alusión a las propiedades geométricas que sustentan la relación percibida.

En particular, respecto al concepto teselación Domínguez, García, y Moreno (2013) sostienen que "contribuye al desarrollo del pensamiento geométrico, la creatividad y, por otro lado, posibilita el reconocimiento de la relación entre este concepto y la vida cotidiana, generando así interés por parte de los alumnos".

Cerrone (2006) argumenta que los niños no aprenden acerca de la geometría y el espacio mediante la observación pasiva, sino interactuando con formas y su entorno. Los niños deben investigar conceptos por sí mismos para determinar las propiedades básicas relacionadas con las formas y perspectiva.

Por otro lado, la capacidad de argumentación, validación y proposición que se evidencia al momento de la construcción del patrón de teselación y la posibilidad de creación de diferentes patrones que conducen al recubrimiento del plano de forma geométrica. Herrera, Montes, Cruz, y, Vargas, (2010), a este respecto comenta: "El maestro debe propender por generar un ambiente de interacción constante entre las construcciones realizadas por los estudiantes y las nociones geométricas que se pretenden abordar mediante el desarrollo de la actividad."

Cerrone (2006), en su propuesta, utiliza el tema de los mosaicos para guiar a los estudiantes de nivel medio superior en el desarrollo de una relación entre la geometría, el sentido espacial, la simetría y el álgebra abstracta. Defiende que el tema de teselaciones no está atado a cierto rango de edad. De modo que ofrece una serie de lecciones propuestas para abordar el tema de Teselaciones, dirigidas a estudiantes desde el nivel preescolar hasta el universitario.

Dos aspectos clave que deben ser incluidos en una secuencia didáctica sobre teselaciones son: la necesidad y el razonamiento fundamental (Cerrone, 2006). Cuando éstos se establecen creativamente y de manera apropiada, un estudiante tendrá la oportunidad óptima de retener la materia y desarrollar plenamente los conceptos representados.

Ahora bien, en los materiales curriculares de la Educación Básica en México, el contenido relativo a *Teselaciones* no está catalogado como un aprendizaje esperado. Más bien está al servicio de otros aprendizajes esperados (Suma de los ángulos interiores de un polígono en segundo grado y Transformaciones Isométricas en el plano en tercer grado) con el fin de ejemplificar, ejercitar, aplicar o profundizar en otros contenidos más directamente relacionados con los estándares curriculares (Martínez, 2014). Esto se desprende la revisión a materiales curriculares disponibles al profesor para la planificación y el desarrollo de actividades.

En vista de lo anterior, se diseñaron una serie de actividades que conformaron un talle denominado "Explorando Teselas" dirigido a estudiantes de Secundaria. Éste taller, se centró en la introducción del concepto *Teselación* explotando su cualidad como potente aliado a la hora de abordar contenidos tales como suma de ángulos interiores de un polígono y transformaciones isométricas en el plano. A continuación se describe la concepción teórica, los aspectos metodológicos y algunos resultados de la implementación del taller.

Concepción teórica

El enfoque didáctico que se asumió en este taller es la Enseñanza Problémica como una alternativa para activar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Si se parte de la premisa de que el hombre comienza a pensar sólo cuando aparece la "necesidad de comprender algo", entonces el momento inicial del pensamiento es generalmente una situación problémica.

La enseñanza problémica busca la "asimilación no solo de los resultados del conocimiento científico, sino también de la vía, del proceso de obtención de dichos resultados; incluye , asimismo, la formación de la independencia cognoscitiva del alumno y el desarrollo de sus capacidades creativas" (Majmutov, 1983). De modo que, coadyuva al "desarrollo de las necesidades cognoscitivas y a la formación de una personalidad intelectualmente activa" del alumno.

La Enseñanza Problémica posee categorías fundamentales: la situación problémica, el problema docente, la pregunta problémica y las tareas problémicas. A continuación se presenta una descripción de ellas (Ballester y otros, 1992).

Una *situación problémica* "es un estado psíquico de dificultad intelectual que surge en el hombre cuando en una situación objetiva no puede explicar el nuevo hecho mediante los conocimientos que tiene o los métodos que ya conoce sino que debe hallar un nuevo método de acción".

Es necesario aclarar que la pregunta, condiciones o medio diseñado por el profesor no ha de confundirse con la situación que se propone provocar en el alumno, que es un estado psíquico interno, contradictorio, de insatisfacción entre lo conocido y lo que está por conocer, es decir, la propia situación problémica. Estos estados de conflicto congnitivo son propiciadores de la actividad intelectual denominada actividad de aprendizaje.

En el análisis de la situación problémica, donde se separa lo conocido y lo buscado y se determinan sus relaciones se realiza la formulación del *problema docente*.

Después, comienza el proceso de búsqueda de su solución, la *tarea problémica*, que consiste en una actividad conducente a encontrar lo buscado, a partir de la contradicción que surgió durante la formación de la situación problémica.

Las *preguntas problémicas* expresan, de forma concreta, la contradicción entre los conocimientos y los nuevos hechos. Componen un impulsor directo del movimiento del conocimiento. No cualquier pregunta es problémica. Para alcanzar este estatus, la pregunta debe tener un carácter heurístico, y por tanto, compromete a cuidarse en su formulación de no descubrir el paso siguiente. Es un estímulo a la reflexión del sujeto que enfrenta el problema en la búsqueda independiente de la solución del mismo.

En este enfoque, las situaciones problémicas son consideradas la principal fuente de generación del conocimiento matemático. Este concepto de enseñanza implica la necesidad de que el profesor diseñe o seleccione actividades que promuevan la construcción de conceptos a partir de experiencias concretas, en las que los alumnos puedan observar, explorar, conjeturar, interactuar entre ellos y con el profesor. Esto ocasionará que los alumnos conciban a las matemáticas como un conjunto de herramientas funcionales y flexibles que son útiles para entender y resolver diversos problemas.

Aspectos Metodológicos

En el marco del programa "Atención educativa a niñas, niños y jóvenes con aptitudes sobresalientes y talentos específicos de jóvenes guerrerenses" la Secretaría de Educación Guerrero, en la fase de "enriquecimiento extracurricular", solicitó a la Unidad Académica de Matemáticas que diseñara una serie de talleres para dar atención a este programa. Uno de los talleres es el antes enunciado, "Explorando Teselas".

Los participantes fueron 16 jóvenes de educación secundaria de la zona escolar 002 de Educación Especial de Acapulco, Guerrero. Estos participantes aún no habían tenido contacto con el contenido de este curso.

Las actividades del taller se realizaron en dos sesiones. La primera sesión tuvo la intención de centrarse en el contenido relativo a la suma de los ángulos interiores de un polígono y se dividió en dos etapas: "Teselación Regular" y "Teselación Semiregular". Para ello, se les proporcionó a los equipos una cantidad suficiente de piezas de cartulina con forma de distintos polígonos regulares (de tres a doce lados).

En la primera etapa, "Teselación Regular", se les invitó a explorar cada tipo de pieza con el fin de que descubrieran con cuáles (de un solo tipo) es posible cubrir el plano siguiendo las reglas: sin traslapes y sin huecos. En la segunda etapa, "Teselación Semiregular", se modificó la cantidad de tipos de piezas que podían usar (2 o más) pero se conservaron las mismas reglas. La intención fue que descubrieran con cuáles combinaciones de polígonos (Teselas semirregulares) es posible cubrir el plano.

La segunda sesión también se conformó de dos etapas: "Quita y Pone" y "Teselando una superficie". Las actividades propuestas se centraron en el contenido relacionado con movimientos isométricos en el plano. Un método sencillo, para fabricar teselados, consiste en partir de un teselado regular, luego deformar los lados y luego trasladarlos o simetrizarlos al opuesto (Boule, 2005). Esta técnica es también conocida como "mordisco" o "quita y pon". Consiste básicamente en dibujar segmentos o curvas en una figura base, y aplicarle las transformaciones isométricas adecuadas.

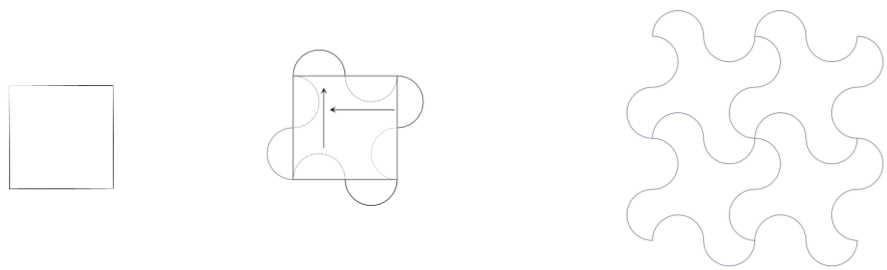
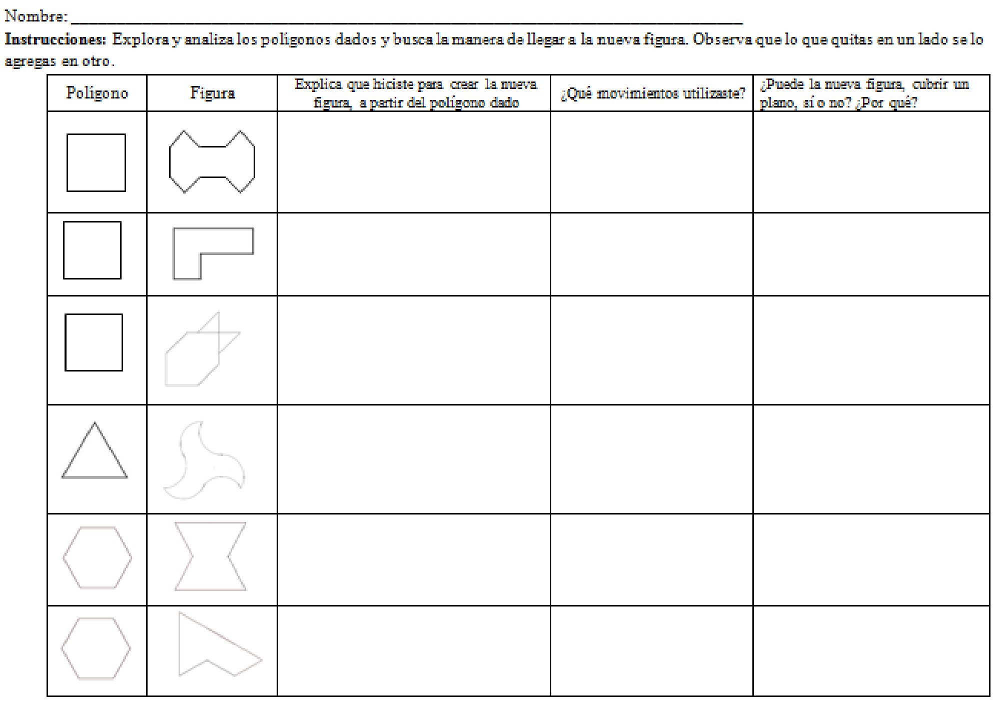


Figura 1. Método "Quita y Pone"

Ahora bien, este método no se hizo explícito sino que se planteó la problemática a la inversa: se les presentó 6 pares de piezas de los cuales cada par estaba constituido de la siguiente manera: primero una de las que ya se conocía que podía cubrir el plano (cuadrado, rectángulo, triangulo y hexágono) y, luego, otra que resulta de la transformación de la primera (usando el método quita y pone).

En la primera etapa, "Quita y Pone", se les invitó a reflexionar de qué manera es posible transformar la figura original en la transformada y qué movimientos usarían para lograrlo.



Nombre: ____

Instrucciones: Explora y analiza los polígonos dados y busca la manera de llegar a la nueva figura. Observa que lo que quitas en un lado se lo agregas en otro.

Polígono	Figura	Explica que hiciste para crear la nueva figura, a partir del polígono dado	¿Qué movimientos utilizaste?	¿Puede la nueva figura, cubrir un plano, sí o no? ¿Por qué?

Figura 2. Hoja de trabajo del participante en la etapa "Quita y Pone"

Posteriormente, en la segunda etapa, "Teselando una superficie", se les solicitó que comprobaran sus conjeturas mediante recorte y reacomodo. A continuación, se planteó la cuestión de si las piezas transformadas cubrirían el plano respetando las reglas antes ya mencionadas. Finalmente, se les pidió que eligieran una de las piezas y recubrieran una superficie plana.

Algunos resultados

En la etapa "Teselación Regular", en equipos, se les invitó a explorar cada tipo de pieza con el fin de que descubrieran con cuáles (de un solo tipo de polígono) es posible cubrir el plano siguiendo las reglas: sin traslapes y sin huecos. A partir de la experimentación empezaron a trabajar con las características esenciales del concepto teselación. Se les pidió que buscaran la razón por la que sólo se podía cubrir el plano con sólo los polígonos ubicados (triángulo, cuadrado y hexágono) y se les solicitó que escribieran sus conclusiones.

Tres de los equipos (3, 4 y 5) encontraron los polígonos con los que es posible cubrir el plano argumentando a un nivel visual la ausencia o no de huecos al "juntar" las figuras. El equipo cuatro observó que, más allá del material utilizado, "entre más lado tenga el polígono [refiriéndose más de 12 lados] menos se puede!" cubrir la superficie.

El equipo 2 también hizo observaciones a un nivel visual pues argumentó que los polígonos que no sean el triángulo, el cuadrado ni el hexágono, "no funcionan porque siempre sobran espacios que no tienen la misma forma de las figuras utilizadas". Sólo en el caso del cuadrado, hizo alusión a la medida de su ángulo interno, especificó "puede cubrir una superficie plana […] porque el cuadrado tiene todos sus lados iguales y rectos". Ahora bien, es interesante que respecto a los polígonos con un mayor número de lados y haciendo uso de su intuición, argumentaron que “son figuras que se parecen a los círculos y todos sabemos que los círculos no pueden juntarse y hacer que no sobre espacio”.

En la discusión que se dio dentro del equipo 1, se concluyó que para cubrir la superficie se pueden utilizar el triángulo, el cuadrado y el hexágono porque “al unirlos siempre queda un espacio donde encaja la figura, para que esto se pueda la suma de sus ángulos internos al unirlos debe dar un total de 360°”. El resto de las figuras “no es posible porque al unirlas siempre queda un espacio demasiado pequeño para que una figura igual entre, además de que la suma de ellos no da 360°”. Con ello, mostraron ir más allá de lo puramente visual y revisaron los ángulos interiores de los polígonos y buscaron una relación con lo que significa “sin huecos ni traslapes”, es decir, polígonos con ángulo cuyo uno de sus múltiplos sea 360°. Por ejemplo, su argumentación era del tipo: “el ángulo del cuadrado es 90°, así 90°+90°+90°+90°= 360°. Esta explicación fue aceptada por el grupo en la discusión grupal.

Figura 3. Exploración de recubrimientos con sólo un tipo de polígonos

En la etapa “Teselaciones semi-regulares” se tuvo como objetivo que los alumnos a través de la experimentación con dos o más tipos de polígonos detectaran las distintas combinaciones posibles que permitieran cubrir una superficie plana, siguiendo las mismas siguientes reglas de no dejar huecos, ni traslapes.

Al equipo 5 le ganó el deseo de construir otras figuras con las piezas, dejando de lado las reglas para colocar las figuras.

Los equipos 1, 2, 3 siguieron con la conclusión asumida en la etapa anterior y, teniendo en cuenta que “la suma de los ángulos, aunque ahora son diferentes sigue siendo de 360°”, lograron encontrar algunas de las teselaciones semi-regulares. Los equipos 1 y 2 encontraron todas la teselaciones semi-regulares, el equipo 3 encontró cinco de ellas y el equipo 4 sólo tres.

En la discusión general, los equipos que o habían encontrado todas estuvieron al pendiente de cuáles les había hecho falta y verificaron su pertinencia. Fue de interés que en la exploración encontraron teselaciones no uniformes (con variación en los puntos de unión de los polígonos) y se dio una discusión sobre su pertinencia o no, según las reglas proporcionadas.

Figura 4. Algunas combinaciones propuestas

En la etapa "Quita y Pone" se buscaba que los alumnos, usando un polígono regular lo transformaran a la figura indicada en las hojas de trabajo, de tal manera que lo que le "recortaran" al polígono lo tenían que reutilizar, cambiándolo de lugar, para formar la nueva tesela.

En esta actividad, en un inicio de forma individual, 10 estudiantes lograron identificar para la mayoría de los casos la transformación que había de hacerse para obtener la figura modificada. Además, hicieron uso de los conceptos rotación y traslación de manera explícita (usando la terminología) en las descripciones de la transformación que sugerían. Sin embargo, se les complicó identificar composición de movimientos, de hecho, sólo prevaleció la identificación de sólo un movimiento (por ejemplo, obviando la traslación al referirse a una rotación).

Sólo un estudiante no distinguió las diferencias entre los movimientos al referirse como movimientos utilizados "movimientos de la manos".

Figura 5. Transformando los polígonos iniciales

También fue interesante cómo surgieron diferentes formas de fragmentar el cuadrado para formar el hexágono en forma de "L" (fragmentando en cuadrados o en rectángulos), así como sus consecuentes diferentes movimientos necesarios para lograr la transformación deseada. También al fragmentar el cuadrado para formar el dodecágono en forma de "hueso" surgieron dos alternativas.

En la última etapa "Teselando una superficie", se les solicitó que comprobaran sus conjeturas mediante recorte y reacomodo. A continuación, se planteó la cuestión de si las piezas transformadas cubrirían el plano respetando las reglas antes ya mencionadas.

Finalmente, se les pidió que eligieran una de las piezas y recubrieran una superficie plana, logrando excelentes resultados. Incluso hubo jóvenes que fueron más allá y crearon sus propios diseños.

Figura 6 Algunos de los teselados hechos por los participantes

Algunos resultados de las actividades que conformaron el taller son:

a. Las actividades propuestas lograron que los alumnos entraran en Situación Problémica, lo que llevó a los participantes a asumir el problema como suyo.

b. Al trabajar en equipo y con un material concreto se logró una comunicación y argumentación de ideas matemáticas desarrolladas a partir de la exploración y manipulación de los mismos.

c. Se promovió la elaboración de conjeturas y verificación de las mismas.

d. Se logró la apreciación de las expresiones artísticas y creativas de los jóvenes.

En conclusión, la introducción del concepto *teselación* mediante este taller mostró el potencial que tiene este concepto para el desarrollo del pensamiento geométrico, la creatividad y, por otro lado, posibilita el reconocimiento de la relación entre este concepto y la vida cotidiana, generando así interés por parte de los alumnos.

Referencias bibliográficas

Ballester, S., y otros (1992) *Metodología de la Enseñanza de la Matemática. Tomo 2*. Pueblo Educación. Cuba

Boule, F., (2005) *Reflexiones sobre la Geometría y su Enseñanza.* Capítulo 8 "Teselados". Correo del Maestro Ediciones la Vasija.

Camacho, M., & Morales, A., (1994) Algunas características del currículum de geometría en la enseñanza secundaria obligatoria. Sugerencias didácticas. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, No. 21, pp. 83-94.

Cerrone, K., (2006) *Tessellations: Lessons for every age.* Thesis's Degree Master of Science. University of Akron.

Domínguez, I., García, A., & Moreno, G., (2013) *Una experiencia de un taller: Explorando teselas.* Cartel presentado en el Congreso de la Sociedad Matemática Mexicana.

Herrera, V., Montes & Cruz, A., y, Vargas, P., (2010) Teselaciones: Una Propuesta para la Enseñanza y el Aprendizaje de la Geometría a Través del Arte. *Memoria 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.*

Hidalgo, L., (2007) *Mosaicos*. Temas de Matemáticas para bachillerato. Tomo 7. México: Instituto de Matemáticas de la UNAM.

Majmutov, M., (1983) *La enseñanza problémica*. Pueblo y Educación. Cuba

Martínez, A., (2014) *Propuesta Didáctico-Metodológica para la elaboración del concepto "Teselación" en Educación Secundaria*. Tesis de Maestría no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero.

Autores

Ilse Domínguez Alemán; UAGro. México; idmgzal@gmail.com
Itzel Domínguez Alemán; UAGro. México; idomn.20@gmail.com
Esbeidy Abigail García Espinal; UAGro. México; eag.espinal@gmail.com
Gema Rubí Moreno Alejandri; UAGro. México; alejandrigemath@gmail.com

LA INTRODUCCIÓN AL LENGUAJE ALGEBRAICO DESDE LAS PRÁCTICAS SOCIALMENTE COMPARTIDAS

Oscar Alejandro Cervantes Reyes

Resumen

Con base en la investigación "La Construcción de un Lenguaje Simbólico desde las Prácticas Socialmente Compartidas" donde analizamos un estudio de caso de la albañilería (Cervantes, 2015), diseñamos una propuesta de intervención didáctica sustentada en la correlación hallada entre los modelos del pensamiento proporcional y el lenguaje algebraico en su primeras fases. Nuestra hipótesis es que si en la historia de la humanidad el lenguaje algebraico fue evolucionando a través de diferentes fases hasta llegar a la fase simbólica que hoy conocemos, entonces, es posible reconstruir lo vivido en la actualidad, a partir de una propuesta centrada en las prácticas.

Palabras claves: Socioepistemología, prácticas, pensamiento proporcional, lenguaje algebraico.

Introducción

El *programa funcionalista* centrado en la *estructura sintáctica* del lenguaje algebraico si bien resulta adecuado para localizar los obstáculos didácticos que se han documentado en el aprendizaje del lenguaje algebraico y funciona para explicar las dificultades en su adquisición, no ha resuelto plenamente el problema del aprendizaje del Álgebra como muestran las evaluaciones internacionales; es decir, se continúa por la ruta de un simbolismo carente de sentido y significado (Filloy y Kieran, 1989). El modelo es adecuado para explicar los obstáculos en el aprendizaje del Álgebra, pero no lo es para las propuestas de intervención didáctica (problemática, dificultades, obstáculos en el aprendizaje del lenguaje algebraico). A sabiendas de que el problema del aprendizaje del Álgebra sigue sin resolverse, proponemos una estrategia centrada en *prácticas situadas*, prácticas socialmente compartidas, que "atraviesan la realidad de quien aprende", donde se asume al saber como un conocimiento en uso; tomando como base el modelo del *pensamiento proporcional* y *desarrollo del lenguaje algebraico*. A diferencia del programa funcionalista, consideramos la sintaxis algebraica en un segundo término, porque tal como se enuncia en la investigación de Cervantes (2015), aún antes de los símbolos existen significados. Nuestro programa sí pretende intervenir directamente en el sistema educativo, a través de propuestas de intervención didácticas, proceso al que obedece esta propuesta.

Fundamentación

La investigación de Cervantes (2015) base de esta propuesta, fue desarrollada desde la mirada de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, perspectiva teórica que a través de la construcción de la unidad de análisis socioepistémica correspondiente, permitió estudiar nuestro objeto de interés "el lenguaje algebraico", mediante una primera aproximación al examen del saber, amplio y sistémico; que considera las múltiples relaciones entre los vértices del triángulo didáctico, así como las restricciones institucionales pedagógicas, las múltiples dimensiones del saber y las restricciones específicas del saber matemático (Cantoral, 2013). El estudio de Cervantes (2015) reconoce la albañilería como práctica de referencia, que a su vez encierra diferentes prácticas socialmente compartidas tales como el revoco de paredes, el pegado de tabique, la construcción de cisternas, etc. Y en forma anidada, en estas prácticas socialmente compartidas encontramos diversas actividades y acciones intencionadas que las integran, que después del estudio podemos señalar que hay algo que las norma, que le hace hacer lo que hace al albañil, una práctica social que le hace buscar una especie de equilibrio en su práctica. Así mismo, piezas fundamentales en esta propuesta, son los modelos de pensamiento proporcional postulados por Reyes-Gasperini (2011) y el desarrollo del lenguaje algebraico señalado por Nesselman (citado por Malisani, p. 4) identificados también puestos en juego en la práctica de referencia antes mencionada y que son la base de nuestra ruta hacia la construcción del lenguaje algebraico, camino que no fue construido a modo, sino que es una ruta ya trazada, en uso, funcional inmersa en una práctica de referencia, que responde a la naturaleza del saber (Cervantes, 2015).

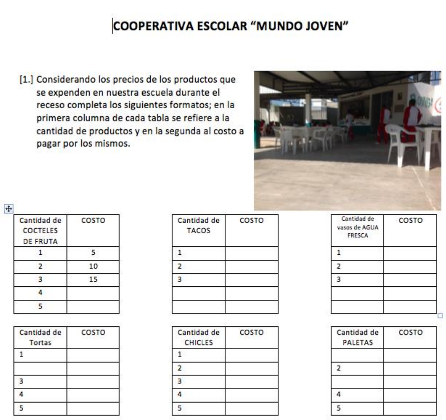
Método

El diseño de la propuesta de intervención didáctica obedece, en términos generales, a las orientaciones de una ingeniería didáctica sin que ello implique un total apego a la misma. Dicha secuencia estuvo integrada por 6 actividades enmarcadas en el contexto del cotidiano del alumno, mismas que requirieron del aprovechamiento de los recursos tecnológicos con los que cuenta la institución educativa donde se llevó a cabo la experiencia.

La población participante fue un grupo heterogéneo de 37 alumnos de primer grado del turno matutino de una escuela secundaria en la mixteca oaxaqueña . Para el diseño de las actividades se hizo un análisis *a priori* acorde al objetivo principal: la construcción de un lenguaje simbólico cercano a la noción de lenguaje algebraico, secuencia centrada en las prácticas y en la construcción de significados desde la perspectiva Socioepistemológica.

Secuencia de actividades

ACTIVIDAD 1


COOPERATIVA ESCOLAR "MUNDO JOVEN"

[1.] Considerando los precios de los productos que se expenden en nuestra escuela durante el receso completa los siguientes formatos; en la primera columna de cada tabla se refiere a la cantidad de productos y en la segunda al costo a pagar por los mismos.

Cantidad de COCTELES DE FRUTA	COSTO
1	5
2	10
3	15
4	
5	

Cantidad de TACOS	COSTO
1	
2	
3	

Cantidad de vasos de AGUA FRESCA	COSTO
1	
2	
3	

Cantidad de Tortas	COSTO
1	
3	
4	
5	

Cantidad de CHICLES	COSTO
1	
2	
3	
4	
5	

Cantidad de PALETAS	COSTO
2	
4	
5	

El objetivo se centró en que a través de la modelación los alumnos visualicen matemáticamente los procesos de compra venta que ocurren en su contexto escolar. La actividad se desarrolló sin ninguna dificultad, los alumnos llenaron las tablas de acuerdo con las indicaciones, se ubicaron en su contexto retomando los nombres y precios actuales de los productos que consumen en el recreo.

ACTIVIDAD 2

En esta actividad se le pide al alumno que observe detenidamente los números de las dos columnas, cada una por separado, posteriormente se le pregunta si identifica o reconoce alguna relación, patrón o comportamiento entre los números. El objetivo de la actividad fue que los alumnos pusieran en juego su pensamiento proporcional. En sus respuestas y participaciones, los alumnos evidenciaron los modelos aditivo simple y multiplicativo del pensamiento proporcional, en este último reconocieron una relación entre las columnas, es decir, que la segunda se obtenía multiplicando el valor de la primera columna por 5.

[2.] CONSIDERANDO EL CASO DE LOS COCTELES DE FRUTA

Cantidad de cocteles	Costo o total a pagar
1	5
2	10
3	15
4	20
5	25

Observa los números de la primera columna: 1, 2, 3, 4 y 5; ¿reconoces alguna relación entre estos números? ________ explica ____

Observa los números de la segunda columna: 5, 10, 15, 20, y 25 ¿identificas alguna relación entre estos numeros ? ________ explica ____

ACTIVIDAD 3

[3.] Observa cada una de las filas(renglones)¿reconoces alguna relación entre los elementos de la primera fila y los de la segunda?__________
describela____________________________________

Cantidad de cocteles	Costo o total a pagar
1	5
2	10
3	15
4	20
5	25

¿cómo a partir de los números de la primera columna puedes obtener el correspondiente elemento de la segunda columna?, ¿que operación (sumar, restar, multiplicación o dividisión) le tengo que aplicar al "1" para obtener un "5"?

Escribe en la columna de en medio la(s) operación(es) necesaria(s).

Cantidad de cocteles		Costo o total a pagar
1	=	5
2	=	10
3	=	15
4	=	20
5	=	25

Considerando la relación entre las columnas, completa la expresión: el valor de la tercera columna es igual a ____

De manera semejante a la actividad anterior, en esta actividad se pretendía que los alumnos pusieran en juego el modelo multiplicativo de pensamiento proporcional mediante el análisis de las dos columnas de la tabla. En efecto, en el desarrollo de la misma, los alumnos dispusieron del modelo multiplicativo, explicaron que: se puede obtener el valor de la segunda columna, al multiplicar el valor de la primera por cinco, donde cinco es el precio de un coctel de fruta. Así mismo completaron la expresión "el costo total a pagar es igual a: el número de cocteles por el precio del coctel", donde se evidencia además, el uso del lenguaje algebraico en sus fases retórica y sincopada, ya que antes de escribirlo lo pronunciaban, situación que se repitió a manera de reforzamiento con los demás productos.

ACTIVIDAD 4

Se retoma la actividad 3, pero ahora orientada a formalizar las expresiones de acuerdo con las reglas sintácticas del Álgebra, pero sin caer en lo dictatorial; porque los alumnos determinan y usan las abreviaturas o símbolos que ellos determinan o construyen, es decir, se orienta hacia la noción de lenguaje algebraico pero sin ser estricto. Cabe señalar, que no se busca una generalización temprana, sino más bien una simplificación, una forma más breve de explicar o representar (modelar) un fenómeno.

[4.] Retomando nuevamente el primer caso (cocteles de fruta) y la relación que se establece entre el número de cocteles y el costo a pagar por los mismos:

El costo total a pagar (tercera columna) es igual a: cantidad de cocteles X precio del producto

Lo cual resulta lo mismo reescribir como

El costo total a pagar (tercer columna) es igual a: precio del producto X cantidad de cocteles

En otras palabras

El costo total a pagar (tercer columna) es igual a: $5 X cantidad de cocteles

A fin de escribir de manera más simplificada la relación anterior, utiliza abreviaturas, contracciones o símbolos.

EXPRESIÓN	SIMPLIFICACION
Costo total a pagar	
Es igual a	=
Número de cocteles	

Abajo de la expresión escribe las simplificaciones que hayas determinado, de acuerdo a la expresión:

El costo total a pagar (tercer columna) es igual a : $ 5 X cantidad de cocteles

______= ________

En esta actividad se fortalece o subraya el paso de la fase retórica a sincopada del lenguaje algebraico donde los alumnos usaron abreviaturas, contracciones, símbolos y dibujos, predominando los dos últimos. Situación que se repitió para todos los productos, y en cada uno de ellos utilizaban representaciones diferentes, dependiendo del producto, solo se repetía el símbolo # para representar la palabra número.

Posteriormente, con esta idea de simplificar aún más, se les preguntó de forma expresa si era posible representar el número de vasos y el costo total con solo una letra, la respuesta fue un rotundo ¡sí!. A pesar de esto, en el desarrollo, cinco alumnos siguieron utilizando dibujos en lugar de una letra, esta situación tenía la intensión de recrear o retomar el paso de la fase sincopada a la simbólica del lenguaje algebraico. A esta última expresión la denominamos "mínima expresión", en el sentido que se utilizará la mínima cantidad posible de letras, en la mayoría de los casos los alumnos utilizaron la primera letra del nombre del producto, por ejemplo "a" para representar el número de vasos de agua, "p" para representar el número de paletas, etc.

ACTIVIDAD 5

[5.] ACTIVIDAD: EN GEOGEBRA ACTIVA LA VISTA HOJA DE CÁLCULO Y CREA PARA CADA UNO DE LOS CASOS UNA GRÁFICA POLIGONAL

- Ya que activaste la vista hoja de cálculo, introduce los datos
- Selecciona los datos y le das un clic con el botón secundario (derecho), del menú que aparece eliges la opción, crear→ poligonal.

En un microsoft Word realiza un documento que contenga: las tablas de los productos y su respectiva gráfica poligonal.

De manera semejante a las actividades anteriores, la actividad 5 se llevó a cabo sin complicaciones, el objetivo consistía en que el alumno relacionara diferentes representaciones del fenómeno de compra – venta: el lenguaje natural, la modelación tabular y la representación gráfica. Situación que se repitió con todos los productos con la finalidad de fortalecer lo que Butto y Rojano (2004) refieren como el vínculo entre los campos aritmético y geométrico, que bien este último pudiésemos referirlo como gráfico, funcional o variacional.

ACTIVIDAD 6

[6.] ACTIVIDAD: REPITE LA ACTIVIDAD ANTERIOR, CONSIDERANDO UNA GRÁFICA POR CADA ARCHIVO, DESPUES DE GENERAR LA POLIGONAL, INTRODUCE LA MÍNIMA EXPRESIÓN EN LA BARRA DE ENTRADA, PARA ESTO, OMITE EL ASPECTO "COSTO TOTAL A PAGAR" Y EL SIGNO IGUAL, RECUERDA QUE "EL NÚMERO DE COCTELES" DEBEMOS DE REPRESENTARLO CON SOLO UNA LETRA.

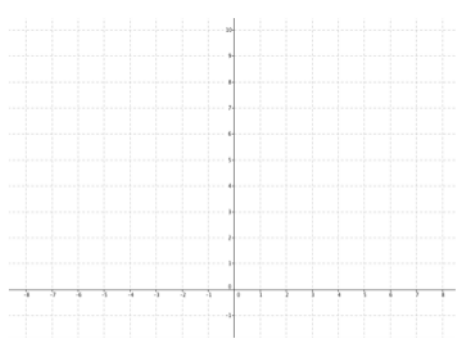
NOTA: SOLO ESCRIBE LO QUE SE REFIERE AL PRECIO DEL PRODUCTO POR EL NUMERO DE PRODUCTOS, ES DECIR, LO DEL LADO DERECHO DE LA EXPRESIÓN.

Mínima expresión

$t = 5c$

OBSERVA LAS GRAFICAS RESULTANTES EN GEOGEBRA Y REPRODUCELAS EN EL PLANO CORRESPONDIENTE, A LADO DE CADA "mínima expresión"

COCTELES DE FRUTA
Mínima expresión
________= ___________



Aquí se plantea realizar una aplicación en Geogebra a manera de ampliación de la actividad anterior, ya que además de generar la poligonal de cada tabla se pide que se introduzca la mínima expresión con el propósito de que el alumno relacione el fenómeno de compra – venta con sus diferentes representaciones tabular, poligonal, mínima expresión y funcional, en otras palabras se busca que el alumno relacione los diferentes dominios (Butto y Rojano, 2004), el dominio aritmético, el algebraico y el geométrico. Sin embargo, es importante señalar que en nuestro caso no se limita al análisis aritmético, sino que este apunta hacia la identificación de relaciones a través del uso de los modelos de pensamiento proporcional. Por otra parte, la mínima expresión no está sujeta a las reglas sintácticas del Álgebra, y respecto al dominio geométrico, nosotros apuntamos hacia nociones más complejas como la noción de función y el pensamiento variacional.

A partir de la generación de la primera gráfica se les pide a los alumnos que infieran cómo será la segunda donde cambia el coeficiente, antes de introducir la siguiente expresión a fin de que ellos traten de reconocer la relación entre los parámetros y el comportamiento de la gráfica. La introducción de los datos de las tablas y la generación de poligonales con el software, se realizó sin ninguna dificultad, sin embargo, al tratar de introducir la mínima expresión solo una alumna obtuvo la gráfica, a los demás alumnos el software les pedía su anuencia para generar un deslizador. Situación que aprovechamos para introducir las normas sintácticas del Álgebra, pero esto a partir del supuesto "error" generado intencionalmente en la secuencia de actividades. Al cuestionarle a la alumna respecto de la expresión mínima que introdujo en Geogebra, señaló que la expresión utilizada fue "$5x$", ante esto, preguntamos ¿por qué utilizaste una "x" en tu expresión?, a lo cual respondió que en su vida cotidiana ha escuchado que los personas dicen la expresión "$x\,cosa$" para referirse a algo indeterminado, razón por la que utilizó la x para representar el número de cocteles.

Los alumnos reconocieron las coincidencias o relaciones entre la tabla, la poligonal y la gráfica, donde nosotros enfatizamos que eran diferentes representaciones del mismo fenómeno. Al término de la puesta en práctica la secuencia de actividades, aplicamos una evaluación, a fin de constatar los logros alcanzados.

Resultados

Los alumnos aprovecharon adecuadamente las tablas para modelar la situación cotidiana de compra-venta de productos alimenticios, llenaron las tablas considerando los nombres y precios reales de los productos que se expenden en la escuela. Reconocieron además, que los datos de las tablas y sus relaciones son posibles de representar de diferentes maneras, a través de gráficas, de expresiones en lenguaje natural, expresiones con abreviaturas o símbolos, procesos en los que también, pusieron en juego su pensamiento proporcional. Por otra parte, los estudiantes relacionaron las expresiones algebraicas de la forma Ax (donde $A, x \in \mathbb{Z}, A$ es el precio del producto y x la cantidad de productos) con los procesos de compra-venta de la cooperativa escolar, situación donde puntualmente refieren los precios vigentes de los productos, el nombre de éstos y el total a pagar, reconocen además, que dichas expresiones pueden significar procesos de compra-venta en otros ámbitos, no solo en la escuela. En este sentido, reconocemos que las expresiones de la forma Ax construidas y utilizadas por los alumnos no están sujetas a normas, dado que utilizaron distintas abreviaturas, literales, símbolos o dibujos, sin perder el significado, lo que interpretamos cómo restitución al significado actual del conjunto de significados construidos a lo largo de la génesis conceptual, que la propia historia de las ideas y la costumbre didáctica eliminó, es decir recuperamos la *fenomenología intrínseca* del lenguaje algebraico (Cantoral, 2013, p. 130).

Todos los registros de evaluación muestran las diferentes fases de desarrollo del lenguaje algebraico ya sea de forma implícita o explícita, así mismo resulta importante mencionar que no hay un orden en la emergencia de las fases o en la puesta en juego de las fases del lenguaje algebraico, sin embargo es posible que esto obedezca a la forma en que se plantean las diferentes actividades, aspecto que tomaremos en cuenta para su modificación en lo sucesivo. De igual forma, consideraremos otras variables como el atender los diferentes productos que se expenden en la cooperativa, así como la incorporación de la cuadricula en las gráficas para facilitar la lectura de las gráficas.

Algunos de los significados y representaciones alternas de la expresión 5x utilizadas por los alumnos fueron:

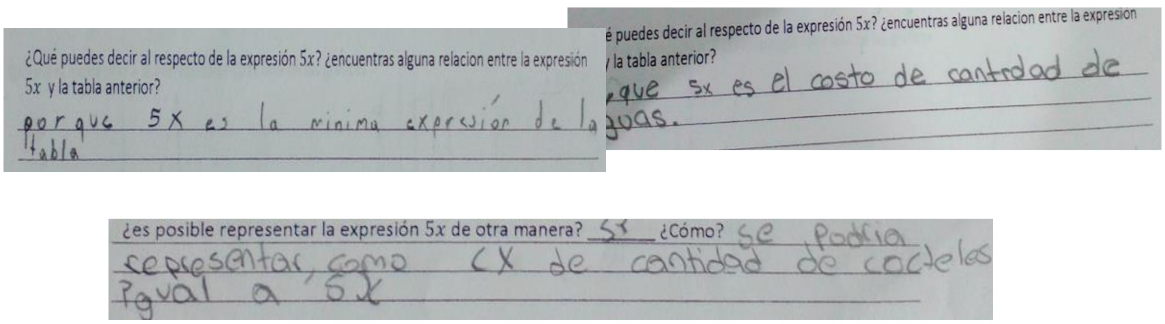


Fig. 1: Evidencias de la evaluación

Es decir que $5x$, no tiene un significado específico, es relativo, pero justificable y verdadero para cada uno de los alumnos: en el primer caso, para el alumno significa el proceso de compra-venta de aguas frescas, en el segundo, se refiere al mismo proceso de compra-venta pero de cocteles, con la aclaración de que el precio unitario de las aguas frescas y de los cocteles es el mismo \$ 5.00 (cinco pesos), uno lo representa $5x$ y el otro como $5c$, a pesar de usar símbolo diferentes, ambos son válidos, dado que tienen sentido y significado para ellos. Así mismo, el tercer caso no cambia la notación propuesta, pero explica que para él $5x$ “es la expresión mínima de los valores de la tabla”.

Aunado a lo anterior, los alumnos representaron gráficamente expresiones de la forma Ax mediante el análisis de parámetros, lo que evidencia que en ellos está presente la relación entre los diferentes planos: aritmético, algebraico y gráfico, situación que además acerca al alumno a la noción de función y linealidad:

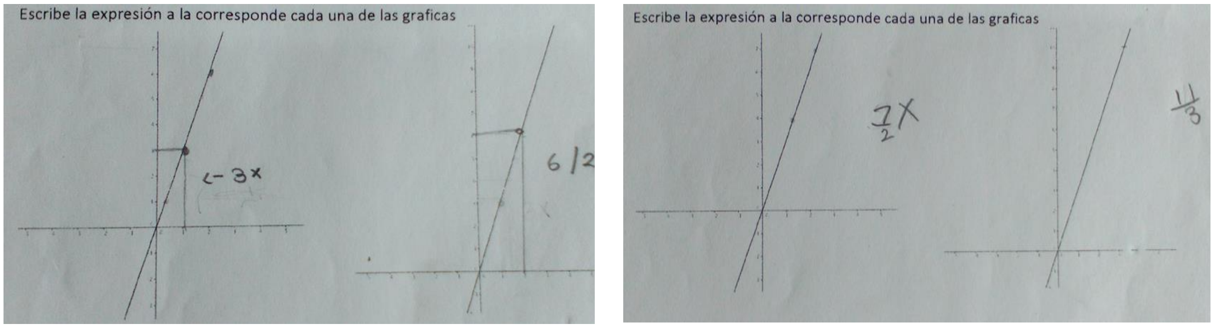


Fig. 2: Evidencias de la evaluación

Conclusiones

Entonces, dado que nuestro objetivo era construir el lenguaje algebraico desde las prácticas socialmente compartidas, aquí evidenciamos que es posible con base en los fundamentos teóricos de la Socioepistemología. El pensamiento proporcional y el lenguaje algebraico en sus fases retórica y sincopada, fundamentos que encontramos "vivos", en uso, en la práctica de referencia de la albañilería (Cervantes, 2015, pp. 130-132), base de la presente propuesta. Podemos afirmar que los alumnos lograron construir un lenguaje simbólico, con sentido y significado desde su contexto, dado que fueron capaces de construir, operar y representar expresiones de la forma Ax, llamándoles simplemente "expresiones", expresiones provistas de significado desde su marco de referencia, sin que estas estuviesen sujetas a las normas sintácticas del Álgebra, sin llamarles por su nombre a los diferentes elementos de las expresiones; sin que ello limitara su significado o representación, dado que ellos van de una representación tabular a una representación en lenguaje común, a representaciones donde utilizan abreviaturas, símbolos o dibujos, así como representaciones gráficas en el plano. Lo anterior, muestra que aún antes del simbolismo es posible la emergencia de significados que responden a la naturaleza del saber del lenguaje algebraico. Aspecto que atiende de forma directa la problemática que señala Malisani: el lenguaje algebraico ha venido evolucionando "gradualmente hasta que se llega a elaborar un simbolismo algebraico correcto sintácticamente y más eficiente operativamente, en este proceso se observa el abandono progresivo del lenguaje natural como medio de expresión de las nociones algebraicas" (1999, p. 19), y con ello la pérdida de significados. En nuestro caso, trabajamos en un proceso inverso: ir de los significados a los ajustes sintácticos. Donde, al final de las secuencias de actividades cuando el alumno ya es capaz de construir, interpretar y operar expresiones mínimas a partir de un fenómeno de su vida cotidiana, hasta entonces como algo secundario se realiza la formalización o institucionalización de dicho saber, mediante la señalización de los nombres de los elementos que integran dichas expresiones. Por otra parte, sostenemos la hipótesis que esta vía favorece la construcción de otras nociones o conocimientos, como la noción de función o más ampliamente la noción de linealidad.

Referencias

Butto, C. y Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría. Educación Matemática, 16(1), 113-148.

Cantoral, R. (2013). Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento. Barcelona, España: Editorial Gedisa, S. A.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *6*(1), 27-40.

Cervantes, O. (2015). La construcción de un lenguaje simbólico desde las prácticas socialmente compartidas (*Tesis de maestría no publicada*). Escuela Normal Superior Federal de Oaxaca, Oaxaca, México.

Filloy, E. y Kieran, C. (1989). El aprendizaje del Álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias, 7*(3), 229-240.

Malisani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. *Revista IRICE (Instituto Rosario de Investigaciones en Ciencias de la Educación), 13*. Recuperado de http://math.unipa.it/~grim/AlgebraMalisaniSp.pdf

Reyes-Gasperini, D. y Cantoral, R. (2014). Socioepistemología y empoderamiento docente: acciones para un cambio educativo. *Boletim de Educação Matemática*, *28*(48), 360-382. doi: 10.1590/1980-4415v28n48a14

Autor

Oscar Alejandro Cervantes Reyes; Escuela Normal Superior Federal de Oaxaca. México; yuza_cero7@icloud.com

FUNDAMENTACIÓN DE UNA PROPUESTA PARA EL APRENDIZAJE DE LA PROBABILIDAD FRECUENCIAL

Yessica del Rosario May Pech, Zuleyma Sarahí Pérez Moguel

Resumen

Este trabajo presenta una propuesta didáctica de aprendizaje dirigida a estudiantes de nivel medio superior que cursan la asignatura de Probabilidad y Estadística, en la que se pretende desarrollar la noción de "Probabilidad Frecuencial" al reconocer la estabilización de las frecuencias relativas de un suceso aleatorio hacia un valor numérico fijo a medida que aumenta el número de ensayos o pruebas en un experimento, para posteriormente reconocer dicho valor numérico como la probabilidad frecuencial del suceso. A manera de introducción se propone una simulación digital de un suceso aleatorio que permita al estudiante observar y estudiar el comportamiento y regularidades de las frecuencias relativas en gráficas de polígonos de frecuencias de dicho suceso, complementando dicho estudio con actividades que favorezcan el análisis y la interpretación crítica de datos estadísticos y tablas numéricas, para tomar decisiones.

Palabras clave: Probabilidad frecuencial, estabilización de frecuencias, tendencia, aleatoriedad.

Introducción

La importancia de la probabilidad frecuencial reside en que cuantifica el grado de ocurrencia de un evento de manera empírica (a posteriori) y no deductiva, lo que permite predecir la posibilidad de ocurrencia de la mayoría de los fenómenos aleatorios que nos rodean, por medio de la enumeración estadística de la frecuencia de un evento observado, calculando así las probabilidades cuando las distintas causas o características de dicho evento no pueden determinarse a priori (Sosa, 2006).

Sin embargo, la enseñanza del concepto de probabilidad frecuencial suele limitarse al cálculo de la frecuencia relativa de un evento y se trata a este resultado como la probabilidad frecuencial, existiendo así una falta de comprensión del significado de la estabilidad de las frecuencias relativas (necesario para el concepto de probabilidad en el enfoque frecuencial), lo cual se asume como problemática en este trabajo. Por otra parte, en la realidad escolar, no se favorece la experimentación de las tendencias de las series aleatorias y no se tratan situaciones de naturaleza empírica, al utilizar ejemplos relacionados a los juegos de azar, los cuales tienen resultados predecibles, restándole importancia a la naturaleza a posteriori de la probabilidad frecuencial (Serradó, Cardeñoso y Azcárate, 2005).

Por lo mencionado anteriormente, en este trabajo se aborda el concepto fenómeno aleatorio cuando el estudiante interactúe con la simulación digital de un evento, el cual le permitirá observar los resultados que se obtienen al realizar dicho evento, y cómo estos resultados varían e influyen en la probabilidad de ocurrencia del suceso de acuerdo a cuantos más ensayos se efectúen.

Así, esta propuesta tiene como propósito determinar la probabilidad de ocurrencia de un evento de naturaleza aleatoria a posteriori, como la tendencia a la que se estabilizan las frecuencias relativas de dicho evento al realizar el experimento un número suficientemente grande de veces, a través de registros gráficos y numéricos, para la toma de decisiones.

Desarrollo conceptual y aprendizaje de la probabilidad frecuencial

El concepto de probabilidad frecuencial surge por la necesidad de medir el grado de ocurrencia de sucesos aleatorios que no pueden determinarse a priori. Estudiosos de la probabilidad como Graunt (1620-1675) y Petty (1623-1687) fueron de los primeros en intentar dar solución a situaciones no relacionadas con los juegos de azar, abordando problemas sobre demografía y percatándose que "cuantas más observaciones se hacían, más precisos eran los resultados" (Salinero, sf). Jakob Bernoulli (1654-1705) retoma estas ideas para destacar que "lo que no se puede hallar a priori, se puede obtener a posteriori" y considerando la repetición de un experimento bajo las mismas circunstancias un número grande de veces, establece su teorema conocido con el nombre de Ley de los Grandes Números o Teorema de Bernoulli que, a la vez, sirve de base a la noción intuitiva de probabilidad como medida de la frecuencia relativa (probabilidad frecuencial) (Salinero, sf; Batanero, 2005; Sosa, 2006). De manera simple, el teorema es enunciado así:

> "Si la probabilidad de que ocurra un hecho en una prueba única es **p**, y si se hacen varias pruebas independientemente y en las mismas condiciones, la *proporción* más probable de que ocurran los hechos en el número total de pruebas es también **p**; aún más, la probabilidad de que la proporción en cuestión difiera de **p** en menos que una cantidad dada, por pequeña que sea, aumenta al mismo tiempo que aumenta el número de pruebas" (Sosa, 2006, p.32).

El teorema establece una relación entre las probabilidades matemáticas y las frecuencias relativas, de los sucesos aleatorios que aparecen en diversos campos, como determinadas en una forma puramente empírica (Sosa, 2006). Otros seguidores de esta visión fueron Ellis, Bolzano, John Venn, Cournet, Richard Von Mises, Reichenbach, R. Fisher, A. Wald y E. Ternier, quienes admitían el axioma conocido con el nombre de "límite de Venn", el cual enunciaba lo siguiente: "Si un suceso ocurre en gran número de veces, entonces la probabilidad de ocurrencia del suceso es el límite cuando el número de pruebas tiende a infinito del cociente entre el número de veces que se presenta el suceso y el número total de pruebas". Es decir, se postula la existencia de dicho límite (Franquet, 2008).

Para el desarrollo de esta propuesta, se adopta la visión de Von Mises (1920) descrita en Franquet (2008), quien define el concepto de probabilidad para eventos que resultan de considerar experimentos aleatorios que tienen una "regularidad estadística": al realizar un experimento se observa la aparición o no de un suceso **S**, y ante una sucesión indefinida de experimentos se tiene, sucesivamente, un nuevo valor de la frecuencia relativa **v/n** (donde **v** es la frecuencia absoluta del suceso **S** y **n** el número total de pruebas); pese al comportamiento caprichoso de los resultados individuales, la frecuencia relativa presenta una regularidad insistente al realizar el experimento un gran número de veces, tendiendo a aproximarse a cierto número fijo **P(S)**, es decir, un número hipotético hacia el cual tiende la frecuencia relativa al estabilizarse y el cual es la probabilidad del evento **S** (Sosa, 2006; Franquet, 2008).

De acuerdo a Kolmogorov (1979), este número **P(S)** representa una ley probabilística útil para explicar la ocurrencia o no de ese suceso **S** en particular, donde no se conocen a priori todas las relaciones/parámetros que intervienen, y permite tomar decisiones a partir de dicho resultado. Cabe mencionar que estas leyes probabilísticas sólo aparecen, justamente, en procesos masivos, de aquí la importancia de la Ley de los Grandes Números. Esta ley probabilista, Kolmogorov (1979) la explica de la siguiente manera:

> "La afirmación de que un suceso **A** ocurre en las condiciones **S** con una determinada probabilidad $\boldsymbol{P(A/S) = p}$ equivale a decir que en una serie suficientemente larga de ensayos (es decir, realizaciones del sistema de condiciones **S**), las frecuencias $\boldsymbol{v_r = \mu_r/n_r}$ de ocurrencia del suceso **A** (donde $\boldsymbol{n_r}$ es el número de ensayos realizados en la r-esima serie, y $\boldsymbol{\mu_r}$ el número de ellos en que ocurre **A**) son aproximadamente idénticas unas a otras y están próximas a **p**. La hipótesis de la existencia de una constante $\boldsymbol{p = P(A/S)}$ (determinada objetivamente por la relación entre el sistema de condiciones **S** y el suceso **A**) tal que las frecuencias **v** se aproximen más (hablando en términos generales) a **p** a medida que aumenta el número de ensayos, está justificada en la práctica para una amplia clase de sucesos. Los sucesos de este tipo se denominan normalmente aleatorios o estocásticos" (Kolmogorov, 1979, p.271).

En la actualidad, la falta de comprensión del significado de la estabilidad de las frecuencias relativas, de acuerdo a Kahneman, Slovic y Tversky (1982) citados en Serradó, Cardeñoso y Azcárate (2005) se ve reflejado al considerar que la estabilidad de las frecuencias se cumple en un número limitado de pruebas y tomar decisiones a partir de ello. Esto se ve asociado a la persistencia de sesgos y heurísticas como son:

- La *insensibilidad del tamaño de la muestra*, la cual conduce a pensar que cualquier muestra tomada de una población, aunque se trate de una muestra de pequeño tamaño, debe reproducir todas las características de la población, como si se creyese en una "ley de los pequeños números" (Barragués y Guisasola, 2007);
- El *heurístico de la representatividad*, que consiste en evaluar la probabilidad de un suceso de acuerdo a la representatividad del mismo respecto a la población de la que proviene, es decir, se asignan probabilidades altas a aquellos sucesos que parecen ser prototípicos de una población y bajas probabilidades a los que parecen no serlo, produciéndose una confianza indebida en las pequeñas muestras (Serrano, Batanero, Ortíz y Cañizares, 1998; Guisasola y Barragués, 2002);
- La *falacia del jugador*, donde se tiende a pensar que si en una serie de experimentos se produce una racha de un mismo resultado, se espera entonces que aumente la probabilidad del resultado contrario en el próximo experimento, considerando que la estabilidad se puede dar en series limitadas de números (Serrano et al, 1998; Serradó et al, 2005) y el

- *Outcome approach*, que lleva a los sujetos a considerar que cada una de las repeticiones de un experimento está aislada y que no tienen por qué guardar relación con las anteriores o posteriores (Serrano, Batanero y Ortíz, 1996).

Todo esto se refuerza, en la realidad escolar, al introducir ejemplos que utilizan un número reducido de experimentos o bien limitarse al cálculo de la frecuencia relativa de un evento y tratar a este resultado como la probabilidad frecuencial, sin favorecer la experimentación de las tendencias de las series aleatorias.

Es por ello que en este trabajo se abordará el concepto de "Probabilidad Frecuencial" de modo que se analicen las regularidades que se presentan al repetir un experimento (Álvarez, 2011) y se trabaje el vínculo construido entre la frecuencia relativa y la probabilidad, tomando consciencia de la estabilización de las frecuencias relativas a medida que aumenta el número de pruebas para introducir gradualmente la aproximación frecuencial de probabilidad, favoreciendo el análisis e interpretación de datos críticamente, que permitan tomar decisiones y opiniones fundamentadas sobre la base de estudios estadísticos (Barragués y Guisasola, 2009).

Método

Para el desarrollo del concepto "probabilidad frecuencial", en esta propuesta se resalta la importancia del tamaño de la muestra y la tendencia de las frecuencias relativas de un evento, introduciendo el uso de una applet (tomada y modificada del repositorio oficial de construcciones y recursos relacionados con el software GeoGebra: http://www.geogebratube.org/student/m16503), atendiendo a la sugerencia de Batanero (2006), de manera que permita experimentar las muestras de tamaño creciente, para posteriormente enfocarnos en el uso de gráficas de polígonos de frecuencias y tablas numéricas.

Para el logro de este propósito, se plantearon tareas de aprendizaje divididas en dos momentos:

El primer momento, se inicia con el análisis de los registros gráficos, en los cuales el estudiante deberá interpretar el comportamiento tendencial de las frecuencias relativas para tomar decisiones. Posteriormente el estudiante debe determinar el valor al cual tienden dichas frecuencias relativas a partir del análisis de tablas numéricas. En una tercera parte del primer momento, se pretende que el estudiante reconozca a la estabilización de la tendencia de las frecuencias relativas como la probabilidad frecuencial de un suceso aleatorio y a partir de esta probabilidad tomar una decisión. Para ello, se dispondrá de una computadora y una hoja de actividad por cada bina, en la que se les presenta una situación sobre "tiro con arco" y la cual podrán simular mediante un applet, de manera que el estudiante observe la aleatoriedad del evento estudiado (acertar a la diana) y cómo se registran los resultados de este evento en un polígono de frecuencias al realizar los ensayos. Los estudiantes pueden correr el applet cuantas veces sea necesario para asociarlo e interpretar las representaciones gráficas y numéricas que se le presentan a continuación en la hoja de actividades.

El siguiente applet Geog_simulacion, simula los tiros a la diana de un arquero cualquiera y registra los aciertos obtenidos en cierta cantidad de tiros:

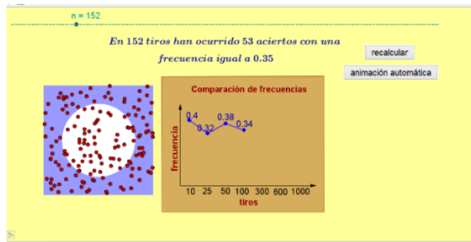


Figura 1. Captura del applet Geog_simulación

Los valores en la gráfica representan la frecuencia relativa de la cantidad de aciertos a la diana en cierta cantidad de tiros.

a) En la Figura 2 y Figura 3 siguientes, se representan los polígonos de frecuencias de los aciertos a la diana de los arqueros A y B, en una serie de ensayos de 25 tiros por día durante 12 días.

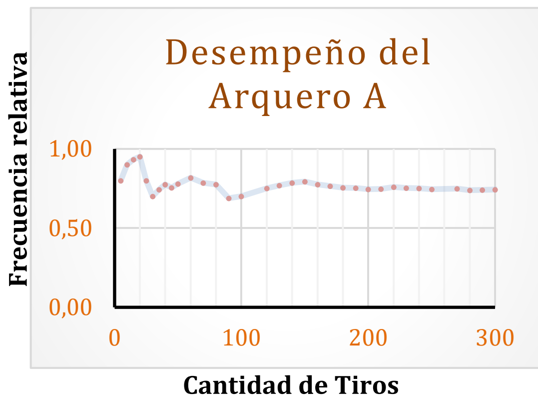


Figura 2. Polígono de frecuencias de los aciertos del Arquero A

Figura 3. Polígono de frecuencias de los aciertos del Arquero B

- Al realizar 20 tiros, el Arquero A tuvo aproximadamente 15% más de aciertos que el Arquero B. Describe si se mantiene esta relación entre los 100 y 150 tiros.
- Al finalizar los 300 tiros, ¿quién de los dos arqueros fue el más certero? Argumente su respuesta.

b) Los resultados de los aciertos totales obtenidos por los arqueros después de 36 días, se anotaron en la Tabla1 siguiente:

	Cantidad de Tiros	20	50	100	150	200	300	350	400	450	500	600	700	800	850	900
Arquero A	**Aciertos**	19	39	70	119	140	223	255	284	312	338	410	470	535	565	600
	Frecuencia relativa (aciertos/tiros)	.95	.78	.70	.79	.75	.74	.73	.71	.69	.68	.68	.67	.67	.66	.67
Arquero B	**Aciertos**	16	39	70	112	124	198	240	283	330	378	460	541	615	655	700
	Frecuencia relativa	.80	.78	.70	.75	.62	.66	.69	.71	.73	.76	.77	.77	.77	.77	.78

Tabla 1. Frecuencias relativas de los aciertos de los arqueros A y B

- A partir de los datos anteriores, se determinaron tres valores que representen la medida de acertar a la diana.

Arquero A:	0.67	0.75	0.95
Arquero B:	0.66	0.77	0.80

¿Cuál valor representa mejor esa medida? Justifique su respuesta.

c) Considere la siguiente conjetura:

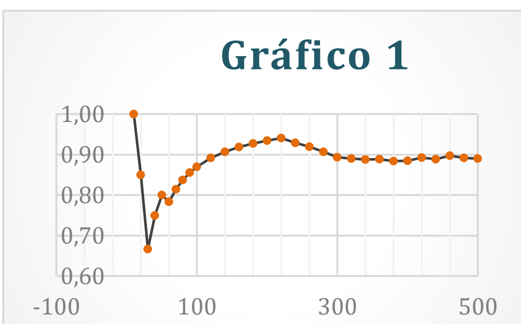
"Para cada arquero, existe un número al que se aproximan las frecuencias relativas de los aciertos a la diana al incrementarse el número de tiros. Cuantos más tiros se realicen, mejor será la estabilidad de las frecuencias hacia dicho número. Este número es la probabilidad frecuencial de acertar a la diana".

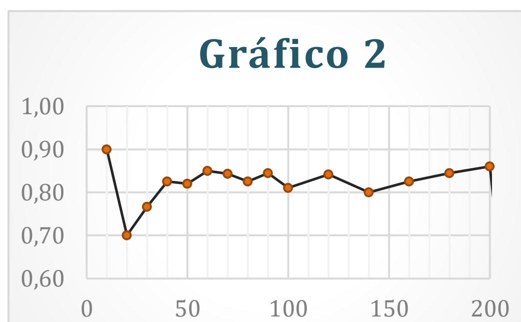
- De acuerdo a la conjetura anterior y lo estudiado en los incisos a y b, ¿qué arquero tiene mayor probabilidad de acertar a la diana en sus tiros? ¿A cuál seleccionaría como el más certero? Argumente su respuesta.

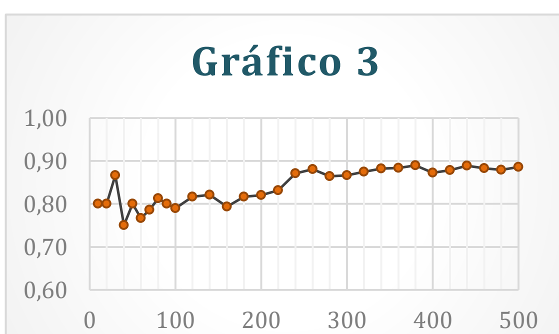
Finalmente, en el segundo momento y a manera de valoración de la probabilidad frecuencial, se pretende que el estudiante relacione a ésta como la estabilización de las frecuencias relativas para representar el comportamiento de las mismas y asociarla a la ocurrencia de un evento, realizados **n** ensayos.

Un arquero tiene una probabilidad de .89 de acertar a la diana.

a) De las tres gráficas que se te presentan a continuación, ¿cuál representa mejor los registros de los aciertos a la diana dados por esta probabilidad? Justifica tu respuesta.







b) Si el total de tiros realizados fue 500, ¿aproximadamente cuántos aciertos tuvo el arquero?

Dichas tareas se realizarán en binas, esperando generar un ambiente de discusión y análisis por parte de los estudiantes. Con un tiempo estimado para su resolución de una hora y veinte minutos, se propone realizarla en un centro de cómputo. El profesor actuará como instructor en las actividades y moderador al momento de formalizar los resultados.

Reflexiones finales

Consideramos pertinente la idea propuesta para el aprendizaje del concepto de probabilidad frecuencial, ya que rompe los esquemas tradicionales y erróneos, favoreciendo la experimentación del suceso aleatorio y permitiendo mirar a la probabilidad de ocurrencia de un evento como la estabilización de las tendencias de las frecuencias relativas, realizados un número grande de ensayos, y apoyados de los registros gráfico y numérico. La importancia de esta propuesta está en que el estudiante se ve impulsado a estudiar las diferentes representaciones gráficas y numéricas, compararlas y asociarlas entre sí para dar una explicación a lo que constata, obtener conclusiones, determinar sus resultados y tomar decisiones, permitiendo al estudiante construir su propio aprendizaje. Además, el estudiante puede observar y descartar algunas ideas erróneas (heurísticas) acerca de lo que sucede en un evento al realizar un número reducido de ensayos contra lo que sucede al realizarlo un número suficientemente grande, para determinar la probabilidad en eventos de naturaleza empírica.

Referencias bibliográficas

Álvarez, J. (2011). *Simulaciones y problemas probabilísticos con GeoGebra*. Recuperado el 20 de mayo de 2015 de http://thales.cica.es/sites/thales.cica.es.geogebra/files/II_Jornadas_GeoGebra/material/talleres/probabilidad/taller_probabilidad.pdf

Barragués, J. y Guisasola, J. (2007). Simulación por ordenador de experimentos aleatorios en la enseñanza de la probabilidad. *Sigma No. 31*, 207-223.

Barragués, J. y Guisasola, J. (2009). Una propuesta para la enseñanza de la probabilidad en la universidad basada en la investigación didáctica. *Educación Matemática, 21 (3),* 127-162.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8 (3)*, 247-263

Batanero, C. (2006). Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: un desafío educativo. En P. Flores y J. Lupiáñez (Eds.). *Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y azar*. Granada: Sociedad de Educación Matemática Thales.

Franquet, J. (2008). *El estudio operativo de la psicología. Una aproximación matemática*. España: UNED-Tortosa.

Guisasola, J. y Barragués, J. (2002). Heurísticas y sesgos de los estudiantes de primer ciclo de universidad en la resolución de problemas de probabilidad. *Enseñanza de la ciencias, 20 (2)*, 285-302

Kolmogorov, A. (1979). La Teoría de Probabilidades. En A. Aleksandrov, A. Kolmogorov y M. Laurentiev (Eds.). *La matemática: su contenido, métodos y significado* (pp. 269-309), tomo II. España: Alianza Universidad.

Salinero, P. (sf). *Historia de la Probabilidad*. Universidad Autónoma de Madrid. (Asignatura: Historia de la Matemática)

Serradó, A., Cardeñoso, J. y Azcárate, P. (2005). Obstáculos en el aprendizaje del conocimiento probabilístico: su incidencia desde los libros de texto. *Statistics Education Research Journal, 4(2)*, 59-81

Serrano, L., Batanero, C. y Ortíz, J. (1996). Interpretación de enunciados de probabilidad en términos frecuenciales por alumnos de bachillerato. *Suma, 22*, 43-50.

Serrano, L., Batanero, C., Ortíz, J. y Cañizares, M. (1998). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria. *Educación Matemática, 10 (1)*, 7-25

Sosa, L. (2006). *Desarrollo Conceptual de la Probabilidad*. Tesis de Maestría no publicada, Universidad Autónoma de Morelos.

Autores

Yessica del Rosario May Pech; UADY. México; mpyes@hotmail.com
Zuleyma Sarahí Pérez Moguel; UADY. México; zuleyma.2703@gmail.com

ANÁLISIS Y CLASIFICACIÓN DE LOS FOROS ELECTRÓNICOS GENERADOS EN EL CURSO DE CÁLCULO SUPERIOR

María Inés Ortega Árcega, Rafael Pantoja Rangel, Elena Nesterova

Resumen

En el trabajo se analizan y clasifican las aportaciones de cuatro alumnos en el foro virtual de discusión del curso de cálculo superior, con la finalidad de tener la certeza de que el volumen de mensajes de los foros se oriente a la consulta de dudas y comentarios en beneficio del aprendizaje del alumno y no a otras direcciones. La participación se cuantifica por el número de mensajes generados y se ha utilizado la clasificación: interacción explícita, interacción implícita y enunciado independiente. Los alumnos emplearon los programas WinPlot, GeoGebra y Wolframalpha para visualizar los gráficos, los vectores, los planos tangente y normal, resolver sistemas de ecuaciones no lineales de dos variables, las regiones de integración y solucionar integrales simples y múltiples. Los resultados del análisis de los mensajes, reflejan alta interactividad, trabajo colaborativo y se manifiesta en las tareas desarrolladas que lograron aprendizaje.

Palabras clave: Cálculo superior, foro virtual, interacción, Geogebra.

Antecedentes

El estudio se orienta a la clasificación y análisis del foro incluido en el diseño instruccional del curso de cálculo superior, de la maestría en la enseñanza de las matemáticas (MEM) en su modalidad a distancia, con el propósito de disponer de un espacio virtual en el que se propicie la interacción docente – estudiante y estudiante –estudiante. La interacción tiene una relación directa con los foros, chats, videoconferencias, correos electrónicos y postcast, entre otros, herramientas que la educación a distancia emplea para mantener comunicación síncrona y asíncrona con los estudiantes para brindar asesoría, solucionar dudas o simplemente para provocar una charla virtual extraclase o de pasillo sobre un tema en particular.

El foro es una rutina integrada a los servicios que ofertan los distintos sitios de internet especializados, primordial en modalidades educativas alternativas a la educación presencial y constituye uno de los elementos clave para el éxito de un programa orientado a la actualización y capacitación, pues es un medio que se emplea para propiciar la interacción, en el que se pretende que el usuario desarrolle la capacidad de reflexionar, socializar, recapitular un tema o lograr un mejor conocimiento.

Con las ventajas tecnológicas de hoy en día, la interacción puede ser asíncrona, lo que significa que el estudiante puede dejar por escrito las ideas en el sitio virtual para su posterior revisión, lo que refleja el inicio de un intercambio de ideas, tendiente al crecimiento intelectual del alumno, que se manifestará como una parte importante para la evaluación de la materia. Así lo señalan varios autores interesados en la educación a distancia (Francisco y Couri, 2005; Blanco, 2004; Álvarez, Ayuste, Gros, Guerra y Romaña, 2005; Alverdi y Navarro, 2004; Herrera, 2004; Ornelas, 2007).

La planeación del curso de cálculo superior, con un tiempo asignado de 60 horas, incluyó distintas actividades que el alumno desarrolla con la finalidad de aprender los contenidos y que son: guía de estudio, controles de lectura, problemarios, cuestionarios, examen de autoevaluación, foros virtuales y glosario. La comunicación fue asíncrona y se empleó el correo electrónico, las charlas síncronas y asíncronas (chats y foros virtuales) para provocar la participación de alumnos y docente durante las cinco semanas de duración del curso.

El reporte sólo se orienta al análisis y clasificación de la participación de alumnos y profesor en los foros electrónicos, con la finalidad de evidenciar que la interacción propicia aprendizaje participativo como lo señala Lozano (2004): los foros de discusión son una perfecta herramienta para la cristalización del trabajo colaborativo a distancia. Para Noa y Gil (2004) las ventajas de la conferencia virtual es que la discusión se estructura por foros (tipos de temáticas). Se utiliza el foro principal para las discusiones vinculadas a los temas centrales estudiados, se crea un foro «Comentarios» para exponer hechos interesantes, nuevas informaciones, etc.

El programa de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas (MEM) en su modalidad a distancia se instauró en 1997 y la oferta académica ha permanecido vigente durante más de 18 años, en el Departamento de Matemáticas (DM) del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI) de la Universidad de Guadalajara (UdeG). Al inicio, la comunicación profesor-alumno y alumno-alumno fue precaria, pero con la invasión masiva de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) se mejoró paulatinamente en beneficio de la modalidad educativa no presencial, porque como ya lo señala Tedesco (2000) son herramientas para desarrollar habilidades cognitivas, comunicativas y cooperativas. Durante 15 años se contrató el sitio web http://matedu.webexone.com, que fungió como aula virtual, en la que se propició la interacción síncrona y asíncrona entre los actores de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: profesor, alumno, asesor, directores de tesis y el coordinador del programa.

Las acciones que se implantaron en el posgrado para fortalecer la alternativa educativa no presencial, fueron la revisión y adecuación de las guías de estudio y de las antologías, rediseñadas y se le dio importancia a la interacción asíncrona con el uso de foros de discusión en distintas vertientes, con la finalidad de que ubicar al alumno en la zona de confort para el aprendizaje de las matemáticas. En la actualidad los cursos a distancia ofertados en la MEM se ubican en el sitio http://moodle.cucei.udg.mx, diseñado para promover alternativas educativas no presenciales, que para el posgrado ha funcionado adecuadamente porque dispone rutinas de diseño, almacenamiento e interacción para el buen desarrollo del curso.

Fue en este sitio en el que se ubicó el curso de cálculo superior, en el que los alumnos realizaron las actividades para aprender y en el que colocaron los archivos resultantes del trabajo con los controles de lectura, los problemarios, los cuestionarios, los foros electrónicos y el glosario. Como se ha señalado a lo largo del escrito, la participación de los alumnos y profesor en los foros es importante para el logro de los propósitos del curso, y sobre todo que la información plasmada revele que sí existe evidencia de que un alumno inscrito en una modalidad no presencial aprende matemáticas. El objetivo de investigación fue determinar la naturaleza y el tipo de aportaciones que permiten a los estudiantes adquirir, compartir e interpretar los el conocimiento matemático en el curso de cálculo superior a distancia.

Base teórica

No todas las participaciones en los foros se relacionan con los propósitos del curso, sobre todo aquellas que los estudiantes responden con frases cortas "coincido contigo", "ok", "es correcto", "no concuerdo" entre otras que no aportan nada al curso. Es por eso que se ha seleccionado el modelo de Henri (1995) para analizar y clasificar los diferentes tipos de interacciones realizadas en los foros de discusión entre estudiante-docente y estudiante-estudiante e identificar objetiva y sistemáticamente las características especificadas en el mensaje (Holsti, 1969; Silva y Gros, 2007).

El modelo de Henri (1995) es un método de codificación de foros asincrónicos que proporciona un marco de trabajo para el análisis de contenido de debates asincrónicos. Desde su punto de vista, la investigación sobre el contenido de foros a través de Internet se ha restringido generalmente a los datos cuantitativos de participación. El volumen de mensajes se ha convertido en una medida de eficiencia, éxito y fluidez de los intercambios. La participación se mide por el número de mensajes transmitidos, el número de servidores a los que se ha tenido acceso, la duración de las consultas e incluso el número de líneas de texto transmitido y ha categorizado la interactividad en términos operacionales en la base de clasificación Bretz (1983): interacción explícita, interacción implícita e enunciado independiente.

La interactividad es la variable clave en las situaciones de comunicación: expresa el grado en que la comunicación trasciende la reacción y caracteriza situaciones de comunicación. El grado de interactividad se determina por la relación entre el número de mensajes interactivos y el número total de mensajes producidos en una un foro de discusión (Nesterova, Nesterov, Torres y Ulloa, 2006; Juárez, Chamoso, González, 2015). En el curso de cálculo superior se han producido 157 mensajes, que se han analizado y clasificado con el objetivo de emitir un juicio sobre la conveniencia de fortalecer los foros electrónicos y disponer de evidencia que sustente o reafirme el lugar exclusivo que los foros electrónico tienen en la actualización y capacitación de usuarios en programas educativos no presenciales (Cos y Valls, 2006; Nava, 2009), en otras palabras, tener la certeza de que la interacción en los foros electrónicos si produce aprendizajes, como se ha corroborado en el curso de cálculo superior.

Metodología

La investigación se realizó en el curso de cálculo superior con un grupo único de cuatro estudiantes de la generación 2014-2016 de la modalidad a distancia de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas y se consideraron todas las participaciones y aportaciones realizadas por los alumnos en el foro electrónico. Se utilizó una plataforma de Moodle, que contiene diferentes recursos, entre ellos los foros de discusión y la subida avanzada de archivos para ubicar los materiales y tareas del curso. Para el análisis de la interactividad se establecieron dos categorías de mensajes; los mensajes interactivos y los no interactivos o independientes.

1. Se considera un mensaje interactivo como aquel cuyo contenido corresponde o interpreta a los contenidos de curso de cálculo superior, relacionados de manera explícita o implícita.

Ejemplos de interacción explicita:

a) *Hola Érika, Yo tuve la misma duda al ver ese ejemplo (Lectura 1, ejemplo 2) reflexionando al respecto, supongo que como realmente no señalas a qué valor de "c" corresponde cada curva, entonces no importa si la c se considera como sólo el radicando o como el logaritmo de la raíz, es decir, si te fijas en los distintos ejemplos, marcan las condiciones límite, pero no a qué valor de c corresponde exactamente cada línea dibujada. ¿Será correcta mi apreciación?*

b) *Hola Francisco, Creo que confundiste lo que se calcula con la doble integral en ese ejercicio en particular estás calculando el área bajo la función dada en el dominio de integración dado, es decir, el área que mencionas es sólo el área de la base, pero es necesario multiplicarla por la altura para encontrar el volumen. En este caso, la altura no es constante, varía según la función, por eso es necesario integrar y se llega al 752/5 unidades cúbicas, te confieso que, sobre este tema, me hacía ruido a mí el concepto de encontrar el área entre dos curvas integrando... ¿no se supone que sería volumen? Pero luego me di cuenta de que, cuando integras dx/dy entre dos curvas, obtienes el volumen de la figura cuya base es el área entre las dos curvas y cuya altura es igual a 1, o sea, que es, en cantidad, igual al área (en unidades no, claro: si lo consideras volumen, son unidades cúbicas, pero al dividirlo entre la altura, que es una unidad, quedan unidades cuadradas, es decir, área) quizá, como yo, tampoco tenías clara la diferencia entre ambas formas de integrar entre dos curvas (integrar una función e integrar la unidad). ¿Qué opinas?*

Ejemplos de interacción implícita

a) *Hola a todos estoy teniendo problemas en identificar el tipo de curva según la ecuación dada, Algún tipo de como identificar a que curva pertenece (es implícita porque no especifica qué problema es).*

Hola Francisco ¿De cuál ejercicio estás hablando?

2. Los no interactivos o independientes son aquellos cuyo contenido está referido al tema del foro de discusión, pero sin relación con otros mensajes del foro

Ejemplos de mensajes independientes

a) *¿Donde subo la tarea 7?*

b) *Que son las curvas de nivel y donde se aplican*

- *Las curvas de nivel son líneas planas generadas en los puntos donde la función toma el mismo valor que z=c. Estas son utilizadas para la elaboración de mapas geográficos o planos de configuración*
- *Son el conjunto de puntos (x, y) en el plano donde una función de dos variables independientes tiene un valor constante f(x, y) = k.*

Son mensajes independientes por que el primero no tiene nada que ver con el tema y el segundo son respuestas a una pregunta realizada por el profesor, donde no se reflejan reflexiones por parte del estudiante, no hay una confrontación de ideas.

La interactividad es la variable clave en las situaciones de comunicación: expresa el grado en que la comunicación trasciende la reacción y caracteriza situaciones de comunicación, así que una vez que se han recopilado los mensajes de los foros, en total 157, se analizaron, se clasificaron y se concentraron en la tabla 1: por tipo de discusión, número de interacción explicita e implícita, los enunciados independientes y el coeficiente de interactividad. Para evaluar el nivel de la interactividad se calculó el coeficiente de la interactividad del foro (Nesterova, Nesterov, Torres y Ulloa, 2006) dado por la formula:

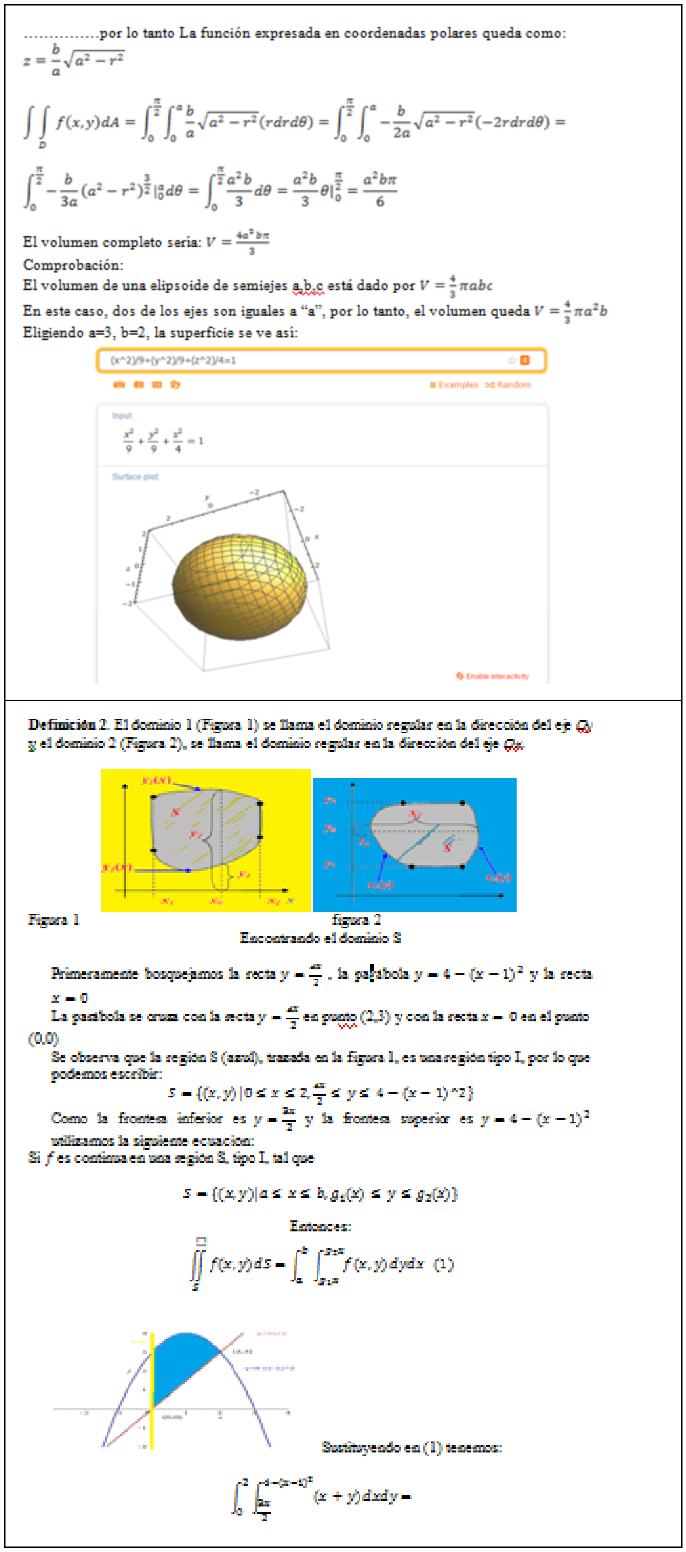
$$I = \frac{\text{Numero de mensajes de IE + Numero de mensajes de II}}{\text{Numero total de los mensajes}}$$

	T1 (%)	T2 (%)	T3 (%)	T4 (%)	T5 (%)	T6 (%)	T7 (%)	Foro (%)
Total de mensajes en discusión	24.8	21.01	14.64	7.64	5.73	15.92	10.19	100
Interacción explícita	87.17	96.96	100	100	88.88	100	93.75	94
Interacción implícita	12.8	0	0	0	0	0	0	3.2
Enunciados independientes	0	3.06	0	0	11.11	0	6.25	2
Coeficiente de interactividad	1	0.96	1	1	0.88	1	0.93	0.98

Tabla 1. Distribución de los mensajes por las categorías

Análisis de los resultados

Los temas del curso se distribuyeron en tareas (T1, T2,…T7) y una vez concluido el tiempo asignado de acuerdo a la calendarización programada, los estudiantes ubican en la plataforma Moodle los archivos correspondientes y participan en los foros. En los archivos que enviaron los estudiantes se nota que utilizaron distintos programas de cómputo, para apoyarse en el desarrollo y comprobación de resultados de las actividades de aprendizaje: cuestionarios, problemarios, examen y foros electrónicos, ejemplo de ello se presenta en la figura 1.



...............por lo tanto La función expresada en coordenadas polares queda como:

$z = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - r^2}$

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-r^2}(rdrd\theta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a -\frac{b}{2a}\sqrt{a^2-r^2}(-2rdrd\theta) =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{b}{3a}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}|_0^a d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2 b}{3}d\theta = \frac{a^2 b}{3}\theta|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2 b\pi}{6}$$

El volumen completo sería: $V = \frac{4a^2 b\pi}{3}$

Comprobación:

El volumen de una elipsoide de semiejes a,b,c está dado por $V = \frac{4}{3}\pi abc$

En este caso, dos de los ejes son iguales a "a", por lo tanto, el volumen queda $V = \frac{4}{3}\pi a^2 b$

Eligiendo a=3, b=2, la superficie se ve así:

Definición 2. El dominio 1 (Figura 1) se llama el dominio regular en la dirección del eje Oy y el dominio 2 (Figura 2), se llama el dominio regular en la dirección del eje Ox.

Figura 1 figura 2

Encontrando el dominio S

Primeramente bosquejamos la recta $y = \frac{3x}{2}$, la parábola $y = 4 - (x-1)^2$ y la recta $x = 0$

La parábola se cruza con la recta $y = \frac{3x}{2}$ en punto (2,3) y con la recta $x = 0$ en el punto (0,0)

Se observa que la región S (azul), trazada en la figura 1, es una región tipo I, por lo que podemos escribir:

$$S = \{(x,y)\,|\,0 \le x \le 2, \frac{3x}{2} \le y \le 4-(x-1)^{\wedge}2\}$$

Como la frontera inferior es $y = \frac{3x}{2}$ y la frontera superior es $y = 4-(x-1)^2$ utilizamos la siguiente ecuación:

Si f es continua en una región S, tipo I, tal que

$$S = \{(x,y)|a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

Entonces:

$$\iint_S f(x,y)\,dS = \int_a^b \int_{g_1 x}^{g_2 x} f(x,y)\,dy\,dx \quad (1)$$

Sustituyendo en (1) tenemos:

$$\int_0^2 \int_{\frac{3x}{2}}^{4-(x-1)^2} (x+y)\,dx\,dy =$$

Figura 1. Solución de problemarios y cuestionarios.

Así también, y desde un particular punto de vista, por las características de los contenidos del curso, que incluye exceso de notación matemática, las alumnos prefirieron realizar los ejercicios a lápiz y papel, para luego escanearlos (ver figura2) y subirlos a la plataforma

Moodle, ignorando la recomendaciones señaladas en la guía de estudios sobre utilizar un procesador de textos matemático.

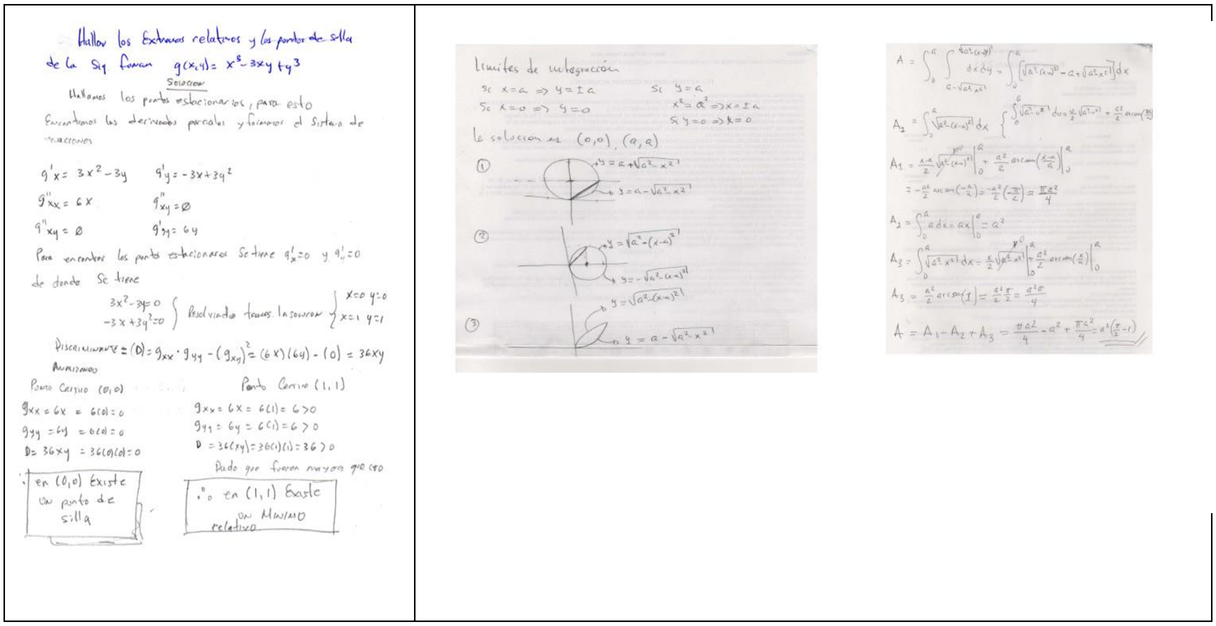


Figura 2. Solución de problemarios y cuestionarios a lápiz y papel.

En total fueron 157 foros de discusión, de los cuales el 39% se realizaron en la tarea uno y el 33 % en la tarea dos, siendo estas las de mayor concentración de mensajes, siguiendo las tareas T6 y T3 con un 25% y 23% respectivamente, a la tarea cinco le correspondió el porcentaje de mensajes más pequeño con el 9% del total.

La mayor concentración de mensajes se ubica en la tarea uno y la tarea dos, los temas que se trataron fueron funciones de varias variables, dominio-contradominio, curvas y superficies de nivel. El alto porcentaje de mensajes fue por la multitud de dudas sobre los temas que se trataron, esto se debió a dos situaciones:

1. La mayoría de estudiantes no tenían bases solidas sobre geometría analítica del espacio, calculo diferencial y calculo superior.

2. El no conocer o manejar algún software para facilitar cálculos y visualización de gráficos.

Los contenidos de la tarea cinco (T5) fueron breves es por ello que se registra poca actividad en los foros de discusión comparada con las demás tareas.

En este contexto, la interacción explicita se entiende como la réplica directa a una pregunta, respuesta de acuerdo o desacuerdo de alguna situación de aprendizaje, y la interacción implícita es afirmación indirecta, esto es, un comentario, respuesta, acuerdo o desacuerdo que se hace algún comentario.

La interactividad explícita de T1, T2 y T6

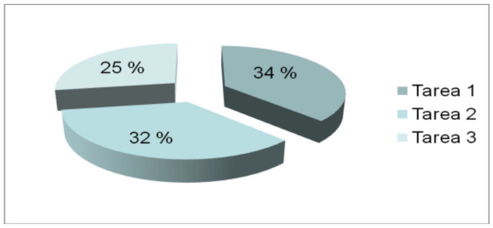


Figura 3. Porcentaje de la interacción de las Tareas T1, T2 y T3.

Las dudas propician el inicio de las discusiones, pero también las opiniones de los estudiantes por un lado y del profesor por otro; además algunos estudiantes hacían la invitación al resto de los compañeros para que dieran su opinión con comentario tales como:

- ¿Será correcta mi apreciación?
- ¿Qué opinan los demás?;
- ¿ustedes saben cómo distinguir la forma con sólo ver la función en 3D?;
- ¿siempre tendremos que despejar la variable z?
- ¿qué opinan compañeros?; a mi me da el límite cero ustedes que opinan?.

Los mensajes no interactivos se concentran en las tareas T2, T5 y T7, con tres foros de discusión con una interactividad de 3.06%, 11.1% y 6.2% respectivamente y que corresponden a los contenidos: plano tangente y la normal a la superficie en un punto, plano normal y la tangente a las curvas del espacio en un punto, condiciones necesarias para la existencia de extremo, valor máximo local y valor mínimo local, extremos condicionados, multiplicadores de Lagrange. Del total de mensajes realizados en los foros de discusión del curso de cálculo superior el 94% fueron mensajes explícitos, el 3.2% implícitos, y el 2.8 fueron independiente o no interactivos. Con un el coeficiente de interactividad de 0.98.

Para la evaluación de cuestionarios y problemarios de acuerdo a la guía se solicitó al estudiante que subiera los trabajos a la plataforma editados en un procesador, se nota que los alumnos se apoyaron del software GeoGebra y Winplot para visualizar las gráficas en tres dimensiones (ver figura 1).

Conclusiones

Los resultados del análisis de los mensajes en los foros de discusión reflejan una alta interactividad, manifestada en un alto intercambio de mensajes, según el método de codificación proporcionado de Henri (1995). Es relevante la participación de los alumnos y profesor en los foros, pues la interacción es importante para el logro del objetivo del curso, y sobre todo porque una vez analizada la información plasmada, en archivos y foro, se afirma que los alumnos lograron aprendizaje en los contenidos del curso de cálculo superior, además de compartir e interpretar el conocimiento matemático en la modalidad a distancia.

Las apreciaciones realizadas por los estudiantes en los foros muestran que aprendieron el manejo de los software WinPlot, GeoGebra y Wolframalpha, dadas las necesidades de visualizar y comprender los gráficos, desarrollar habilidades para el trabajo colaborativo, la gestión de la información y la mejora en la comunicación.

Los programas educativos y cursos no presenciales son una alternativa viable para aprender matemáticas, pero es importante que el profesor, en conjunto con su equipo de trabajo, seleccione y organice adecuadamente los medios y los materiales;

Se sugiere tomar en cuenta las características del grupo, porque no todos los estudiantes son sujetos para estudiar una modalidad no presencial, además de que la participación en los foros de personas con distintos niveles de desarrollo, diferentes tipos de experiencias o de otras costumbres y culturas, enriquece el conocimiento de los participantes, por ejemplo, la habilidad para escribir se mejora con el hecho de ayudar o criticar a otros participantes la redacción de sus escritos.

Referencias bibliográficas

Bretz, R. (1983). Media for interactive communication. En P. Montero Montero (1995) Interactividad versus retroactividad. *RED*, *12*, 10-18.

Cos, A., Valls, J. (2006). Debates virtuales y concepciones de estudiantes para maestro sobre resolución de problemas. *ZETETIKE – Cempem – FE – Unicamp*, 14(25). Recuperado de https://www.fe.unicamp.br/revistas/ged/zetetike/article/view/2437/2199

Henri, F. (1995). *Formación a distancia y teleconferencia asistida por ordenador: interactividad, cuasi-interactividad o monólogo. RED*, *12*, 61-77.

Holsti, O.R. (1969). Content Analysis for the Social Sciences and Humanities. Reading, MA: Addison-Wesley. En Stemler, S. (2001). An overview of content analysis. Practical Assessment, *Research & Evaluation*, 7(17). Retrieved January 30, 2007 from http://PAREonline.net/getvn.asp?v=7&n=17

Juárez, J. Chamoso, J. M., González, M. T. (2015). La interacción en foros virtuales en el desarrollo del proceso de modelación matemática con estudiantes de ingeniería. *XIV CIAEM-IACME.* Recuperado de http://xiv.ciaem-iacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/364/182

Lozano, A. (2004). *Comunidades de aprendizaje en red: diseño de un proyecto de entorno colaborativo*. *Revista Electrónica de la Educación: Educación y Cultura en la sociedad de la Información*. 5 (1). Recuperado de http://campus.usal.es/~teoriaeducacion/rev_numero_05/n5_art_lozano.htm

Nava, A. (2009). *Los procesos interactivos como medio de formación de profesores de matemáticas en ambientes virtuales*. (Tesis inédita doctoral). Departamento de matemáticas y de las ciencias. Universidad de Barcelona. Recuperada de http://ddd.uab.cat/pub/tesis/2009/tdx-1222110-175012/anc1de1.pdf

Nesterova, E., Nesterov, A., Torres, L. y Ulloa, R. (2006). El desarrollo de las actividades colaborativas con empleo de los recursos conversacionales de Internet. *Memorias del 5to Congreso Internacional de Educación Superior*, 13-17 de Febrero del 2006, Cuba.

Noa, L; Gil, J. (2004). *El ABC de las Nuevas Tecnologías*. Universidad de la Habana Cuba

Ornelas, D. (2007). El uso del foro de discusión virtual en la enseñanza. *Revista Iberoamericana de Educación*, *44*. Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI). Recuperado de https://es.scribd.com/doc/191587773/El-uso-del-foro-de-discusion-virtual-en-la-ensenanza-pdf

Silva, J. y Gros, B. (2007). Una propuesta para el análisis de interacciones en un espacio virtual de aprendizaje para la formación continua de los docentes. *Revista Electrónica Teoría de la Educación. Educación y Cultura en la Sociedad de la Información.* 8(1), 81-105. Recuperado de http://campus.usal.es/~teoriaeducacion/rev_numero_08_01/n8_01_silva_gros.pdf

Tedesco, J. C. (2000). En *Educar en la sociedad del conocimiento*. Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica.

Autores

María Inés Ortega Árcega; Universidad Autónoma de Nayarit. México; maijua9@hotmail.com
Rafael Pantoja Rangel; Universidad de Guadalajara. México; rafael.pantoja@red.cucei.udg.mx
Elena Nesterova; Universidad de Guadalajara. México; elena.nesterova@cucei.udg.mx

SECCIÓN D. PERSPECTIVAS DE GRUPOS TEMÁTICOS

GÉNERO, ACTITUD Y REFLEXIÓN: TEMÁTICAS TRANSVERSALES EN LAS INVESTIGACIONES DE CORTE SOCIOEPISTEMOLÓGICO. LA FALTA DE VISIBILIDAD Y ESTUDIO

Rosa María Farfán Márquez, María Guadalupe Simón Ramos, Mayra A. S. Báez Melendres, María del Socorro García González

Resumen

El objetivo del grupo que conserva el título de la pasada EIME, es retomar la discusión que iniciamos sobre tres temáticas incipientes en los estudios Socioepistemológicos: género, actitud y reflexión. En esta ocasión regresamos y reescribimos las preguntas que dieron lugar a este espacio: ¿Por qué son importantes para la Socioepistemología? ¿Qué rol juegan en la construcción de conocimiento matemático? Y viceversa, ¿cómo el enfoque Socioepistemológico influye en su desarrollo y visibilidad? Cada una de las ponentes expondrá sus reflexiones desde la temática correspondiente y posteriormente con los asistentes al grupo se darán respuestas a las cuestiones planteadas.

Palabras clave: Socioepistemología, género, reflexión, actitud.

Introducción

Desde la postura Socioepistemológica se considera al individuo como el principal actor de la construcción de conocimiento, según su época, sus experiencias y sus relaciones sociales. De esta manera, la pregunta *quién construye* nos permite adentrarnos en dimensiones orgánicas del individuo que han normado su propia construcción social: su género, sus actitudes y sus procesos de reflexión. Estos aspectos forman parte de la historia del individuo y su rol social.

Por otro lado, la Socioepsitemología tiene como tesis que el conocimiento se construye socialmente. Esta aseveración se confronta con la visión clásica y positivista del saber matemático, donde el conocimiento preexiste y es universal, opaca el *quién construye*. Es así que la pregunta *qué construye* emerge como consecuencia de esta postura. Es decir, ya no solo interesa el individuo en su historia sino en sus propias producciones de conocimiento, en este caso, el matemático.

Cuestionar la universalidad de la matemática escolar ha sido la principal estrategia metodológica de la Socioepistemología para intentar reconocer que cada individuo puede tener una forma no escolar de desarrollar su pensamiento matemático. Desde esta perspectiva no solo se estudian a los actores y herramientas que intervienen en el ambiente educativo (alumnos, profesores, libros de texto, didáctica) sino que trata de explicar cómo los actores didácticos son excluidos de la construcción de conocimiento matemático. Ese discurso que busca la comunicación de conceptos y procedimientos matemáticos se ha denominado *discurso Matemático Escolar* (dME): un sistema de razón que fundamenta la organización de la Matemática Escolar, el cual a partir de sus características y de la legitimidad social de la cual goza, impone significados, procedimientos y argumentaciones que los actores del sistema didáctico reconocen e interiorizan, reconociendo en ellas hegemonía y superioridad (Cantoral & Soto, 2014).

Los resultados de otras investigaciones Socioepistemológicas dan cuenta que cuestionar la hegemonía del saber no es una tarea fácil, pero que es necesario si se quiere alcanzar una democratización del mismo. *Quién construye, qué construye, cómo construye* son preguntas que guían estos estudios, donde el rol del saber es crucial en la configuración de una sociedad crítica respecto a su formación matemática.

Así, los estudios de género, reflexión del profesor y las actitudes de los estudiantes, de carácter transversal, replantean el aprendizaje del individuo cuando se cuestiona el papel del saber matemático escolar. Desde este punto de vista la perspectiva Socioepistemológica nos permite abordar este planteamiento de manera muy particular dada la naturaleza inherente de los temas en el humano, tratando de dar visibilidad a las problemáticas asociadas y las relaciones que se configuran en este escenario de construcción social.

Estudios de género

Las investigaciones en Socioepistemología se han caracterizado por proporcionar acercamientos a una problemática que se generan desde el reconocimiento de la población de estudio, es decir, importa las características y circunstancias de cada individuo, solo y en sociedad, donde estas particularidades permean la forma en la que construye conocimiento. Poner en el centro de las reflexiones al individuo implica reconocer el *quién construye*, de ahí que nos preguntemos de manera natural: ¿cómo abordar el género desde la Socioepistemología?, donde el *género* representa una variable que señala las condiciones, los retos, los roles, etc., que determinan a la persona. Para tal cometido, se ha considerado la Perspectiva de Género, pues ésta busca aproximarse a la realidad desde las miradas de género y las relaciones de poder que se establecen entre hombres y mujeres. En este escrito se abordará el caso de las mujeres.

Los estudios de género se han ocupado de desentrañar las condicionantes culturales, económicas y políticas que favorecen a la discriminación de las mujeres (Lamas 1996). Para el caso que nos ocupa la discriminación por género en el ámbito educativo, específicamente en matemáticas, se han identificado prácticas relacionadas al ambiente de aula, a la falta de identificación de las jóvenes con sus instructores en matemáticas (en su mayoría varones), al lenguaje sexista en los libros de texto, el profesor y el denominado currículo oculto de género, etc. Pero una de las raíces del problema apenas y se ha mirado, la matemática.

Desde cualquier otra perspectiva podría pensarse que la matemática, en tanto que está establecida y es universal, no juega el papel de variable en este tipo de estudios. Pero es desde la perspectiva Socioepistemológica que abordamos la investigación y esta propone problematizar a la matemática de tal forma que el problema educativo se traduce de la aprehensión de objetos abstractos a la democratización del aprendizaje, es decir que los ciudadanos disfruten y participen de la cultura matemática enraizada en sus propias vidas (Cantoral, Montiel y Reyes, 2014).

Por un lado, la matemática escolar es vista por muchos como irrelevante y de poca utilidad en sus vidas profesionales. La miran como una asignatura aburrida, repleta de técnicas y trucos, “difíciles” de aprender y basadas en procedimientos adquiridos por repetición memorística. Sin embargo dado este carácter de difícil, se cree también que solo puede ser dominada por unos cuantos, esto producto del carácter hegemónico con el que se constituyó. Y del cual las mujeres, de facto, quedan excluidas. Es decir, la sociedad nos excluye (a todos y en particular a las mujeres) con matemáticas. ¿Pero cómo vivimos las mujeres esa doble exclusión de la cual somos objeto? Es a través de mecanismos legitimados como el dME que somos excluidas de la construcción social de conocimiento pero es también a través de concepciones sobre quiénes son los más aptos para aprender matemáticas que la exclusión se refuerza.

Actitudes

La motivación por estudiar las actitudes desde la teoría Socioepistemología obedece a que desde esta postura el estudiante aprende matemáticas cuando es capaz de poner en uso los conocimientos adquiridos, esto es, los conocimientos para ser construidos activamente por el sujeto, individual o colectivamente, requieren del uso que da sentido al conocimiento y de herramientas y argumentos que tipifican al usuario y a las situaciones de aprendizaje, escolares o no, pero ligadas a la vida real donde se pongan en uso dicho conocimiento (Cantoral, 2013). Por ello no podemos negar la naturaleza humana del individuo y colectivo, constituida de una gran carga afectiva, de ahí que demos relevancia al *cómo construye* un individuo, donde además de los instrumentos interesan los modos, especialmente, aquellos actitudinales. ¿Qué relación guarda las actitudes con los modelos de pensamiento proporcional? (García y Farfán, 2015) Es una pregunta que pretende ponerse en discusión.

Reflexión docente

Una de las problemáticas asociadas a la reflexión es el supuesto de que como proceso de pensamiento, este no requiere tanta atención. Sin embargo, no debemos asumir que *reflexionar* es una actividad automáticamente desarrollada por el individuo. Reflexionar sobre algo, el objeto de reflexión, también es un asunto que se aprende (Rusell, 2005). Entendemos esto como una oportunidad para el desarrollo del pensamiento crítico, al que se llega generalmente por procesos de problematización, es decir, hacer de algo un problema (Sánchez-Puentes, 1993). Así, problematizar la cultura en la que estamos insertos es hacer de esa cultura un problema.

Así, reflexionar sobre la matemática escolar lo entendemos como problematizar la matemática escolar, lo cual parece no tener mucho sentido cuando este conocimiento ha alcanzado una legitimidad universal en su estructura y conceptualización. Generar condiciones de duda generalmente no son sorteadas para la matemática, menos si nos ubicamos en un ambiente educativo, donde estructuras como el currículo, los libros, las reformas hacen valer tal universalidad y hegemonía. Esto acentúa una cultura del pensamiento restringida. Sin embargo, da luz a un camino relevante para adentrarse en la línea del pensamiento del profesor en la perspectiva que nos interesa, la Socioepistemología (Cantoral, 2013).

Es así que enfocamos nuestro interés en un tipo de reflexión de corte social, sin omitir su dimensión cognitiva. La cultura matemática (Mingüer, 2006) que tenga el profesor jugará un papel importante en la conformación de este nuevo pensamiento, que está asociada a las formas de aprender, de enseñar, de relacionarse con la matemática. ¿Cómo hacer evolucionar el pensamiento? ¿Qué construcciones de conocimiento le permiten seguir formándose? De esta forma, resaltamos aquí la frase *qué construye* el individuo, como una forma de reconocer lo que le es propio, con sentido y valor de uso.

Para poder investigar las reflexiones hemos tomado como tema de interés también la proporcionalidad, ¿qué significa reflexionar sobre la proporcionalidad escolar? ¿Cómo se configuran las reflexiones cuando se cuestiona sobre el saber matemático escolar? El discurso actual de la enseñanza de la matemática ha opacado diversas propiedades, relaciones y significados asociados a este conocimiento. Estrategias como la *regla de tres* deben ser consideradas para la reflexión, pues carecen de sentido y significado aunque representa un algoritmo que permite responder a diversas situaciones de proporcionalidad, ¿qué conocimientos, significados, procesos son opacados por el uso de esta estrategia que limitan el desarrollo del pensamiento proporcional? ¿Qué otras estrategias deben/pueden ser cuestionadas?

La pregunta que introduce este escrito, *quién construye*, alude no solo al reconocimiento del individuo sino a toda su construcción matemática y rol social. En el caso de los profesores de matemáticas de secundaria reconocemos su papel como transmisores y productores de cultura, sin embargo, suelen representar un conjunto de posibilidades y restricciones para la construcción de conocimiento matemático, pues se enfrentan a dificultades de diversa naturaleza, sociales, institucionales, políticas, académicas, que son promovidas y alimentadas por el actual *discurso matemático escolar*.

Aspectos de discusión

Nuestro objetivo general en este grupo de discusión será sentar las bases sobre las cuáles puedan realizarse futuras investigaciones en esta perspectiva que traten de dar cuenta de la influencia de las relaciones de género, la actitud y la importancia de la reflexión cuando se problematiza un saber matemático. Estos temas transversales, consideran variables que son parte del desarrollo del individuo.

En el grupo discutiremos las tres temáticas mediante el análisis de videos y materiales. En el primero de ellos se cuestionarán los roles de género y las formas en que se reproducen entre las niñas y los niños en edad escolar, se pretende introducir a las y los asistentes en la discusión sobre la importancia de un análisis desde la perspectiva de género de las prácticas escolares y el papel de los profesores como transmisores y reproductores de la cultura. Pero también sobre el rol que juega el dME en la exclusión de las mujeres de la construcción de conocimiento matemático.

El objetivo de esta actividad es cuestionar a los asistentes sobre que se ganaría al realizar un análisis de resultados desde la perspectiva de género y cómo desde la perspectiva Socioepistemológica es posible generar entornos de aprendizaje que favorezcan la inclusión de hombres y mujeres en la construcción de conocimiento matemático.

En el segundo video se analizará un episodio en donde estudiantes y sus madres preparan agua de sabor, el objetivo del análisis es percatarnos de las actitudes que se manifiestan cuando los estudiantes razonan proporcionalmente.

También, se retomarán los análisis anteriores para mostrar la importancia de la problematización de la matemática escolar en el desarrollo del pensamiento y la formación de individuos críticos. Específicamente se profundizará este aspecto mostrando algunos ejemplos del trabajo realizado con profesores.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la matemática educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Cantoral, R. y Soto D. (2014). Discurso matemático escolar y exclusión. Una visión Socioepistemológica. *Bolema: Boletín de Educación Matemática*, 29 (50), 1525-1544.

Cantoral, R., Montiel G. y Reyes D. (2014). Socioepistemología, matemáticas y realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(3), 91-116.

Freire, P. (1982). *La educación como práctica de la libertad*, (29ª edición). Siglo XXI Editores.

García, M.S & Farfán, R. M. (2015). Actitudes de estudiantes de secundaria hacia el trabajo con Situaciones de Aprendizaje. En Flores, R. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 28. México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Lamas, M. (1996). La perspectiva de género. Hablemos de sexualidad, lecturas. CONAPO, Mexfam. Recuperado el 25 de noviembre de http://www.pueg.unam.mx/images/seminarios2015_1/investigacion_genero/complementaria/lam_mrt.pdf

Latorre, M. (1992). *La reflexión en la formación del profesor*. Tesis de doctorado. Universitat de Barcelona. España.

Mingüer, (2006). *Entorno Sociocultural y cultura matemática en profesores de nivel superior de educación. Estudio de caso: el Instituto Tecnológico de Oaxaca: Una aproximación socioepistemológica*. Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN, México.

Noelting, G. (1980).The development of proportional reasoning and the ratio concept: Part I - Differentiation of stages, *Educational Studies in Mathematics* 11, 217- 253.

Perrenoud, P. (2004). *Desarrollar la práctica reflexiva en el oficio de enseñar*. Barcelona: Graó.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana en Matemática Educativa*, número especial, 103-129.

Sánchez-Puentes, R. (1993). Didáctica de la problematización en el campo científico de la educación. Perfiles educativos, 61, 64-78.

Autores

Rosa María Farfán Márquez; CINVESTAV, IPN. México; rfarfan@cinvestav.mx
María Guadalupe Simón Ramos; CINVESTAV, IPN. México; gsimon@cinvestav.mx
Mayra A. S. Báez Melendres; CINVESTAV, IPN. México; mbaez@cinvestav.mx

María del Socorro García González; CINVESTAV, IPN. México; garciag@cinvestav.mx

ESTUDIOS SOBRE EL DOMINIO AFECTIVO EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

Gustavo Martínez Sierra, Erika García Torres, Lorena Jiménez Sandoval, Carolina Carrillo García, María Valle Zequeida, Yuridia Arellano García, Rocío Antonio Antonio, Magdalena Rivera Abrajan, José Antonio Juárez López

Resumen

El objetivo de este grupo temático es continuar con el debate comenzado en EIME 2013 (Martínez-Sierra, García, Lemus, Rivera, & Juárez, 2013) y EIME 2014 (Martínez-Sierra et al., 2014) sobre la necesidad y la pertinencia de impulsar en México la investigación sobre el *dominio afectivo en matemática educativa*. Para alcanzar este objetivo en las sesiones del grupo temático se presentarán los más recientes avances internacionales de investigación en el campo del dominio afectivo. Además, los proponentes de este grupo temático mostrarán resultados de sus propias investigaciones realizadas en diversos aspectos del dominio afectivo de estudiantes y profesores de matemáticas: emociones, actitudes, motivación, creencias, concepciones e identidades matemáticas.

En todo momento se buscará la interacción y debate con los participantes. Para ello los ponentes haremos breves presentaciones con el objetivo de provocar el debate y el flujo de ideas. Sobre todo los ponentes centraremos la atención en proponer investigaciones futuras, para así poder invitar a los asistentes a colaborar con los ponentes. Al final se propondrán estrategias para fomentar la colaboración entre los interesados en integrarse al grupo de investigación durante el año 2016. En particular el primer autor del presente documento propondrá la conformación de equipos de investigación que trabajen en contestar preguntas de investigación cuya respuesta tenga el potencial de contribuir originalmente al campo del dominio afectivo.

Palabras clave: dominio afectivo, emociones, actitudes, motivación, creencias, concepciones e identidades matemáticas

Dominio afectivo en Matemática Educativa

Desde hace tres décadas el estudio del *dominio afectivo* ha sido objeto de creciente interés en los últimos años en el campo de la Matemática Educativa. Ello se debe, entre otras cosas, a la amplia aceptación de la consideración de que el afecto (emociones, actitudes, motivación, creencias, e identidades) es inseparable de la cognición en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Muchas de las investigaciones sobre afecto se han hecho, y se hacen, con la intensión de determinar el papel del afecto en el aprendizaje de las matemáticas, en la resolución de problemas y su impacto en el rendimiento en matemáticas. De manera general, los resultados de estas investigaciones ponen de manifiesto que los factores afectivos juegan un papel esencial en los procesos antes señalados (McLeod, 1994) y que algunos afectos están fuertemente arraigadas en el sujeto y no son fácilmente desplazables por la instrucción (Gómez-Chacón, 2000). En este mismo sentido varias investigaciones han confirmado la correlación positiva entre actitudes y el logro matemático; pero sin lograr establecer una establecer una dirección de causalidad (Ma, Xu, & Xu, 2004). Al respecto para Hannula (2012) los resultados sugieren una relación recíproca entre afecto y logro académico en lugar de causalidad unidireccional.

Diversos investigadores han tratado de clarificar cuáles son los conceptos fundamentales del dominio afectivo y cuáles son sus relaciones. En este camino una de las más influyentes conceptualizaciones del dominio afectivo fue realizada por McLeod (1992, 1994) quien identificó tres conceptos básicos que eran utilizados en las investigaciones en el dominio afectivo: las creencias, las actitudes y las emociones; a los que interpretó en orden creciente de estabilidad (en el tiempo), en orden decreciente de intensidad y en orden creciente de implicación cognitiva (grado en que la cognición juega un papel en la respuesta y en el tiempo que tardan en desarrollarse. Por lo tanto "podemos pensar que las creencias, actitudes y emociones representan niveles crecientes de implicación afectiva, la disminución de los niveles de participación cognitiva, el aumento de los niveles de intensidad de la respuesta, y la disminución de los niveles de estabilidad respuesta" (McLeod, 1992, p. 579). Así las emociones son las más intensas, las menos estables y con menos implicación cognitiva, las creencias son las más estables, las menos intensas y con más implicación cognitiva, con las actitudes en un punto intermedio entre ellas. Así para Gómez-Chacón (2000) al aprender matemáticas el estudiante recibe continuos estímulos asociados a las matemáticas a los cuales reacciona emocionalmente de forma positiva o negativa condicionado por sus creencias acerca de sí mismo y acerca de las matemáticas. Si ante situaciones similares, repetidamente, le produce la misma clase de *reacciones emocionales* (satisfacción, frustración) la activación de las emociones puede ser automatizada y se pueden solidificar en actitudes.

Ampliando el modelo de McLeod, DeBellis & Goldin (2006) sugieren incluir un cuarto subdominio que trata de valores, la ética y la moral, que está conectado con los otros tres subdominios. Según este modelo tetraédrico para comprender, por ejemplo, el papel desempeñado por las creencias y por qué ciertas creencias son tan difíciles de cambiar, debemos tener en cuenta las emociones y actitudes que las sustentan, las necesidades emocionales y actitudinales a las que sirven, y los valores con los que están en disonancia o consonancia (Goldin, Rösken, & Törner, 2009). Así, las creencias pueden satisfacer las necesidades emocionales al proporcionar defensas contra el dolor y la culpa; lo cual hace muy difícil renunciar a ellas (Goldin et al., 2009). Así, por ejemplo, por razones emocionales un estudiante que no le va bien en matemáticas puede ser atraído por la creencia de que capacidad matemática de una persona es innata; ya que esta le exime de la responsabilidad personal de la falta de éxito. Esta liberación de la culpa puede llegar al extremo de sentir orgullo de que él "no es un persona para las matemáticas" o que "las matemáticas no son para él". Así, una creencia alivia el dolor y la culpa potenciales asociados con el fracaso y proporciona una "buena razón" para que no se involucre en el cumplimiento de una tarea matemática.

Los cuatro conceptos del modelo tetraédrico del afecto no cubren todo dominio afectivo; ya que de manera reciente los investigadores se han interesado por conceptos tales como la *motivación,* el *ánimo* y el *interés* (Zan, Brown, Evans, & Hannula, 2006) y más recientemente se incluyen conceptos como los de *identidad* y *normas* (Hannula et al., 2015; Zan et al., 2006)

Tendencia contemporánea en la investigación en el dominio afectivo en Matemática Educativa

Gustavo Martínez

En general la tendencia de investigación contemporánea en el estudio del dominio afectivo es considerar al afecto como un "sistema dinámico". Al respecto Pepin and Roesken-Winter (2015, p. xvi) consideran que las emociones, actitudes, creencias y valores cada una constituyan un sistema (por ejemplo, en una persona o en un colectivo/grupo) y que estos sistemas son, en efecto inter-relacionados o "anidados" dentro de cualquier persona/grupo, aunque alimentado por el contexto. Así para Pepin and Roesken-Winter (2015) las características interesantes de tales sistemas dinámicos son los siguientes:

- Debido a la fuerte acoplamiento entre los componentes de estos sistemas, un fallo en uno o más componentes puede dar lugar a fallos en cascada, lo que puede tener consecuencias catastróficas sobre el funcionamiento del sistema: para un alumno individual, esto puede significar el desarrollo de un actitud negativa debido a una ruptura de la comprensión, porque uno de los componentes no se entendió, y por lo tanto el lado afectivo (de "fracaso" en una parte) puede traer todo afecta (y aprendizaje) del sistema a un alto.
- La "historia" de este tipo de sistemas dinámicos puede ser importante: debido a que estos sistemas son dinámicos, pueden cambiar con el tiempo (por ejemplo, diferentes experiencias emocionales con diferentes áreas temáticas matemáticos), y los estados anteriores pueden tener una influencia en los actuales estados.
- Los sistemas dinámicos pueden estar anidados: los componentes de un sistema dinámico pueden ser ellos mismos los sistemas dinámicos. Por ejemplo, un salón de clases (como un sistema dinámico de afecto) está formado por alumnos, que tienen cada uno su dinámica afecta el o los sistemas.
- Los sistemas dinámicos de afecto pueden dar lugar a fenómenos *emergentes* (comportamientos del sistema que no que no se pueden explicar por el comportamiento de sus partes). Por ejemplo, un grupo de alumnos puede mostrar una sistema dinámico de afecto muy diferente como grupo, al que los alumnos individuales mostrarían por su cuenta.
- Una pequeña perturbación de la dinámica afecta sistema puede causar un gran efecto (por ejemplo, el efecto mariposa), un efecto proporcional, o incluso ningún efecto en absoluto. Esto es debido a la no linealidad de los sistemas dinámicos.

En el mismo sentido que antes Hannula et al. (2015) invitan a presentar artículos, en el TSG (Topic Study Group / Grupo de estudio por tópico) 28 "Affect, beliefs and identity in mathematics education" del ICME (Congreso Internacional de Instrucción Matemática) en 2016, que contengan "análisis de la relación mutua entre construcciones afectivas y su conexión con la cognición y otras construcciones estudiadas en educación matemática".

Al final de esta sección presentaré los resultados de las más recientes publicaciones que sobre dominio afectivo hemos realizado (Martínez-Sierra & García González, 2014;

Martínez-Sierra & García-González, 2015; Martínez-Sierra & Miranda-Tirado, 2015; Martínez-Sierra, Valle-Zequeida, Miranda-Tirado, & Dolores-Flores, 2015)

Algunas investigaciones en proceso

A continuación algunas investigaciones que hemos realizado o que estamos realizando tomando como objeto de estudio a una o más de las componentes del dominio afectivo

Construcción de la identidad docente

Erika García Torres

Los estudios de identidad profesional del profesor se posicionan como una crítica a la manera de percibir su práctica en relación con “estados internos” de conocimiento y creencias. La forma en que los profesores se perciben a sí mismos como tales va más allá de sus conocimientos y creencias sobre las matemáticas (Skott, Zoest, & Gellert, 2013).

La identidad está relacionada con la vida profesional de los profesores, sus prácticas y los contextos en los que se produce el desarrollo profesional. De este modo, es una noción que se aleja de la concepción esencialista que manifiesta que para ser profesor se necesita poseer una serie de atributos necesarios para la profesión, más bien y en concordancia con (Gee, 2000, p. 99) es “una representación reconocida y compartida que se tiene de uno mismo”. No es estable, cambia a través del tiempo y el espacio y se forma en procesos sociales de interacción en diversos contextos.

Una investigación de identidad les da voz a los profesores para entender su posicionamiento ante el sistema educativo y hacia los procesos de gestión de conocimiento, la manera en que perciben su rol en los grupos profesionales a los que pertenecen y su función social. Los procesos de confrontación con la práctica, dilemas de enseñanza, tensiones entre expectativas y logro y sentimientos de inadecuación tienen un impacto en la construcción de la identidad profesional.

Motivación de los estudiantes en la elección de la carrera de matemáticas

Lorena Jiménez

Se reporta la primera parte de una investigación que busca entender ¿qué motiva a los estudiantes a elegir la carrera de matemáticas? El análisis e interpretación se hace en el marco de la “teoría de metas” en la idea que sostiene que los estudiantes que realizan actividades de aprendizaje por metas de desempeño, tratan estas actividades como pruebas de su capacidad y no como oportunidades para aprender. Brophy (2004) establece una diferencia entre la motivación intrínseca, la motivación extrínseca y la motivación para aprender, explica que esta última es principalmente una respuesta cognitiva que implica intentos por dar sentido a la información que transmite una actividad, relacionar esta información con los conocimientos previos, y para dominar las habilidades que se desarrollan en la actividad.

Se describen componentes motivacionales que se encontraron en las respuestas que dieron 46 estudiantes egresados de nivel bachillerato y que eligieron la licenciatura de matemáticas como su opción de formación profesional. Los resultados que se presentan corresponden a lo encontrado en la primera de tres entrevistas video grabadas que se realizaron a dichos estudiantes.

Solo en 26 de las 46 respuestas se identificaron componentes de motivación para aprender, respuestas en donde los estudiantes hablan en futro sobre la posibilidad de aprender o mejorar lo que hasta ahora ya saben, entre estas citamos: *"aprender más", "explotar al máximo las capacidades", "salir bien preparado", " conocer mucho más de matemáticas", "yo digo que voy a aprender", "yo busco entenderles", "siento que me falta mucho por aprender" , "Saber más de álgebra y geometría".*

¿Por qué estudiar la carrera de Licenciado en Matemáticas? Motivación desde la teoría de Valor-Expectativa.

Magdalena Rivera, Gustavo Martínez

Eccles y sus colaboradores propusieron una teoría de Valor-Expectativa que muestra el logro del rendimiento y la elección presentando resultados inicialmente en el dominio del rendimiento en matemáticas (Eccles, 2009; A. Wigfield, 1994). Este modelo ha sido utilizado desde entonces estudiando nuevos factores y relaciones entre los mismos en distintas direcciones, estudios longitudinales basados en diferencias de género y estudios donde se muestran cómo las expectativas de los niños para el éxito, las creencias de habilidad, y los valores subjetivos cambian a través de los años de la escuela, la mayoría de los estudios realizados en niños y adolescentes. La tesis fundamental de la teoría afirma que la elección, la persistencia, y el rendimiento de los individuos pueden ser explicados por sus creencias acerca de lo bien que van a hacer de la actividad y el grado en que ellos valoran la actividad.

Para esta investigación usamos la teoría expectativa-valor para estudiar la motivación de estudiar la carrera de Licenciado en Matemáticas en la Universidad Autónoma de Zacatecas. Se realizaron tres entrevistas, en distintos momentos, a 48 estudiantes de nuevo ingreso a la Licenciatura en Matemáticas donde se les preguntaba acerca de los motivos que los llevo a decidir estudiar Matemáticas, el hecho de ser entrevistados en distintos momentos nos permitirá observar si existen cambios en las expectativas de éxito, las creencias de las habilidad, y los valores subjetivos a través de su tránsito por la universidad.

En este momento solo se ha hecho un primer análisis de la primera entrevista de los estudiantes. Se tomaron los factores propuestos por Wigfield and Eccles (2000) como dimensiones y se localizaron los factores en cada uno de los estudiantes posteriormente se buscan las relaciones de estas dimensiones para comprender la relación que existe entre las expectativas de logros y el desempeño en la carrera de los estudiantes.

Algunos resultados obtenidos hasta este momento son que las creencias de los jóvenes acerca de su capacidad y habilidades Matemáticas son uno de los factores que los lleva a decidir estudiar la carrera, las expectativas para el éxito son inciertas al entrar a la universidad debido al cambio que sufren respecto a su imagen sobre las matemáticas, donde la creencia de sus habilidades también sufre un cambio al sentir que ya no son tan buenos para la carrera.

Los estudiantes presentan un claro valor al desarrollo de ciertas habilidades y destrezas matemáticas que les permitan la permanencia relacionando el costo con el éxito (por ejemplo, el estudiante piense que sus éxitos son consecuencia de la alta capacidad, de trabajo duro y persistencia en la tarea)

Experiencias emocionales asociadas a las matemáticas de alumnos de nivel medio superior en situación de recursamiento

María Eulalia Valle Zequeida y Gustavo Martínez Sierra

En este trabajo se reporta una investigación cualitativa que tuvo por objetivo conocer las experiencias emocionales relacionadas a las matemáticas de estudiantes de nivel medio superior cuando están en un curso inter semestral de recuperación. El trabajo de campo se realizó con 12 alumnos inscritos a un curso inter semestral de Matemáticas II, en una escuela de nivel medio superior del D.F. que tiene un modelo educativo diferente a la mayoría de las escuelas en México, pues entre otras cosas, no asigna una evaluación con escala numérica de 0-10. La recolección de datos fue a través de entrevistas diarias durante el tiempo que duró el curso inter semestral. Posteriormente, estas entrevistas fueron transcritas en su totalidad para su análisis. Inicialmente se realizó la lectura de las narrativas de los estudiantes para adentrarnos a su léxico y contexto. Para el análisis de las narrativas de los estudiantes nos basamos en la teoría de de la estructura cognitiva de las emociones (Ortony, Clore, & Collins, 1988) en donde se especifica las condiciones desencadenantes de cada emoción y la valoración que se le da a cada una de éstas y que puede estar términos de Metas o Normas. Algunos de los hallazgos obtenidos fueron que la técnica de entrevistas diarias ofrece una visión más amplia al integrar la variable del tiempo en los resultados y permitió observar la dinámica de las experiencias emocionales de los alumnos durante el proceso del curso. Al finalizar el curso, la mayoría de los alumnos no lo cubrió, sin embargo, en base a sus experiencias emocionales, no encontramos elementos para hacer algún tipo de clasificación entre los que cubrieron con los que no lo hicieron. Por otro lado, encontramos que aquellas emociones que aparecen en la mayoría de los alumnos son *decepción* y *satisfacción* valoradas en términos de la meta de persecución activa *Aprender.*

Experiencias emocionales en la clase de matemáticas de un grupo de estudiantes de nivel superior

Yuridia Arellano García y Gustavo Martínez

En esta investigación participaron 16 estudiantes, de entre 18 y 20 años de edad que cursaban el primer cuatrimestre de una licenciatura de Negocios Internacionales. La recolección de los datos fue a través de informes diarios entregados por los estudiantes al finalizar cada clase de matemáticas durante siete clases consecutivas.

Las respuestas a los informes diarios fueron transcritas y analizadas apoyándonos con la teoría de la estructura cognitiva de las emociones (Ortony et al., 1988). En nuestro análisis interpretamos la valoración que los participantes hacen de la situación desencadenante de las emociones para describir la experiencia emocional de los participantes durante estas lecciones.

Nuestra participación en este grupo será para presentar los resultados de este análisis: las experiencias emocionales de todos los participantes distinguiendo las emociones positivas / negativas y asociándolas a las situaciones desencadenantes.

Las situaciones desencadenantes de las experiencias emocionales encontradas de este grupo fueron categorizadas en: Aprender matemáticas o algo nuevo, buena explicación del maestro, resolver correctamente un examen, resolver correctamente problemas y ejercicios, previsión de aprobar, recibir ayuda de compañeros, ayudar a compañeros en algún tema, considerar fácil la actividad. Estas situaciones desencadenaron una variedad de emociones de tipo: Satisfacción/Decepción, Gratitud/Reproche, Miedo/Esperanza, Aburrimiento/Interés, Orgullo/Autoreproche, vergüenza, alivio y feliz por.

Una experiencia con estudiantes de bachillerato sobre sus motivaciones en matemáticas

Rocío Antonio Antonio y Gustavo Martínez Sierra

En entrevistas realizadas a 29 estudiantes de cuarto y sexto semestre del nivel medio superior del IPN (Instituto Politécnico Nacional) en la ciudad de México muestran que algunas de las motivaciones que tienen hacia las matemáticas para *estudiar, aprender, resolver problemas de matemáticas, asistir a clases y en la clase de matemáticas* son aprender nuevos temas, poder ayudar a los demás en conocimientos matemáticos, poder aplicar conocimientos matemáticos en la carrera técnica que están cursando (mantenimiento industrial o computación), aprobar el examen de admisión a nivel superior, para la carrera que estudiaran, para utilizarlo en el campo laboral y por el reto de demostrar ser mejor que otros.

Los motivos para asistir a clases de matemáticas es no defraudar a sus padres, pasar la materia, obtener buenas calificaciones, aprobar los parciales y comentan que la motivación depende del profesor que les de la clase, a veces lo dan muy teórico o dan un ejercicio fácil y luego en el examen son ejercicios difíciles y esto los desmotiva, los aburre, les da flojera entrar a clases. En clase los motiva el trabajo de competitividad que se realiza mediante un cronometro de tiempo.

Creencias y concepciones de profesores de matemáticas

Carolina Carrillo

Es innegable la importancia que el profesor tiene dentro del proceso educativo. Existen muchos proyectos e investigaciones en torno al papel que desempeña o debe desempeñar para que los resultados de dicho proceso sean favorables. En particular, en el área de matemáticas, que es considerada una disciplina importante pero también difícil de comprender, se ha puesto atención en las últimas décadas tanto en su formación inicial como continua. En este sentido, algunos investigadores y autoridades educativas se han centrado en el desarrollo de secuencias de aprendizaje que el profesor puede implementar en el aula, otros en su capacitación respecto a innovaciones áulicas, el uso de tecnología o en el conocimiento y adopción de las diversas reformas por las que atraviesa a lo largo de su experiencia docente… Se trata, en breve, de hacerlo un profesional en su campo de actuación, lo cual involucra dotarlo de una serie de conocimientos que le permitan reaccionar de la manera más óptima en las situaciones que puede enfrentar dentro del ámbito escolar. Pero más allá de cuestionarnos sobre el "paquete básico" que debe incluir esta dotación de conocimientos, que es el tema que ocupa a numerosas investigaciones actuales, en este compartir conocimiento, ¿dónde queda la opinión del profesor?, ¿qué pasa cuando el profesor discrepa con lo que le es compartido para implementar en su labor docente?, ¿le estamos brindando realmente un estatus de profesional en su campo o meramente un papel de "técnico"?

Seamos claros, es real e innegable la necesidad de profesionalización del docente, y por tanto, el aporte que puede brindar el desarrollo de investigaciones en torno al conocimiento del profesor de matemáticas pero también se precisa analizar el pensamiento del profesor de manera tal que podamos articular las diversas piezas del engranaje de la práctica educativa tales como: los resultados de investigación, las propuestas oficiales y, por supuesto, el pensamiento del docente.

En esta participación, presentaremos algunos resultados de investigación en torno a las creencias y concepciones de profesores de matemáticas de nivel básico en torno a las matemáticas, su enseñanza, aprendizaje y evaluación.

Creencias de los docentes de bachillerato acerca de la enseñanza de las matemáticas. Posibles estrategias para propiciar el cambio

José Antonio Juárez López

En esta plática abordaremos la importancia del estudio de las creencias que sostienen los docentes de bachillerato en Puebla acerca de la enseñanza de las matemáticas y su posible modificación mediante la implementación de un taller que aborda temas relacionados con las características y concepciones que tienen los docentes de matemáticas expertos en China. Específicamente se tratará sobre los conocimientos y habilidades que, de acuerdo con la formación de docentes en el lejano Oriente, debe tener un profesor de matemáticas que se considere experto.

Mediante un instrumento cualitativo como la entrevista semi-estructurada se estudiaron las creencias de un grupo de docentes del nivel medio superior en la Ciudad de Puebla. Posteriormente, con estos resultados se diseñará un taller breve el cual abordará temas relacionados con las creencias acerca de la enseñanza de las matemáticas y su influencia en el aprendizaje de los estudiantes. Esto se realizará con la finalidad de propiciar un cambio en las creencias de los profesores. Uno de los temas que se desarrollarán en el taller aborda las concepciones y características de los docentes de matemáticas expertos en China. Con este enfoque se pretende que los docentes hagan conciencia acerca de la importancia que tiene el conocimiento actualizado en el área de Educación Matemática.

Conclusiones

El objetivo de este grupo temático será la de mostrar a los participantes los avances de las investigaciones que sobre el dominio en matemáticas hemos desarrollado los proponentes del curso al investigar las relaciones entre en aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas con las creencias, las emociones, actitudes y motivaciones de los estudiantes y profesores. En particular, como puede observarse en los resúmenes presentados, es de notar el papel emergente que los estudios que sobre motivación e identidad han tomado al seno de nuestro grupo y el fuerte interés que los estudios de creencias y emociones hay entre nosotros. Otras conclusiones del grupo temático serán elaboradas a través del diálogo con los participantes y sobre todo con la presentación del primer auto al discutir las tendencias contemporáneas en cursos sobre la investigación en el dominio afectivo en matemática educativa.

Referencias

Brophy, J. (2004). *Motivating Students to Learn*.

DeBellis, V. A., & Goldin, G. A. (2006). Affect and meta-affect in mathematical problem solving: A representational perspective. *Educational Studies in Mathematics*, *63*(2), 131–147. http://doi.org/10.1007/s10649-006-9026-4

Eccles, J. (2009). Who Am I and What Am I Going to Do With My Life? Personal and Collective Identities as Motivators of Action. *Educational Psychologist*, *44*(2), 78–89. http://doi.org/10.1080/00461520902832368

Gee, J. (2000). Identity as an analytic lens for research in education. *Review of Research in Education*, *25*, 99–125.

Goldin, G., Rösken, B., & Törner, G. (2009). Beliefs—no longer a hidden variable in mathematical teaching and learning processes. *Beliefs and Attitudes in Mathematics Education: New …*, (2001), 1–18. Retrieved from http://scholar.google.com/scholar?hl=en&btnG=Search&q=intitle:Beliefs+–+No+Longer+a+Hidden+Variable+in+Mathematical+Teaching+and+Learning+Processes#0

Gómez-Chacón, I. (2000). Affective influences in the knowledge of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *43*(2), 149–168.

Hannula, M., Morselli, F., Erktin, E., Vollstedt, M., Zhang, Q., Kong, H., … Pepin, B. (2015). TSG 28 Affect, beliefs and identity in mathematics education. In *Call for papers ICME 2016*. Hamburg, Germany.

Hannula, M. S. (2012). Exploring new dimensions of mathematics-related affect: embodied and social theories. *Research in Mathematics Education*, *14*(2), 137–161. http://doi.org/10.1080/14794802.2012.694281

Ma, X., Xu, J., & Xu, J. (2004). The causal ordering of mathematics anxiety and mathematics achievement: a longitudinal panel analysis. *Journal of Adolescence*, *27*(2), 165–79. http://doi.org/10.1016/j.adolescence.2003.11.003

Martínez-Sierra, G., García González, M., Carrillo, C., Jiménez, L., Lemus, M., Lom, F., … Miranda, M. (2014). Estudios sobre el dominio afectivo en Matemática Educativa. In *Memoria de la XVII Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (pp. 421–430). Oaxaca, México.

Martínez-Sierra, G., & García González, M. D. S. (2014). High school students' emotional experiences in mathematics classes. *Research in Mathematics Education*, *16*(3), 234–250. http://doi.org/10.1080/14794802.2014.895676

Martínez-Sierra, G., García, M., Lemus, E., Rivera, M., & Juárez, J. (2013). Una invitación al estudio del dominio afectivo en matemática educativa. In *Memoria de la XVI Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (pp. 429–435). Tuxtla Gutiérrez Chiapas, México.

Martínez-Sierra, G., & García-González, M. S. (2015). Undergraduate Mathematics Students' Emotional Experiences in Linear Algebra (Accepted). *Educational Studies in Mathematics*.

Martínez-Sierra, G., & Miranda-Tirado, M. (2015). Mexican high school students' social representations of mathematics, its teaching and learning. *International Journal of*

Mathematical Education in Science and Technology, *46*(5), 700–720. http://doi.org/10.1080/0020739X.2014.997319

Martínez-Sierra, G., Valle-Zequeida, M., Miranda-Tirado, M., & Dolores-Flores, C. (2015). Social Representations of High School Students About Mathematics Assessment. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 575–596). New York, NY: Macmillan.

McLeod, D. B. (1994). Research on affect and mathematics learning in the JRME: 1970 to the present. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(6), 637–647.

Ortony, A., Clore, G. L., & Collins, A. (1988). *The cognitive structure of emotions*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Pepin, B., & Roesken-Winter, B. (2015). *From beliefs to dynamic affect systems in mathematics education*. (B. Pepin & B. Roesken-Winter, Eds.). Zürich, Switzerland: Springer. http://doi.org/10.1007/978-3-319-06808-4

Skott, J., Zoest, L., & Gellert, U. (2013). Theoretical frameworks in research on and with mathematics teachers. *Zdm*, *45*(4), 501–505. http://doi.org/10.1007/s11858-013-0509-3

Wigfield, a, & Eccles, J. (2000). Expectancy-Value Theory of Achievement Motivation. *Contemporary Educational Psychology*, *25*(1), 68–81. http://doi.org/10.1006/ceps.1999.1015

Wigfield, A. (1994). Expectancy-Value Theory of Achievement Motivation : A Developmental Perspective, *6*(1), 49–78.

Zan, R., Brown, L., Evans, J., & Hannula, M. S. (2006). Affect in Mathematics Education: An Introduction. *Educational Studies in Mathematics*, *63*(2), 113–121. http://doi.org/10.1007/s10649-006-9028-2

Autores

Gustavo Martínez Sierra; CIMATE, UAGro. México; gmartinezsierra@gmail.com
Erika García Torres; Centro Regional de Formación Docente e Investigación Educativa. México.
Lorena Jiménez Sandoval; UAZ. México.
Carolina Carrillo García; UAZ. México.
María Valle Zequeida; CIMATE, UAGro. México.
Yuridia Arellano García; CIMATE, UAGro. México.
Rocío Antonio Antonio; CIMATE, UAGro. México.
Magdalena Rivera Abrajan; CIMATE, UAGro. México.
José Antonio Juárez López; BUAP. México.

EL USO DE LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA EN EL AULA

Flor Monserrat Rodríguez-Vásquez, Carolina Carrillo-García, José Iván López-Flores, Maribel Vicario-Mejía

Resumen

Una de las líneas de investigación que se preocupa por atender problemas educativos relativos a la enseñanza aprendizaje de la matemática de manera científica es la línea de investigación histórica en educación matemática. Esta línea tiene como uno de sus fines dotar a la matemática escolar de un enriquecimiento cultural, proveyendo de aspectos que nos permiten entender por qué la matemática es como la conocemos. En este sentido, la experiencia como profesores-investigadores nos revela que es menester recurrir, en algunos casos, a la historia de la matemática para entender los objetos matemáticos que se enseñan en el sistema educativo. Por tanto, en este grupo temático discutiremos sobre el papel de la historia de la matemática en el aula y mostramos algunos ejemplos de cómo podemos incluirla en el aula.

Palabras clave: historia, matemática, aritmética, textos.

Introducción

Un estudio histórico de la matemática puede aportar diversas reflexiones vinculadas al campo de la Educación Matemática. Entre éstas, consideramos que las investigaciones de corte histórico epistemológico de los conceptos matemáticos contribuyen al menos en dos niveles: i) el relativo al aprendizaje de los conceptos, y ii) el relativo a la formación inicial y continua de los profesores de matemáticas (Anacona, 2003). Respecto al primer nivel, Farmaki y Paschos (2007) señalan que la historia puede ser un factor de motivación para los estudiantes en su aprendizaje y el estudio de la matemática, ayudando a mantener el interés y el entusiasmo de los alumnos en la asignatura. Igualmente un enfoque de la enseñanza basado en elementos históricos muestra una matemática más humana y menos atemorizante, puesto que permite hacer conscientes a los estudiantes que el mismo concepto matemático con el que ellos tienen dificultad actualmente, también lo fue en una época para los matemáticos (Bakker & Gravemeijer, 2006). Respecto del segundo, se busca que los profesores reflexionen sobre ciertos problemas en la constitución de los conceptos matemáticos (los nombrados obstáculos epistemológicos), que eventualmente se pueden presentar en el aprendizaje de los conceptos (Jankvist, 2009).

Más específicamente, se considera que un docente que indague la historia de la matemática será más sensible de que ésta no es un producto ya acabado y perfecto, por el contrario es el resultado de una actividad humana permeada por distintas disciplinas y momentos históricos, sociales y culturales específicos (Tzanakis & Arcavi, 2000). Mientras que, un docente que no tenga conocimiento de la historia de las matemáticas, su concepción generalmente estará vinculada con una postura formalista, hará énfasis en los procesos lógicos de demostración y en la forma rigurosa de presentación de un concepto (Anacona, 2003), lo cual puede generar en los estudiantes una mala disposición al momento de aprender matemáticas, al no encontrar ninguna relación con su entorno social.

Por tanto, discutimos aquí sobre la consideración de la historia de la matemática en el aula como una forma de enriquecer el entendimiento de los conceptos matemáticos, y promovemos que los profesores diseñen actividades para la escuela, en las cuales se tengan en cuenta los obstáculos epistemológicos de los conceptos matemáticos, además de los fenómenos culturales y físicos que dieron origen a los conceptos y que pueden utilizarse como base para estructurar la enseñanza de la matemática. Anacona (2003) señala que este tipo de actividades permite que los estudiantes desarrollen estrategias y herramientas matemáticas que posibilitan la utilización de sus conocimientos escolares en la resolución de problemas del mundo real, promoviendo de esta manera procesos similares a los desarrollados por los matemáticos en la construcción de estructuras y conceptos matemáticos.

La historia en la formación de profesores de matemáticas

En 2002 la *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI), una de las asociaciones más importantes en el ámbito de la Educación Matemática, publicó un compendio dedicado a la Historia en Educación Matemática. Este extenso conjunto de comunicaciones de investigadores de alrededor del mundo, fue editado por John Fauvel y Jan Van Maanen, quienes en la introducción de esta obra mencionan:

> Un maestro capaz de apoyar, animar y guiar a los estudiantes de esta manera [haciendo alusión a los recursos que provee la historia] a través de su carrera en la escuela es un mejor profesor: mejor preparado, con mejores recursos, más empoderado. La historia, podríamos decir, es un motor de Ingenio Matemático. […] Algunos educadores creen que las matemáticas son intrínsecamente históricas: por lo que el aprendizaje de un tema debe involucrar su historia, al igual que estudiar arte implica aprender sobre la historia del arte. Otros ven una serie de formas en que la historia puede ayudar al profesor, y por lo tanto en la tarea del alumno. (pág. xiii).

De esta forma, reconocen la importancia que la historia puede tener dentro del discurso del profesor de matemáticas.

Siguiendo con el papel del profesor y su formación, Freudenthal (1981, citado en Rodríguez, 2010, pág. 7) considera tres preguntas importantes en torno al papel de la historia de las matemáticas:

¿Debe un profesor de matemáticas saber algo sobre la historia de ellas?

¿Cuál puede ser el uso de la historia de las matemáticas?

¿Qué saben los matemáticos sobre la historia de su ciencia?

Furinghetti es una investigadora italiana que ha puesto atención en la historia de las matemáticas y la ha planteado como un útil recurso en la formación del profesor y en la clase de matemáticas, en otras palabras, en darle a la historia un uso pedagógico dentro de la enseñanza de las matemáticas. En un trabajo publicado en conjunto con Radford, un investigador canadiense, afirma:

> Por ejemplo, la historia de las matemáticas ha sido utilizada como una herramienta poderosa para contrarrestar la percepción generalizada de profesores y alumnos de que las verdades y los métodos matemáticos nunca han sido disputados. Las biografías de varios matemáticos han sido una fuente de motivación para los estudiantes. Al hacer hincapié en cómo ciertas teorías matemáticas florecieron en varios países, las diversas aportaciones de las diversas culturas a las matemáticas contemporáneas se hace evidente. (Furinghetti y Radford, 2002, pág. 632).

Sin embargo, advierten que detrás del concepto de conocimiento hay una postura epistemológica, y que esta postura epistemológica condiciona nuestra comprensión sobre la formación del pensamiento matemático del estudiante así como la interpretación que hacemos del desarrollo conceptual histórico. Además, indican que el pensamiento del estudiante y el desarrollo conceptual son dominios diferentes que tienen problemas y metodologías de análisis específicos para investigarse.

En un artículo posterior, estos autores ante la pregunta ¿cómo relacionar el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes a los desarrollos matemáticos conceptuales históricos? Brindan la siguiente reflexión:

> Una recapitulación de la Psicología, que transpone la ley biológica de la recapitulación, afirma que, en su desarrollo intelectual, nuestros estudiantes atraviesan naturalmente más o menos las mismas etapas que la humanidad atravesó. Frecuentemente, esta ley se ha dado por sentada (a veces implícitamente) para justificar un vínculo entre ambos dominios [refiriéndose al estudiante y el desarrollo histórico]. En sus diferentes variantes, sin embargo, la recapitulación psicológica ha sido recientemente objeto de una profunda revisión, en parte debido a la aparición de nuevas concepciones sobre el papel de la cultura en la manera en que llegamos a conocer y pensar. (Furinghetti y Radford, 2008, pág. 627).

Esta perspectiva que pone atención en la filogénesis y la ontogénesis ha sido bastante socorrida por los que abogan por la inclusión de la historia en el ámbito educativo.

Bagni propone introducir elementos históricos en la comunicación de los saberes con el fin de mejorar su enseñanza.

> Si utilizamos de nuevo la terminología de Chevallard (1985), la historia de las matemáticas puede emplearse con toda utilidad en la transposición didáctica del *savoir savant* (saber sabio) a la forma del saber, utilizado de manera efectiva en el proceso de enseñanza/aprendizaje.
>
> Por lo que se refiere al *savoir savant*, partamos de la hipótesis de una visualización sencilla del desarrollo histórico de un concepto matemático, lo cual puede considerarse como una secuencia de (al menos) dos fases: una primera en la cual se percibe el concepto de forma intuitiva (o sea, instrumentalmente), y una segunda madura,

> estructural. Muchos siglos pueden dividir tales fases. (Bagni, 2001, pág. 54).

Y aunque advierte también que la simple propuesta de un reclamo histórico no es siempre suficiente para garantizar un pleno aprendizaje, señala que puede ser útil desde el punto de vista didáctico.

Guacaneme, un investigador Colombiano interesado en incluir la historia como un conocimiento central en la formación de profesores, retoma una pregunta planteada por Fauvel y van Maanen (1997) en un asunto relacionado con la funcionalidad de la apropiación del conocimiento histórico: ¿qué clase de Historia de las Matemáticas es la adecuada para la formación del profesor? Aceptando que esta pregunta lleva implícita la alusión a la existencia de tipos de Historia de las Matemáticas. Menciona que en el ámbito de la investigación relacionada a este aspecto se pueden encontrar al menos cinco categorías respecto de su objeto de referencia:

> Los que aluden a la racionalidad (los por qué), a las intenciones (los para qué), al tipo de historia (los qué), a las estrategias metodológicas (los cómo) y al momento adecuado (los cuándo), de una formación histórico-epistemológica en función del conocimiento del profesor. (Guacaneme, 2010).

La relación de la historia y la formación de profesores ha sido bidireccional, es decir, además de las investigaciones en las que la historia ha sido contemplada dentro de la formación de profesores, la formación de profesores también ha sido foco de interés para los investigadores de la historia. Trabajos como los de Silva (2008) y Sierra (1999) han analizado la formación del profesor de matemáticas en siglos pasados, en el contexto brasileño y el español, respectivamente.

En el ámbito mexicano, Hitt (1998) menciona que el aspecto histórico fue de las primeras líneas de investigación desarrolladas en la Matemática Educativa.

> El análisis de la historia de las matemáticas proporcionó elementos para ser considerados en el diseño de lecciones: estos materiales didácticos fueron atractivos e interesantes. Después, estos investigadores preocupados por los fenómenos ligados al aprendizaje incorporaron a su problemática las ideas de Bachelard (1971, 1977) sobre epistemología. De 1978 a 1996 parte del grupo se preocupó por la detección de obstáculos epistemológicos por medio del análisis histórico crítico. Podemos ejemplificar la investigación que caracteriza esta línea con algunos estudios considerando diferentes ramas de la matemática como la geometría, precálculo, cálculo y análisis.

Como Hitt menciona, es de destacar el trabajo de varios investigadores del Centro de Investigación y Estudios Avanzados (Cinvestav) del Instituto Politécnico Nacional (IPN) en el ámbito de estudios epistemológicos. En fechas recientes la investigación de corte histórico ha sido retomada en nuestro país con trabajos como el de Rodríguez (2010), López-Flores (2011), Carrillo, López y Sierra (2011), Carrillo, López-Flores y Rodríguez (2012), Rodríguez y Vicario (2014).

Algunos algoritmos en la historia sobre la suma y la resta

El desarrollo del pensamiento matemático se fortalece en principio, con el cálculo de operaciones aritméticas, de tal forma que su sistematización y contextualización en nuestro pensamiento las convierte en "procesos naturales". Dos operaciones aritméticas fundamentales, que continúan al proceso natural del conteo, y que iniciamos en la primera etapa de nuestra vida es la suma y la resta. Estas operaciones se enseñan desde el preescolar, desarrollando las nociones de aumentar o de quitar. Su formalización conceptual como un algoritmo se alcanza en el nivel básico, en los primeros años de la educación primaria, y allí se han identificado varias dificultades al resolver estas operaciones (Rodríguez, Romero, Maldonado, Navarro y Vicario, 2015).

Una perspectiva de este grupo temático es que la historia de la matemática puede favorecer los procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática, por ello mostramos algunos ejemplos de operaciones para sumar y restar considerando métodos antiguos. La finalidad es que el profesor tenga una perspectiva diferente de cómo estos algoritmos se aplicaban y pueda contrastarlos con la enseñanza de estas operaciones en la actualidad.

Algunos algoritmos que aparecieron en el siglo XIV se debieron a trabajos relacionados con los números indoarábigos y sus usos. La palabra algoritmo se deriva de la palabra *Algoritmi*, la cual a su vez fue una degeneración del nombre AL-KHOWARIZMI, esto debido a una traducción latina donde se lee la frase "dicho ha Algoritmi…" Aquí el nombre de al-Khowarizmi se ha convertido en Algoritmi. Ahora sabemos que *algoritmo*, en general, se refiere a un conjunto ordenado y finito de operaciones o un método que permite hallar la solución de algún problema. En particular, aquí lo consideraremos como un método o patrón para encontrar sumas, productos, diferencias y cocientes.

Algoritmos de la suma (ejemplo 1)

Generalmente usamos técnicas para obtener la suma de números. Estamos tan familiarizados con la operación suma, que nos resulta extraño imaginar más de una técnica para obtenerla, sin embargo veremos a continuación cómo sí existieron otras técnicas.

En el siglo XVII *Gemma Frisius* (1540) introdujo el siguiente método de suma, éste consiste en escribir el sumando mayor en la parte superior de la columna y las siguientes debajo de ella, en orden decreciente:

$$
\begin{array}{cccc}
4 & 3 & 2 & 1 \\
 & 7 & 8 & 5 \\
 & & 6 & 6 \\
\hline
 & & 1 & 2 \\
 & 1 & 6 & \\
1 & 0 & & \\
4 & & & \\
\hline
5 & 1 & 7 & 2
\end{array}
$$

El algoritmo funciona de la siguiente manera: escribir la suma de cada columna en orden de derecha a izquierda y finalmente sumar las sumas parciales.

Podemos observar que el algoritmo se basa en la descomposición de un número en unidades, decenas, centenas, unidades de millar, etc., y sumarlas entre sí. Esto es:

$$\begin{array}{lr} \text{12 unidades} & = \quad 12 \\ \text{16 decenas} & = \; 160 \\ \text{10 centenas} & = \; 100 \\ \text{4 unidades de millar} & = 4000 \\ \hline & 5172 \end{array}$$

Otros métodos utilizados por los hindúes son el utilizado actualmente y el llamado *retrógrado*, el cual consiste en empezar a la izquierda e ir borrando los números cuando "se lleva algo". Veamos un ejemplo del método retrógrado:

$$\begin{array}{r} 4321 \\ 785 \\ 66 \\ \hline 4 \\ 10 \\ \hline 5 \\ 16 \\ \hline 1 \\ 12 \\ \hline 5172 \end{array}$$

El algoritmo funciona de la siguiente manera: escribir la suma de la primera columna (el orden es de izquierda a derecha) y en seguida, debajo, la suma de la segunda, alineando 1 con 4, realizar dicha suma.

Aquí podemos darnos cuenta de que el funcionamiento del algoritmo se basa en sumar primero las cantidades de mayor rango (unidades de millar en nuestro ejemplo), después las que les siguen (centenas) y de éstas ver cuántas son de las anteriores y sumarlas y continuar de esta manera hasta las unidades.

Algoritmo de la resta (ejemplo 2)

El concepto de resta es un poco más complicado que el de la suma, puesto que algunas veces se deben enfrentar situaciones donde el *minuendo* es menor que el *sustraendo*. El significado más común de esta operación es el de quitar una cierta cantidad (sustraendo) a otra que tenemos (minuendo). La palabra *resta*, proviene del latín *restare* que significa exceder. La resta la podemos interpretar como la operación *inversa* de la suma y una de sus características es que podemos determinar por cuánto un número (minuendo) es mayor que otro (sustraendo).

A continuación describiremos dos métodos utilizados en la antigüedad. *El Algorismo de Columbia* consiste en evitar "pedir prestado" o reagrupar empezando el trabajo a la izquierda en vez de a la derecha. Por ejemplo, si queremos restar 5431 a 9761 hacemos lo siguiente:

$$\begin{array}{ll} 4 & \\ \cancel{9}\,7\,6\,1 & \text{1}^{\text{ro}} \text{ realizamos la resta} \\ \cancel{5}\,4\,3\,1 & 9-5=4\,,\ \text{tachamos } 9 \text{ y } 5 \text{ y escribimos } 4 \end{array}$$

encima de 9

4

$\cancel{4}\ 3$ — 2^{ro} realizamos $47 - 4 = 43$

$\cancel{9}\ \cancel{7}\ 6\ 1$ — tachamos 4, 7 y 4 y

$\cancel{5}\ \cancel{4}\ 3\ 1$ — escribimos 4 encima de 4 y

3 encima de 7

$4\ 3$

$\cancel{4}\ \cancel{3}\ 3$ — 3^{ro} realizamos $36 - 3 = 33$

$\cancel{9}\ \cancel{7}\ \cancel{6}\ 1$ — tachamos 3, 6 y 3 y

$\cancel{5}\ \cancel{4}\ \cancel{3}\ 1$ — escribimos 3 encima del 3 y

3 encima de 7

$4\ 3\ 3$

$\cancel{4}\ \cancel{3}\ \cancel{3}\ 0$ — 4^{to} realizamos $31 - 1 = 30$,

$\cancel{9}\ \cancel{7}\ \cancel{6}\ \cancel{1}$ — tachamos 3, 1 y 1 y

$\cancel{5}\ \cancel{4}\ \cancel{3}\ \cancel{1}$ — escribimos 3 encima del 3 y

0 encima del 1

En consecuencia, el resultado de restar 5431 a 9761 es 4330

Este método aditivo de sustracción era usado en el siglo XVI por *Buteo*. Trescientos años después, los educadores alemanes observaron este método que estaba en uso en las escuelas austriacas. Desde aquel entonces se le llama frecuentemente “El Método Austriaco”.

Metodología para la discusión en el grupo

Realizaremos tres fases en la discusión temática en correspondencia a los *procesos de reflexión* descritos en Parada y Pluvinage (2014, pag.87) (quienes consideraron las ideas de Dewey (1989) y Schön (1992)):

- Fase 1. La *reflexión-para-la acción* surge en la interacción de la matemática escolar y el profesor, cuando el profesor analiza la actividad que se va a llevar a cabo en el aula, es decir, la forma como el maestro planea la clase, comprende la temática de estudio, diseña y selecciona los recursos que implementará en el aula.
- Fase 2. La *reflexión-en-la acción* está presente en la interacción del profesor y el estudiante cuando el profesor establece esa relación mediática entre el conocimiento y el estudiante; también está presente en la forma como conduce el aprendizaje

esperado por parte de los estudiantes y en la capacidad de responder a las situaciones inesperadas de la clase.

- Fase 3. La *reflexión-sobre-la acción* cumple una función crítica de lo ocurrido en el aula; la forma como el profesor evalúa la interacción entre el conocimiento matemático escolar y el estudiante, desde la perspectiva de la consecución de los objetivos de aprendizaje esperados.

Por la temática del grupo, consideramos pertinente en la fase 1, que se inicie la reflexión con base en dos preguntas que plantea Freudenthal (1981, citado en Rodríguez, 2010, pág. 7):

¿Debe un profesor de matemáticas saber algo sobre la historia de ellas?

¿Cuál puede ser el uso de la historia de las matemáticas?

Bajo la orientación de estas preguntas, se discutirán las distintas posturas sobre la investigación histórica en educación matemática, mencionadas en la sección historia en la formación de profesores de matemáticas, con la finalidad de ser inclusivos con los participantes y se identifiquen con alguna de éstas. En esta misma fase se analizarán los conceptos suma y resta como generalmente se hace para su planeación de clase y enriqueciendo ésta con la inclusión de la historia de la matemática como recurso didáctico a través de los ejemplos 1 y 2. En la fase 2, analizaremos los ejemplos 1 y 2 y las distintas situaciones que el profesor cree los estudiantes responderán. Finalmente en la fase 3, reflexionaremos sobre las ventajas y desventajas de considerar a la historia de la matemática como recurso didáctico en el aula. Y analizaremos ejemplos de los participantes del grupo temático.

Conclusiones

Con base en nuestra experiencia tanto en el desarrollo de investigaciones de corte histórico en la Educación Matemática como en la Formación Docente, convenimos en que la historia de las matemáticas puede ser una herramienta útil para el docente de matemáticas. Ante ello, invitamos a los profesores a participar en la discusión de cómo y en qué momento pueden implementarse estrategias didácticas que tengan como una de sus variables el conocimiento de la historia.

Los ejemplos mostrados son evidencia de conocimientos de antaño que bien pueden ser considerados para fortalecer los conocimientos que se enseñan actualmente. Evidentemente recurrir a la historia de la matemática como un recurso en el aula no es una actividad sencilla, se debe tener la disposición de entender procedimientos no habituales y que generalmente no aparecen en los textos, sino que se debe recurrir a fuentes históricas para posteriormente hacer una interpretación de la matemática allí expuesta, de tal forma que se rescaten elementos para considerarlos en el aula como enriquecimiento tanto al conocimiento del estudiante como del profesor.

Referencias bibliográficas

Anacona, M. (2003). Historia de las matemáticas en la educación matemática. *Ema*. *8*(1), 30-46.

Bagni, G. (2001). La introducción de la historia de las matemáticas en la enseñanza de los números complejos. Una investigación experimental desempeñada en la educación media superior. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4*(1), 45-61.

Bakker, A., & Gravemeijer, K. P. E. (2006). An historical phenomenology of mean and median. *Educational Studies in Mathematics, 62,* 149–168.

Carrillo, C., López-Flores, J.I. y Rodríguez, F. (2012). La investigación histórica en la educación matemática. Memoria de la *XV Escuela de Invierno en Matemática Educativa*. Ciudad de México, D.F.

Carrillo, C., López-Flores, J.I. y Sierra, M. (2011). La Didáctica de la Matemática como disciplina científica. El uso de la historia como herramienta metodológica. *Memoria de la XIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa*. Monterrey, Nuevo León. Disponible en: http://www.red-cimates.org.mx/Documentos/DOCUMENTOS_EIME_13/MemoriaEIMEXIII_web.pdf

Farmaki, V., & Paschos, T. (2007). Employing genetic 'moments' in the history of mathematics in classroom activites. *Educational Studies in Mathematics*, *66*, 83–106.

Fauvel, J. y Van Maanen, J. (Eds.) (2002). *History in Mathematics Education. The ICMI Study*. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers.

Furinghetti, F. & Radford, L. (2002). Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: from phylogenesis and ontogenesis theory to classroom practice. In: L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* Chapter 25 (pp. 631-654). New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Furinghetti, F. y Radford, L. (2008). Contrasts and oblique connections between historical conceptual developments and classroom learning in mathematics. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, 2nd Edition Chapter 24 (pp. 626 - 655). New York: Routledge, Taylor and Francis.

Guacaneme, E. (2010). ¿Qué tipo de historia de las matemáticas debe ser apropiada por un profesor? *Revista EDUCyT 2*, 146-148. Asociación Colombiana para la Investigación en Educación en Ciencias y Tecnología. ISSN: 2215-8227.

Hitt, F. (1998). Matemática Educativa: Investigación y desarrollo 1975-1997. En F. Hitt (Eds.) *Investigaciones en Matemática Educativa II*, (pp.41-65). Editorial Iberoamérica.

Jankvist, U. (2009). A categorization of the"whys"and"hows"of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 71,* 235-261. DOI 10.1007/s10649-008-9174-9

López-Flores, J.I. (2011). *Un análisis sistémico de la obra de José Mariano Vallejo desde la perspectiva de la Investigación Histórica en Educación Matemática*. Tesis doctoral. Universidad de Salamanca.

Parada, S. y Pluvinage, F. (2014). Reflexiones de profesores de matemáticas sobre aspectos relacionados con su pensamiento didáctico. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *17*(1), 83-113.

Rodríguez-Vásquez, F. (2010). *Desarrollo conceptual de los métodos iterativos en la resolución de ecuaciones no lineales: un enfoque didáctico.* Tesis doctoral. Universidad de Salamanca http://gredos.usal.es/jspui/handle/10366/76557

Rodríguez-Vásquez, F. M. y Vicario-Mejía, M. (2015). El uso de la historia de la matemática en la enseñanza. En. R. Rodríguez y F. Rodríguez (Eds.) *Memoria de la XVII Escuela de Invierno en Matemática Educativa.* En publicación.

Rodríguez, F., Romero, J., Maldonado, E., Navarro, C. y Vicario, M. (2015). *La enseñanza de la suma en el nivel básico.* México: Universidad Autónoma de Guerrero. (En prensa).

Sierra, M. (1999). La formación inicial de los profesores de primaria en matemáticas y su didáctica en España. Antecedentes y situación actual. En L.C. Contreras y N. Climent (Coords.), *La formación de profesores de matemáticas: estado de la cuestión y líneas de actuación*, págs. 23-50, ISBN 84-95089-23-8.

Silva, M.C.L. (2008). *A presença da matemática na formação do profesor do ensino primário em São Paulo no período de 1890 á 1930*. Tese (Doutorado) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

Tzanakis, C., & Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education*. The ICMI Study. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Autores

Flor Monserrat Rodríguez-Vásquez; CIMATE, UAGro. México; flor.rodriguez@uagro.mx
Carolina Carrillo-García; UAZ. México; cgcarolin@hotmail.com
José Iván López-Flores; UAZ. México; ivan.lopez.flores@gmail.com

Maribel Vicario-Mejía; CIMATE, UAGro. México; mvicario_maribel@hotmail.com

FORMACIÓN DE INGENIEROS Y TÉCNICOS DESDE LA MATEMÁTICA EDUCATIVA

Ruth Rodríguez, Bertha Ivonne Sánchez, Alberto Camacho, Ismael Arcos, Hipólito Hernández, Atenea De la Cruz, Olda Covián, Fernando Cajas

Resumen

El objetivo del grupo es reflexionar sobre la enseñanza de la matemática en escuelas de formación de futuros profesionales: ingenieros y técnicos, desde cinco grandes temas: 1) El tipo de matemáticas que debe ser enseñada y aprendida, 2) El reconocimiento de la pluralidad de enfoques geopolíticos que se tienen sobre ¿qué es una escuela de ingeniería y una escuela técnica? y ¿qué es una escuela de formación tecnológica? 3) La relación de las matemáticas con las ciencias de la ingeniería y los contenidos técnicos 4) El rol que juegan los profesionales en la transformación del conocimiento matemático hacia un saber práctico, y de qué manera ese saber práctico puede volverse al aula y 5) Las formas de modelización pertinentes en esos niveles.

Palabras clave: Ingeniería, modelación, prácticas.

Introducción

El grupo tiene como propósito organizar a profesores e investigadores interesados en la formación de futuros profesionales ingenieros y técnicos desde la Matemática Educativa. La mayoría de los miembros trabajan desde años atrás en esta problemática, desde diversas referencias y diferentes marcos teóricos y metodológicos. Como veremos a lo largo de la exposición de sus posturas, todos tienen propuestas en esta temática y algunos otros comparten reflexiones en común.

La idea es conformar un grupo de profesores investigadores latinoamericanos interesados en esta temática.

El grupo nace en 2014 en el marco de la XVII Escuela de Invierno en Matemática Educativa (EIME XVII) realizada en el Estado de Oaxaca, República de México en diciembre 2014 (http://www.red-cimates.org.mx/index.php/eimes), teniendo una segunda reunión presencial durante la 29ava. Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 29, en la Universidad de Panamá, República de Panamá en Julio 2015 (http://www.relme29.up.ac.pa). Se espera que el grupo se reuna al menos dos veces al año, una durante los trabajos de EIME y la segunda en el marco de la RELME.

El objetivo en esta tercera reunión presencial en Oaxaca, cuya sede es la EIME XVIII, es proponer un programa de trabajo del mismo para los siguientes 5 años, alrededor de las preguntas iniciales (ver resumen) además de ahondar en otras problemáticas que puedan surigir en las discusiones al centro del grupo. La intención es recopilar y reunir la diversidad de reflexiones de la puesta en común y plasmarlas en:

a) Artículos en extenso del grupo (Rodríguez, Sánchez y Camacho, 2014),

b) Artículos en extenso de algunos miembros del grupo, que compartan puntos de vista comúnes (Cajas, 2015) y, finalmente

c) La producción de un libro (a publicarse en diciembre 2015/ enero 2016).

Otro interés es la creación de:

a) Un espacio Web del grupo, como página en redes sociales (buscar grupo público en Facebook Formación de Ingenieros desde la Matemática Educativa, ó Twitter)

b) Grupo público en Facebook: Formación de Ingenieros desde la Matemática Educativa.

Algunas referencias importantes del grupo lo constituye el reconocimiento y previa participación académica de sus miembros en diversas asociaciones internacionales interesadas en este tipo de formaciones. Sólo por mencionar algunos ejemplos, citamos a:

a) Sociedad Americana de la Educación de la Ingeniería, ASEE por sus siglas en inglés (American Society for Engineering Education); ver http://www.asee.org

b) National Academy of Engineering (https://www.nae.edu/)

c) Sistema de Acreditacion de Programas de Arquitectura e Ingenieria (http://acaai.org.gt/)

d) Sistema de Homologacion Centro Americano de Programas de Ingenieria (http://www.csuca.org)

e) Programa de Pertinencia de las Ingenierias en America Latina (http://www.redusoi.org/, Cajas)

f) Consorcio Latinoamericano y del Caribe de Instituciones de Ingeniería; LACCEI por sus siglas en inglés; ver http://www.laccei.org

g) Grupo de estudio "Las interacciones entre las matemáticas y las otras disciplinas en la formación general y profesional" en el marco del Espace Mathématique Francophono Francophono, EMF por sus siglas en francés; ver en http://emf2015.usthb.dz

h) Grupo de estudio Interdisciplinariedad en Matemática Educativa (TSG22) en la Conferencia Internacional de Matemática Educativa, ICME por sus siglas en inglés, 2016 en Hamburgo; ver en http://icme13.org/topic_study_groups

A continuación, presentamos brevemente algunas de las propuestas del grupo, alrededor de las 5 preguntas iniciales, que se replican enseguida:

1. El tipo de matemáticas que debe ser enseñada y aprendida en ingeniería y en escuelas de técnicos,
2. El reconocimiento de la pluralidad de enfoques geopolíticos que se tienen sobre ¿qué es una escuela de ingeniería?
3. La relación de las matemáticas con las ciencias de la ingeniería,
4. El rol que juega el ingeniero en la transformación del conocimiento matemático hacia un saber práctico, y de qué manera ese saber práctico puede volverse al aula,
5. Las formas de modelización pertinentes en esos niveles.

Se presenta la postura de cada miembro del grupo a través de la discusión de alguna de las preguntas previamente planteadas.

Ismael Arcos: Matemáticas en la formación de ingenieros desde la Matemática Educativa

Desde la experiencia en la docencia y en la investigación de Ismael Arcos (Arcos, 2015), los trabajos se desarrollan principalmente alrededor de las dos primeras preguntas para el trabajo del grupo, esto es:

(a) ¿Qué tipo de Matemáticas es la que maneja el Ingeniero?, ¿cómo trata el ingeniero el conocimiento matemático? y

(b) ¿Qué usos da al conocimiento matemático?, ¿cómo con ese conocimiento resuelve sus problemas?

Alrededor de estas preguntas, se ha reflexionado respecto de diversas situaciones, algunas de ellas son:

(1) ¿Cuál es la concepción de Ingeniería?,

(2) ¿Qué se entenderá por la formación de ingenieros?,

(3) ¿Qué se entiende por la(s) Matemática(s) en la Formación de Ingenieros? y

(4) ¿Cuál es el papel de las Matemáticas en las Escuelas de Ingeniería.

A partir de todo esto, parece necesario reconocer que el papel de la matemática en la actividad profesional depende, en buena medida, de las características de dicha actividad, y que el pensamiento matemático, es decir, el conjunto de procesos mentales que ocurren cuando se ocupa la matemática en la práctica profesional, es de naturaleza deferente ¿diferente?, según las características de la profesión.

Podemos decir que el pensamiento matemático en la actividad del matemático puede estar fuertemente vinculado a la lógica formal, mientras que en la ingeniería se relaciona más bien con la modelación y la resolución de problemas.

En consecuencia, la formación matemática en escuelas de ingeniería debiera orientarse, más que hacia el rigor lógico y el pensamiento racional, al desarrollo de esas dos grandes competencias: la modelación y la resolución de problemas.

Como matemático educativo que labora en una escuela de ingeniería, Arcos (2015) ha desarrollado actividades relacionadas con algunos de los siguientes aspectos:

1. Determinación de los propósitos generales del conjunto de cursos de Matemáticas, como parte de la formación escolar de los futuros profesionales de la ingeniería. Por lo tanto, en la determinación más o menos precisa de los contenidos específicos de esos cursos.
2. Propuesta y exploración de las posibles maneras en las que esas temáticas deben atenderse en las aulas y en otros espacios de aprendizaje.
3. Diseño y elaboración de textos y otros materiales para la enseñanza de las Matemáticas en escuelas de Ingeniería.

4. Diseño y exploración de actividades de aprendizaje con o sin la ayuda de elementos y herramientas tecnológicas.
5. Diseño y exploración de instrumentos de evaluación de los aprendizajes.

Se asume, desde esta perspectiva, que todas aquellas actividades de indagación bibliográfica, hemerográfica o aquellas desarrolladas en aula o en cualquier otro escenario en donde puedan ocurrir aprendizajes de Matemáticas, por parte de los estudiantes de una escuela de Ingeniería, bien pueden denominarse actividades de investigación en Matemática Educativa.

Hipólito Hernández Pérez, Adriana Atenea de la Cruz Ramos: Matemáticas en la formación de ingenieros desde la Matemática Educativa

En los trabajos desarrollados por Hernández, Muñoz y Buendía (2007); Hernández, Rodríguez y De la Cruz (2010); Hernández y Solís (2013); y Hernández y Esqueda (2014) se realizaron investigaciones respecto a la modelación y solución de problemas en el contexto de la ingeniería civil, considerando, el plan de estudio de la Universidad, es decir: "la Ingeniería Civil, está orientada a formar integralmente a profesionales capaces de incidir y responder a las demandas sociales a través de la planeación, diseño, construcción, mantenimiento y operación de obras civiles, asimismo orientados al aprendizaje permanente, con calidad humana y socialmente responsables" (Universidad Autónoma de Chiapas, UNACH, 2007), así como, además, se considera que el papel del ingeniero civil debe ser el resolver problemas de la ingeniería que se presentan en la sociedad, con la finalidad de analizar y predecir fenómenos naturales, optimizar los recursos, con el objeto de su sustentabilidad. Bajo estas consideraciones, los profesores de matemáticas (Matemática Educativa) debemos centrarnos en la formación matemática de los ingenieros en la modelación y resolución de problemas cotidianos, desde un punto de vista práctico y no tanto de la lógica formal. Esta postura se debe a los comentarios y experiencias con los ingenieros en ejercicio de su profesión, en tanto deben resolver los problemas de ingeniería considerando como punto de partida un conocimiento previo y empírico, y un análisis a partir de su experiencia, que posteriormente hacen uso del pensamiento matemático para su validación.

Además, compartimos la idea de Einstein (1934):

> (…) la experiencia justifica nuestra confianza en que la naturaleza es la realización de lo más simple que puede ser matemáticamente concebido. Estoy convencido de que una construcción puramente matematica puede permitirnos encontrar los conceptos y las conexiones necesarias entre ellos que proveen la clave del entendimiento de los fenómenos naturales.

Por tanto, intituivamente los fenomenos naturales pueden ser descritos y entendidos en terminos de modelos matemáticos y resueltos por muchos cientificos. En este sentido hay que discutir si esa intuición está fundamentada o no. Los modelos matemáticos pueden integrar información experimental cuantitativa o cualitativa y su visualización, que recuperan comportamientos observados y establecer una retroalimentación en los diferentes procesos de la construcción de conocimiento matemático, es decir, buscar la interacción entre todos los niveles representados en los modelos matemáticos.

Ruth Rodríguez: La importancia de la modelación y la simulación computacional en la formación de Ingenieros

Desde nuestra óptica, al igual que Arcos (2015), consideramos fundamental reconocer que la matemática que el ingeniero necesita debe ser más funcional que la matemática formal en el sentido estricto de la palabra. Damos cuenta que el conocimiento matemático presenta al menos dos facetas: como objeto de conocimiento, pero también como herramienta valiosa para modelar la realidad del futuro ingeniero. Es por ello que la modelación es una cuestión fundamental para esta cuestión.

A pesar de que estudios previos (Rodríguez, 2010) se han centrado particularmente en la enseñanza y aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales como herramientas para modelar; en los últimos años nos ha preocupado el hacer una propuesta de un curso completo de Ecuaciones Diferenciales para ingenieros, que muestre las prácticas fundamentales de modelación que ellos necesitan (Rodríguez, 2013a y 2013b). Gracias al trabajo en la dirección de conocer más la Matemática que el ingeniero necesita en su área de trabajo, nos dimos a la tarea de comprender mejor las prácticas y usos de los ingenieros de la Matemática (Rodríguez, 2013b). Se tinen luego ejemplos muy concretos en áreas específicas; de manera similar a Hernández, Rodríguez y De la Cruz (2010). Estos últimos han centrado su interés en la parte de la ingeniería civil, mientras que nosotros nos hemos interesado más en la parte de Ingeniería Industrial en Sistemas (Rodríguez y Bourguet, 2014, 2015); Ingeniería de Control (Smith & Campbell, 2011) e Ingeniería Química (Ramírez y Macías, 2013).

Parte del estudio de éstas prácticas de ingeniería, han mostrado la importancia que se tiene de lidiar con la realidad desde la formación inicial matemática de los futuros ingenieros, de ahí nuestro enfoque y énfasis en las experimentaciones en clase de matemáticas (Rodríguez, 2013a), además del uso de simuladores computacionales como Matlab (Smith & Campbell, 2011) y Vensim (Rodríguez y Bourguet, 2014, 2015).

Nuestros hallazgos, principalmente en los últimos trabajos sobre el uso de la construcción de simuladores y el uso de "un nuevo lenguaje gráfico" para expresar ideas matemáticas, ha sido de gran valor para el diseño de actividades en clase de matemáticas. Estos últimos muestran la ventaja que propone el uso de lenguajes a los futuros ingenieros, el tratamiento de problemas más "reales" y complejos de los que usualmente suelen tratar en clase y, sobre todo, el abordar problématicas de naturaleza social, y no tanto escolar.

Parte de nuestro trabajo previo gira alrededor de las preguntas 1, 3, 4 y 5 planteadas, anteriormente:

1) El tipo de matemáticas que debe ser enseñada y aprendida,

3) La relación de las matemáticas con las ciencias de la ingeniería,

4) El rol que juega el ingeniero en la transformación del conocimiento matemático hacia un saber práctico, y de qué manera ese saber práctico puede volverse al aula,

5) Las formas de modelización pertinentes en esos niveles.

Deseamos resaltar que hacemos investigación en áreas específicas de la Ingeniería (Industrial y de Sistemas) y reconocémos cómo éstas prácticas pueden ser llevadas al aula de matemáticas por medio de actividades específicas y, finalmente, tratamos de entender cómo éstas afectan, de manera positiva, el entendimiento y comprensión de los estudiantes (futuros ingenieros) sobre una noción matemática en particular, en nuestro caso, de la Ecuación Diferencial como herramienta para modelar diveras situaciones.

Reconocemos la necesidad de adoptar marcos teóricos específicos, como el estudio de praxeologías (Rodríguez, 2010) para identificar y caracterizar las prácticas de modelación de los futuros ingenieros (Camacho y Sánchez, 2015; Camacho et al., 2011; Camacho y Romo-Vázquez, 2015, Covián, 2013). A pesar de que los esfuerzos iniciales de conformación de este grupo de investigación no contempla la adopción de un marco único de referencia; creemos posible adoptar en los estudios futuros la Teoría Antropológica de Chevallard y en particular, la noción de praxeología, para caracterizar los estudios de prácticas de modelación de los ingenieros, que nos permiten tener más elementos para la creación, diseño y evaluación de actividades en el aula de Matemáticas.

Fernando Cajas: Emergencia de la Ingeniería Educativa y su relación a Matemática Educativa

Durante las últimas tres décadas han emergido estudios cognitivos sobre lo que saben los ingenieros alrededor del diseño para casos específicos (Vicenti, 1993 para aeronáutica). Emergen también los nuevos estudios de antropología de la ingeniería realizados por Louis Buciarelli (1998) sobre lo que realmente hacen los y las ingenieras en diferentes espacios de trabajo, tal el caso de diseño de celdas fotovoltaicas y los trabajos sobre la construcción social de la tecnología y mas recientemente Madhavan (2015) sobre cómo piensan los ingenieros. Se da la emergencia de revistas científicas tales como los Journal for Technology and Human Values, Journal of Culture and Technology, Journal of Engineering Education, European Journal of Enginering Education, Australian Journal of Engineering education, etc. Estos proyectos otorgan elementos para definir una nueva epistemología de la ingeniería, que no se centra solamente en la epistemología de la ciencia, sino una epistemología que se base en las prácticas de la ingeniería.

Dentro de la comunidad de Matemática Educativa también se dan los primeros estudios sobre el papel de la matemática en ingeniería (Farfán, 1991; Trejo, Camarena y Trejo, 2013). En términos generales estos estudios han ocurrido desde la perspectiva de la matemática y diferentes marcos de Matemática Educativa. Sin embargo, la matemática solo es una parte de la caja de herramienta de los ingenieros, que es utilizada de forma pragmática en la práctica de ingeniería. En los programas de ingeniería la matemática ha sido introducida como parte de un paquete llamado Ciencias Básicas. A nivel internacional, con raras excepciones, los programas de educación en ingeniería están construidos desde la concepción de la ingeniería como conocimiento y vistos como ciencia aplicada. Esto ha llevado a generar programas que inician con Ciencias Básicas, particularmente Física y Matemática, seguidos luego de Ciencias de las Ingeniería para concluir con Materias Profesionales.

La matemática y la física son los cursos clásicos de las Ciencias Básicas y se han introducido al currículo de ingeniería desde la epistemología de la matemática y de la física, casi siempre epistemologías ingenuas de la ciencia. El reto que se tienen con los programas de ingeniería, es replantear las Ciencias Básicas desde una epistemología de la ingeniería. La Matemática Educativa, por otro lado, se ha desarrollado como campo de investigación y se ha acercado a la ingeniería desde perspectivas matemáticas, con la ventaja de que ha ampliado los marcos teóricos para su análisis. Así se encuentran perspectivas clásicas enfocadas en la didáctica de la matemática, sin trastocar el discurso matemático escolar, moviéndose hacia marcos cognitivistas y ahora hacia marcos sociales, donde se reconoce que la matemática es una construcción social. En ese sentido se espera que los marcos teóricos de la Matemática Educativa, también incorporen a la epistemología de la ingeniería cuando se analice el papel de la matemática en ingeniería.

Esperamos que comunidades de matemáticos educativos interesados en matemática en ingeniería, también conozcan los trabajos propios de las comunidades de educación en ingeniería, que de a poco conforman un área de investigación en el aprendizaje de esta disciplina (Borrego et al., 2014, Johri y Olds, 2014).

Bertha Ivonne Sánchez y Alberto Camacho: Recursos para la construcción de conocimiento

El uso de recursos de la física y otras disciplinas en la enseñanza de la matemática, ha servido para motivar los tópicos y objetos matemáticos, de modo que a través de ellos se puedan interpretar algunos resultados de los problemas prácticos que con esos recursos y otros conceptos se puedan resolver y cuya resolución se exige en los planes y programas de estudio, principalmente en aquellos de las carreras de ingeniería. Es así que la introducción de conceptos externos a la práctica matemática, involucra otro tipo de técnicas y prácticas intermediarias, que se unen con las técnicas de la matemática, cuya asociación sirve de puente para la resolución de tareas y ejercicios (Camacho y Sánchez, 2015).

Al menos para la enseñanza, el uso de ese tipo de saberes para la adquisición del conocimiento, ha sido convenido tanto por los autores de textos, los profesores y quienes han diseñado los planes de estudio, sin un cuestionamiento de fondo que valide su uso. Esos conocimientos son cotidianos en la matemática escolar, principalmente en el nivel superior de ingeniería, y son marcados por una tradición en la resolución de *problemas de aplicación* para cada tema específico, que supuestamente tienen que ver con las especialidades de las carreras. Ante ello nos cuestionamos:

¿Cómo modelar actividades de enseñanza aprendizaje bajo esas condiciones?

A partir de la pregunta, proponemos desarrollar procesos de modelización de problemas específicos de la matemática escolar, para favorecer en los estudiantes la comprensión de conceptos a través de instrumentos elementales de fácil construcción, que se simulan a partir del trabajo que se realiza en la actividad cotidiana, dentro de la misma ingeniería. En ese dominio es posible establecer relaciones experimentales entre actividades prácticas (macro-espacio), la apropiación que puedan hacer los profesores-experimentadores de esa actividad (meso-espacio) y la manera en que la desarrollen los estudiantes (micro-espacio). La modelización de las actividades se construyen previamente por el profesor-experimentador, involucrando en ella los conocimientos del curso, y superponiéndolos con los instrumentos y conocimientos prácticos.

Hasta ahora, hemos experimentado el proceso de modelización del concepto de *pendiente*, que se enseña en 5º semestre del nivel medio superior en México, simulándo en ella el trabajo que realizan los topógrafos cuando nivelan con sus propios instrumentos las secciones transversales a los ejes de carreteras. El propósito fue reconocer la evolución de la componente interna, cognición, de los estudiantes respecto al concepto de tangente, el mismo concepto de pendiente sólo que del lado de los topógrafos, a través de la actividad que desarrollaron en el aula de la nivelación de terrenos. Para ello se usaron algunos elementos de la matemática que se enseña en el bachillerato mexicano.

La aproximación de la modelización fue mostrada sobre una situación de enseñanza diseñada a partir de las capacidades de los alumnos para llevarla a cabo, de manera que, por un lado, se intentó que comprendieran el método de nivelación desarrollado por los topógrafos, aun cuando fuera parcialmente y, por otro, se procuró introducir el concepto de tangente de un ángulo desde esa perspectiva en la clase de 5º semestre. El análisis de los resultados de la experimentación, muestra que el arraigo que los estudiantes tienen del concepto de pendiente, como la razón entre los catetos del triángulo rectángulo, enseñado de esa manera a través de los libros de texto, estuvo presente en todas las decisiones que tomaron para llevar a cabo la a actividad, y que dificilmente pueden incorporar una definición paralela del concepto, como es la tangente del ángulo.

Olda Covián: Las matemáticas en la formación de futuros profesionales: técnicos en construcción e ingenieros en mecatrónica

En las formaciones profesionales, una de las características principales es la convergencia de tres instituciones que las conforman: la enseñanza de las matemáticas *E*(M), la enseñanza de formación específica o de disciplinas intermediarias *E*(DI) y la institución práctica (institución en la que se deben desarrollar profesionalmente los egresados de dichas formaciones). Debido a esta característica las preguntas que surgen en torno de los conocimientos que ahí se dan, por mencionar algunas, son: ¿Los conocimientos matemáticos impartidos en *E*(M) son suficientes o están al servicio de la formación disciplinar *E*(DI)? ¿Qué características tienen estos conocimientos matemáticos? Y quizá una de las preguntas más importantes ¿Cómo acercar los conocimientos impartidos tanto en *E*(M) como en *E*(DI) a la práctica profesional? ¿Son suficientes las simulaciones y modelaciones elaboradas en *E*(DI) para enfrentarse a los problemas profesionales? Al tratar de aportar respuestas a estas preguntas, diversos trabajos (Romo-Vázquez, 2009; Covián, 2013) han evidenciado que las matemáticas en *E*(M) tienen una distancia considerable con respecto a *E*(DI) puesto que los modelos usados en la práctica responden a las condiciones del contexto y muchas veces en la escuela esas condiciones no son “reproducidas”, por lo que los estudiantes estructuran sus propios modelos, que al momento de ser llevados a la práctica resultan poco eficaces para abordar los problemas.

Tomando como antecedente la problemática planteada, es que se desarrolla un proyecto que propone el diseño de actividades didácticas que tome en cuenta contextos extra-matemáticos, desde los cuales se pueda contextualizar para permitir la cercanía entre *I*p, *E*(DI) y *E*(M). Este proyecto se fundamenta en argumentos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y se basa en la identificación de modelos en contextos extra-matemáticos que puedan ser susceptibles a ser transpuestos a E(M).

Para este reporte se hablará en particular de dos proyectos inmersos en formaciones específicas, el Bachillerato Tecnológico y la formación pre-universitaria. Formaciones, que al igual que las profesionales, como la ingeniería, demandan conocimientos de Ip, E(DI) y

E(M). Ambas investigaciones están enmarcadas en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD).

La primera se inserta en el Bachillerato Tecnológico, específicamente en la formación de futuros profesionales técnicos en construcción (Covián, 2013). Desde ésta se caracterizó el conocimiento matemático en la actividad de levantamiento topográfico (Covián y Romo-Vázquez, 2014). Al elaborar el análisis praxeológico se identificaron modelos de *E*(DI), suceptibles de ser transpuestos a *E*(M), como por ejemplo, el cálculo de área de terrenos. Una particularidad de esos tipos de tareas, es que los propios tipos de terrenos determinn la técnica matemática que se usará. Por ejemplo, no es lo mismo calcular el área en un terreno "plano" como en un terreno "no plano" (que posee lagos o sinuosidades).

Otro ejemplo es el trabajo en desarrollo por una estudiante del programa de maestría en Matemática Educativa (CICATA-IPN). Esta investigación tiene por contexto la formación pre-universitaria, que permite a los estudiantes al final del segundo año de cursarla, adquirir un título de profesional técnico. Desde ésta última se pretende diseñar una actividad didáctica basada en la modelación para el curso de control automático, que articule elementos de E(M) y E(DI).

En particular se mostrará la importancia de la elección de un contexto extra-matemático para este tipo de diseños ¿Qué hace suceptible a los contextos extra-matemáticos de ser transpuestos a E(M)?

Conclusiones perliminares del grupo

El propósito del grupo, es determinar cómo desde la comunidad de Matemática Educativa podemos contribuir a la formación de diversas profesiones, particularmente ingenieros y técnicos, esta propuesta es relativamente nueva, pero dadas las diversas investigaciones que han sido expuestas, consideramos tener material suficiente para aportar en esta dirección.

Diferentes autores, desde diversas posturas teóricas, hemos contribuido a las cinco principales interrogantes expuestas en un inicio. El propósito del grupo en reuniones latinoamericanas y mexicanas, como lo es la XVIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa, nos permitirán trabajar en esa dirección. Esperamos contribuir más a ese respecto durante las dos sesiones presenciales en el evento de diciembre 2015 en Oaxaca y contribuir en un segundo momento, con posturas y respuestas del grupo, a estas y otras interrogantes sobre el papel que juega, puede y debe jugar, la Matemática Educativa en la formación de ingenieros.

Referencias

Arcos, I. (2015). *El cálculo en Ingeniería*. Ponencia en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Chiapas en Abril 2015.

Borrego, M.; Foster, M. y Froyd, J. (2014). Systematic Literature Reviews in Engineering Education and Other Developing Interdisciplinary Fields. *Journal of Engineering Education*, 103 (1), 45-76.

Buciarelli, L. (1998). Engineering Design. MIT Press.

Cajas, F. (2001) Alfabetizacion científica y tecnológica: La tranposicion didáctica del conocimiento tecnológico. Revista Enseñanza de la Ciencias, 19 (2), 243-254).

Camacho A. & Romo-Vázquez A (2015). Déconstruction-construction d'un concept mathématique. Actes du Espace Mathématique Francophone, Alger.

Camacho, A., Sánchez, B., Blanco, R. & Cuevas J. H. (2011). Geometrización de una porción del espacio real. *Educación Matemática*, (23), 3, México.

Camacho, A. y Sánchez, B. (2015). *Praxeologías y empiremas. Recursos extremos para la construcción de conocimiento*. XIV CIAEM, México

Covián, O. (2013). *La formación matemática de futuros profesionales técnicos en construcción.* Tesis de doctorado no publicada. México, D.F. CINVESTAV-IPN.

Covián O. y Romo-Vázquez, A. (2014). Modelo Praxeológico Extendido una Herramienta para Analizar las Matemáticas en la Práctica: el caso de la vivienda Maya y levantamiento y trazo topográfico. *Boletim de Educação Matemática* [en linea] 2014, 28 (Abril-Sin mes) : [Fecha de consulta: 20 de septiembre de 2015] Disponible en:<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291231123008> ISSN 0103-636X

Einstein, A. (1934). On the method of theorical physics, Phylosophy of Science, 1(2): 163-169.

Farfán, R.(1991). R. (1997) *Ingeniería Didáctica*; Un estudio de la variación y el cambio. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Hernández, H., Muñoz, G., Buendía, G (2007). La modelación matemática en el contexto de ingeniería civil a través de la interpolación y la predicción. Crespo, C(2007). Acta Latinoamericana de matemática Educativa, Vol. 20, 567-572. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Hernández, H., Esqueda, C. (2014). Elementos de análisis escolar en la construcción de gráficas generadas por el modelado de llenado de recipientes. Revista Pakbal, Vol. 30, 32-38: Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Chiapas.

Hernández, H., Solís, M. (2013). Un estudio epistemológico del uso de la modelación matemática en la estabilidad en sistemas abiertos. Revista Pakbal, Vol. 28, 35-41: Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Chiapas.

Hernández, H., de la Cruz, A., Rodríguez, R. (2010). Situaciones didácticas en el contexto de ingeniería civil: caso infiltración de agua en un suelo específico. Lestón, P. (Ed.). Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 23, 977-984. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Johri, A. y Olds, M. (2014). The Cambridge Handbook of engineering education: Research and reflection on the future of the field. *Journal of Engineering Education*. Jul2014, Vol. 103(3), p363-368.

Madhavan, G. (2015). Applied Minds: How Engineers Think. Norton: Nueva York.

Ramírez, D. & Macías, M. (2013). Solving Material Balance Problems at Unsteady State using a Remote Laboratory in the classroom. *American Society of Engineering Education (ASEE) International Forum Proceedings*. Atlanta, Estados Unidos. Recuperado en:

http://www.asee.org/public/conferences/20/papers/8178/view#sthash.rUAqjad8.dpuf

Rodríguez, R. (2010). Aprendizaje y Enseñanza de la Modelación: el caso de las ecuaciones diferenciales. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 13 (4-I): 191-210. México. ISSN : 1665 - 2436

Rodríguez, R. (2013a). Innovation in the teaching of mathematics for Engineers through Modeling and Technology: a Mexican experience. *American Society of Engineering Education (ASEE) International Forum Proceedings*. Atlanta, Estados Unidos. http://www.asee.org/public/conferences/27/author_index/64528

Rodríguez, R. (2013b). Ambiente de aprendizaje para la enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales a través de la modelación y la simulación computacional. Propuesta de proyecto, apoyado por Fondo NOVUS del Tecnológico de Monterrey, 2013-2014.

Rodríguez, R., y Bourguet, R. (2014). Diseño Interdisciplinario de Modelación Dinámica usando Ecuaciones Diferenciales y Simulación. Proceedings of the 12th Latinoamerican and Caribean Consortium for Engineering Institutions. Guayaquil, Ecuador. http://www.laccei.org/index.php/publications/laccei-proceedings

Rodríguez, R., y Bourguet, R. (2015). Building bridges between Mathematics and Engineering: Modeling practices identified through Differential Equations and Simulation. American Society of Engineering Education (ASEE) Annual Conference and Exposition, Conference Proceedings. Atlanta, Estados Unidos. http://www.asee.org/conferences-and-events/conferences

Rodríguez, R., Sánchez, I. y Camacho, A. (2014). *Formación de Ingenieros desde la Matemática Educativa: aportes y retos*. Memorias de la XVII Escuela de Invierno en Matemática Educativa. Oaxaca: Red de Centros de Investigación en matemática Educativa A.C. Recuperado en: http://www.red-cimates.org.mx/images/pdf/EIMES/Memorias/memoria_eime_xvii.pdf

Romo-Vázquez, A. (2009). *Les mathématiques dans la formation d'ingénieurs*. Paris: Irem de Paris. Disponible en : http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00470285/fr/

Smith, C. & Campbell, S. (2011). *A First Course in Differential Equations, Modeling, and Simulation*. Boca Ratón: CRC Press.

Trejo, E.; Camarena, P. y Trejo, N. (2013). Las matemáticas en la formación de un ingeniero: una propuesta metodológica. *Revista de Docencia Universitaria*. REDU. Vol. 11, Número especial dedicado a Engineering Education, pp. 397-424. Recuperado el (12 de julio 2015) en http://red-u.net

Vicenti, W. (1993). *What Engineers Know and How They Know It: Analytical Studies from Aeronautical History*. Johns HopkinsUniversity Press, Baltimore.

Universidad Autónoma de Chiapas [UNACH] (2007). *Plan de estudios de la carrera de ingeniría civil*. Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Chiapas. México.

Autores

Ruth Rodríguez; Tecnológico de Monterrey. México; ruthrdz@itesm.mx
Bertha Ivonne Sánchez; Instituto Tecnológico de Ciudad Jiménez. México; ivonnesanchez10@yahoo.com
Alberto Camacho; Instituto Tecnológico de Chihuahua II. México; camachoalberto@hotmail.com
Ismael Arcos; Universidad Autónoma del Estado de México; ismael_arcos@msn.com
Hipólito Hernández; Universidad Autónoma de Chiapas. México; polito_hernandez@hotmail.com
Atenea De la Cruz; Universidad Autónoma de Chiapas. México; ateneadr@hotmail.com
Olda Covián; Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada - IPN. México; nadinne.olda@gmail.com

Fernando Cajas; Universidad San Carlos de Guatemala. Guatemala; fcajas@usac.edu.gt

HACIA LA INNOVACIÓN EN EDUCACIÓN ESTADÍSTICA

José Armando Albert Huerta, Blanca Ruiz Hernández, Santiago Inzunza Cazares, Sergio Hernández González, José Marcos López-Mojica.

Resumen

Este grupo temático busca dar continuidad a los esfuerzos por consolidar una comunidad de profesores e investigadores en educación estadística a nivel nacional a través de este espacio y que se viene haciendo desde hace varios años en las EIME. En esta ocasión, el grupo se propone discutir las posibilidades de hacer innovación a partir de los resultados de investigación, el uso de la tecnología y la experiencia en el aula. Con esa intención en nuestro grupo se aborda la importancia de las ideas fundamentales de estocásticos en el aula, el desarrollo del pensamiento inferencial estadístico, las nuevas oportunidades que ofrece el Geogebra como herramienta tecnológica a favor del razonamiento estadístico y una experiencia didáctica de su uso.

Palabras clave: Educación Estadística, innovación, investigación.

Introducción

Los estudios sobre educación estadística son relativamente recientes, en comparación con otras áreas de la didáctica de la matemática. Sin embargo, recibieron un particular impulso a partir de la primera reunión de la IASE (Asociación Internacional para la Educación Estadística) en 1993, en Perugia, Italia. Desde entonces, ha habido un gran número de publicaciones de investigación y difusión a través de diversos medios académicos. Nuestra intención con el grupo es abrir un espacio de reflexión sobre esta producción y de la moderna tendencia impulsada por nuestras instituciones educativas de hacer innovación en el aula. La producción actual es muy vasta y no se pretende sino dar muestra de algunos avances de investigación, elementos de diseño e incorporación de la tecnología hecho por profesores investigadores mexicanos con el fin de entusiasmar a otros para compartir y producir nuevas investigaciones e innovaciones en la educación estadística, así como de impulsar una comunidad de práctica de profesores investigadores en educación estadística en México. En una primera instancia se presenta la importancia de la enseñanza de las ideas fundamentales de estocásticos en nuestras aulas y cómo éstas promueven un razonamiento estocástico. Posteriormente, se presentan algunas ideas que están revolucionando el modo de enseñar estadística inferencial a estudiantes de recién ingreso universitario, y que están siendo útiles para el diseño de innovaciones en el aula. Se continúa con el uso de tecnología que es otra parte fundamental para el aprendizaje de la Estadística por su gran potencial de procesamiento de datos y visualización de ellos, así como de la creación de situaciones de aprendizaje capaces de impulsar el razonamiento estadístico en los estudiantes, en esta ocasión se aborda el Geogebra, que es un software abierto y con muchas posibilidades. Finalmente, se termina con una experiencia particular del uso de Geogebra en el salón de clase, para, luego, abrir un espacio de discusión entre todos los asistentes en el grupo.

Ideas fundamentales de estadística: Propuestas de enseñanza para la educación primaria

Por José Marcos López-Mojica

La reciente reforma educativa pretende que los estudiantes de educación básica desarrollen competencias (SEP, 2011) que les permitan resolver problemas de su vida cotidiana. En ese sentido, un reto importante para los docentes es proponer a los niños actividades de enseñanza apropiadas para el logro de ese objetivo. Además, las actividades de matemáticas deben estar ligadas a situaciones de la vida cotidiana del niño. Afrontar ese reto requiere que los docentes dominen el contenido matemático respectivo.

Recientes investigaciones han documentado el escaso y discontinuo tratamiento de los temas de probabilidad y de estadística (estocásticos) en el sistema educativo nacional, desde el nivel preescolar hasta el superior (por ejemplo, Ojeda, 1994; Limón, 1995; Carballo, 2004; Elizarraras, 2004; Salcedo, 2013; de León, 2002). Ese resultado atañe también a la docencia, ya que la falta de su formación en probabilidad y en estadística deriva en sesgos del pensamiento probabilístico y del razonamiento estadístico que se arraigan con el tiempo y son de más en más difíciles de erradicar.

La presente sección tiene la finalidad de reflexionar sobre la importancia de la enseñanza de las ideas fundamentales de estocásticos en nuestras aulas y cómo éstas promueven un razonamiento. Se interesa por el nivel básico (preescolar, primaria, secundaria), pues se considera que entre más temprana sea la introducción de los temas de estadística menos serán los problemas en su comprensión a nivel superior. Se toman en consideración los resultados de investigaciones teóricas. Una referente al desarrollo epistemológico de conceptos de estadística y de probabilidad. La otra concierne al desarrollo del conocimiento matemático en la interacción en el aula. Con la interrelación de estas dos teorías aplicadas en las aulas se podría promover una acción renovadora; es decir, se podría innovar con el planteamiento de situaciones de referencia (Steinbring, 2005) que impliquen a las diez ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975) en las aulas. Con lo anterior se estarían acercando cada vez más la investigación con la docencia.

La importancia de las ideas fundamentales de estocásticos en las aulas

La negligencia hacia los temas de estocásticos en el nivel básico, dificulta identificar aspectos importantes del razonamiento estadístico a tomar en cuenta en el planteamiento de actividades para introducir la estadística en el nivel medio superior. A falta de una formación sistemática sobre fenómenos aleatorios se arraigan sesgos del pensamiento del individuo, una de cuyas causas es el énfasis desmedido en el cálculo. Por ejemplo, Mevarech (1983) identifica un modelo de estructura profunda de estudiantes de licenciatura en problemas de estadística. Argumenta que los alumnos presentan una concepción errónea respecto al concepto de media; aplican las propiedades de grupo (principalmente la distributiva) en los problemas del cálculo de la media y de la media ponderada.

Maldonado y Ojeda (2009) informan sobre la comprensión de ideas fundamentales de estadística en la educación primaria. Realizaron un análisis de la propuesta institucional de ese nivel educativo, particularmente en el eje tratamiento de la información, y en las lecciones de texto respectivas. Encontraron “una reducción de la enseñanza de la estadística al uso de tablas, gráficas, pictogramas y diagramas como medios para organizar y comparar datos" (pág. 3). Además, los autores exponen que hay un predominio de la operatividad aritmética, la cual propicia el desvío de la naturaleza del fenómeno estadístico para asignar valores numéricos como medida de la frecuencia de eventos.

Heitele (1975) propone diez ideas fundamentales para la formación de conceptos de estocásticos, sustentada en una enseñanza que tiene un curriculum en espiral, que parta de un plano intuitivo y arribe a un plano formal; apoya ese tránsito en la relación entre modelo y realidad, con la pretensión de que el alumno pueda desarrollar un pensamiento científico sustentado en la cotidianeidad. Para Heitele, una idea fundamental es aquella que proporciona al individuo, en cada etapa de su desarrollo, modelos explicativos tan eficientes como sea posible y que difieren en los distintos niveles cognoscitivos, no de manera estructural, sino sólo en su forma lingüística y en sus niveles de elaboración (Heitele, 1975, pág. 188).

Por otra parte, gran parte de los procesos de enseñanza y de aprendizaje que se traducen en la interacción diaria entre profesor y estudiantes tienen lugar en el aula, donde el profesor pone en juego las estrategias de enseñanza que determinan el acto educativo. En ese sentido Steinbring (2005) ha realizado investigaciones respecto a la interacción en el aula con los contenidos matemáticos de estocásticos, ha revelado "la importancia de la intervención del profesor en la definición de las situaciones en las que han de participar los alumnos" (pág. 26). Steinbring (2005) plantea que "la apropiación de las nociones de matemáticas no resulta *a priori*, por lo que las experiencias matemáticas son fundamentales y el conocimiento se caracteriza como una relación epistemológica social, en la que entran en juego aspectos formales y contextos interpretativos" (pág. 48). A continuación, se presenta un ejemplo de actividad de enseñanza en la que se aplican las diez ideas fundamentales y el triángulo epistemológico.

Distribuciones centradas y uniformes

La situación consiste en el acomodo azaroso de canicas, liberadas por los embudos, en las casillas de la parte inferior de las bandejas.

I II III IV V

Figura 1. Bandejas para las distribuciones centradas y sesgada (Piaget e Inhelder, 1951).

El fenómeno aleatorio en foco en cada caso es el acomodo azaroso de las canicas en las casillas después de su vaciado por los embudos. El espacio muestra son las posibles casillas en las que pueden caer las canicas. La medida de probabilidad se considera, cualitativamente, con la relación del número de posibilidades de que una canica caiga en una casilla respecto al número total de posibilidades de ocupación de las casillas posibles.

El número de canicas por casilla es una variable aleatoria; la frecuencia relativa de una casilla es el número de sus canicas ocupantes respecto al total de canicas liberadas por el embudo. Se apela a la ley de los grandes números con la forma de la distribución de un número grande de canicas después de su vaciado. Gradualmente, por el número de casillas en las bandejas, se pasó de una distribución uniforme (bandeja I), a distribuciones centradas (bandejas II, III y IV) y a una sesgada (bandeja V).

Retos y oportunidades de educación en el pensamiento inferencial estadístico

Por Blanca Ruiz y José Armando Albert H.

En los últimos años han surgido diversas propuestas para la mejora de la enseñanza de la estadística en los cursos introductorios a estadística. Entre ellas destaca el trabajo de Aliaga Gunderson (2006), quienes elaboraron seis recomendaciones para mejorar la enseñanza en los cursos introductorios a estadística. Estas recomendaciones se enfocan principalmente a fomentar la cultura y el razonamiento estadístico a través del manejo de datos y actividades que conduzcan a cuestionamientos inferenciales. En ese sentido la inferencia informal fue propuesta como una forma de concretar la introducción del razonamiento estadístico en el salón de clases. Sin embargo, también se plantearon cuestionamientos sobre la forma más apropiada de establecer un vínculo entre la inferencia informal y la formal en el nivel universitario. Pfannkuch (2005) propone la inserción de una etapa intermedia entre la inferencia formal y la informal y Wild, Pfannkuch, Regan y Horton (2011) enfatizan en el papel del muestreo y su vinculación con la variabilidad. En común estas propuestas resaltan la importancia de replantear el currículo de los cursos introductorios de estadística con miras a la modificación de la forma y el momento en que son tratados los contenidos y por lo tanto, también a su epistemología.

En su mayoría en el primer curso universitario de estadística, se introduce inferencia estadística (y todo el bagaje de conceptos que conlleva) después de haber tratado probabilidad y funciones de probabilidad más o menos formalmente y de que se esbozó estadística descriptiva en las últimas semanas del curso. Esto exige que muchos conceptos nuevos para los estudiantes tengan que ser operacionalizados simultánea y rápidamente. Wild, Pfannkuch, Regan y Horton (2011) visualizan la necesidad de agrupar los conceptos estadísticos en conjuntos pequeños más manejables que compartan razonablemente esferas de influencia y buscar vinculaciones entre ellos que permitan activar el conjunto apropiado en el momento apropiado. Esto también daría pauta a insertar paulatinamente los conceptos relacionados con inferencia estadística intencionalmente. En Albert, Ruiz, Tobías y Villarreal (2014) pretendemos estudiar la inserción temprana de conceptos propios de la inferencia estadística en distintos momentos del curso. El resultado se describe en este trabajo con la intención de que sirva como sustento al diseño de una estrategia nueva de organizar un curso de Probabilidad y Estadística.

Una propuesta

Con la finalidad de puntualizar las distintas potencialidades del curso donde puedan introducirse las ideas de inferencia estadística se partió del marco referencial de la explicación sistémica del fenómeno didáctico (Cantoral, Farfán, Lezama y Sierra, 2006) para analizar las distintas dimensiones alrededor de las cuales vive la inferencia: (1) epistemológico-disciplinar, para identificar las ideas pilares de la inferencia estadística y de su posible secuencia lógica conceptual; (2) epistemológico-histórico, para identificar momentos críticos del desarrollo de las ideas de inferencia estadística que diera una visión diferente del problema de *conocer* la inferencia; (3) didáctica, con los libros de texto y el currículo para identificar la secuencia actual de la inferencia estadística en la escuela. En primera instancia, estos estudios dieron lugar a la conclusión de que es posible desarrollar ideas germinales de estadística de estadística inferencial paralelamente al desarrollo de un curso universitario introductorio a estadística en cuatro momentos: Estadística descriptiva, Probabilidad, Distribuciones y Distribuciones del muestreo

En Estadística descriptiva

La estadística descriptiva vista como análisis exploratorio de datos, puede ser un poderoso detonador de ideas de estadística inferencial a través de fomentar la inferencia informal y abordar en una forma germinal los conceptos de:

- **Toma de decisiones**. Contextualizar situaciones en la toma de una decisión con base en evidencia empírica
- **Hipótesis nula y alternativa.** Introducir la distinción entre una hipótesis de investigación de una hipótesis estadística. Se busca que, a través de una narración, se plantee la hipótesis del investigador versus la hipótesis en donde se involucra el parámetro de una variable.
- **Errores tipo I y tipo II**. Toma de decisiones con un riesgo a equivocarse. Describen con palabras los tipos de errores que pueden cometerse en situaciones específicas y concluir qué error es más importante no cometer según el contexto.
- **Intervalos con desviaciones estándar alrededor de la media**. No es común que en este estadio de su aprendizaje se construyan intervalos alrededor de la media utilizando desviaciones estándar, pero plantearlos resulta un antecedente para el concepto de intervalo de confianza y un preámbulo para el concepto de dato atípico.
- **Intervalos con percentiles.** Es un detonador de intervalos de probabilidad en distribuciones e intervalos de confianza en inferencia estadística.
- **Datos atípicos**. ¿Qué significa cerca o lejos de la media? Conviene abrir la discusión sobre la subjetividad de este concepto con el propósito de sentar un antecedente de lo que más adelante se abordará como *resultado significativo*.

En probabilidad

Es posible desarrollar algunas ideas germinales de inferencia estadística desde probabilidad como:

- **Condicionalidad del Error tipo I y Error tipo II**. En esta etapa puede ejercitarse la parte lógica de P(Error tipo I) como probabilidad de rechazar Ho, dado que Ho es cierta y P(Error tipo II) como probabilidad de aceptar Ho dado que Ho es falsa).
- **Calculo probabilidades de cometer Error tipo I y Tipo II**. A través diagramas de árbol, probabilidad total y Teorema de Bayes el estudiante, en situaciones como las pruebas para saber si una persona tiene cáncer, puede calcular las probabilidades de los errores.

En distribuciones de probabilidad

Las Distribuciones permiten dar un avance decisivo a las ideas de inferencia estadística como a continuación señalamos:

- **Planteamiento simbólico de las hipótesis**. En esta etapa los estudiantes pasan de expresar sus hipótesis narrativamente a su forma simbólica con relación a un parámetro en cuestión.
- **Intervalos de probabilidad**. Estos permiten sentar las bases para que los estudiantes más adelante puedan distinguir entre intervalos de probabilidad (que se plantean en la regla de decisión de las Pruebas de hipótesis, por ejemplo) y los futuros intervalos de confianza.
- **Resultado significativo**. Este concepto fundamental puede desarrollarse completamente con el uso de la Distribución binomial vista como una distribución muestral, y establecerlo en función del número de desviaciones estándar desde la media, así como el valor p.

En distribuciones muestrales

Los estudiantes ya pueden formular un problema de toma de decisiones en forma simbólica con el parámetro en cuestión. En esta etapa es posible desarrollar varias ideas esenciales para la inferencia estadística de tal manera que ésta última pueda ser vista, en cierto modo, como una aplicación de dichas distribuciones.

- **Nivel de significación.** Visto como una consecuencia directa del valor crítico definido como el número de errores estándar desde la media convenido para determinar a partir de qué valor se tiene un resultado significativo.
- **Regla de decisión.** Se desprende de manera natural del nivel de significación determinar la regla a partir de la cual se rechaza o no una hipótesis nula.
- **Valor p.** Se da una continuidad, desde su primer acercamiento del valor p con las distribuciones discretas que estudiaron, ahora visto desde las distribuciones muestrales y como un argumento para decidir si se rechaza Ho.
- **Probabilidad de los Errores tipo I y II.** Esto es visto como una aplicación directa de las distribuciones muestrales involucradas.

En inferencia formal

Se pretende la aplicación del procedimiento de pruebas de hipótesis a diferentes tipos de parámetros. Desligarse del estadístico de prueba como número de desviaciones estándar alrededor de la media para visualizarlo como una cota que determina el nivel de significancia deseado. Es de esperarse dificultades que van desde la diferenciación entre parámetros y estadísticos en la información del problema, dificultades conceptuales con las distribuciones muestrales, hasta dificultades lógicas en el planteamiento de las hipótesis y de los tipos de errores.

En conclusión, un acercamiento multidimensional del fenómeno didáctico de la inferencia estadística permitió tener una idea más clara de su naturaleza e identificar que la enseñanza tradicional de probabilidad y estadística aborda muy linealmente los contenidos y desaprovecha el gran potencial de interrelación que tienen los conceptos. Es una falsa creencia que sólo es posible abordar la inferencia estadística después de que han estudiado todos los temas que le componen. De hecho, como se mostró en este trabajo, existen muchos espacios a lo largo del desarrollo de un curso que permiten detonar ideas germinales de inferencia estadística y de capitalizar a través de la vinculación de conceptos lo aprendido para desarrollar una idea más robusta de lo que es la inferencia estadística.

También se logró identificar elementos conceptuales para construir una secuencia de ideas germinales para el desarrollo de la inferencia estadística que puedan ser fundamento para el diseño y experimentación en el aula. La complejidad de algunos elementos de la inferencia estadística como su parte lógica y la comprensión de resultado significativo, desde esta perspectiva, contarán con mayores tiempos didácticos para su aprendizaje.

Utilizando GeoGebra para la Enseñanza de la Estadística

Por Sergio Hernández González

GeoGebra es un software de código abierto, disponible gratuitamente para usos no comerciales. Desarrollado por Markus Hohenwarter en la Universidad Atlantic de Florida. Se utiliza para matemáticas dinámicas en todos los niveles educativos. Reúne geometría, álgebra, hoja de cálculo, gráficos, estadística y cálculo en un solo programa fácil de usar. Es también una comunidad en rápida expansión, con millones de usuarios en casi todos los países. GeoGebra se ha convertido en el proveedor líder de software de matemática dinámica, apoyando la educación en ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM: Science Technology Engineering & Mathematics) y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje en todo el mundo. GeoGebra conecta geometría, álgebra y hoja de cálculo de forma completamente dinámica, tiene una interfaz muy fácil de usar, a pesar de contar con poderosas herramientas, se puede crear materiales de aprendizaje interactivos como páginas web y disponible en varios idiomas. A los estudiantes les gusta porque hace tangible la matemática, ya que crea una conexión entre la geometría y el álgebra de un modo visual, de tal manera que ellos pueden ver, tocar y experimentar con la matemática; mientras que los profesores lo incorporan en sus clases como una herramienta didáctica. Aunque fue creado en un principio para matemáticas, se ha incorporado una herramienta sobre Cálculo de Probabilidades.

Al pulsar sobre esa herramienta se abre una ventana, que ofrece la posibilidad de trabajar con las distribuciones de probabilidad (discretas y continuas) más habituales en los cursos de introducción a la Estadística. Podemos deslizar los puntos del eje x en la figura, y ver esos cambios reflejados automáticamente en los correspondientes valores de probabilidad. Además, se puede observar el desplazamiento, a izquierda o derecha, que se produce según cambian los parámetros de la media y la desviación estándar.

Igualmente se puede trabajar con pruebas de hipótesis, intervalos de confianza, pruebas de bondad de ajuste y de Ji-cuadrada, donde con sólo introducir los valores de la media, la desviación estándar y el tamaño de muestra, nos calcula el intervalo de confianza o nos prueba una hipótesis. Vea las distintas opciones que no proporciona:

Nos proporciona una Hoja de Cálculo, el funcionamiento es similar al de una hoja de cálculo convencional, por tanto, con un simple arrastre de celda se creará de forma rápida una colección de objetos. Es bastante útil para la enseñanza de la Estadística, donde se pueden introducir datos y realizar análisis de una sola variable, análisis de regresión de dos variables, análisis de la varianza, análisis multivariante y acceder a la ventana de Cálculo de Probabilidades mencionado anteriormente.

Al margen de estas herramientas específicas GeoGebra ha incorporado una gran cantidad de comandos relacionados con la Probabilidad y la Estadística, las cuales se pueden consultar en *http://wiki.geogebra.org/es/Categor%C3%ADa:Comandos*

Como un plus, mediante GeoGebra se puede realizar material didáctico con animaciones, modelado de problemas y guías didácticas.

En general, podemos decir que GeoGebra se puede utilizar dentro de la enseñanza de la Estadística como una herramienta didáctica que sirve para: i) analizar datos estadísticos tanto unidimensionales como bidimensionales, ii) presentar los datos en diagramas y gráficas que faciliten la interpretación de los resultados obtenidos, iii) obtener diferentes medidas estadísticas, iv) obtener e interpretar funciones de densidad de distintas distribuciones, tanto discretas, como continuas, en particular la distribución Normal y v) calcular probabilidades como el valor del área bajo la curva y comprobar intervalos característicos de la distribución.

Una experiencia de innovación en la introducción a la inferencia estadística utilizando el software Geogebra

Por Santiago Inzunza Cazares

La enseñanza tradicional de la inferencia estadística en los cursos de bachillerato y universitarios utiliza un enfoque deductivo basado en teoría de la probabilidad. En concordancia con ello, la distribución muestral de un estadístico, -concepto que constituye la base de los métodos de inferencia- se define como una distribución teórica que expresa la probabilidad de los valores que puede tomar el estadístico en todas las muestras posibles de la población. Desde esta perspectiva, esta idea fundamental para comprender la inferencia resulta difícil de asociar con el proceso real que se utiliza en la selección de muestras de una población en aplicaciones prácticas. Este enfoque, además de las dificultades que entraña para los estudiantes con pocos antecedentes matemáticos, no hace visible las relaciones que existen entre los conceptos e ideas que se involucran, dando con ello una imagen determinista de la inferencia, cuando es la variabilidad parte central en su estudio. Como alternativa didáctica se sugiere una enseñanza que clarifique la forma como se relacionan e intervienen todos estos conceptos como paso previo al estudio de los métodos formales de la inferencia, utilizando herramientas tecnológicas con amplio potencial de representaciones visuales dinámicas para generar imágenes correctas de estos conceptos en los estudiantes. La experiencia de enseñanza que se describe a continuación ha sido puesta en práctica con un grupo de estudiantes de ciencias sociales y ha tenido el propósito de analizar el razonamiento e imágenes que los estudiantes construyen sobre conceptos que forman parte de las distribuciones muestrales en un ambiente computacional como el que proporciona el software Geogebra.

Descripción de la experiencia

Para el caso específico de distribuciones muestrales, el software Geogebra dispone de una hoja de cálculo con diversos comandos y una ventana gráfica que permiten simular y visualizar los resultados del proceso de selección de muestras de una población, así como el comportamiento de una distribución muestral en forma numérica y gráfica (ver figuras 1 y 2). Los datos de la población utilizada representan el número de contactos que los estudiantes del grupo tienen en la red social de su preferencia. La estructura de la actividad para construir distribuciones muestrales empíricas (en este caso de la media) consiste de tres fases que se describen a continuación:

1. Se define una población y se calculan medidas descriptivas: media y desviación estándar.
2. Se selecciona una muestra aleatoria de un tamaño dado de la población y se calcula su media muestral.
3. Se repite el proceso de selección de muestras para generar una colección numérica y gráfica de las medias muestrales. Se calcula su media y error estándar.

El proceso anterior se repitió para diferentes tamaños de muestra (ver figura 1). Al final los estudiantes completaron una hoja de trabajo donde exploramos conceptos como:

1. Relación entre tamaño de muestra y variabilidad de la distribución muestral.
2. Relación entre el tamaño de muestra y la forma de las distribuciones muestrales.
3. Efecto del tamaño de muestra en el centro de las distribuciones muestrales.
4. Cálculo del error muestral y el efecto del tamaño de muestra.
5. Identificación de un intervalo intuitivo que comprende un porcentaje de medias muestrales.

A	B	C	D	E	F	G	H	I
Número de contactos			Medias Muestrales n=5	Medias Muestrales n=10	Medias Muestrales n=20	Medias Muestrales n=30	Error Muestra=5	Error Muestra=30
400	Media Poblacion	460.18	397	456.1	339.85	393.9	63.18	66.28
500	Desviacion Poblacion	411.33	643.2	670.9	467.5	499.07	183.02	38.88
985			894	258.2	620.7	497.37	433.82	37.18
129	Media Muestra n=5	456.66	371.6	529.4	466.55	548.13	88.58	87.95
1624	Desviacion Estandar n=5	186.23	505.8	362	554.15	536.3	45.62	76.12
29			671.6	469.6	407.5	520.57	211.42	60.38
500	Media Muestra n=10	448.35	639.8	519.4	572.3	530.83	179.62	70.65
82	Desviacion Estandar n=10	124.26	725.2	499.5	675.55	386.03	265.02	74.15
299			497.4	354.7	492.15	525.8	37.22	65.62
308	Media Muestra n=20	451.31	266.6	386.3	611	366.67	193.58	93.52
220	Desviacion Estandar n=20	95.51	493.2	461.4	358.95	538.87	33.02	78.68
50			381.6	447.2	707.45	525.9	78.58	65.72
116	Media Muestra n=30	464.38	283.2	638.5	331.85	612.47	176.98	152.28
76	Desviacion Estandar n=30	72.36	508.4	360.9	520.95	445.77	48.22	14.42
800			233.8	351.9	736.25	374.83	226.38	85.35

Figura 1: Hoja de cálculo de Geogebra con simulación de muestras

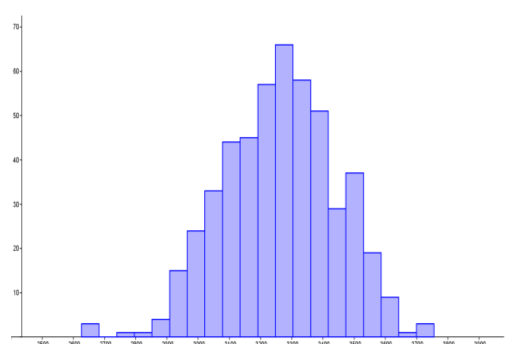


Figura 2: Distribución muestral de la media muestras de tamaño 30 (500 simulaciones)

Algunas respuestas que proporcionaron los estudiantes del grupo:

"En este ejercicio pudimos observar que la muestra, aunque no arroja los datos exactos de la población, nos ofrece datos con márgenes de error que son muy bajos, y el error disminuye a medida que la muestra se amplia. Con el ejercicio del error absoluto comprobamos de una manera clara esa hipótesis" (Anahí).

"Al aumentar la muestra la forma de las gráficas es más uniforme y más confiable ya que está más acomodada al centro; por otro lado, la media es más cercana a la media poblacional cada vez que la muestra aumenta; y por último la desviación estándar es cada vez menos cuando el número de la muestra aumenta reduciéndose de esta manera la dispersión" (Paúl).

En conclusión, el ambiente computacional que proporciona el software Geogebra contiene elementos de una herramienta cognitiva que puede ayudar a que los estudiantes desarrollen ideas correctas sobre la conceptos como variabilidad muestral, la forma como el tamaño de muestra influye en la variabilidad de las medias muestrales, el error muestral y la forma de las distribuciones muestrales, y sobre todo, concebir al muestreo como un proceso aleatorio y repetible de una población, que aunque produce resultados que varían, estos son en la mayoría de los casos cercanos a la media poblacional.

Conclusiones

La educación estadística se ha convertido en una necesidad social relevante. Es por eso que numerosos profesores e investigadores en el mundo y en México se han dado a la tarea de abordar esta tarea desde una perspectiva científica desde hace más de 25 años. Sin embargo, este tiempo ha sido insuficiente para conocer en su complejidad el fenómeno didáctico de su enseñanza y aprendizaje. Es por eso que, dándole continuidad a ese esfuerzo, nuestro grupo se propone contribuir a través de nueva investigación en el contexto mexicano que favorezca el razonamiento estadístico y el uso de recursos tecnológicos disponibles. En particular, de darle prioridad a las ideas fundamentales estocásticas y de inferencia estadística para el diseño de situaciones de aprendizaje innovadoras, así como de la conveniencia de usar software libre disponible, como el Geogebra, como parte del diseño de situaciones retadoras y de gran riqueza de aprendizaje para estudiante.

Referencias bibliográficas

Acuña, P. (2004). *Estadística aplicada con Fathom*. Cartago, Costa Rica: Editorial Tecnológica de Costa Rica.

Albert, J. A., Ruiz, B., Tobías, M. G. y Villarreal, O. (2014). Transformando la educación estadística desde un enfoque inferencial. Proyecto de la Fundación Novus, Tecnológico de Monterrey.

Aliaga, M., & Gunderson, B. (2006). *Interactive statistics*. Prentice Hall.

Ben-Zvi, D. y Garfield, J. (2004). Statistical Literacy, Reasoning and Thinking: goals, definitions and challenges. En: D. Ben-Zvi y J. Garfield (eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*, (pp. 3-15). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J., & Sierra, G. M. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 9(1), 83-102.

Carballo, M. (2004). *Estocásticos en el segundo ciclo de la Educación Primaria: Determinismo y azar*. (Tesis de Maestría inédita). DME, Cinvestav-IPN, México.

De León, J. (2002). *Comprensión de la ley de los grandes números de estudiantes de Ciencias Sociales*. (Tesis de Doctorado inédita). DME, Cinvestav-IPN, México.

Devore, I. (2011). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*. (8 ed.) México: Cengage Learn.

Elizarraras, S. (2004). *Enseñanza y comprensión del enfoque frecuencial de la probabilidad en el segundo grado de secundaria*. (Tesis de Maestría inédita). DME, Cinvestav-IPN, México.

Fisher, R. A. (1949), *Métodos estadísticos para investigadores* (10 ed). Madrid: Ed. Aguilar.

Gómez, V. y Haro, M. (2014). Estadística con GeoGebra. En Contreras, J. M., Cañadas, G. R., Gea, M. M. y Arteaga, P. (Eds.). *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*. Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, pp.243-250.

Heitele, D. (1975). An epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics 6*(2), 187-205.

Limón, A. (1995). *Elementos para el Análisis Crítico de la Posible Inserción Curricular de Nociones Estocásticas, Ausentes en Programas de Preescolar y Primaria*. (Tesis de Maestría inédita). DME, Cinvestav-IPN, México.

Maldonado, J. E. y Ojeda, A. M. (2009). Ideas fundamentales de estadística en educación primaria: Una perspectiva epistemológica. *Premisa 11* (43), 3-10.

Mevarech, Z. (1983). A deep structure model of students´statistical misconceptions. *Educational Studies in Mathematics 14*(1), 415-429.

Ojeda, A.M. (1994). Understanding Fundamental Ideas of Probability at Pre-university Levels. (Tesis de Doctorado inédita). King´s College London. UK.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1951). *La Genèse de l´idée de Hasard Chez l´enfant*. Francia: PUF.

Pfannkuch, M. (2005). Probability and statistical inference: how can teachers enable learners to make the connection? In *Exploring Probability in School*. Springer US. pp. 267-294.

Pfannkuch, M., Wild, C. J., & Parsonage, R. (2012). A conceptual pathway to confidence intervals. *ZDM*, *44*(7), 899-911.

Salcedo, J. (2013). Razonamiento probabilístico en el bachillerato tecnológico. (Tesis de Maestría inédita). DME, Cinvestav-IPN. México

Secretaría de Educación Pública (2011). *Planes de estudios 2011. Educación Básica*. México: SEP.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of new Mathematical Knowledge in Classroom Interaction*. USA: Springer.

Montgomery, D. & Runger, G. (2008). *Probabilidad y estadística para ingenieros*. (2 ed). México: Limusa Wiley.

Rodríguez, M. I., Albert, J. A., Agnelli, H. (2011). Controversias sobre las pruebas de hipótesis: sus implicaciones para su enseñanza. *Contribuciones a la Enseñanza y Aprendizaje de la Probabilidad y la Estadística.* Puebla, BUAP.

Vallecillos, A. (1999). Some empirical evidence on learning difficulties about testing hypotheses. *Bulletin of the International Statistical Institute: Proceedings of the Fifty-Second Session of the International Statistical Institute*, 201-204.

Wild, C. J., Pfannkuch, M., Regan, M., & Horton, N. J. (2011). Towards more accessible conceptions of statistical inference. *Journal of the Royal Statistical Society: Series A (Statistics in Society)*, *174*(2), 247-295.

Autores

José Armando Albert Huerta; ITESM. México; albert@itesm.mx
Blanca Ruiz Hernández; ITESM. México; bruiz@itesm.mx
Santiago Inzunza Cazares; UAS. México; sinzunza@uas.edu.mx
Sergio Hernández González; UV. México; sehernandez@uv.mx
José Marcos López-Mojica; UCOL. México; josemarcos_lopez@ucol.mx

PROFESIONALIZACIÓN DOCENTE EN MATEMÁTICAS

Eddie Aparicio, Landy Sosa, Elizabeth Mariscal, Ricardo Cantoral, Daniela Reyes-Gasperini, Javier Lezama, Crisólogo Dolores, Judith Hernández

Resumen

En este grupo se reflexiona conjuntamente sobre los retos de la Matemática Educativa para coadyuvar, desde la investigación e innovación, en el tema de la profesionalización docente en matemáticas en los diversos niveles educativos nacionales. Dichas reflexiones quedan enmarcadas en el grado de experiencia investigativa y de intervención alcanzada por cada uno de los participantes del grupo en los años recientes, ya sea mediante la teorización del campo, la participación en diversos programas de desarrollo profesional continuo o bien, mediante la participación activa en diversos programas institucionales de formación inicial y desarrollo profesional – continua y avanzada en Docencia de las Matemáticas.

Palabras claves: Matemática Educativa, Docencia Matemática, desarrollo profesional docente

Introducción al tema de profesionalización docente en matemáticas

El tema de la profesionalización docente en matemáticas ha sido desde hace tiempo atendido en la Matemática Educativa (Brousseau, 1986; Cantoral, 1989; Mopondi, 1995; Thompson, 1992; Pajares, 1992; Chapman, 1993; Ponte, 1994). Así es que hoy día se reconoce que tanto el sistema conceptual como las creencias desarrolladas por profesores de matemáticas en su época de estudiantes, se constituyen en una especie de paradigma bajo el cual practican la labor docente, principalmente al interior de las aulas de clase.

Gomez-Chacón y Planchar (2005), presentaron un panorama de las tendencias investigativas en el continente europeo sobre educación matemática y formación de profesores, que a su entender, consistían en la integración de lo teórico con lo práctico de mejor forma, otorgando mayor atención a la formación inicial y al fomento de una formación investigativa en los profesores como algo esencial. Más recientemente, Sánchez (2011) ofrece una primera categorización de las tendencias en el ámbito anglosajón en la investigación sobre formación de profesores de matemáticas en la primera década del presente siglo. En ambos casos es notoria la ausencia de revisiones en Latinoamérica o en otras regiones del orbe, este escrito pretende aportar elementos para mejorar esa limitación.

En nuestro país, diversos investigadores de la Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A.C., bajo la figura de Cimates (Centros de Investigación en Matemática Educativa), se han dado a la tarea de reflexionar y teorizar desde diferentes ángulos, el problema de la profesionalización de la docencia en matemáticas. Algunas de estas reflexiones han sido reportadas en el trabajo editorial realizado por Dolores, García, Hernández y Sosa (2013). Evidentemente cada grupo de investigación ha generado diversidad de experiencias en el tema, razón por la que se hace un llamado a la reflexión colectiva y pública sobre los posicionamientos de cada uno de los grupos con el fin de acrecentarlas y hacer un frente común empero al mismo tiempo, diferenciado, a los retos que plantea el atender las cuestiones de profesionalización de la docencia en matemáticas, específicamente en México.

Algunas aproximaciones

En el Cimate Cinvestav, un grupo de investigadores ha estado tratando el problema de la profesionalización docente en matemáticas desde la teoría socioepistemológica del conocimiento matemático. Sus análisis han estado centrados en nociones tales como *empoderamiento docente*, cambio de práctica docente, *praxis y noésis el papel de la dialéctica exclusión – inclusión, el tema de la identidad profesional, el estatus del discurso Matemático Escolar*. El principio fundamental que rige dichos análisis está asociado a una forma específica de la problematización del saber matemático, tanto el escolar como el no escolar. Dicha problematización ubica al objeto matemático como un objeto de aprendizaje susceptible de usarse en escenarios diversos. Tal tipo de acercamiento en la opinión del grupo formulador e investigador, contribuye al situar la mirada no sólo en cuestiones pedagógicas generales relativas a la gestión del aula, sino con relación al saber mismo (Reyes-Gasperini, Cantoral y Montiel, 2013, Reyes-Gasperini y Cantoral, 2014). Adicionalmente, este grupo de investigación pudo impulsar un programa nacional de profesionalización docente para profesores de educación Secundaria durante varios años, así como en otros programas más para docentes del Bachillerato; esta experiencia dotó de un espacio de trabajo experimental del lado del docente, no del lado de la literatura internacional único en la historia nacional.

Por otro lado, en el Cimate UAGro, un grupo de investigadores se ha planteado el reflexionar y aportar información precisa sobre ¿cómo formar profesores de matemáticas? Sus hallazgos les permiten realizar una propuesta en la que se considere como base para dicha formación inicial, la articulación de tres áreas del conocimiento fundamentales: *Matemática, Pedagógica* y *Docente*. Justamente esta última área es la que en opinión de dicho grupo formulador, hay una diferencia con otras propuestas en donde básicamente se atienden las dos primeras áreas (Dolores, 2013). Esta área integra a las demás y tiene como objetivo el desarrollar competencias docentes, las cuales tienden a propiciar el aprendizaje de la matemática en situaciones escolares concretas. Se estructura sobre la base de cuatro líneas de acción: *prácticas de planeación, ejecución y evaluación* del proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática; *la reflexión y análisis sobre la práctica docente*; *prácticas de innovación* y la *incorporación de las buenas prácticas*.

El Cimate-IPN, CICATA-CGFIE, ha fundamentado su quehacer de investigación en una estrecha relación dialógica con profesores de matemáticas en servicio, de todos los niveles educativos de América Latina. Los profesores que participan en los posgrados tienen un amplio conocimiento y experiencia tanto en el campo disciplinar como en su quehacer docente. Como es natural, por el amplio espectro de intereses y experiencias que manifiestan, se han convertido en un campo extraordinario de reflexión didáctica. Su interés de investigación lo ha denominado *Estudios sobre el profesor de matemáticas,* considerando cómo los profesores incorporan la teoría a su práctica y cómo se abren a una comunidad, rasgos característicos de profesionalización de su actividad. Han explorado, junto con los profesores, diversos ámbitos de la realidad docente: aspectos afectivos en la actividad docente; configuración y evolución de la identidad; el imaginario de los profesores en relación a diversos aspectos de su actividad docente tales como el escenario del aula, las interacciones alumno-profesor centradas en el saber matemático, el papel de la teoría en el desarrollo profesional al incorporar categorías como reproducibilidad, el papel del profesor en los procesos de resignificación de nociones o de prácticas matemáticas. Ejemplos de dicho trabajo pueden consultarse en Mingüer (2006), Rivera (2014), Lezama y Mariscal (2013), Pagés (2015), Borello (2010). Recientemente están abordando el problema de la formación continua del profesor de matemáticas, explorando interacciones en espacios informales Lezama y Mariscal (2012), así como las prácticas y procesos institucionales de formación y desarrollo profesional docente.

El Cimate Zacatecas ha analizado el tema de la profesionalización desde un posicionamiento curricular, caracterizando diversos programas de formación inicial y desarrollo profesional (programas de posgrados), asociados a la matemática educativa. Desde esta mirada se discurre en torno a una caracterización de la Matemática Educativa, como un campo académico de referencia para la profesionalización, entendida ésta como una disciplina que aglutina al menos tres prácticas de referencia: *Docencia, formación e investigación* (Hernández, 2014). Desde esta mirada particular se reconoce que el tema de la profesionalización está asociado a la posibilidad de obtener mayor claridad sobre los referentes sobre los cuales habrán de generarse y desarrollarse programas de formación inicial y de desarrollo profesional para el docente, incluso, en la misma conceptualización del docente como un profesional con competencias más allá de los contextos o escenarios de aula.

Una de sus principales premisas en torno a la profesionalización docente es lograr conformar espacios de desarrollo profesional (Climent & Carrillo, 2003). Es decir, espacios donde se estudie y promuevan los procesos de construcción de conocimiento profesional, mediante la interacción entre profesores de matemáticas, formadores de profesores e investigadores en Matemática Educativa, logrando un mutuo aprendizaje. Así, los esfuerzos se orientan hacia el reconocimiento de “la necesidad de un conocimiento especializado, racional y apoyado en una disciplina, pero complementado y enriquecido con la experiencia y diferentes prácticas de aquellos que buscan su profesionalización” (Hernández, López y Borjón, 2015, p. 1245). Por lo anterior, el Cimate Zacatecas mantiene vínculos con escuelas de formación inicial y continua de diferentes niveles educativos, algunos de ellos dirigidos a profesores de matemáticas.

Una propuesta de desarrollo profesional, con la matemática educativa como componente principal, se concreta en el 2012 con la Maestría en Matemática Educativa. Este posgrado, con orientación profesionalizante, está dirigido principalmente a profesores de matemáticas de los niveles educativos de Secundaria, Bachillerato y Superior. Las propuestas de los egresados han sido diversas, sin embargo se organizan en tres grupos: Los que se centraron en el dominio afectivo y el conocimiento profesional del profesor de matemáticas (Enríquez, 2014, García, 2014 y Flores, 2015). Las que han buscado innovar sus aulas a través del rediseño del discurso matemático escolar; donde las nociones de modelación y resignificación, bajo el enfoque socioepistemológico, se constituyen en los ejes centrales en ambientes tecnológicos (Saucedo, 2014, Rodríguez, 2014 y Valdes, 2015). Por último, los que se han centrado en el pensamiento numérico o algebraico en el nivel secundaria desde diferentes enfoques teóricos (Cortés, 2014, del Río, 2014 y Maciel, 2015). De manera general, el grupo que conforma este cimate y que participa en este posgrado propone a la

Matemática Educativa y sus resultados de investigación como un recurso para favorecer la mejora de la práctica docente.

En la región sureste de México, el Cimate Yucatán ha estado trabajando en los recientes años una cantidad considerable de programas de desarrollo profesional y formación continua para profesores de matemáticas de los distintos niveles y subsistemas educativos. Para este cimate, la cuestión de la profesionalización docente en matemáticas va más allá de las reflexiones que pudieran emprenderse en torno al profesorado y los posibles procesos de formación del mismo, tal es el caso de un conocimiento especializado ya sea del contenido disciplinar o de la didáctica asociada, incluso más allá de cuestiones curriculares, pues si bien se reconoce al profesor/docente como figura central en todo intento de profesionalizar la labor docente, se asume que ello solo atiende una parte de la problemática, justamente la relacionada con el tránsito de una práctica/actividad de oficio a una profesional.

Respecto a lo anterior, dicho Cimate ha ido conformando desde sus experiencias de intervención e investigación en el campo, una aproximación teórica y metódica basada en la noción de *Pensamiento didáctico en matemáticas* como elemento central tanto para la conformación de programas de formación inicial en docencia de las matemáticas, como para programas de profesionalización de profesores en ejercicio sin perfil docente y de desarrollo profesional (Aparicio y Sosa, 2015).

Dinámica de trabajo y posibles resultados

Los acercamientos anteriores si bien ofrecen una visión del status de la profesionalización docente en tanto campo de estudio y de acción de la Matemática Educativa, también dejan entrever la necesidad de establecer agendas colectivas específicas para un mejor análisis de las problemáticas y generación de propuestas de intervención más apegadas a las realidades y demandas actuales de la profesión. Ejemplo de ello es la necesidad de sistematizar la evidencia empírica sobre el papel que la Matemática Educativa ha tenido en dicho proceso de profesionalización, ya sea en programas de formación inicial y desarrollo profesional en docencia de las matemáticas, así como en los recursos editoriales orientados a modificar o impactar favorablemente en las formas de organización y comunicación de los saberes matemáticos en el ámbito escolar.

En tal sentido, este grupo temático plantea trabajar durante la Décima Octava Escuela de Invierno en Matemática Educativa, el establecimiento de una agenda prioritaria alineada a tres aspectos centrales de la profesionalización docente en matemáticas:

1. Programas de investigación en Matemática Educativa orientados al estudio y desarrollo del campo de la docencia matemática;
2. Programas de formación y desarrollo profesional docente en matemáticas soportados por la Matemática Educativa;
3. Programas editoriales de intervención en el campo desde la Matemática Educativa.

Con dicha agenda se espera ampliar al tiempo que ganar precisión sobre el papel que la Matemática Educativa y los colectivos académicos han tenido en los años recientes en torno al tema. Se espera que sea justamente la idea de la colectividad la que posibilite agrupar visiones, misiones y compromisos estratégicos para hacer frente común a los retos identificados y reconocidos por la comunidad en el tema.

Dicho así, es viable suponer que habrá puntos de encuentro y desencuentros entre los distintos acercamientos teóricos y metódicos expuestos por el grupo sobre la profesionalización docente en matemáticas, no obstante, el fin último ha de ser la clave para conjuntar esfuerzos y experiencias a partir de las cuales los aportes de la Matemática Educativa al campo docente sean cada vez más transparentes y certeros.

La dinámica a seguir consiste en que durante la primera sesión cada integrante exponga una breve reflexión sobre la especificidad de los aportes del trabajo de su Cimate en el tema de la profesionalización en alguno de los tres aspectos anteriores e incluso en los tres, así como su visión de los retos por venir en la Matemática Educativa para situarse como la disciplina de referencia en dicho tema.

La segunda sesión estará orientada a construir consensos y acuerdos sobre los principales retos de la Matemática Educativa en la profesionalización de la docencia en matemáticas, y bosquejar una agenda colectiva nacional a partir de la cual se desarrolle y de cuenta de un trabajo unificado en alguno de los retos previamente consensuados.

Referencias

Borello, M. (2010*) Un planteamiento de resignificación de las desigualdades a partir de las prácticas didácticas del profesor. Un enfoque socioepistemológíco*. Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN, México.

Brousseau, G. (1986). Fondements et methodes de la Didactique des Mathématiques. Recherches en Didactique des Mathematiques. 7(2), 33-115.

Cantoral, R. (1989). Un problema de la Educación Matemática: La Formación de Profesores. *Café y Matemáticas.* Revista del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias – UNAM. Núm. 5, 20–33. México.

Mopondi, B. (1995). Les explications en classe de mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques 15(3), 7–52.

Chapman, O. (1993). Facilitating In-Service Mathematics Teacher Self-Development. Proceedings of PME XV (pp. I/228-235). Tsukuba, Japón.

Climent, N. y Carrillo, J. (2003). El dominio compartido de la investigación y el desarrollo profesional. Una experiencia en matemáticas con maestras. *Enseñanza de las Ciencias. 21(3)*, 387-404.

Cortés, M. (2014). *Propuesta de enseñanza con el uso de tecnología para promover la comprensión de la razón y la proporción en primer grado de secundaria.* Tesis de Maestría no publicada, Universidad Autónoma de Zacatecas. Zacatecas, México.

Del Río, A. (2014). *El uso de la investigación en la práctica docente. Un diseño para la transición del pensamiento numérico al pensamiento algebraico.* Tesis de Maestría no publicada, Universidad Autónoma de Zacatecas. Zacatecas, México.

Dolores, C. (2013). Introducción. En Dolores, C., García, M., Hernández, J. y Sosa, L. (Eds). *Matemática Educativa: La formación de profesores* (pp. 13 – 25), México: Diaz de Santos.

Dolores, García, Hernández y Sosa (2013). *Matemática Educativa: La formación de profesores.* México: Ediciones Díaz de Santos, S.A.

Enríquez, A. (2014). *La motivación como factor determinante del pensamiento crítico del profesor de matemáticas.* Tesis de Maestría no publicada, Universidad Autónoma de Zacatecas. Zacatecas, México.

Flores, R. (2015). *Creencias y concepciones de matemáticas en profesores de nivel primaria. Un contraste centrado en la experiencia docente.* Tesis de Maestría en prensa, Universidad Autónoma de Zacatecas. Zacatecas, México.

García, C. (2014). *Conocimiento del profesor al introducir el lenguaje algebraico en primer año de secundaria.* Tesis de Maestría no publicada, Universidad Autónoma de Zacatecas. Zacatecas, México.

Gomez – Chacón, I & Planchar, E. (2005). *Educación matemática y Formación de profesores: Propuestas para Europa y Latinoamérica.* Bilbao: Servicio de Publicaciones Universidad de Deusto.

Hernández, J. (2014). *La caracterización de los profesionales de la matemática educativa. Una mirada desde el reconocimiento de su campo académico.* Tesis de Doctorado no publicada, Universidad Autónoma de Guerrero. Chilpancingo, México.

Hernández, J., López, I. y Borjón, E. (2015). Reflexiones sobre los posgrados en Matemática Educativa en México. El caso de la Universidad Autónoma de Zacatecas. En Flores, R. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 28, 1243-1250*. México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Lezama, J. y Mariscal, E. (2012). Docencia en matemáticas, una red para el aprendizaje de profesores de matemáticas. En Flores, R. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 25. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Lezama, J. y Mariscal, E. (2013). El aula en el imaginario de los profesores de matemáticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 26, pp. 1791-1800. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Maciel, I. (2015). *Tratamiento del error al aprender jerarquía de operaciones en el Nivel Medio Superior. Una secuencia didáctica.* Tesis de Maestría no publicada, Universidad Autónoma de Zacatecas. Zacatecas, México.

Mingüer, L. M. (2006) "*Entorno sociocultural y cultura matemática en profesores del nivel superior de educación: un estudio de caso: El Instituto Tecnológico de Oaxaca*. Tesis de doctorado. Cicata-IPN. México

Montoya, S. y Lezama, J. (2013). Reproducibilidad y desarrollo profesional. La TAD como parte del marco teórico. *IVe congrès international sur la TAD.*

Pajares, M. F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research, 62*(3), 307–332.

Ponte, da J. P. (2001). Investigating mathematics and learning to teach mathematics. In F. L. Lin & T. J. Cooney (Eds.), Making sense of mathematics teacher education (pp. 33–52). Dordrecht: Kluwer.

Reyes, D., Cantoral, R., Montiel, G. (2013). Profesionalización docente en Matemáticas. Empoderamiento docente: una mirada emergente. En Dolores, C., García, M., Hernández, J. y Sosa, L. (Eds). *Matemática Educativa: La formación de profesores* (pp. 153 – 172), México: Diaz de Santos.

Reyes-Gasperini, D. y Cantoral, R. (2014). Socioepistemología y empoderamiento docente: acciones para un cambio educativo. Boletim de Educação Matemática, 28(48), 360-382. doi: 10.1590/1980-4415v28n48a14

Rodríguez, I. (2014). Resignificación de la Derivada a través del uso de gráficas incorporando elementos tecnológicos. Tesis de Maestría no publicada, Universidad Autónoma de Zacatecas. Zacatecas, México.

Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. PNA, 5(4), pp. 129-145.

Saucedo, A. (2014). *La Modelación como eje para la implementación de un laboratorio tecnológico en un aula de bachillerato*. Tesis de Maestría no publicada, Universidad Autónoma de Zacatecas. Zacatecas, México.

Sosa, L., Aparicio, E., Jarero, M., Tuyub, I. (2013). Matemática Educativa y Profesionalización Docente en Matemáticas. El caso de Yucatán. En Dolores, C., García, M., Hernández, J. y Sosa, L. (Eds). *Matemática Educativa: La formación de profesores* (pp. 31 – 47), México: Diaz de Santos.

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 127–146). New York: Macmillan.

Valdes, R. (2015). *La Evolución del uso de la modelación en un laboratorio de ecuaciones diferenciales en un aula de ingeniería.* Tesis de Maestría no publicada, Universidad Autónoma de Zacatecas. Zacatecas, México.

Autores

Eddie Aparicio; UADY. México; alanda@uady.mx
Landy Sosa; UADY. México; smoguel@uady.mx
Elizabeth Mariscal; CICATA-IPN. México; elimariscal@gmail.com
Ricardo Cantoral; CINVESTAV, IPN. México; rcantor@cinvestav.mx
Daniela Reyes-Gasperini; CINVESTAV, IPN. México; dreyes@cinvestav.mx
Javier Lezama; CICATA-IPN. México; jlezamaipn@gmail.com
Crisólogo Dolores; CIMATE, UAGro. México; cdolores2@gmail.com

Judith Hernández; UAZ. México; judith700@hotmail.com

SECCIÓN E. REFLEXIONES TEÓRICAS

SEMINARIO DE INTRODUCCIÓN A LA INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA: UN EJEMPLO EN EDUCACIÓN BÁSICA

Catalina Navarro Sandoval, Judith Hernández Sánchez

Resumen

La Matemática Educativa tiene como objeto de estudio los procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática escolar, ampliando en la actualidad su interés a escenarios no escolares. Lo anterior muestra sólo una parte de su desarrollo para alcanzar su reconocimiento como disciplina científica. De ahí la importancia de promover la investigación al seno de la misma. En el presente escrito, a través de un ejemplo, enfatizamos algunos elementos, relevantes al realizar una investigación en Matemática Educativa. Tomando en cuenta que la regionalidad le imprime a la investigación cierta identidad, se ha propuesto dar una breve descripción del desarrollo histórico y surgimiento de la Matemática Educativa; dando un énfasis especial a su origen como disciplina y campo académico en México. De esta manera, los intereses y alcances de la disciplina han ido creciendo promoviendo un nivel de consolidación esperado por todos aquellos que conformamos la comunidad de matemáticos educativos en México.

Palabras Clave: Matemática Educativa, elementos de la investigación, surgimiento y desarrollo.

Introducción

La Escuela de Invierno en Matemática Educativa (EIME) se considera uno de los principales eventos académicos del área en México; por lo cual los deseos por compartir y proponer agendas de trabajo en torno a la disciplina nos conjunta cada año. En cada EIME se suman nuevos interesados en conocer y formarse dentro de la Matemática Educativa (ME). Por esta razón, los esfuerzos por contar con espacios que involucren aspectos básicos en este campo académico no pierden pertinencia. Este es el caso del Seminario de Introducción a la ME, donde se plantea establecer las bases para entender lo que podría ser *investigar en* ME. Ahora, tomando en cuenta la evolución de las problemáticas y las formas de abordarlas permite que el seminario se enriquezca en cada edición de la EIME. Es así como este espacio, sin perder su intencionalidad, se adapta año con año con base en los avances, desarrollo y nuevas expectativas de la disciplina.

Por tal razón, el seminario se centra en el surgimiento de la disciplina y su creciente pertinencia, además de abordar el desarrollo y los cambios que ha sufrido ésta. Esto permite identificar la evolución de las problemáticas y las formas de abordarlas; lo que incide directamente en la forma de hacer investigación en la ME. De esta manera se propone abordar y discutir con un ejemplo aquellos elementos que se consideran primordiales en el desarrollo de una investigación en ME.

Aspectos históricos de la ME y su surgimiento en México

Algunos datos históricos sobre el desarrollo y surgimiento de la Matemática Educativa pueden ser consultados en: Artigue (2004), Cantoral (1996), Cantoral (2013), Cantoral y Farfán (2003), D´Amore (2000), Filloy (1981), Freudenthal (1981), Gálvez (2002), Gascón (1998), Gascón (2013), Godino (2006), Godino (2010), Hernández (2014), Hitt (1997), Imaz (1987), Kilpatrick (1992), Kilpatrick (1994), Maldonado y Navarro (2014), Moreno (1995), Nieto, Viramontes y López (2009), Niss (1999), Puig (1998), Rico (2000), Rico (2012), Sierra (2011) y Waldegg (1998). Sin querer, ni poder ser exhaustivas se considera que en estos documentos se puede evidenciar aspectos del surgimiento, desarrollo y evolución de la ME como disciplina. Lo anterior ha dado como resultado la presencia, aparición, transformación y permanencia de ciertos problemas, intereses y objetos de estudio de la ME.

Para el caso de México, la ME surgió a finales de los años setentas. El escenario y situaciones estuvieron marcados por un conjunto de conflictos y necesidades del sistema educativo que tuvieron que subsanarse de manera emergente. Una de estas necesidades era la de contar con materiales que fueran acordes a la nueva reforma educativa del nivel básico (Filloy, 1981 y Hitt, 1997). El apoyo fue solicitado al entonces Departamento de Matemáticas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Esto propició la reflexión de que no bastaba con saber matemáticas para poder atender los problemas de la enseñanza de las matemáticas; lo que suscitó el surgimiento de la Matemática Educativa, nombrada así por el Dr. Carlos Imaz y reconocida como tal a partir de 1975 (Cantoral, 1996).

A partir de 1975 se continúan acciones que posibilitaron que la ME pudiera asentarse como una disciplina emergente en México. Sin embargo, es hasta 1984 que se logra un primer acercamiento masivo a los Profesores de Matemáticas, a través del Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas (PNFAPM). En nuestra opinión el PNFAPM posibilitó la apertura de muchos programas educativos tendientes a la formación inicial y continua de profesionales dedicados a las matemáticas y a su enseñanza. Ahora, el que la ME haya surgido desde un Departamento de Matemáticas, incidió dando un énfasis muy especial al conocimiento matemático. Lo anterior se hace evidente desde el nombre con el que se le determina a la disciplina en nuestro país “Matemática Educativa”.

Otro factor que ha posibilitado la instauración de la ME como disciplina científica son las comunidades que se conforman con un interés común: incidir positivamente en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (e-a-m). Estas comunidades académicas han logrado formalizar su existencia y permanencia a través de asociaciones con gran presencia en México y Latinoamérica; en particular nos referimos a la Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa (Red de Cimates) y el Comité Latinoamericano en Matemática Educativa (CLAME).

Diferentes acepciones de Matemática Educativa

Los problemas en torno a la e-a-m, existen desde el surgimiento de la propia matemática; sin embargo el reconocer a la ME como disciplina ha tomado algunos años. Para lograrlo se ha tenido que madurar respecto a los significados y alcances que se le pueden atribuir. Esto ha traído consigo un desarrollo en las acepciones evidenciando actualmente una madurez de la ME. Lo anterior ha permitido su reconocimiento como campo académico, lo cual queda establecido revisando las diferentes perspectivas en torno a lo que se entiende por ME a través de los años. A continuación se presenta parte de esa evolución.

El Dr. Carlos Imaz fue el primer matemático educativo mexicano que intento explicar lo que se podría entender por ME. "La Matemática Educativa es lo que surge cuando, haciendo cierto tipo de abstracciones, abordamos a la matemática como un problema de comunicación, entendida esta última en su sentido moderno" (Imaz, 1987, p. 267). La intención era clara, tomando en cuenta lo reciente de su surgimiento en nuestro país, estableciendo un primer acercamiento a una disciplina emergente. Está primera acepción parece cobrar relevancia si tomamos en cuenta el papel epistemológico de la comunicación o el discurso en la construcción del conocimiento matemático (Radford, 2003); dicha interacción discursiva está relacionada desde nuestra perspectiva por las *prácticas sociales y de referencia* (Cantoral, 2013b). Tal vez está es una de las principales diferencias entre las matemáticas y la ME; la primera se centra en la "razón", mientras que la segunda en la "comunicación" con ciertas intencionalidades.

Una década después, se realiza un esfuerzo por que la ME alcance un nivel de disciplina científica (Cantoral, 1996, Gascón, 1998, Kilpatrick, 1994 y Rico, Sierra y Castro, 1999; referenciado en Rico 2000). Ahora, está más centrada en describir y entender lo que ocurre en los fenómenos de la e-a-m, que en dotar de herramientas técnicas para la enseñanza. En este sentido se adopta a la enseñanza-aprendizaje como una dupla inseparable ligado al saber matemático. Más aún, es en México donde se logra establecer a la ME como un campo académico. "Es decir la ME es asumida como una disciplina científica conformada por un objeto, objetivos y alcances que a su vez determinan actividades profesionales específicas" (Hernández, 2014, p. 66). Esto establece un escalón más en el desarrollo de la ME, pues se reconoce como un campo profesional, donde se sitúan actividades, intereses y alcances en torno a la e-a-m.

Enseguida se presentan algunos elementos que describen a la ME como campo académico y que fueron tomados de Cantoral (1996), Cantoral y Farfán (2003) y Hernández (2014):

Objeto de estudio de la ME: "los procesos de transmisión, adquisición y construcción de los diferentes contenidos matemáticos en situación escolar" (Cantoral, 1996, p. 134).

Objetivo de la ME: "describir y explicar los fenómenos relativos a las relaciones entre enseñanza y aprendizaje del saber matemático" (Cantoral, 1996, p. 134).

Intencionalidad: "… se ocupa del estudio de los fenómenos didácticos ligados al saber matemático." (Cantoral y Farfán, 2003, p. 29)

Alcance: "afectar al sistema educativo en un sentido benéfico, a saber, mejorar los métodos y los contenidos de la enseñanza y proponer las condiciones para un funcionamiento estable de los sistemas didácticos..." (Cantoral, 1996, p. 134).

Profesionales en ME: Se consideran como profesionales del campo a Investigadores en ME, Profesores de Matemáticas y los Formadores tanto de Profesores de Matemáticas como de Investigadores del campo (Hernández, 2014)

Para resumir parte del surgimiento y desarrollo de la ME se utilizan las tres etapas propuestas en Hernández (2014). La primera relacionada con su surgimiento, donde su existencia se sostenía o justificaba a partir de otras disciplinas. La segunda caracterizada por la urgencia de delimitar su objeto de estudio y creación de teorías específicas del campo; las cuales marcaron la importancia e independencia de la ME como disciplina. Por último la etapa actual; en ésta se identifica una especie de conformación de personalidades geográficas; marcadas principalmente por los contextos y el impacto sociocultural de cada país o región. Lo anterior ha afectado no sólo en las definiciones que se tienen de la ME sino en sus alcances y dimensiones de estudio, dando una identidad regional a las investigaciones que se realizan. Para visualizar mejor estos cambios en las acepciones y alcances de la ME se presenta la Figura 1.

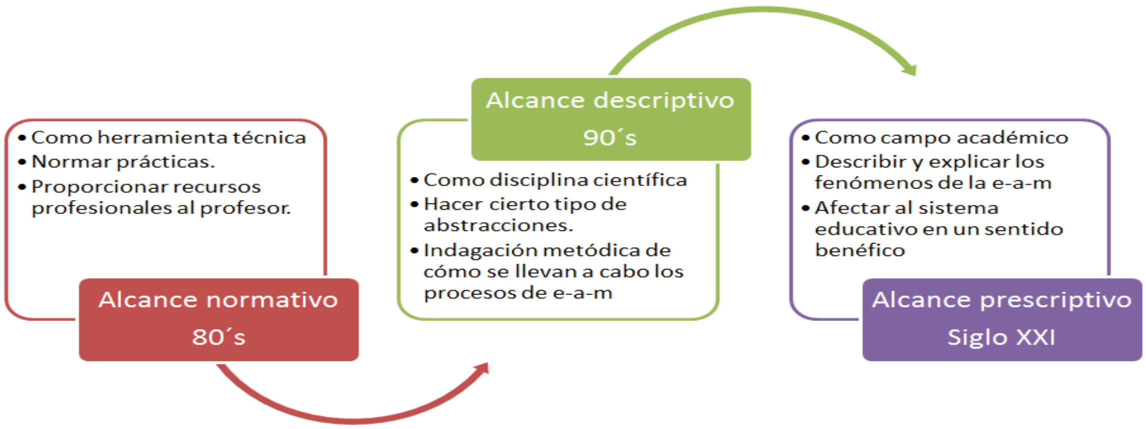


Figura 1. Desarrollo en las acepciones y alcances de la ME como disciplina

Terminaremos esta sección mencionando dos campos de investigación emergentes y que se relacionan fuertemente con las intencionalidades del Seminario de Introducción a la ME. El primero de ellos es la búsqueda de una madurez metodológica; pues si bien existen perspectivas teóricas cuyos métodos son propios, existen otras que están en plena construcción (Sierra, 2011). Otra línea emergente está guiada por la pregunta ¿cómo formar a los futuros investigadores en ME? (English, Jones, Lesh, Tirosh y Bartolini-Busi, 2002 y Bishop, Clements, Keitel, Kilpatrick y Leung, 2003). A continuación se presentan elementos que se consideran importantes al realizar una investigación en ME y que retoman estos dos temas emergentes del campo.

Elementos a considerar al realizar una investigación en ME

Para iniciar una investigación en ME, es necesario identificar una problemática o problema de interés. Ésta puede ser precisada desde dos dimensiones: documentalmente o mediante la experiencia profesional-académica. En ambos casos se requiere una indagación de documentos o investigaciones relacionadas con el tema de interés. Es importante mencionar que algunas de estas problemáticas, al igual que las acepciones de la ME, han evolucionado. Al respecto se puede consultar a Maldonado y Navarro (2014) donde se proponen cuatro momentos de evolución de las problemáticas de la ME.

Si a lo anterior le sumamos la riqueza y complejidad intrínseca de los procesos inmersos en la e-a-m, esto implica que no existe una forma única de hacer investigación en ME. Pero esto puede deberse no sólo a la naturaleza de la problemática en cuestión, sino a la decisión del enfoque bajo el cual se resolverá. Para ello, en algunos casos es preciso usar algún marco teórico, marco conceptual o bien marco teórico metodológico. El uso de cualesquiera será determinado durante el desarrollo de la investigación y dependerá de la problemática y objetivos de la investigación. Así mismo el método o metodología a seguir será influenciado por el enfoque teórico adoptado. En algunos casos y dada la emergencia del campo se utilizan métodos de otras disciplinas o bien la adaptación de marcos teóricos externos a la disciplina, pero ligados al tema de interés.

En el mismo sentido, de acuerdo con los objetivos de la investigación será necesario: diseñar cuestionarios, entrevistas o propuestas didácticas; realizar análisis de documentos o bien, indagar sobre creencias de estudiantes, profesores o investigadores, por mencionar algunos. Además, es posible considerar investigaciones en las que se hagan propuestas relacionadas con el tema de interés, realizando adaptaciones de acuerdo con la investigación, siempre guiados por un modelo teórico acorde al problema y al objetivo de la misma. De modo tal que de acuerdo con lo que se esté investigando se deberá reportar la recolección y análisis de los datos.

Finalmente, una parte importante es la comunicación de los resultados, pues éstos permitirán reportar los alcances obtenidos de la investigación. Éstos deben responder la pregunta central de la investigación o en su defecto establecer que tanto del problema y los objetivos quedaron atendidos. Es importante mencionar que los resultados pueden no ser los esperados; de ser así se reconoce una riqueza teórica en ellos por lo que no debe verse como algo negativo.

Ejemplos de investigaciones en ME

Un ejemplo para el Nivel de Primaria

Esta investigación gira en torno al tratamiento del concepto de número natural del primer grado de la educación primaria. Los escritos de referencia serán los documentos oficiales de la educación básica en México, tales como: el plan de estudios (2011), el programa de estudios (2011) y los libros de texto tanto del maestro como del alumno (ciclo escolar 2014-2015). El interés se centró en identificar ideas, procedimientos, recursos y saberes que los alumnos del grado señalado ponen en juego al resolver situaciones que involucren la utilización del concepto de número natural. En este caso se busca determinar la influencia de los documentos oficiales en el aprendizaje de los estudiantes, mediante el diseño y aplicación de un cuestionario.

Para ello se revisaron investigaciones de corte cognitivo y de corte didáctico. Respecto del primer tipo Power y Dal Martello (1990), Nunes y Bryant (1998), citado en Otálora y Orozco (2006), coinciden en que existen errores y dificultades en el proceso de trascodificación numérica. Por ejemplo, cuando a un niño se le pide escribir "tres mil quinientos ocho, éste escribe 30005008" o bien "985 lo leen como noventa y ocho y cinco". Además, las posiciones del cero y del uno contenidas en un número presentan una dificultad en la comprensión del niño. En el mismo sentido Rizo, Campistrous, Pastor, Pastor y Nava, (2013), resaltan dificultades señalando que los alumnos confunden las cifras al escribirlas (caso del dictado); así como la falta de comprensión del carácter posicional del sistema de numeración decimal. Para las investigaciones de corte didáctico, Block y Álvarez (1999) destacan aspectos centrales sobre el tratamiento del concepto de números en los planes y libros de texto desde los 60's a los 90's, en donde se identificó un escaso tratamiento respecto del carácter posicional del sistema de numeración decimal.

Con base en la revisión bibliográfica se observó una ausencia de trabajos sobre la comprensión del carácter posicional del sistema de numeración decimal; así como, indagaciones acerca del tratamiento de "número natural". Así mismo, el tratamiento de número natural ha estado sujeto a diversos cambios tanto en la estructura del plan de estudios como en el libro de texto; lo cual nos lleva a creer que la manera en la que se presenta dicho concepto en documentos oficiales (plan y programa de estudios y libros de texto para el alumno y para el maestro) ha modificado el aprendizaje del mismo. Lo anterior, dado que en la penúltima reforma de 1993, tanto el libro de texto como el plan y programa presentaban una organización interna del concepto de número natural y una correspondencia entre los cotenidos de los citados documentos (Cortes-Reyna, 2015). Esto no sucede en los documentos oficiales de la actual reforma 2011. Por tal razón este trabajo de investigación se interesa en revisar la presentación de "número natural" en documentos oficiales. También se propone indagar en producciones de estudiantes de primer grado de primaria de la escuela mexicana, sobre los recursos, ideas, procedimientos y saberes que éstos ponen en juego al resolver situaciones relacionadas con el concepto objeto de estudio.

Para este trabajo se construyó un marco conceptual en el que se consideró al análisis de contenido descrito por Lupiáñez (2009); específicamente se retoma lo referente a la estructura conceptual en el que se involucra al conocimiento conceptual y al conocimiento procedimental. Por otro lado el plan de estudios (2011), Frade (2013) y Díaz-Barriga y Hernández (2007), hacen referencia a que el enfoque constructuvista considera aspectos conceptuales, procedimentales y actitudinales y el enfoque basado en competencias toma en cuenta conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes. Tomando como base lo anterior se realiza la revisión de los libros de texto arriba descritos, con el propósito de diseñar un cuestionario en el que se atienden los aspectos propuestos, con el firme propósito de estudiar las producciones de los niños del mismo grado.

La metodología a seguir fue la siguiente: 1. Búsqueda y análisis de investigaciones relacionadas con el concepto de número natural. 2. Revisión del plan y programa de estudios del primer grado de primaria. 3. Revisión de los libros de texto del primer grado de primaria del ciclo escolar 2014-2015, para el maestro y para el alumno. 4. Diseño del cuestionario. 5. Aplicación del cuestionario y 6. Análisis y resultados.

De la revisión del plan de estudios (2011) se destacan tres aspectos a desarrollar: competencias, estándares curriculares y aprendizajes esperados. Para el programa de estudios se establecen cuatro competencias que los alumnos de primer grado deben desarrollar; de éstas solo dos se pudieron identificar: *comunicar información matemática y manejar técnicas eficientemente.* El cuestionario se aplicó a 18 niños con siete años de edad en promedio, todos pertenecientes a la costa chica del estado de Guerrero. Con respecto al desarrollo de estándares se establece que al término del segundo periodo escolar (tercero de primaria) el alumno: lee, escribe y compara números de hasta cuatro cifras. Para el caso de primer grado se observó que dan más importancia a la escritura de los números hasta el 100, y no así a la lectura o comparación de los mismos.

En lo que respecta a los aprendizajes esperados, se identificó que no existe una correspondencia entre los contenidos establecidos en el programa de estudios (2011) y el tratamiento en los libros de texto. La influencia de lo anterior se observó en el análisis de las producciones, de los cuales destacaremos lo siguiente:

a) *No se enfatiza en la escritura, expresión oral o significado del cero:* se observó que al comparar el cero con el dos la mayoría de los estudiantes indican que el dos es menor.

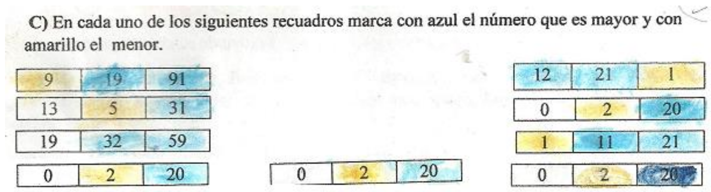


Imagen 1.

b) *No existe un convenio establecido acerca de en qué número empieza la sucesión numérica:* se observó que la mayoría de los alumnos inician la sucesión numérica en uno.

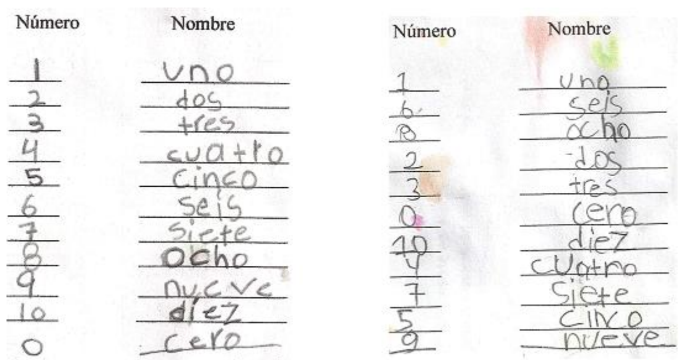


Imagen 2.

c) *No se enfatiza en la expresión verbal de los números hasta el cien en el libro del alumno:* esto tuvo como resultado que la mayoría de los alumnos tuviera problemas para escribir números, dada su expresión oral y viceversa, por ejemplo el "cuarenta y cinco" es escrito como "25", entre otros números.

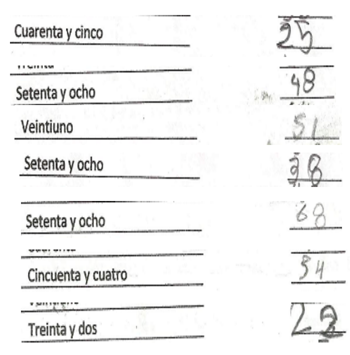


Imagen 3.

d) *No se profundiza en el tratamiento de los números ordinales hasta el 10º*: en el análisis de las producciones se observó que la mayoría de los alumnos no identificaron los números ordinales y tampoco las usaron en situaciones concretas.

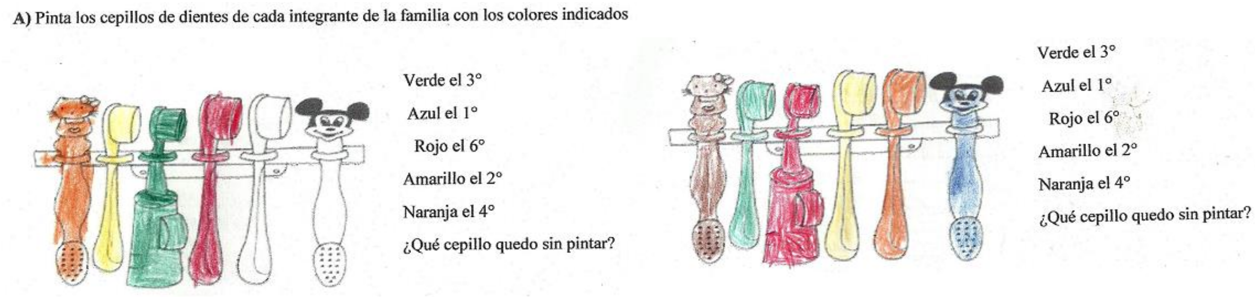


Imagen 4.

De acuerdo con los resultados en las producciones de los alumnos y de la revisión de los documentos oficiales se constató lo siguiente:

- El tratamiento que se le otorga al número "cero" es casi nulo en los documentos oficiales, y dadas las evidencias esto repercute en el aprendizaje de los niños. Pues más del 50% de los alumnos tienen la idea que el 2 es menor que el cero, cuando comparan números cardinales donde se involucran al cero y al dos como números pequeños.
- En los documentos oficiales se establece al 0 y al 1 como números donde puede iniciar una sucesión numérica; lo anterior incide en el análisis de las producciones, dado que los alumnos inician la sucesión numérica con el número 1, escribiendo el cero al final o en medio de la sucesión, pero no al inicio de la misma.
- En los documentos oficiales se evidencia trabajo con respecto a la escritura de los números hasta el 100, pero no así para la expresión verbal de los mismos, en el análisis de las producciones de los alumnos la mayoría de los alumnos presentó problemas al escribir números dada su expresión verbal y viceversa.
- Finalmente, en documentos oficiales solo se le dedican dos lecciones al tratamiento de los números ordinales y en la producciones de los alumnos se evidencia que éstos no lograron ordenar objetos en donde se requeria su uso.

Algunas perspectivas teóricas en la ME

Finalmente se presentan algunas perspectivas teóricas que hasta el momento han logrado cierta presencia y personalidad dentro del campo, es importante mencionar que aquellas surgidas en Latinoamérica guardan una fuerte componente sociocultural.

En Maldonado y Navarro (2014), se señala que cuando en México se iniciaba la investigación alrededor de la ME, en algunas partes del mundo ya se desarrollaba investigación acerca de fenómenos didácticos relacionados con la e-a-m, que contribuían a la creación y/o desarrollo de teorías propias de las disciplina. Hoy día en la ME se consideran diferentes enfoques teóricos para el estudio de las distintas problemáticas del campo. En Latinoamérica se reconoce a la Etnomatemática (D´Ambrosio) y a la Teoría Socioepistemología (Cantoral-Farfán-Cordero). En Norteamérica a la Teoría APOE (Dubinsky), la Resolución de Problemas (Polya-Schoenfeld) y la Teoría de la Objetivación (Radford). Y en Europa, a la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau), la Metodología de la Ingeniería Didáctica (Artigue), la Transposición Didáctica y la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard), la Teoría de las Representaciones Semióticas (Duval), el Enfoque Ontosemiótico (Godino-Batanero-Font), la Teoría de Campos Conceptuales (Vergnaud) y el Pensamiento Matemático Avanzado (Tall-Vinner).

En la Figura 2 se muestran algunas líneas y enfoques teóricos presentados por Pochulu y Rodríguez (2012, p.12), en donde es claro que alrededor de la disciplina se han desarrollado y aplicado diferentes teorías. Es importante mencionar que cada una tiene ejes, enfoques y características esenciales, lo que les permite mirar diferentes aspectos de la e-a-m. Lo anterior brinda una riqueza de resultados y miradas, pero que sin duda apuntan a atender y entender precisamente el objeto de estudio de la disciplina de referencia, nos referimos a la ME.

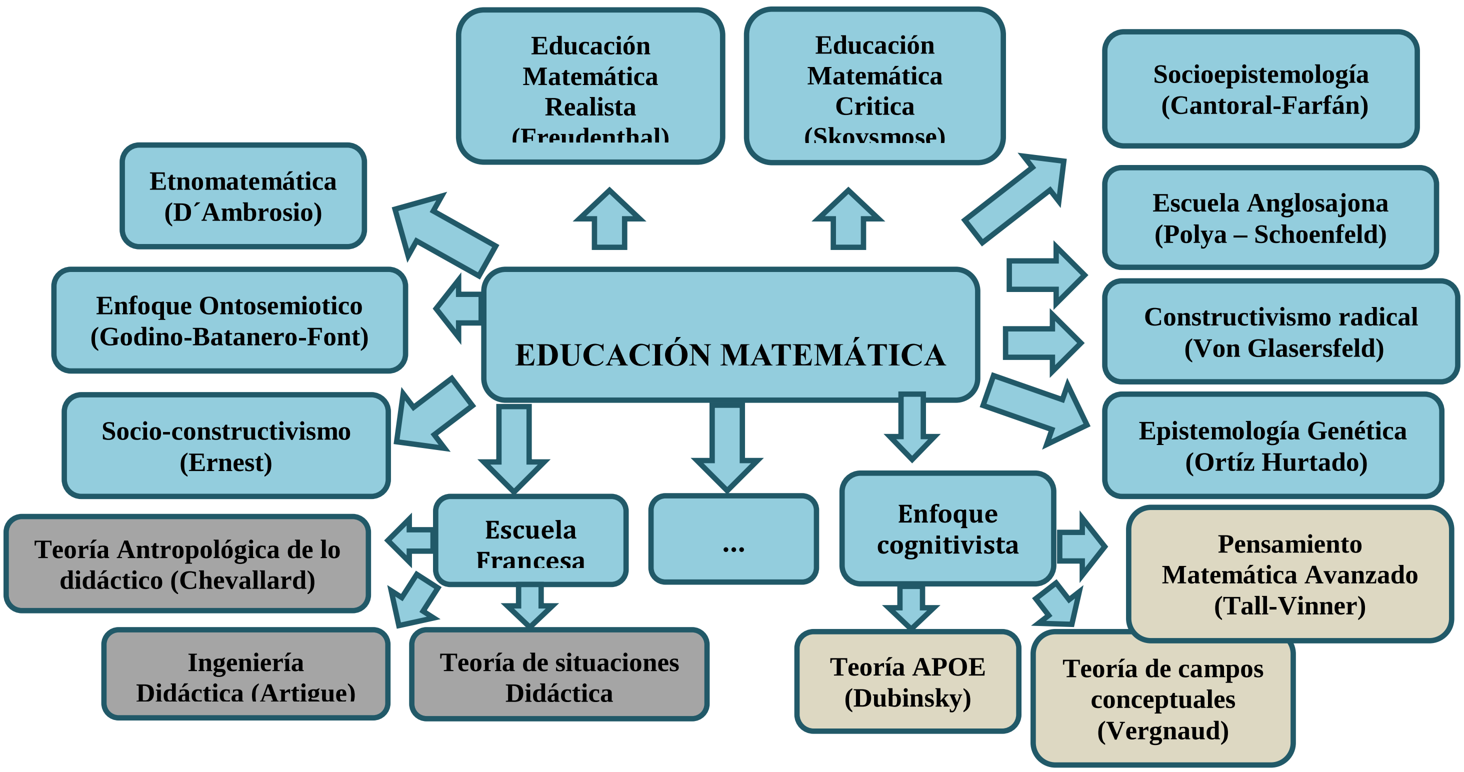


Figura 2. Líneas y enfoques teóricos de ME.

Reflexiones finales

En general, lo anteriormente presentado permite un acercamiento con la investigación en ME. Incluyendo a estudiantes, profesores o aquellas personas interesadas en la profundización del campo. Es decir, quienes busquen sistematizar su labor mediante la ME como su disciplina de referencia. Por ende, la importancia y propósito de la ME como disciplina científica interesada en incidir de manera positiva en el campo de la enseñanza aprendizaje de las matemáticas, versa en la realización y desarrollo de investigaciones.

Referencias

Artigue, M. (2004). Problemas y Desafíos en Educación Matemática: ¿Qué nos ofrece hoy la Didáctica de la Matemática para afrontarlos? *Educación Matemática, 16 (003)*, 5-28.

Bishop, A., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J. & Leung, F. (Eds). (2003). *Second International handbook of mathematics education.* Dordrecht: Kluwer A.P.

Block, D. y Álvarez, A. M. (1999). Los números en primer grado: cuatro generaciones de situaciones didácticas. *Educación matemática*, 11 (1), 57-76.

Cantoral, R. (1996). Una visión de la matemática educativa. En Hitt, F. (Ed), *Investigaciones en Matemática Educativa* (131-147). México: Iberoamérica.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*. *Estudios sobre construcción social del conocimiento.* España: Gedisa.

Cantoral, R. y Farfán R. (2003). Matemática Educativa: Una visón de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6 (1), 27-40.

Cortez-Reyna, E. (2015). *Análisis del libro de texto de primer grado de primaria, reforma 1993: el caso de los números naturales*. Tesis de Licenciatura no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, México.

D´Amore, B. (2000). La Didáctica de la Matemática a la vuelta del milenio: raíces, vínculos e intereses. *Educación Matemática*, *12 (1)*, 39-50.

Díaz Barriga, F. y Hernández, G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo: una interpretación constructivista.* México, D.F.: Mc Graw Hill.

English, L., Jones, G., Lesh, R., Tirosh, D. & Bartolini-Busi, M. (2002). Future Issues and Directions in International Mathematics Education Reseach. En English, L. (Ed), *Handbook of International research in mathematics education* (787-812). London: Lawrence Erlbaum Ass.

Filloy, E. (1981). Investigación en Matemática Educativa en México. Un reporte. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2 (2), 233-254.

Frade L. (2013). *Planeación por competencias (3ra ed.).* México D.F.: Inteligencia Educativa.

Freudenthal, H. (1981). *Problemas mayores de la educación matemática*. Traducción realizada por Alejandro López Yáñez, revisada por Rodrigo Cambray Núñez. Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav. Artículo original: Major Problems of Mathematics Education. Conferencia dada en la Sesión Plenaria del ICME 4 en Berkeley, el 10 de agosto de 1980. Publicada originalmente en Educational Studies in Mathematics (1981), pp. 133-150. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland. Kluwer Academic Publishers.

Gálvez, G. (2002). La didáctica de las matemáticas. En Parra, C. y Saiz, I. (comps.), *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones* (39-63). Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18 (1), 7-33.

Gascón, J. (2013). La revolución brousseauniana como razón de ser del grupo Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 3, 69-87.

Godino, J. D. (2006). *Presente y Futuro de la Investigación en Didáctica de las Matemáticas*. Recuperado de http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo.../docs.../presente.pdf

Godino, J. D. (2010). *Perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Tecnocientífica.* Recuperada de http://www.ugr.es/local/jgodino

Hernández, J. A. (2014) *La caracterización de los profesionales de la matemática educativa. Una mirada desde el reconocimiento de su campo académico.* Tesis de Doctorado no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, México.

Hitt, F. (1997). Matemática Educativa: Investigación y desarrollo 1975-1997. En Hitt, F. (Ed), *Investigación en Matemática Educativa II* (41-65). México: Iberoaméricana.

Imaz, C. (1987). *Memorias de la Primera Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa*, (267-272). México: Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

Kilpatric, J. (1992) Historia de la Investigación en Educación Matemática. En Kilpatric, J., Rico, L. & Sierra, M. (Ed), *Educación Matemática e Investigación* (15-96). España: Síntesis.

Kilpatric, J. (1994). Investigación en educación matemática: su historia y algunos temas de actualidad. En Kilpatrick, J., Rico, L. & Gómez. (Ed), *Educación Matemática* (1-18). Colombia: Una empresa docente y Editorial Iberoamérica.

Lupiáñez J. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Tesis de doctorado no publicada. Universidad de Granada, España.

Maldonado, S. y Navarro, C. (2014). Seminario de Introducción a la Matemática Educativa. En Rodríguez, F. y Rodríguez, R (Eds.), *Memoria de la XVII Escuela de Invierno en Matemática Educativa la Profesionalización Docente desde los Posgrados de Calidad en Matemática Educativa* (450-461). Oaxaca: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa.

Moreno, L. (1995). La educación matemática en México. En Artigue, M, Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P. (Eds), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (25-31). México: Una empresa docente y Editorial Iberoamericana.

Nieto, N., Viramontes, J. y López, F. (2009) ¿Qué es Matemática Educativa? *CULCyT,* 6 (35), 16-21.

Niss, M. (1999). Aspects of the nature and state of research in Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, 40, 1-24.

Otálora, Y. y Orozco, M. (2006). ¿Por qué 7545 se lee como "setenta y cinco cuarenta y cinco"?. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(3), 407-433.

Pochulu, M. D. y Rodríguez, M. A. (2012). Educación matemática: aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos. En Pochulu, M. y Rodríguez, M. (Eds), *Introducción* (9-14). Argentina: Universidad Nacional de General Sarmiento.

Puig, L. (1998). La didáctica de las matemáticas como tarea investigadora. En Puig, L. (Ed), *Investigar y enseñar. Variedades de la educación matemática* (63-75). Bogotá: Una empresa docente.

Radford, L. (2003). On the epistemological limits of language: Mathematical knowledge and social practice during the renaissance. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 123-150.

Rico, L. (2000). Educación Matemática, investigación y calidad. En Ponte J. y Serrazina, L (Eds), *Educação Matemática em Portugal, Espanha e Itália*, (303-313). Lisboa: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1, 39-63.

Rizo, C., Campistrous, L., Pastor, C., Pastor, G., y Nava, A. (2013). *El trabajo con números naturales en la escuela primaria mexicana*. México: Universidad autónoma de Guerrero.

Secretaria de Educación Pública (2014). *Desafíos matemáticos: primer grado libro para el alumno* (edición 2014-2015), México D.F., México: CONALITEG.

Secretaria de Educación Pública (2014). *Desafíos matemáticos: primer grado libro para el maestro* (edición 2014-2015), México D.F., México: CONALITEG.

Secretaria de Educación Pública (2011). *Plan de estudios para la educación básica*. México D.F., México: CONALITEG.

Secretaria de Educación Pública (2011). P*rograma de estudios para la educación básica, primer grado*. México D.F., México: CONALITEG.

Sierra, M. (2011). Investigación en Educación Matemática: objetivos, cambios, criterios, método y difusión. *Educatio Siglo XXI*, 29 (2), 173-198.

Waldegg, G. (1998). La Educación Matemática ¿Una disciplina científica? *Colección Pedagógica Universitaria Enero-Junio* (29), 13-44. Recuperado de http://www.uv.mx/cpue/coleccion/N_29/la_educaci%C3%B3n_matem%C3%A1tica.htm

Autores

Catalina Navarro Sandoval; UAGro. México; nasacamx@yahoo.com.mx

Judith Hernández Sánchez; UAZ. México; judith700@hotmail.com

SEMINARIO DE INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA EDUCATIVA. REFLEXIONES SOBRE LA PROFESIONALIZACIÓN DOCENTE EN MATEMÁTICAS

Eddie Aparicio, Landy Sosa, Karla Gómez

Resumen

En este seminario se plantea reflexionar de forma conjunta sobre la Matemática Educativa, su objeto de estudio y campo de acción, empleando la noción de triángulo didáctico como unidad mínima de análisis para los fenómenos didácticos asociados a la matemática. Las discusiones y ejemplos versarán sobre lo que en el Cimate Yucatán se ha venido tratando y desarrollando en el tema de profesionalización docente en matemáticas bajo la premisa de que es en el pensamiento didáctico profesional que un profesor tenga o esté en posibilidades de desarrollar de manera constante sobre sus saberes matemáticos y sus prácticas, el medio por el cual puede plantearse tanto propuestas de formación inicial como de desarrollo profesional.

Palabras claves: Matemática Educativa, Profesionalización, Docencia Matemática.

Matemática Educativa

En las últimas décadas se han realizado esfuerzos considerables por caracterizar a la Matemática Educativa (ME) como una disciplina científica emergente y de frontera, con un claro propósito y naturaleza social. Por ejemplo, Jahnke (1987) decía que ME era lo que surge cuando al hacer cierto tipo de abstracciones se aborda a la matemática como un problema de comunicación. Para Cantoral y Farfán (2003), ME consiste en el estudio sistemático de los efectos que devienen de procesos asociados a la culturalización científica de la sociedad centrados en las matemáticas. Para Puig (2003), la ME trata con fenómenos que pueden verse como procesos de significación y comunicación.

Con lo anterior ha de entenderse que la ME es mucho más que el análisis del conocimiento matemático en situación escolar con el fin de buscar formas de mejorarla. Sus principales cuestionamientos se originan al seno de la matemática en relación con los procesos de su organización y difusión institucional. Le interesa pues, entender los mecanismos de constitución, desarrollo e institucionalización de los saberes matemáticos a fin de hacerlos funcionales.

Para Cordero (2001), la ME es una disciplina que atiende como problemática fundamental la enseñanza de la matemática o bien, su aprendizaje. En ese sentido, dice este autor, en la ME entre otras cosas, se han formulado preguntas acerca del conocimiento matemático. Éstas han oscilado entre su naturaleza, sus formas y condiciones de construcción y sobre las construcciones que tienen que hacer los individuos para que se dé tal conocimiento. Por su parte Brousseau (1995) refiere que la ME es considerada como el estudio de la evolución de las interacciones entre un saber, un sistema educativo y los alumnos, con objeto de optimizar los modos de apropiación de este saber por el sujeto.

D' Amore (2005) identifica a la ME en tanto una forma de hacer investigación empírica, fijando la atención en la fase del aprendizaje (algo así como epistemología del aprendizaje de la matemática). Es decir, ME es ocuparse de las problemáticas en el aula desde la perspectiva del análisis epistemológico de los saberes matemáticos, o como le llaman en el viejo mundo, investigación histórica. Recientemente han resultado investigaciones que proponen que a través del estudio epistemológico de los conceptos se retomen fenómenos que quizá proporcionen pistas para el rediseño del *discurso matemático escolar*. Por ejemplo, algunos autores enfatizan sobre el estudio de la evolución de un conocimiento para comprender (inmersos en el contexto de la génesis misma de dicho conocimiento) de mejor manera, algunos de los portentos que han sido causas y consecuencias del nacimiento de un saber y entonces dar pie a la implementación de dichos hallazgos en la enseñanza contemporánea, reorganizando el discurso matemático escolar (Aparicio, 2003; Cantoral, 1995; Castañeda, 2004; Gómez, 1999, 2000, 2003; González, 2002; Maz, 1999; Montiel, 2005; Rodríguez-Vásquez y Sierra, 2006; Sierra et al, 1999, 2000, 2002, 2003.

De este modo y de manera general, se dice que esta disciplina busca dar alternativas de solución a problemáticas que tienen lugar en la esfera de la enseñanza-aprendizaje. Su objeto de estudio se caracteriza entonces por atender de manera sistemática los fenómenos didácticos relativos a la matemática. En otras palabras, el punto de partida de la ME es el cuestionamiento de la matemática a la luz de la didáctica o pedagogía, no a la inversa.

En el entendido anterior hablar de matemáticas y su didáctica, es hablar de una problematización del aprendizaje de los conceptos matemáticos en situación escolar. Es analizar las condiciones de producción de la matemática escolar en contraposición a un análisis epistemológico, cognitivo y sociocultural de la matemática no escolar. Así pues, ME también tienen que ver con las formas, mecanismos y procesos de adaptación de un conocimiento matemático específico en condiciones y tiempos específicos determinados por la escuela.

Es así que hoy día a nivel mundial, la ME posee un reconocimiento importante, lo que indica la preocupación que existe por generar ambientes de enseñanza-aprendizaje un tanto más efectivos y significativos. Existen teorías que sustentan los fenómenos didácticos que se suceden en la terna didáctica*: estudiante – profesor - saber*, y en consecuencia hay un esfuerzo por orientar las investigaciones hacia las formas de apropiación, construcción, entendimiento, epistemología, enseñanza y representación de un saber matemático.

La tarea pues, consiste en indagar sistemáticamente, formas de poder anticipar y controlar con base en ciertos constructos teóricos y métodos específicos, el conjunto de relaciones que han de hacer del sistema didáctico, un sistema funcional. Es importante subrayar que una característica que da originalidad a esta forma de hacer investigación, es tomar en consideración a los fenómenos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas bajo un enfoque sistémico, es decir, en palabras de (Ruiz, 1998), el funcionamiento global de un hecho didáctico no puede ser explicado por el estudio separado de cada uno de los componentes, sino por la complejidad de las interacciones entre el saber matemático, los alumnos y el profesor. Es a esta relación profesor, alumno y saber dentro del contexto escolar a lo que comúnmente se le ha llamado el *sistema didáctico*, sistema en el que tiene lugar gran cantidad y diversidad de interrelacionas entre sus componentes, haciendo complejo su estudio sistémico e interpretación de su funcionamiento.

Docencia en matemáticas

Con lo dicho en el apartado anterior, se hace evidente la diferencia entre ME y docencia en matemáticas (DEM). La DEM es una profesión que a la postre, ha precisado de la armonía disciplinaria de al menos dos áreas del conocimiento: Matemáticas y Didáctica, ambas entendidas como un medio y nunca el fin en sí mismo, para educar matemáticamente a las nuevas generaciones. En ese sentido, la DEM constituye en cierto modo, el campo sobre el cual ha de actuar la ME.

Por lo anterior en la ME se han planteado reflexiones no sólo sobre qué matemática enseñar y cómo enseñarla, sino también sobre la formación del profesor que ha de enseñar tal o cual matemática. Las propuestas al respecto han sido diversas. Empero lo importante en este escrito (espacio de discusión), no es analizar tales propuestas, sino más bien reflexionar sobre el papel de la ME en procesos de profesionalización de la DEM. Por ejemplo, discutir y reflexionar en torno a ¿cómo y por qué es importante entender desde la ME, la formación de profesores en matemáticas? ¿Qué significa reflexionar sobre la formación de profesores de matemáticas y la profesionalización de la DEM desde la ME? Entre otros cuestionamientos que posibiliten ampliar las visiones y fijar posturas respecto a ¿cómo podría o debería la ME constituirse en un referente disciplinar para la DEM?

Para algunos autores como Dolores (2013), una problemática en la profesionalización de la docencia en matemáticas está relacionada con la pregunta de cómo formar profesores de matemáticas; a juicio de dicho autor la respuesta a tal pregunta debe buscarse en la articulación de tres áreas fundamentales del conocimiento: Matemática, Pedagógica y Docente. Tal posicionamiento será considerado para darle dirección a las reflexiones y ejemplos de acciones de profesionalización del ejercicio docente en el seminario de introducción a la ME, al tiempo que se estará discutiendo desde una mirada muy particular, cómo identificar problemas de investigación en ME asociadas al tema de la profesionalización docente en matemáticas.

Algunos otros autores como (Aparicio y Sosa, 2015; Sosa, Aparicio, Jarero y Tuyub, 2014), sugieren que la cuestión de la profesionalización docente en matemáticas va más allá de las reflexiones que pudieran emprenderse en torno al profesorado y los posibles procesos de formación del mismo, pues si bien se reconoce al profesor/docente como figura central en todo intento de profesionalizar la labor docente, se asume que ello solo atiende una parte de la problemática, justamente la relacionada con la formación profesional de profesores/docentes en matemáticas, sin embargo, aun sería tarea pendiente el tema de la profesionalización del campo de la DEM en sí mismo. Así, estos autores consideran que un elemento fundamental en el proceso de formación y desarrollo profesional del profesorado en matemáticas, es el *Desarrollo de un Pensamiento Didáctico Profesional en Matemáticas*.

La DEM en cierta forma requiere de lograr conformar espacios de desarrollo profesional (Climent & Carrillo, 2003), donde se estudien y promuevan mutuamente procesos de construcción de conocimiento profesional, mediante la interacción entre *profesores de matemáticas, formadores de profesores e investigadores* en ME. Algunos esfuerzos se han orientado hacia el reconocimiento de “la necesidad de un conocimiento especializado, racional y apoyado en una disciplina, pero complementado y enriquecido con la experiencia y diferentes prácticas de aquellos que buscan su profesionalización" (Hernández, López y Borjón, 2015, p. 1245).

Es así que el tema y los asuntos relacionados con la formación de profesores, desarrollo profesional y profesionalización docente en matemáticas, han sido en los últimos años objeto de interés, teorización y desarrollo metodológico en la ME, asumiéndose en primera instancia como problemática fundamental en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas, la carencia del reconocimiento y desarrollo de una práctica profesional por parte de los profesores y en segundo lugar, la falta de marcos de referencia precisos que otorguen a la enseñanza de las matemáticas, el status de una actividad profesional por sobre la de una ocupación, oficio u arte.

Matemáticas, Matemática Educativa y Docencia en Matemáticas

En este tercer y último apartado se pretende realizar una relación concisa entre la matemática en tanto área de conocimiento, la ME en tanto disciplina científica y la DEM como un campo profesional.

Como es sabido las matemáticas en tanto primero una forma de pensamiento y posteriormente, conocimiento científico, su origen se relaciona con el entorno social y momento histórico al que pertenece, considerándosele al igual que otras ciencias (como las naturales), con un origen social. El surgimiento de un conocimiento matemático que pertenece a un cierto estatus en el tiempo y grupo social, es producto de una evolución del pensamiento social en el que se desarrolla, ya que también es víctima de los procesos políticos, comerciales y otros factores que influyen progresivamente.

Según Struik (1970), las concepciones matemáticas se formaron como resultado de un prolongado proceso social e intelectual cuyos orígenes y desarrollo se remonta al periodo neolítico cuando las personas pasaron de ser consumidores y conservadores de alimentos a ser productores de los mismos. Se piensa que las primeras concepciones geométricas se iniciaron en el trabajo con metales para la construcción de herramientas que posibilitaran dicha actividad productiva. El mismo Struik sugiere que los procedimientos primitivos de contar: *Uno, dos, …, muchos*, condujeron gradualmente a formas más precisas de denotar los números y que la matemática aparece primeramente como una ciencia práctica y empírica indispensable para la agricultura, la medición de tierras, y hasta el arte de la guerra, de suerte que las proposiciones eran constantemente comprobadas en los estratos del humano con la naturaleza y con su propia estructura social.

Por otra parte, la matemática pura tal como se le conoce actualmente, también pertenece a cierto grupo que en su momento tuvo la necesidad de crear una matemática universal o de igual lenguaje, pues todo conocimiento es afectado por la conciencia social a la que pertenece y a la vez este conocimiento afecta a la conciencia social.

El conocimiento matemático se encuentra histórica y culturalmente situado, de manera que como menciona Minguer (2006, p. 39):

Poner en relación las influencias histórico socioculturales con el estudio minucioso de la epistemología de los conceptos matemáticos, le arrojó información acerca de las circunstancias filosóficas e ideológicas –educacionales y científicas– que propiciaron el desarrollo del conocimiento matemático en el contexto sociocultural de una época, lo anterior constituye información valiosa para la investigación en Matemática Educativa, que puede ser tomada en cuenta para modificar… el discurso matemático actual.

Sin duda, atrás han ido quedando las concepciones y creencias ampliamente desarrolladas y difundidas tanto en la escuela como en la sociedad, de que las matemáticas lejos de ser una producción social, cultural o incluso, socio cognoscitiva, es un lenguaje abstracto y complejo, al que solo algunas cuantas personas podrían tener las capacidades cognitivas necesarias para acceder a su comprensión y tratamiento. Tal cambio en ese sistema de creencias y concepciones ha sido posible por los hallazgos en las últimas décadas de la ME. Por ejemplo, hoy día ya es parte del discurso especializado la importancia de diferenciar, empero al mismo tiempo, entender las relaciones que se establecen entre una matemática llamada Matemática Escolar y la Matemática en tanto conocimiento científico o especializado. Así se reconoce que en la ME se tiene como problemática fundamental la que deviene de trastocar e interpretar escolarmente a la Matemática.

Visto así, bien podría considerarse que una relación entre Matemáticas, ME y DEM es de naturaleza didáctica, esto es, el establecimiento o más bien, el esclarecimiento de los elementos didácticos que posibilitarían el trastocar de manera controlada y eficaz, la naturaleza de los saberes matemáticos con el fin de mejorar los procesos de comunicación institucional asociados.

Referencias bibliográficas

Aparicio, E. (2003). *Sobre la noción de continuidad puntual: Un estudio de las formas discursivas utilizadas por estudiantes universitarios en contextos de geometría dinámica*. Tesis de maestría no publicada, Centro de investigaciones y estudios avanzados del IPN, D.F., México.

Aparicio, E., y Sosa, L. (2015). Desarrollo del pensamiento didáctico profesional en procesos de desarrollo profesional docente en matemáticas. Mérida, Yucatán: Universidad Autónoma de Yucatán (no publicado).

Brousseau, G. (1995) *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. (Balancheff, N.; Cooper, M.; Shuterland, R.; y Warfiel, V., Trads). Boston, London. Cluwer Academia Publlishers

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento.* Barcelona: Gedisa.

Cantoral, R. (1995). Acerca de las contribuciones actuales de una didáctica de antaño: el caso de la serie de Taylor. *Mathesis*, 11(1), 55-101.

Cantoral, R., & Farfán, R. M. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 6(1), 27-40.

Castañeda, A. (2004). *Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión*. Tesis de doctorado no publicada. Centro de investigación en ciencia aplicada y tecnología avanzada del IPN, D.F., México.

Climent, N. y Carrillo, J. (2003). El dominio compartido de la investigación y el desarrollo profesional. Una experiencia en matemáticas con maestras. *Enseñanza de las Ciencias*, 21(3), 387-404.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo: una espistemología a través de la actividad humana. RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 4(2), 103-128.

D' Amore, B. (2005). *Bases Filosóficas, Pedagógicas, Epistemológicas y Conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. Reverté. México.

Dolores, C. (2013). Introducción. En Dolores, C., García, M., Hernández, J. y Sosa, L. (Eds). Matemática Educativa: La formación de profesores (pp. 13 – 25), México: Diaz de Santos.

Gómez, B. (1999). Tendencias metodológicas en la enseñanza de la proporcionalidad derivadas del análisis de libros antiguos. El caso de los problemas de "compañías". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 2*(3), 19-29.

Gómez, B. (2000). Los libros de texto de matemáticas. En A. Martinón (Ed.): *Las matemáticas del siglo XX. Una mirada en 101 artículos.* Madrid: Nívola, 77-80.

Gómez, B. (2003). La investigación histórica en didáctica de las matemáticas. En E. Castro., et al. (Eds.) *Investigación en Educación Matemática.* Séptimo Simposio de la SEIEM. pp. 79-85. Universidad de Granada, España.

González, M. T. (2002). *El Análisis Matemático en los libros de texto de España*. Departamento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales, Universidad de Salamanca.

Jahnke, C. (1987). ¿Qué es la matemática educativa? En Gutiérrez L. (Comp.) (s.f.). Metodología para la enseñanza de la matemática (pp. 35-39). Caracas: M.R. Editores.

Maz, M. (1999). La historia de las matemáticas en clase: ¿porqué? y ¿para qué? En Berenguer, et al. (Eds.) *Investigación en el aula de matemáticas. Matemáticas en la sociedad.* Granada: Sociedad Thales y Departamento de didáctica de las matemáticas.

Minguer, L. (2006). *Entorno sociocultural y cultura matemática en profesores de nivel superior de educación. Estudio de caso en el Instituto Tecnológico de Oaxaca. Una aproximación socioepistemológica.* Tesis de doctorado no publicada. Centro de investigación en ciencia aplicada y tecnología avanzada del IPN, D.F., México.

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica.* Tesis doctoral no publicada, CICATA, México.

Puig, L. (2003). Signos, textos y sistemas matemáticos de signos. En E. Filloy (Ed.), Matemática Educativa: aspectos de la investigación actual (pp. 174-186). México, DF: Fondo de Cultura Económica/CINVESTAV.

Rodríguez-Vásquez, F. y Sierra, M. (2006). Newton y la solución de ecuaciones numéricas: desarrollo histórico. *X Memoria de Investigación en Matemática Educativa.* pp. 108-121. Tlaxcala, México.

Ruíz, L. (1998). *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico*. Tesis de doctorado publicada. Jaén: Universidad de Jaén, Servicio de publicaciones.

Sierra, M. (1999). Uso de la historia de las matemáticas en el aula. En T. Ortega (Ed.): *Temas controvertidos en educación matemática* (pp. 13-26). Valladolid: Universidad de Valladolid.

Sierra, M., et al. (1999). Evolución histórica acerca del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria (C.O.U): 1940-1995. *Enseñanza de las ciencias 17*(3), 463-476.

Sierra, M., et al. (2000). El papel de la historia de la matemática en la enseñanza. En A. Martinón (Ed.): *Las matemáticas del siglo XX. Una mirada en 101 artículos.* Madrid: Nívola, 93-96.

Sierra, M., et al. (2002). Una visión integradora acerca del concepto de límite. *Uno Revista de didáctica de las matemáticas 29,* 77-94.

Sierra, M., et al. (2003). El método de investigación histórica en la Didáctica del Análisis Matemático. En E. Castro, et al. (Eds.) *Investigación en Educación Matemática* (pp. 109-130). Séptimo Simposio de la SEIEM. Universidad de Granada, España.

Sosa, L., Aparicio, E., Jarero, M., Tuyub, I. (2014). Matemática Educativa y Profesionalización Docente en Matemáticas. El caso de Yucatán. En Dolores, C., García, M., Hernández, J. y Sosa, L. (Eds). *Matemática Educativa: La formación de profesores* (pp. 33 – 49), México: Diaz de Santos.

Struik, D. (1948). *A Concise History of Mathematics*. New York, U.S.A.: Dover Publications, Inc. Cuarta edición revisada 1987.

Autores

Eddie Aparicio; UADY. México; alanda@uady.mx
Landy Sosa; UADY. México; smoguel@correo.uady.mx
Karla Gómez; UADY. México; karla.gomez@correo.uady.mx

SECCIÓN F. RESEÑAS


Escuela de Invierno en Matemática Educativa
XII
Tampico
2009
XIII
Monterrey
2010
XI
Mérida
2007
XIV
Zacatecas
2011
III
Monterrey
1999
II
Monterrey
1998
X
Sta. Cruz
Tlaxcala
2006
IV
Acapulco
2000
XV
México
2012
XVIII
Oaxaca
2015
XVI
Tuxtla Gutiérrez
2013
IX
San Cristóbal
de las Casas
2005
I
Hidalgo
1997
V
Oaxaca
2001
VIII
Tuxtla
Gutiérrez
2004
VII
Chilpancingo
2003
VI
Tuxtla
Gutiérrez
2002
XVII
Oaxaca 2014

Red Cimates

Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A. C.