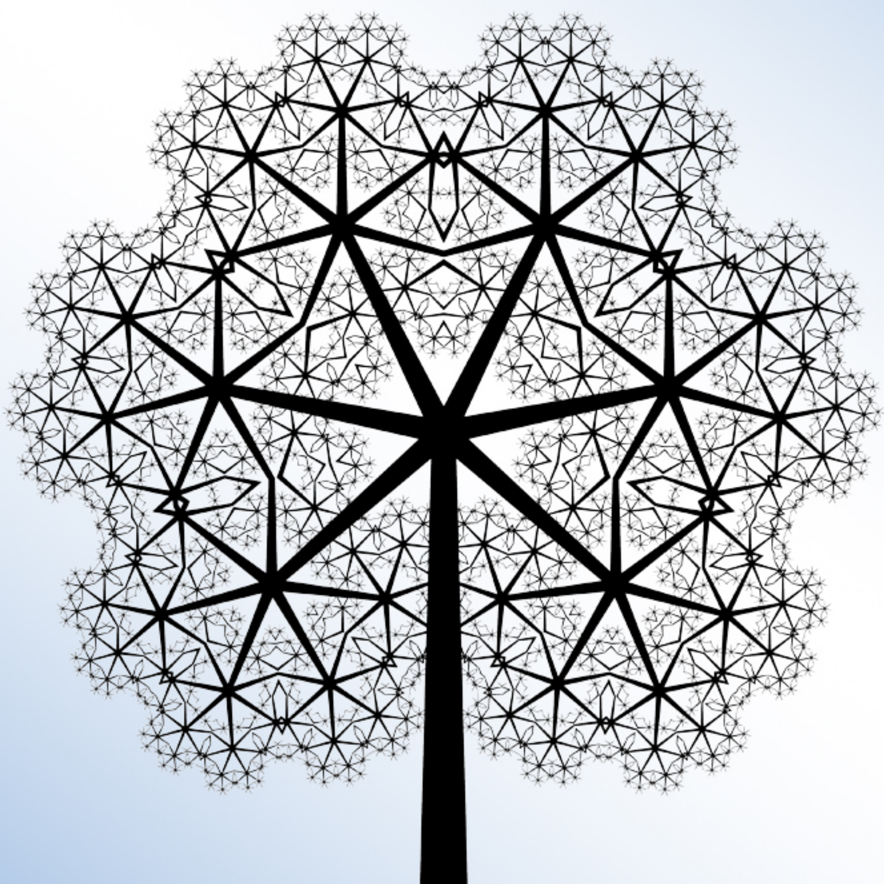
Investigación e Innovación en Matemática Educativa

Vol. 2, Núm. 1, 2017



Red Cimates

Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A. C.

Red Cimates

Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A.C.

INVESTIGACIÓN E INNOVACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA, Volumen 2, Número 1, 2017, es una publicación periódica editada por la Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa, A. C., calle 19 A 350, Col. Fraccionamiento Pedregales de Lindavista, C. P. 97219. http://revistaiime.org / comite.editorial.red.cimates@gmail.com. Editoras responsables de este número: Gabriela Buendía Abalos, Blanca Rosa Ruiz Hernández, Paola Alejandra Balda Alvarez. Apoyo Editorial: Marlene Roberta Acevedo Zapata. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04-2016-072017141600-102, ISSN: 2594-1046, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Responsable de la última actualización de este número, Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A. C., Gabriela Buendía Abalos. Fecha de última modificación, 28 de noviembre de 2018.

CONTENIDO

ISSN: 2594-1046

ISSN: 2594-1046

PRESENTACIÓN

Este segundo volumen de Investigación e Innovación en Matemática Educativa (IIME) incluye la **primera parte** de los trabajos presentados en la XIX Escuela de Invierno en Matemática Educativa. Los trabajos son: Grupos de Discusión, Experiencias Didácticas, Laboratorios y Avances de Investigación. La segunda parte de los trabajos se presentará como un número especial del volumen 3 de IIME.

Las responsables de este volumen agradecen a las siguientes comisiones del Comité Organizador de la XIX EIME su trabajo y el acceso a la información a fin de que dichos trabajos pudieran ser reunidos en este volumen.

Grupos de discusión: José Armando Albert Huerta y Ruth Rodríguez Gallegos

Experiencias Didácticas y Avances de Investigación: Carolina Carrillo García, José Iván López Flores y Blanca R. Ruiz Hernández

Laboratorios: Evelia Reséndiz Balderas.

GRUPOS DE DISCUSIÓN

Innovación en investigación en Matemática Educativa.

Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa AC (2017) Vol. II

Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

Desarrollo Profesional del Profesor de Matemáticas. Experiencias Desde los Programas de Formación Inicial y Continua en México

Judith Hernández
Universidad Autónoma de Zacatecas. judith700@hotmail.com

Silvia Ibarra
Universidad de Sonora

Rita Angulo
Universidad Autónoma de San Luis Potosí

Ricardo Cantoral
CINVESTAV-IPN

Daniela Reyes Gasperini
CINVESTAV-IPN

Crisólogo Dolores
Universidad Autónoma de Guerrero

Eddie Aparicio
Universidad Autónoma de Guerrero

Landy Sosa
Universidad Autónoma de Yucatán

Resumen

En este grupo temático se presentan algunos de los aspectos que se desarrollan en México relativos al desarrollo profesional del profesor de matemáticas, teniendo como disciplina de referencia a la Matemática Educativa (ME). En esta ocasión se pone como centro de la reflexión las siguientes preguntas: ¿Cuáles son las propuestas de desarrollo profesional que se han concretado y los resultados o productos alcanzados?, ¿Cómo estas experiencias han contribuido a enriquecer los enfoques teóricos de la disciplina? y ¿Cuáles son las necesidades y expectativas detectadas en sobre el desarrollo profesional de profesores de matemáticas en México? De esta manera se propone identificar y determinar a través de los avances teóricos y de su confrontación con los contextos de los profesores, las nuevas direcciones que podrían tomar las acciones de profesionalización docente en el campo de la ME en México.

Palabras clave: Desarrollo profesional. Profesor de matemáticas

1. INTRODUCCIÓN

La preocupación por la formación de los profesionales de la Matemática Educativa (ME) no es nueva; sin embargo en las últimas tres décadas se ha identificado un interés particular por los

Profesores de Matemáticas (PM). Lo anterior ha dado como resultado una cantidad importante de investigaciones en torno a los PM y su profesionalización, las cuáles están creciendo rápidamente (Even & Ball, 2010). De esta manera se ha logrado identificar que el propiciar la construcción de los saberes específicos y especializados que éste requiere no es tarea fácil.

Existen varios factores que hacen compleja las tareas de los PM y la de su desarrollo profesional. Una de ellas es que es un profesional en situación (Altet, 2005; Cardeñozo, Flores y Azcárate, 2001). Es decir, el profesor debe actuar y resolver problemas de manera inmediata y en situaciones y contextos diversos. Además en sus ámbitos de actuación utiliza conocimientos de dos orígenes; aquellos tomados de una o varias disciplinas (teoría) y los surgidos de diferentes experiencias (prácticas). Es así como este profesional construye y articula conocimientos de diferentes naturalezas y los pone en uso en diferentes contextos convirtiéndolos en saberes de su profesión. Lo anterior, permite hablar de un conocimiento situado, donde los enfoques socioculturales exigen ser sensibles a los contextos.

Es así como con base en los resultados de la investigación y la experiencia vivida a través de la propuesta de diferentes espacios de desarrollo profesional se reflexiona en torno a las siguientes preguntas: ¿Cuáles son las propuestas de desarrollo profesional que se han concretado y los resultados o productos alcanzados?, ¿Cómo estas experiencias han contribuido a enriquecer los enfoques teóricos de la disciplina? y finalmente, ¿Cuáles son las necesidades y expectativas detectadas en torno al desarrollo profesional de profesores de matemáticas en México?

Para lograr responder estas preguntas se ha organizado el presente documento a través de programas de formación inicial y continua que están realizando un esfuerzo por construir espacios de desarrollo profesional para los PM de diferentes niveles educativos y contextos. En cada uno de ellos se presentan diferentes posturas de cómo cada uno de los participantes han afrontado tal problemática. Lo anterior ha dado como resultado la reflexión sobre las expectativas, retos y nuevas direcciones de la profesionalización de profesores de matemáticas en México.

2. ESPACIOS DE DESARROLLO PROFESIONAL EN MÉXICO

El desarrollo profesional puede definirse y abordarse desde distintos escenarios. En el ámbito socio-administrativo puede concebirse como una política pública:

ISSN: 2594-1046

> El desarrollo profesional es un proceso continuo que ayuda a complementar la formación inicial de los docentes, permite atender sus necesidades, desarrollar innovaciones y aplicar programas o reformas educativas (Talis, 2013).

En el ámbito académico una forma de plantearlo es como aquellos procesos de construcción de conocimiento (específico y especializado) para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a través de la interacción consensuada entre profesionales de la ME (Climent y Carrillo, 2003). De esta manera tanto los programas de formación inicial como continua se espera se puedan constituir en espacios de desarrollo profesional para los futuros PM y aquellos en activo, respectivamente.

Antes de iniciar con las respuestas a los cuestionamientos propuestos, se considera necesario identificar algunos datos sobre la población de interés. En particular se presenta datos de la cantidad y distribución por nivel educativo de profesores de matemáticas que laboran en la República Mexicana (Tabla 1 y Gráfico 1).

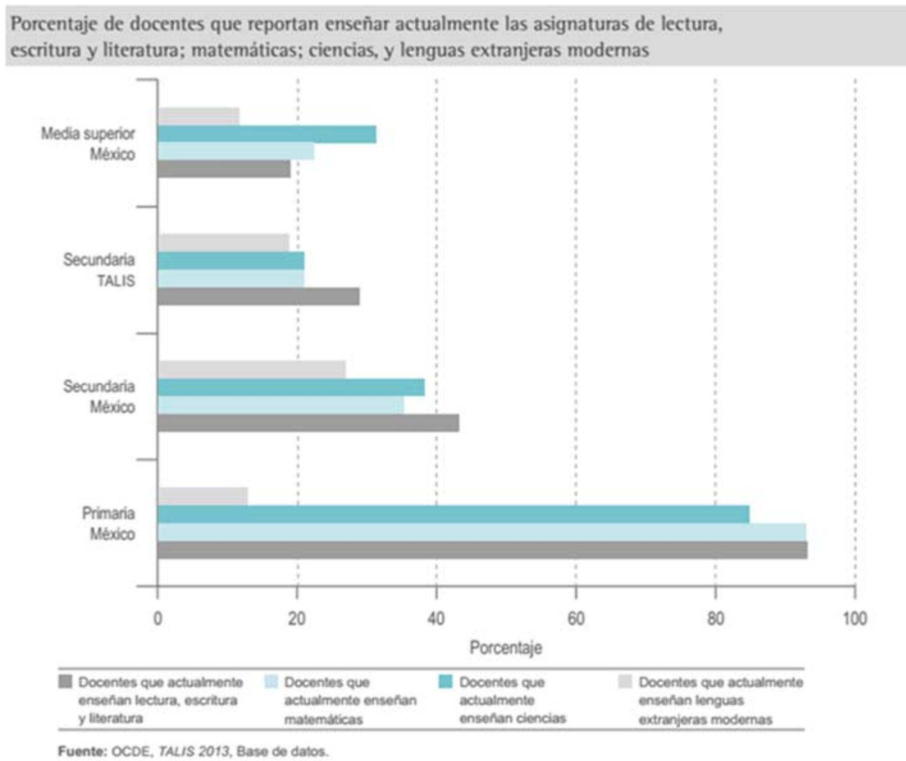
Nivel Educativo	**Escuelas**	**Docentes**	**Alumnos**
Educación Básica	227,194	1,186,764	25,782,388
Capacitación para el Trabajo	6,016	41,226	1,544,154
Educación Media Superior	15,427	285,974	4,333,589
Educación Superior	4,894	328,932	3,161,195
Total	**253,531**	**1,842,896**	**34,821,326**

Tabla 1: Distribución del número de escuelas, docentes y alumnos por nivel educativo, en el ciclo escolar 2012-2013. Fuente: http://www.sep.gob.mx/es/sep1/ESTADISTICA_EDUCATIVA.

La cantidad de profesores en el sistema educativo nacional da una idea del gran reto que existe en cuanto a la cobertura de espacios de desarrollo profesional en el país. Lo anterior, tomando en cuenta la oferta para 2012 de los posgrados relacionados con la enseñanza de las matemáticas; las cuales no rebasan los 25 programas educativos (Hernández, 2014). La pregunta que ahora surge es si realmente estos programas pueden considerarse espacios de desarrollo profesional.

Ahora, para el caso específico de profesores de matemáticas se encuentra que en el nivel secundaria el porcentaje de profesores que enseñan matemáticas es mayor en las secundarias mexicanas, que sus colegas de los otros países participantes en la encuesta (Gráfica 1).

ISSN: 2594-1046



Gráfica 1: Porcentaje de docentes de matemáticas en México

Otro aspecto relevante es identificar si para los profesores existen expectativas de desarrollo profesional y cuáles son éstas. Al respecto Talis (2013) indica que en todos los niveles educativos más del 80% de los profesores emprendió actividades relacionadas con su desarrollo profesional (Gráfica 1). Para el caso de México las principales temáticas fueron tres: el conocimiento de los planes y programas de estudio, las competencias que deben desarrollar para enseñar los diversos contenidos, así como el conocimiento de dichos contenidos.

Si bien, esta información presenta el reto de la cobertura y los posibles intereses u opciones de desarrollo profesional para los PM, no da suficiente información respecto a lo que generalmente se pasa por alto: lo que el profesor demanda con base en sus contextos y que de esto puede ser rescatado desde la investigación. En este caso se propone que una manera de conocer lo antes planteado es presentando una breve perspectiva del desarrollo profesional en México a través de algunos programas de formación inicial y continua.

3. EL CASO DE LA FORMACIÓN INICIAL

En México existen dos licenciaturas que son consideradas representativas del campo: la Licenciatura en Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí (LME-UASLP) y la Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán (LEM-UAdY) (Hernández, 2014, Hernández, Dolores, Borjón y Torres, 2013). En particular estas carreras son consideradas las más equilibradas y con una mayor presencia de la ME como disciplina de referencia en la formación de sus estudiantes (Hernández, 2014). De igual manera, ambas fueron resultado de reestructuraciones de carreras que formaban PM del Nivel Medio Superior en los años 70´s y 80´s.

3.1. Universidad Autónoma de San Luis Potosí

La LME-UASLP es la licenciatura de más reciente creación (2010) en el campo de la ME en el país, al contar con sus primeras generaciones a partir del 2015 se hace necesario realizar una evaluación del proceso formativo realizado. Al respecto se han detectado algunas ausencias sobre conocimientos relacionados con la teoría, metodología y diseño curricular; además de la formación sociopolítica que complemente una postura ideológica necesaria para cualquier profesionista del nivel superior. La propuesta para abordar este vacío es mediante la estructura de cinco Campos de Conformación Estructural Curricular (CCEC): el epistemológico – teórico, el crítico social, el de avances científico- tecnológicos y el de elementos centrales de las prácticas profesionales y el CCEC tendente a vacío (De Alba, 1993). De esta manera:

> Los CCEC aluden al tipo de formación que emerge de un currículum. Se refieren a los materiales a partir de los cuales se va a construir o diseñar éste… se entiende a un agrupamiento de elementos curriculares [materiales de construcción] que pretenden propiciar determinado tipo de formación en los estudiantes (De Alba, 2015, p. 203).

Otra propuesta de perfeccionamiento al plan de estudios y que ha sido experimentado y cuenta con resultados en Angulo (2015) está relacionado con las asignaturas para la formación docente y en investigación. Para el caso de las 4 asignaturas sobre práctica docente el proyecto tendiente al desarrollo profesional de los futuros PM se conformó mediante dos grandes propósitos: Conjuntar la teoría con la práctica docente (1) a partir de hipótesis de investigación en el aula (2). Los propósitos señalados se alcanzaron en cuatro momentos, uno por cada semestre y teniendo como requisito esencial la realización de la práctica en escuelas en San Luis Potosí.

Finalmente es importante mencionar cómo las experiencias previas y las desarrolladas en la formación de futuros PM en la LME-UASLP han contribuido en algunos proyectos de investigación sobre desarrollo profesional.

Al respecto, la indagación relativa en torno al currículum ha permitido perfeccionar teórica y metodológicamente la noción de Estructura Conceptual Científico Didáctica (ECCD) como criterio para la modificación de contenidos de programas y planes de estudio. Se pretende, ahora, continuar identificando las ECCD de los profesores que imparten clases en ME desde lógicas disciplinarias diversas y que se integran al currículum: Ciencias exactas, Ingeniería, ME y Ciencias Humanas. A este respecto se han hecho ya algunos avances: un apoyo inicial en la convocatoria Fondo de Apoyo para la Investigación (UASLP-FAI-22788, Universidad Autónoma de San Luis Potosí, 2014); y, el apoyo para un proyecto de investigación en Promep (2014 DSA/103.5/14/7437).

En el mismo tenor se están fortaleciendo los estudios sobre currículum universitario en ME. Al respecto se detectó que en México existen pocas investigaciones que traten la cuestión curricular en cuanto selección de contenidos. La mayoría refieren el currículum en función de la enseñanza como Hernández (2014), Hitt (2000) y Valenzuela y Dolores (2011). Esto no ocurre a nivel internacional en donde existe mayor diversidad como: Anchorena (2008), Cai et al (2012), Gravenmeijer & Teruel (2000), Kilpatrick (2009), Panhuizen (2005), Pino-Fan, Godino y Castro (2013), Rico (1998) y Valero y García (2014).

Por último se ha trabajado sobre el discurso de profesores de ME. Aquí se presentan algunos resultados que indican una necesidad a atender en cuanto a la práctica de profesores que dan clase en instituciones con programas relativos a la ME:

- Los entrevistados coincidieron en que la tendencia formativa fundamental implica preparar a los estudiantes para la combinación de habilidades pedagógicas y matemáticas mediante la investigación en aula y fuera de ella. No obstante se encuentra como inconveniente

- La dificultad que los estudiantes tienen para la integración de los conocimientos que reciben en las aulas universitarias. Esta situación tiene como causa –según los resultados- que
- Los profesores que les dan clase tienen cuatro perfiles formativos (Ciencias exactas, Ciencias prácticas, Ciencias sociales y Humanas y Matemáticos educativos). Otras directrices detectadas son,
- La modificación continua de los contenidos educativos, cuestión que de suyo no es incorrecta, al contrario, actualiza los contenidos y promueve la libertad de cátedra; y
- La escasa práctica de trabajo colegiado.
- Finalmente, se detectaron dos tendencias para formar a los estudiantes en investigación, la primera –propia de los formadores con perfil de ciencias exactas y prácticas-, la segunda propia de matemáticos educativos y profesores de ciencias sociales y humanas. En la primera tendencia se aprecia la práctica de compartir con los estudiantes todos los procesos de construcción de una investigación, en tanto que, en la segunda tendencia se distingue la práctica de compartir con los estudiantes sólo los procedimientos más sencillos para la construcción de una investigación

3.2. Universidad Autónoma de Yucatán

Para el caso de la LEM-UAdY, es la licenciatura de mayor tradición en el campo de la ME y en la formación inicial de PM del Nivel Medio Superior. Su contribución ha ido más allá de la formación de PM profesionales para el sureste mexicano, sino que ha logrado posicionar a sus egresados en programas de posgrado (maestría y doctorado) de alta calidad, tanto nacionales como internacionales, dando cuenta así, de la calidad formativa inicial de estos profesionales.

En la LEM-UAdY, se ha incorporado recientemente (año 2013), una perspectiva mucho más alineada a las tendencias y necesidades actuales en la formación inicial de PM, por ejemplo, con principios de identidad y pertenencia profesional, así como el de una formación integral. Dicho así, los PM formados en UAdY, son profesionales sensibles a las problemáticas de su campo y capaces de hacerle frente mediante el uso adecuado de los conocimientos teóricos, metodológicos y prácticos pertenecientes a la ME, en tanto disciplina científica.

Lo anterior ha sido posible gracias a la conformación de un grupo de docentes investigadores (Cuerpo Académico Enseñanza de las Matemáticas), quienes han estado permanentemente desarrollando diversos proyectos de investigación e intervención para la mejora de los procesos formativos y de desarrollo profesional docente en el estado de Yucatán y en estados vecinos. Ejemplo más reciente de ello es el Programa: “Reconceptualización y reorganización de prácticas educativas” bajo el cual se han obtenido diversos resultados y productos, tales como la “Colección Didáctica de las matemáticas en educación básica. Material para el alumno y profesor. Cuya primera edición fuera en el 2015 para los 1°, 2° y 3° de nivel primaria. Publicado por la Secretaría de Educación de Yucatán y la UAdY, o la obra “Álgebra y pensamiento algebraico: Experiencias de aprendizaje en bachillerato” en el año 2016, y cuyo uso será en todo el subsistema de la DGETI – Yucatán, en el próximo semestre escolar agosto – diciembre 2016.

Sin duda, la vinculación entre la LEM – UAdY y el sector educativo, ha favorecido para disponer de datos e información real sobre el tipo de problemáticas y demandas específicas presentes en el campo laboral que, a su vez, permean en la actualización continua del currículo LEM- UAdY para una mejor atención formativa a los futuros cuadros profesionales de PM.

4. EL CASO DE LA FORMACIÓN CONTINUA

4.1. Universidad de Sonora

La Universidad de Sonora (UNISON) cuenta con un grupo de trabajo en ME, con una antigua y amplia experiencia en acciones de formación de PM, ubicadas principalmente en lo que administrativamente se denomina formación continua (cursos, diplomados y recientemente una especialidad). Los niveles educativos en los cuales se ha trabajado cubren a profesores de primaria, secundaria, bachillerato y nivel superior, siendo los temas coincidentes con los que Talis (2013) marca.

A raíz de las reformas curriculares para la educación básica y el nivel medio superior, la producción se ha concentrado en compartir con los profesores una manera de cómo es posible traducir en los salones de clases los enfoques para la enseñanza de las matemáticas que se encuentran presentes en las propuestas curriculares. Además, se ha puesto énfasis en desarrollar en los PM competencias para el diseño y gestión de sus propias actividades de clase. Estos planteamientos retoman resultados que se asumen como estables en nuestro campo disciplinar de la ME. Los resultados teóricos y prácticos que permean estos diseños son:

- El papel de la resolución de problemas como fuente de construcción de la matemática.
- La matemática como producto de un proceso de construcción social.
- La naturaleza pragmática y contextual de los significados de los objetos matemáticos.
- La importancia y beneficio que el uso de las diferentes representaciones de los objetos matemáticos tienen en el aprendizaje de las matemáticas.
- El papel del uso de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación en los procesos de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.
- La importancia del proceso comunicativo y del trabajo colaborativo en la enseñanza y el aprendizaje en general y de las matemáticas en particular.

La producción de materiales y diseños didácticos de apoyo a la labor cotidiana del profesorado ha sido cuantiosa y en algún sentido original (ver por ejemplo Grijalva et al, 2012; Ibarra et al, 2011, 2014; Rodríguez et al, 2011). Sin embargo, en esta preocupación por fungir como una especie de bisagra o conexión entre lo teórico del campo disciplinar y lo cotidiano de la labor docente, se ha pasado a un segundo término la recuperación de las experiencias vividas con los docentes mediante la investigación. A pesar de este aparente descuido, se ha dado seguimiento a algunas acciones vía las tesis de egresados del posgrado en ME de la UNISON. Para mayor detalle de estos aspectos, pueden consultarse Moreno (2012), Corral (2013) y Mendoza (2013).

Si bien las primeras investigaciones estuvieron ligadas a estudiar el significado de los objetos matemáticos, apoyados teóricamente en el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática, (EOS) desarrollado por Godino y colaboradores. Recientemente, se ha empezado a explorar nuevas líneas, o derivaciones más finas, emergidas de los resultados sobre las investigaciones iniciales centradas en el seguimiento de las prácticas docentes. Actualmente se está explorando lo que se conoce como el conocimiento didáctico matemático (CDM) del profesor de matemáticas, modelo teórico derivado también del EOS.

4.2. Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados (Cinvestav)

Para el caso del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav es importante fijar una posición respecto a lo que se asume como desarrollo profesional. Por lo tanto se habla del desarrollo profesional docente y no de la formación continua, pues se concibe al profesor como un profesional que está formado y, como toda profesión, precisa de desarrollo profesional. Las necesidades y expectativas detectadas refieren al acompañamiento de los procesos de desarrollo profesional que sean coherentes en sus fundamentos base.

De esta manera, se ha trabajado con tres proyectos nacionales simultáneos: **Taller para la mejora de los aprendizajes en Matemáticas; Problematización de la matemática escolar y Empoderamiento docente.** Los tres proyectos con igual fundamento teórico, con poblaciones y objetivos diferentes. Los resultados alcanzados son de tipo cualitativo (cuestionamiento de la matemática escolar con repercusiones en aspectos didácticos, conocimiento e incorporación a la disciplina de Matemática Educativa) y cuantitativo (progreso en examen de ingreso y egreso).

Asimismo, en cuestión de colectivo disciplinar, se logró la integración de los CIMATE como agentes transformadores y participantes activos de estos proyectos. Tanto profesores como tutores de los proyectos fueron a nivel nacional.

Para concluir, se insiste en la idea de Desarrollo Profesional Docente por sobre la de Formación de Profesores. Las experiencias empíricas han permitido comenzar trabajos sobre empoderamiento docente, reflexión, deconstrucción, trabajos en telesecundarias, entre otros. Los trabajos realizados permiten teorizar la realidad y no hacer coincidir la realidad con la teorización. Los procesos definidos son confrontados con las experiencias docentes que implican repensar la idea de estereotipos para comenzar a hablar de procesos diversos.

4.3. Universidad Autónoma de Guerrero

La Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro) fue, después del Cinvestav, la primera universidad interesada en institucionalizar el término “Matemática Educativa”; prueba de ello es que es la primera licenciatura en México que otorga el título “Licenciatura en Matemática Educativa”. Esta carrera fue instaurada en 1986 y en la actualidad se considera un programa de formación continua; ya que se ofrece a profesores en activo del Nivel Medio Superior. De igual forma, el Cimate Guerrero

ISSN: 2594-1046

cuenta con tres programas educativos de posgrado en ME (un doctorado, una maestría profesionalizante y una de investigación) todos en el PNPC de Conacyt.

Hasta el momento se han formado más de 100 licenciados en ME y más de 30 maestros en docencia de la Matemática. Los egresados han incidido en el sistema educativo guerrerense constituyéndose en líderes académicos; han introducido visiones y prácticas innovadoras de enseñanza y aprendizaje (e-a) de la matemática; han contribuido en la mejora y aceptación de la matemática en la escuela; han participado en la formación y actualización de PM o tienen puestos de dirección o supervisión escolar.

Estos años inmersos en programas de desarrollo profesional advierten sobre la pertinencia y necesidad: de programas de formación de egresados de bachilleres y de actualización de PM en servicio; de hacer investigación en el aula en colaboración con los profesores; de fortalecer los marcos teóricos referentes a la formación de profesores, particularmente en cuanto a creencias y concepciones. Lo anterior, ha permitido fortalecer las Líneas de Generación y Aplicación del Conocimiento (LGCA) de los posgrados; específicamente la que lleva por nombre Formación de Profesores. Asimismo, se han instalado nuevas LGAC como la de Creencias y Concepciones y la relativa al área afectiva de los profesores.

De esta manera la experiencia de contar con programas de formación inicial y continua en torno a la ME, ha permitido contar con algunas propuestas para promover el desarrollo profesional de los PM, algunas de estas propuestas ya han sido publicadas en Dolores, García, Hernández y Sosa (2013). A continuación se mencionan las que se consideran más relevantes:

- **En la formación inicial:** se requiere de licenciaturas en ME que formen PM como una opción de carrera universitaria; conocimiento profundo y amplio del contenido matemático para la e-a; desarrollo de habilidades docentes, de evaluación y de creación de ambientes en la e-a de la matemática.
- **En la formación continua, son mayores**: promover una e-a efectiva de la matemática; un dominio del contenido matemático para la e-a; desarrollar competencias docentes para la evaluación del aprendizaje y para el aprendizaje y para crear ambientes de e-a de la matemática.

ISSN: 2594-1046

4.4. Universidad Autónoma de Zacatecas

En el Cimate-Zacatecas y en particular en la Maestría en Matemática Educativa (MME) con una orientación profesionalizante, se promueve como un espacio de desarrollo profesional en donde convergen las prácticas de investigación y docencia; la cual se asume como lo expresa Cantoral (2013) están sujetas a diferentes contextos, usos y usuarios. Sin embargo estas prácticas comparten como fin último la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Godino, 2006). Lo anterior permite la convergencia de intereses y acciones tendientes a la producción y reproducción de la disciplina de referencia que es la ME.

Retomando lo expresado en Hernández, López y Borjón (2015) la personalidad de la MME es el esfuerzo por encontrar una articulación entre los resultados de la investigación en ME y la práctica docente de los PM. De esta manera, se busca con base en una relación dialéctica retroalimentar y contextualizar la perspectiva investigativa y las experiencias de aquellos que buscan su profesionalización.

Actualmente se cuenta ya con tres generaciones de egresados, los resultados han sido productivos tanto para los PM como para los investigadores que forman parte de la MME. Según lo expresado por parte de los egresados resalta el trabajo colaborativo entre PM y los profesores de la maestría; también se menciona la orientación hacia la investigación impactando favorablemente en su práctica docente. Esto aseguran permitió tomar consciencia del aprendizaje de sus estudiantes y la importancia de compartir con sus colegas lo aprendido. De esta manera, se espera generar espacios de desarrollo profesional en su propio espacio laboral; lo anterior se complementa con la reflexión como elemento que al accionarse permite mejorar su práctica docente.

Algunas de las cuestiones emergentes que se tienen que atender y mejorar según los PM egresados del posgrado y la experiencia formativa en estos procesos son:

- Romper con la idea de que la tesis es la única forma de producir conocimiento nuevo para la disciplina; es decir existen otras formas de generar nuevo conocimiento para la ME y que están ligados a la forma en la que los resultados de la investigación interactúan y son resignificados por los PM en su práctica docente.

ISSN: 2594-1046

- Los egresados aunque cuentan con experiencia y un perfil considerado como sólido en matemáticas presentan algunas ausencias de conocimiento matemático disciplinar; y finalmente
- El contexto es un factor que determina lo que el profesor puede y quiere hacer como parte de su desarrollo profesional.

4.5. Centro de investigación en ciencia aplicada y tecnología avanzada del Instituto Politécnico Nacional (Cicata-IPN)

En estudios recientes (Even & Ball, 2010; Wood, 2008; Gutiérrez & Boero, 2006; Lester, 2007) se han reconocido diversas tradiciones en la formación de profesores. El CICATA es pionero al proponer espacios virtuales de desarrollo profesional. En particular esto podría ser una posible solución al problema de cobertura y a la imposibilidad o bien a la ventaja de no separar a los PM de sus aulas. Para ello se ha propuesto un espacio virtual cuya estructura es de una red social que plantea posibilitar el desarrollo profesional de PM en México (Mariscal y Lezama, 2014). En este caso la calidad de las interacciones es la premisa principal que influirá positivamente en la actividad docente de sus participantes. El proceso y propuesta se puede ver en la Figura 2. Este proyecto fue concretado y lleva por nombre la Red Docencia en Matemáticas (DocenMat).

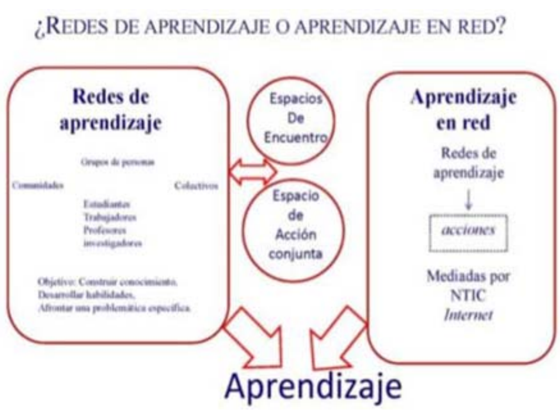


Figura 2. Aprendizaje y redes (Fuente: Mariscal y Lezama, 2014)

5. CONCLUSIONES PRELIMINARES

La enseñanza de las matemáticas y de la ME por profesores con distintos perfiles formativos, además de la modificación continua de contenidos en el currículum de matemáticas son prácticas que si bien enriquecen el quehacer educativo en México, para que funcionen requieren del trabajo colegiado. Hay evidencia que el trabajo colegiado y las interacciones de calidad que se promueven en los espacios de desarrollo profesional entre profesionales de la ME (investigadores, formadores y profesores) tienen mayores niveles de éxito.

De igual manera, se ha corroborado que el trabajo con profesores es sumamente enriquecedor para cualquier matemático educativo y necesario para el establecimiento de espacios de desarrollo profesional. Provee experiencias que van desde conocer de primera mano lo que piensen, sienten y creen los PM sobre su actividad cotidiana, sobre las propuestas curriculares, cómo las llevan a la práctica, sobre cómo conciben el conocimiento matemático y el nivel de dominio que tienen sobre el mismo, sólo por citar algunos aspectos. A su vez los PM enriquecen su mirada y problematizan su actuación mediante los resultados de la investigación en ME.

Finalmente es importante mencionar el papel del contexto haciéndose presente en cada actividad y propuesta analizada; y aunque la ME no les permite "cambiar" su realidad, los PM aseguran que sí les permite verla de una manera diferente.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Altet, M (2005). La competencia del maestro profesional o la importancia de saber analizar las prácticas. En Paquay, L., Altet, M., Charlier, E. & Perrenoud, P. (Coord), *La Formación Profesional del Maestro. Estrategias y Competencias* (pp. 33-54). México: Fondo de Cultural Económica.

Anchorena, S. (2008). Aporte para la revisión de la inclusión/exclusión de contenidos en la educación matemática. En *Revista Premisa,* No. 37, mayo, pp. 22-29. Bs As: Sociedad Argentina de Educación Matemática.

Angulo, R. (2015). *Una evaluación de las materias de Práctica docente I a IV en la licenciatura de matemática educativa* (Agosto de 2013 a Diciembre de 2014) Reporte interno de trabajo. San Luis Potosí, México: Universidad Autónoma de San Luis Potosí.

Cai, J., Moyer, J., Wang, N., Hwang, N., Nie, B. & Garber, T. (2013). Mathematical problema posing as a measure of curricular effect on students' learning. *Educational Studies in Mathematic*s, 83: 57-69. [Consultado en http://www.springer.com/ Springer Science +Bussines Media el 31 de marzo del 2014]

Cardeñoso, J. M., Flores, P. y Azcárate, P. (2001). El Desarrollo Profesional de los Profesores de Matemáticas como Campo de Investigación en Educación Matemática. En P. Gómez, L., Rico (Eds). *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática*. Homenaje al profesor Mauricio Castro. Granada: Editorial Universidad de Granada.

Climent, N. & Carrillo, J. (2003). El dominio compartido de la investigación y el desarrollo profesional. Una experiencia en matemáticas con maestras. *Enseñanza de las Ciencias*, 21 (3) pp. 387-404.

ISSN: 2594-1046

Corral, C. (2013). *Un estudio sobre las prácticas docentes en la matemática de bachillerato*. Tesis de Maestría no publicada. Universidad de Sonora. México.

De Alba, A. (1993). El curriculum universitario ante los retos del siglo XXI: la paradoja entre posmodernismo, ausencia de utopía y determinación curricular. En De Alba, A. (1993). *El curriculum universitario de cara al nuevo milenio*, p.p. 29-45. México: CESU-UNAM. http://books.google.com.mx/books?hl=es&lr=&id=N73xUZ1j5NoC&oi=fnd&pg=PA29&dq=organización+de+contenidos+curriculares&ots=2KM5DM1RUg&sig=H3PhS03lCdRA0Z1mxMeMLJtscBs#v=onepage&q=organizaci%C3%B

De Alba, A. (2015). Cultura y contornos sociales. Transversalidad en el currículum universitario. En De Alba, A. y Casimiro, Alice (2015). D*iálogos curriculares entre México y Brasil*, p.p. 195-

Even, R & Ball, D. (2010). Setting the Stage for the ICMI Study on the Professional Education and Development of Teachers of Mathematics. En Even, R & Ball, D. (Eds.), *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics. The 15th. ICMI Study* (pp. 1-10). USA: Springer. DOI: 10.1007/978-0-387-09601-8.

Gravemeijer, K. y Teruel, J. (2000). Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. K. J. *Curriculum studies*, 2000, vol. 32, nº. 6, 777- 796

Grijalva, A., Soto, J., Bravo, J., Urrea, M., Rodríguez, M., Ávila, R., e Ibarra, S. (2012). *Reflexiones sobre la práctica docente, diseño y desarrollo de la actividad docente parte I y parte II*. Hermosillo, Sonora, México: Universidad de Sonora, Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora y Colegio de Educación Profesional Técnica del estado de Sonora.

Gutiérrez, A y Boero, P. (Eds) (2006). Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future. Sense Publishers

Hernández, J. (2014). *La caracterización de los profesionales de la ME. Una mirada desde el reconocimiento de su campo académico*. Tesis de Doctorado no publicada. Chilpancingo, Guerrero: Universidad Autónoma de Guerrero.

Hernández, J., Dolores, C., Borjón, E., Torres, M. (2013). La Formación inicial de Profesores de Matemáticas del Preuniversitario en México, Una Mirada desde el Currículo Oficial. Conferencia, CIBEM 2013

Hitt, F. (2000). *Construcción de conceptos matemáticos y de estructuras cognitivas*. Working Group: Representations and mathematics visualization del PME-NA, Tucson, Arizona, 2000, pp. 131-147.

Ibarra, S., Villalba, M., Armenta, M., Del Castillo, A., Grijalva, A., Soto, J., Urrea, M., Ávila, R. (2011). *Material del participante del diplomado Prácticas docentes en las matemáticas de secundaria*. Hermosillo, Sonora, México: Universidad de Sonora y Secretaría de Educación y Cultura del estado de Sonora.

Ibarra O., S. (2014). Acciones de formación de profesores de matemáticas. Algunas experiencias de diseño e implementación. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* Vol. 27.

Lester, F. (Ed) (2007). *Second handbook on research on mathematics* Teaching and Learning. National Council of Teachers of Mathematics. USA

Mariscal, E. y Lezama, F. (2014). *Una red social virtual que posibilita el desarrollo profesional de profesores de matemáticas en México y en Latinoamérica*. Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación. ISBN: 978-84-7666-210-6

Moreno, A. (2012). Seguimiento a la Reforma Integral de la Educación Media Superior: textos, prácticas docentes y desarrollo de competencias matemáticas de los estudiantes. Tesis de Maestría no publicada. Universidad de Sonora. México.

ISSN: 2594-1046

Mendoza, L. (2013). *Seguimiento de las prácticas de profesores de matemáticas de secundaria.* Tesis de Maestría no publicada. Universidad de Sonora. México.

Kilpatrick, J. (2009). The mathematics teacher and curriculum change. *PNA*, 3(3), 107-121.

Panhuizen, M. (2005). Can scientific research answer the 'what' question of mathematics education? Cambridge Journal of Education, Vol. 35, No. 1, March 2005, pp. 35–53.

Pino-Fan, Castro, Godino y Font. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el curriculo de bachillerato. *PARADIGMA,* VOL. XXXIV, Nº 2; Diciembre de 2013

Rico, L. (1998). Complejidad del currículo de matemáticas como herramienta profesional. *Revista Latinoamericana de Investigación en ME*, marzo, año 1, No. 1, pp. 22-39. México: Comité Latinoamericano de ME.

Rodríguez, M., Armenta, M., Jiménez, J., Urrea, M., y Soto, J. (2011). *Material del participante del diplomado prácticas docentes en las matemáticas de telesecundaria*. Hermosillo, Sonora, México: Universidad de Sonora y Secretaría de Educación y Cultura.

Secretaría de Educación Pública. *Resumen del Sistema Educativa Nacional.* Disponible en: http://www.sep.gob.mx/es/sep1/ESTADISTICA_EDUCATIVA#.V38jvxLMdVU. Consultado el 23 de junio de 2016.

Talis (2013). Estudio internacional de la enseñanza y el aprendizaje. Informe español. Ministerios de Educación, Cultura y Deporte. Recuperado de https://www.oecd.org/edu/school/Spain-talis-publicaciones-sep2014_es.pdf

Valenzuela, C. y Dolores, C. (2011). *El currículum oficial e impartido: contenidos y objetivos. Números, Revista de didáctica de las matemáticas*, Volumen 79, marzo de 2012, páginas 47-69. http://www.sinewton.org/numeros

Valero, P. y García, G. (2014). El Currículo de las Matemáticas Escolares y el Gobierno del Sujeto Moderno. *Boletim de Educação Matemática,* vol. 28, núm. 49, agosto, 2014, pp. 491-515. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho Rio Claro, Brasil.

Wood, T. (Series Ed) (2008). *The International handbook of Mathematics teacher Education.* Vols. 1, 2, 3 y 4. Sense Publishers. Rotterdam/Taipei

ISSN: 2594-1046

INVESTIGACIONES 2016 ACERCA DEL DOMINIO AFECTIVO EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

Gustavo Martínez Sierra.
Universidad Autónoma de Guerrero. gmartinezsierra@gmail.com
Lorena Jiménez Sandoval.
Universidad Autónoma de Zacatecas.lorejim79@hotmail.com
María García González.
Universidad Autónoma de Guerrero. mgargonza@gmail.com
María Valle Zequeida.
Universidad Autónoma de Guerrero. mevzy2@gmail.com
Yuridia Arellano García.
Universidad Autónoma de Guerrero. yaregar@gmail.com
Rocío Antonio.
Universidad Autónoma de Guerrero. antonny81@gmail.com
Antonia Hernández Moreno.
Universidad Autónoma de Guerrero. antonia.inves@gmail.com
Magdalena Rivera Abrajan.
Universidad Autónoma de Guerrero. magrivab@gmail.com
Marisa Miranda Tirado.
Instituto de Educación Media Superior de la Ciudad de México.marimiratira@yahoo.com.mx
Maribel Vicario Mejía.
Universidad Autónoma de Guerrero. mvicario.maribel@gmail.com
Nancy Marquina Molina.
Universidad Autónoma de Guerrero. nanmarquina@gmail.com
Antonio Juárez López.
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. loupemy04@yahoo.com.mx
Miriam Lemus.
Cinvestav-IPN. miriam.lemusg@gmail.com
José Carlos Ramírez Cruz.
Universidad de Colima. jose_ramirez29@ucol.mx

Resumen

El objetivo de este grupo temático es continuar con el debate comenzado en EIME 2013 (Martínez-Sierra, García, Lemus, Rivera, & Juárez, 2013), EIME 2014 (Martínez-Sierra et al., 2014) y EIME 2015 (Martínez-

ISSN: 2594-1046

Sierra et al., 2015) sobre la necesidad y la pertinencia de impulsar en México la investigación sobre el dominio afectivo en matemática educativa. Para alcanzar este objetivo en las sesiones del grupo temático se presentarán los más recientes avances internacionales de investigación en el campo del dominio afectivo. Además, los proponentes de este grupo temático mostrarán resultados de sus propias investigaciones realizadas en diversos aspectos del dominio afectivo de estudiantes y profesores de matemáticas: emociones, actitudes, motivación, creencias, concepciones e identidades matemáticas.

Palabras clave: Dominio afectivo. Emociones. Actitudes. Motivación y Creencias

1. DOMINIO AFECTIVO EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

La conceptualización más influyente acerca de lo que constituye el dominio afectivo en matemática fue realizada por McLeod (1992, 1994) quien identificó tres conceptos básicos que eran utilizados en las investigaciones en el dominio afectivo: las creencias, las actitudes y las emociones; a los que interpretó en orden creciente de estabilidad (en el tiempo), en orden decreciente de intensidad y en orden creciente de implicación cognitiva (grado en que la cognición juega un papel en la respuesta y en el tiempo que tardan en desarrollarse. Por lo tanto "podemos pensar que las creencias, actitudes y emociones representan niveles crecientes de implicación afectiva, la disminución de los niveles de participación cognitiva, el aumento de los niveles de intensidad de la respuesta, y la disminución de los niveles de la estabilidad respuesta" (McLeod, 1992, p. 579). Así las emociones son las más intensas, las menos estables y con menos implicación cognitiva, las creencias son las más estables, las menos intensas y con más implicación cognitiva, con las actitudes en un punto intermedio entre ellas. Así para Gómez-Chacón (2000) al aprender matemáticas el estudiante recibe continuos estímulos asociados a las matemáticas a los cuales reacciona emocionalmente de forma positiva o negativa condicionado por sus creencias acerca de sí mismo y acerca de las matemáticas. Si ante situaciones similares, repetidamente, le produce la misma clase de *reacciones emocionales* (satisfacción, frustración) la activación de las emociones puede ser automatizada y se pueden solidificar en actitudes.

DeBellis & Goldin (2006), ampliando el modelo de McLeod, sugieren incluir un cuarto subdominio que trata de valores, la ética y la moral, que está conectado con los otros tres subdominios. Según este modelo tetraédrico para comprender, por ejemplo, el papel desempeñado por las creencias y por qué ciertas creencias son tan difíciles de cambiar, debemos tener en cuenta las emociones y actitudes que las sustentan, las necesidades emocionales y actitudinales a las que sirven, y los valores con los que están en disonancia o consonancia (Goldin, Rösken, & Törner, 2009). Así, las creencias pueden satisfacer las necesidades emocionales al proporcionar defensas contra el dolor y la culpa; lo cual hace muy difícil renunciar a ellas (Goldin et al., 2009). Así, por ejemplo, por razones emocionales un estudiante que no le va bien en matemáticas puede ser atraído por la creencia de que capacidad matemática de una persona es innata; ya que esta le exime de la responsabilidad personal de la falta de éxito. Esta liberación de la culpa puede llegar al extremo de sentir orgullo de que él "no es un persona para las matemáticas" o que "las matemáticas no son para él". Así, una creencia alivia el dolor y la culpa potenciales asociados con el fracaso y proporciona una "buena razón" para que no se involucre en el cumplimiento de una tarea matemática.

1.1. Tendencias contemporáneas en la investigación en el dominio afectivo en Matemática Educativa

Los cuatro conceptos del modelo tetraédrico del afecto no cubren todo dominio afectivo; ya que de manera reciente los investigadores se han interesado por conceptos tales como la *motivación,* el *ánimo* y el *interés* (Zan, Brown, Evans, & Hannula, 2006) y más recientemente se incluyen conceptos como los de *identidad* y *normas* (Hannula et al., 2015; Zan et al., 2006). Recientemente se señalado que son las actitudes, las creencias, la motivación y la identidad como los principales conceptos del dominio afectivo (Goldin et al., 2016)

En general la tendencia de investigación contemporánea en el estudio del dominio afectivo es considerar al afecto como un "sistema dinámico". Al respecto Pepin and Roesken-Winter (2015, p. xvi) consideran que las emociones, actitudes, creencias y valores cada una constituyan un sistema (por ejemplo, en una persona o en un colectivo/grupo) y que estos sistemas son, en efecto inter-relacionados o "anidados" dentro de cualquier persona/grupo, aunque alimentado por el contexto. En el mismo sentido que antes Hannula et al. (2015) invitan a presentar artículos, en el TSG (Topic Study Group / Grupo de estudio por tópico) 28 "Affect, beliefs and identity in mathematics education" del ICME (Congreso Internacional de Instrucción Matemática) en 2016, que contengan "análisis de la relación mutua entre construcciones afectivas y su conexión con la cognición y otras construcciones estudiadas en educación matemática".

Al final de esta sección se presentan los resultados de las más recientes publicaciones que sobre dominio afectivo hemos realizado (Martínez-Sierra & García-González, 2014, 2016; Martínez-Sierra & Miranda-Tirado, 2015; Martínez-Sierra, Valle-Zequeida, Miranda-Tirado, & Dolores-Flores, 2016)

ISSN: 2594-1046

2. ALGUNAS INVESTIGACIONES EN PROCESO

En el grupo todo momento se buscará la interacción y debate con los participantes. Para ello los ponentes haremos breves presentaciones con el objetivo de provocar el debate y el flujo de ideas. Sobre todo los ponentes centraremos la atención en proponer investigaciones futuras, para así poder invitar a los asistentes a colaborar con los ponentes. Al final se propondrán estrategias para fomentar la colaboración entre los interesados en integrarse al grupo de investigación durante el año 2017. En particular el primer autor del presente documento propondrá la conformación de equipos de investigación que trabajen en contestar preguntas de investigación cuya respuesta tenga el potencial de contribuir originalmente al campo del dominio afectivo.

A continuación algunas investigaciones que hemos realizado o que estamos realizando tomando como objeto de estudio a una o más de las componentes del dominio afectivo

2.1. Investigaciones acerca de las emociones de profesores de matemáticas

Más allá de la amplia investigación acerca de la ansiedad matemática presente en profesores y profesores en pre-servicio de primaria muy poco se ha investigado acerca de las emociones que día a día experimentan profesores de matemáticas en su aula. Para empezar a llenar ese hueco hemos emprendido diferentes investigaciones para conocer las emociones de profesores. Presentaré en esta sección del grupo algunos de los principios teóricos y metodológicos que guían estas investigaciones.

2.2. Explorando las emociones diarias de profesores de matemáticas en el aula: El caso de Cristian

La presente investigación se propuso los objetivos: (1) Identificar las emociones que día a día experimenta un profesor de matemáticas de prepa, (2) identificar las situaciones que desencadenan tales emociones y (3) identificar la estructura de valoración que soporta tales emociones. Los datos fueron recopilados a través de auto-informes grabados en audio en donde el participante reportó sus experiencias emocionales de haber impartido 13 clases de matemáticas. Dos entrevistas hechas al participante ayudaron a analizar los datos de los auto-informes. Los datos fueron analizados a través de la teoría cognitiva de las emociones (Ortony, Clore, & Collins, 1988). Nuestros resultados señalan que el maestro participante experimenta emociones de Satisfacción, de Decepción, de Aprecio, de Feliz-por, de Compasión, de Reproche y de Ira desencadenadas por la valoración cognitiva del logro de las metas de las actividades planeadas en sus lecciones. Tal valoración es soportada por la creencia del maestro participante de que la "buena actitud" de sus estudiantes (percibida por él como "colaboración", "autonomía" y "participación" de sus estudiantes en las actividades planeadas) es la fuerza motivacional para cumplir con las metas por él trazadas y por ende para lograr el aprendizaje.

2.3. Experiencias en la elección de estudiar una carrera de matemáticas en la Universidad Autónoma de Zacatecas

A través una conceptualización de identidad narrativa matemática dividida en motivos, sus fuentes y expectativas en la elección de la carrera de matemáticas se identifican: (1) los motivos que estudiantes mexicanos tienen para su elección, (2) las fuentes u orígenes de tales motivos e (3) las expectativas que tienen respecto a su elección. Tres análisis temáticos (Braun & Clarke, 2006) de los datos arrojados por entrevistar a 47 jóvenes mexicanos con el objetivo de recopilar sus historias de vida matemática que habían elegido estudiar una carrera de matemáticas arrojan que sobresalen: (1) tres motivos: el "gusto por las matemáticas", las creencias de autoeficacia y el querer "ser buen maestro"; (2) dos expectativas: "ser buen maestro", "aprender muchas matemáticas"; y (3) cuatro fuentes para los motivos y las expectativas: creencias de autoeficacia, experiencias de dominio y experiencias vicarias y las experiencias de haber tenido "buenos maestros". Nuestros hallazgos tienen semejanzas (importancia de las creencias de autoeficacia) y diferencias ("gusto por las matemáticas" y "querer ser buen profesor") con las explicaciones psicológicas acerca de las fuerzas motivacionales presentes en la elección de carreras universitarias de matemáticas.

2.4. Una caracterización de actitudes hacia lo proporcional

Bajo el supuesto de que el saber matemático juega un papel importante en las actitudes de los estudiantes, decidimos caracterizar las actitudes hacia la proporcionalidad. Para ello usamos como modelo preliminar el TMA -Modelo Tridimensional de Actitud de Di Martino & Zan (2009). Esta caracterización toma como objeto de actitud a la matemática escolar. El análisis de datos mostró una redefinición de las dimensiones del ATM. Encontramos así, una *actitud proactiva* manifestada por los estudiantes hacia el trabajo con situaciones de aprendizaje centradas en la proporcionalidad, caracterizada por tres factores: la *autoeficacia* del estudiante para hacer frente a la situación de aprendizaje, las *emociones* desencadenadas por el trabajo con la situación y la *visión* que los estudiantes tuvieron del trabajo con la situación. Respecto al pensamiento proporcional, se concluye que la actitud proactiva depende del tipo de tarea y del diseño de la situación de aprendizaje. El aporte de esta investigación al campo del afecto, es que se ha puesto de manifiesto que al particularizar en un saber matemático, el modelo de actitud hacia la matemática escolar se conserva, sin embargo las propiedades de las dimensiones que forman el modelo se definen dependiendo del saber en cuestión.

2.5. Experiencias positivas y negativas de profesores de matemáticas de secundaria

Este estudio muestra la tematización (Braun & Clarke, 2006, 2012) de las experiencias positivas y negativas de un grupo de ocho profesores de matemáticas de secundaria. La toma de datos se realizó al inicio de los cursos de la maestría en docencia de las matemáticas que ofrece la unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero. Los temas localizados, en el análisis temático de las entrevistas realizadas, con mayor frecuencia fueron aquellos que agruparon las experiencias relacionadas con su desarrollo profesional como profesores de matemáticas, donde se agruparan experiencias como: Aprender a enseñar un tema nuevo, aprender conocimiento matemático nuevo, participación en proyectos o eventos académicos entre otros. Así mismo las experiencias consideradas como negativas encontradas son las relacionadas con no tener los conocimientos necesarios para ser profesor y la mala actitud de los estudiantes ante las matemáticas.

2.6. Motivos de ingreso a la licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero

Se realizó un análisis temático de 34 entrevistas de estudiantes de nuevo ingreso, para responder a la pregunta ¿Cuáles son los motivos que tienen estudiantes, para ingresar a la licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero? Los motivos encontrados fueron: obtener conocimientos matemáticos, realizar estudios superiores, motivos asociados a mí, motivos asociados a factores externos, por la institución y recomendación para estudiar la carrera. Se encontró que los dos motivos de ingreso más mencionado por los alumnos son los que tiene que ver con su gusto por las matemáticas y el de ser profesor de matemáticas.

ISSN: 2594-1046

2.7. Experiencias de los estudiantes en la carrera de matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas

Se presentan algunos resultados sobre las experiencias de 21 estudiantes de la carrera de matemáticas Universidad Autónoma de Zacatecas. Empleando el análisis temático se analizaron ya, tres de las cinco entrevistas que se realizaron: la primera en agosto, la segunda en septiembre y la tercera en diciembre del 2014. De un total de sesenta y seis entrevistas (correspondientes a veintiún estudiantes en cada una de las tres entrevistas) se identificaron cinco tipos de experiencias positivas y tres tipos experiencias negativas que los estudiantes dicen haber vivido antes de entrar a la carrera y cuatro experiencias positivas y seis experiencias negativas, durante el primer semestre de la carrera. De acuerdo a los resultados, las creencias de autoeficacia (Bandura, 1997) y sus fuentes, parecen explicar por qué los estudiantes consideran tales experiencias como positivas y negativas.

2.8. Experiencias emocionales y motivacionales de profesores de matemáticas

Esta investigación en proceso tiene el objetivo de conocer las experiencias emocionales y experiencias motivacionales de profesores de matemáticas con formación en ingeniería y las relaciones entre estas experiencias. Particularmente, para esta presentación tomamos el caso de un profesor que llamaremos Oscar. La recolección de datos se hizo mediante la aplicación de una entrevista que consistió en dos partes; 1) Entrevista biográfico narrativa en donde se le preguntó sus experiencias respecto a las matemáticas a lo largo de su vida y 2) Entrevista con pregunta abiertas acerca de las emociones, motivos, metas y obligaciones respecto a su labor como docente de Matemáticas. Para analizar los datos utilizamos la Teoría cognitiva de las emociones (Ortony et al., 1988) en el caso de las experiencias emocionales y Análisis temático (Braun & Clarke, 2006, 2012) en el caso de las experiencias motivacionales. Encontramos que sus experiencias emocionales han sido de tipo satisfacción, decepción, agrado, orgullo, reproche y auto-reproche. En el caso de las experiencias motivacionales tienen la particularidad de ser temporales y están asociadas a sus metas y experiencias significativas. Un elemento emergente en los datos fueron las creencias y su relevante relación con los otros constructos.

ISSN: 2594-1046

2.9. Motivos de estudiantes para aprender matemáticas en el nivel Medio Superior

En este trabajo se presenta los resultados del análisis de los datos de una investigación que tiene como objetivo identificar qué motiva a estudiantes de nivel medio superior a aprender matemáticas. La recolección de datos se realizó mediante entrevistas semi-estructuradas a un total de 29 estudiantes (27 hombres y 2 mujeres) que cursaban el cuarto y sexto semestre en una.9. escuela de la ciudad de México. En base al método de análisis temático que permite encontrar patrones de significados (temas) a lo largo de un conjunto de datos proporcionada por las respuestas a la pregunta de investigación. Inicialmente hicimos repetidas lecturas de las transcripciones para la familiarización de los datos y se realizó la búsqueda de estos temas potenciales, obteniendo como resultado que estos estudiantes tienen más de un motivo para aprender matemáticas como: estudiar una carrera de ingeniería, encontrar aplicaciones a los problemas, saber más, agrado, la importancia de las matemáticas, ayudar a otros.

2.10. Importancia de las emociones en la resolución de problemas matemáticos

Varios investigadores reconocen la importancia de la emociones en el ámbito escolar, ya que se sabe que gran parte del fracaso escolar de los alumnos no es atribuible a una falta de capacidad intelectual, sino a dificultades asociadas a experiencias emocionalmente negativas que tienen múltiples manifestaciones, por ejemplo, comportamientos problemáticos y conflictos interpersonales. Adams y McLeod (1989) mencionan que en resolución de problemas los estados emocionales se caracterizan por su brevedad, los alumnos experimentan un bloqueo en el plan de acción puesto en marcha para llegar a la solución de un problema, experimentan de forma casi inmediata respuestas emocionales intensas pero muy breves. Considerando el rechazo a la resolución de problemas matemáticos que se observa en los estudiantes y el correlato emocional que el sujeto experimenta como resolutor de problemas, este trabajo tiene como objetivo: Analizar las emociones de estudiantes de bachillerato cuando resuelven problemas de matemáticas. La metodología utilizada en esta investigación es de tipo mixta, participaron 87 estudiantes de bachillerato de un instituto privado del Estado de Puebla, México. Para evaluar las emociones de los estudiantes al resolver problemas de matemáticas se empleó la Prueba de Positividad de Fredrickson la cual está compuesta por 20 reactivos que evalúan las emociones con base en la proporción entre el afecto positivo y el negativo. Los primeros resultados muestran que los estudiantes no tienen un manejo adecuado de emociones positivas, lo cual es un aspecto importante ya

ISSN: 2594-1046

que predominan las emociones negativas como estrés y culpa al resolver problemas matemáticos, lo que es una implicación en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la materia.

2.11. Motivaciones de estudiantes de nivel medio superior para persistir o abandonar cursos de matemáticas

Utilizando la teoría Valor-Expectativa (Wigfield & Eccles, 2000) para la motivación la presente investigación indaga acerca de las motivaciones de estudiantes de nivel medio superior para persistir o abandonar cursos de matemáticas. Nuestros primeros resultados revelan que los estudiantes deciden persistir en los cursos principalmente por el valor o utilidad que les dan a las matemáticas y deciden abandonar cursos por el poco valor o utilidad que le dan a las matemáticas y por problemas familiares o económicos.

2.12. Creencias de profesores de matemáticas acerca de la evaluación y creencias matemáticas

La presente investigación cualitativa tiene por objetivo identificar las creencias que 18 profesores de matemáticas tienen acerca de la evaluación e identificar las relaciones existentes entre tales creencias y sus creencias matemáticas (creencias acerca de las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje). Para el análisis de los datos, recolectados a través de entrevistas semiestructuradas, realizamos cuatro análisis temáticos guiados por la definición de que la creencia es una proposición que establece la verdad o falsedad de algo. Los resultados muestran que las creencias de los participantes se organizan en diferentes redes que relacionan creencias matemáticas con creencias que tienen acerca de la evaluación en matemáticas. En particular nuestros resultados señalan que las creencias de que 'las matemáticas son para ser aplicadas'', que 'las matemáticas son para resolver problemas', que 'las matemáticas son para razonar' y que 'la evaluación y la enseñanza debe ir más allá de la resolución de problemas' juegan un papel central en las redes de creencias de los participantes. La existencia de las creencias identificadas pueden ser explicadas biográficamente de dos maneras complementarias: por el contexto cotidiano de los participantes y por su condición de maestros con formación profesional de ingenieros.

2.13. Ansiedad matemática y rendimiento académico en estudiantes de bachillerato en México

En este estudio se da a conocer evidencia empírica y cuantitativa de la relación entre la ansiedad matemática con el aprovechamiento académico en estudiantes de Bachillerato en función de diversas variables como son el género, contenido matemático, edad y distintas dimensiones o factores de la ansiedad, como ansiedad a los exámenes de matemáticas, entre otras. En el estudio participaron 169 alumnos que estudian diversos cursos de matemáticas en distintos grados. Sus edades oscilaban entre los 15 y 19 años. Se utilizaron los instrumentos la Mathematic Anxiety Rating Scale (Richardson & Siunn, 1972) y la Escala de ansiedad ante los exámenes. Los resultados indican que existe una correlación entre la ansiedad matemática y el bajo rendimiento académico, y entre este con el factor ansiedad ante los exámenes de matemáticas. También se encontró evidencia referente a que la ansiedad hacia las matemáticas se reduce a la ansiedad hacia los exámenes de matemáticas más que otros aspectos de la ansiedad.

2.14. Creencias y actitudes hacia las matemáticas. Un estudio con alumnos de bachillerato

Se presentan los resultados de un estudio exploratorio, cuyo propósito es analizar las creencias y las actitudes hacia las matemáticas de estudiantes mexicanos de último año de bachillerato y, a partir de esta información explorar la intención de elección de carrera (IEC). El objetivo es obtener información que nos permita formular algunas hipótesis acerca de la relación entre creencias y actitudes hacia las matemáticas, y su relación con la IEC. En la primera etapa participaron 55 estudiantes que cursaban el último año de bachillerato. Para determinar las actitudes hacia las matemáticas se aplicó la escala AMMEC (Ursini, Sánchez, & Orendain, 2004) y para determinar las creencias se aplicaron cuatro sub-escalas del cuestionario de Fennema-Sherman. Los resultados sugieren que no hay una relación directa entre tipo de actitud y tipo de creencias, pero si se perfilan asociadas con la IEC. En la segunda etapa este estudio se realiza con una población de estudiantes mucho más amplia.

2.15. Escala para medir actitudes hacia las matemáticas en estudiantes de educación especial

En esta pesquisa, se muestran los resultados parciales de un estudio más amplio relacionado con identificar las actitudes hacia las matemáticas en estudiantes de licenciatura en educación especial de la Universidad de Colima. De manera particular, se muestran los resultados del diseño y confiabilidad de una escala para medir actitudes en esta población. La investigación se dividió en fases, la primera de tipo documental sobre los instrumentos de medida, con base en el perfil de trabajo se diseñó una escala tipo Likert con 18 reactivos que se sometió a una validez de contenido. Partiendo de la primera evaluación, se hicieron las modificaciones correspondientes y se aplicó la escala a 200 estudiantes de segundo, cuarto, sexto y octavo semestre. Los principales resultados sugieren un coeficiente Alfa de Cronbach elevado (α) de .85. Además, en el Análisis Factorial Exploratorio (AFE), se identifica que a nivel teórico la escala se agrupa conforme a los tres componentes de la actitud: cognitivo, conductual y afectivo. Por lo que se concluye que la escala es válida y confiable

3. CONCLUSIONES

El objetivo de este grupo temático será la de mostrar a los participantes los avances de las investigaciones que sobre el dominio en matemáticas hemos desarrollado los proponentes del curso al investigar las relaciones entre en aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas con las creencias, las emociones, actitudes y motivaciones de los estudiantes y profesores. En particular, como puede observarse en los resúmenes presentados, es de notar el papel emergente que los estudios que sobre motivación e identidad han tomado al seno de nuestro grupo y el fuerte interés que los estudios de creencias y emociones hay entre nosotros. Otras conclusiones del grupo temático serán elaboradas a través del diálogo con los participantes y sobre todo con la presentación del primer autor al discutir las tendencias contemporáneas en cursos sobre la investigación en el dominio afectivo en matemática educativa.

4. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adams, V. M., & McLeod, D. B. (1989). *Affect and Mathematical Problem Solving.* A New Perspective. New York, NY: Springer Verlag.

Bandura, A. (1997). Self-efficacy: *The exercise of control*. New York freeman. New York, NY: W.H. Freeman and Company. Retrieved from http://www.cro3.org/cgi/doi/10.5860/CHOICE.35-1826

Braun, V., & Clarke, V. (2006). *Using thematic analysis in psychology. Qualitative Research in Psychology*, 3, 77–101. http://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Braun, V., & Clarke, V. (2012). Thematic analysis. In H. Cooper (Ed.), APA *Handbook of Research Methods in Psychology* (Vol. 2, pp. 57–71). Washington, DC: American Psychological Association. http://doi.org/10.1037/13620-004

DeBellis, V. A., & Goldin, G. A. (2006). Affect and meta-affect in mathematical problem solving: A representational perspective. *Educational Studies in Mathematics,* 63(2), 131–147. http://doi.org/10.1007/s10649-006-9026-4

Di Martino, P., & Zan, R. (2009). “Me and maths”: towards a definition of attitude grounded on students’ narratives. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13(1), 27–48. http://doi.org/10.1007/s10857-009-9134-z

Goldin, G. A., Hannula, M. S., Heyd-Metzuyanim, E., Jansen, A., Kaasila, R., Lutovac, S., … Zhang, Q. (2016). *Attitudes , Beliefs , Motivation and Identity in Mathematics Education. An Overview of the Field and Future Directions*. Springer.

Goldin, G., Rösken, B., & Törner, G. (2009). Beliefs—no longer a hidden variable in mathematical teaching and learning processes. In J. Maaß & W. Schlöglmann (Eds.), *Beliefs and attitudes in mathematics education*: New Research Results. Sense Publishers.

Gómez-Chacón, I. (2000). Affective influences in the knowledge of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 43(2), 149–168.

Hannula, M., Morselli, F., Erktin, E., Vollstedt, M., Zhang, Q., Kong, H., … Pepin, B. (2015). TSG 28 Affect, beliefs and identity in mathematics education. In *Call for papers ICME 2016*. Hamburg, Germany.

Martínez-Sierra, G., García, M., Lemus, E., Rivera, M., & Juárez, J. (2013). Una invitación al estudio del dominio afectivo en matemática educativa. In *Memoria de la XVI Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (pp. 429–435). Tuxtla Gutiérrez Chiapas, México.

Martínez-Sierra, G., García González, M., Carrillo, C., Jiménez, L., Lemus, M., Lom, F., … Miranda, M. (2014). Estudios sobre el dominio afectivo en Matemática Educativa. In *Memoria de la XVII Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (pp. 421–430). Oaxaca, México.

Martínez-Sierra, G., & García-González, M. D. S. (2014). High school students’ emotional experiences in mathematics classes. *Research in Mathematics Education*, 16(3), 234–250. http://doi.org/10.1080/14794802.2014.895676

Martínez-Sierra, G., & García-González, M. del S. (2016). Undergraduate mathematics students’ emotional experiences in Linear Algebra courses. *Educational Studies in Mathematics*, 91(1), 87–106. http://doi.org/10.1007/s10649-015-9634-y

Martínez-Sierra, G., & Miranda-Tirado, M. (2015). Mexican high school students’ social representations of mathematics, its teaching and learning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 46(5), 700–720. http://doi.org/10.1080/0020739X.2014.997319

Martínez-Sierra, G., Valle-Zequeida, M., Arellano-García, Y., Antonio-Antonio, R., Jiménez, L., Rivera, M., & Juárez, J. (2015). Estudios sobre el dominio afectivo en Matemática Educativa 2015. In *Memoria de la XVIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa*.

Martínez-Sierra, G., Valle-Zequeida, M., Miranda-Tirado, M., & Dolores-Flores, C. (2016). Social representations of high school students about mathematics assessment. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 16(3), 247–258. http://doi.org/10.1080/14926156.2015.1119336

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 575–596). New York, NY: Macmillan.

McLeod, D. B. (1994). Research on affect and mathematics learning in the JRME: 1970 to the present. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(6), 637–647.

ISSN: 2594-1046

Ortony, A., Clore, G. L., & Collins, A. (1988). *The cognitive structure of emotions*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Pepin, B., & Roesken-Winter, B. (2015). *From beliefs to dynamic affect systems in mathematics education.* (B. Pepin & B. Roesken-Winter, Eds.). Zürich, Switzerland: Springer. http://doi.org/10.1007/978-3-319-06808-4

Richardson, F., & Siunn, R. (1972). The mathematics anxiety rating scale: Psychometric data. *Journal of Counseling Psychology*, 196, 551–554.

Ursini, S., Sánchez, G., & Orendain, M. (2004). Validación y confiabilidad de una escala de Actitudes hacia las Matemáticas y hacia las Matemáticas Enseñadas con Computadora. *Educación Matemática*, 16(3), 59–78.

Wigfield, A., & Eccles, J. S. (2000). Expectancy-Value Theory of Achievement Motivation. *Contemporary Educational Psychology*, 25(1), 68–81. http://doi.org/10.1006/ceps.1999.1015

Zan, R., Brown, L., Evans, J., & Hannula, M. S. (2006). Affect in Mathematics Education: An Introduction. *Educational Studies in Mathematics*, 63(2), 113–121. http://doi.org/10.1007/s10649-006-9028-2

Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

MATEMÁTICA EDUCATIVA Y EDUCACIÓN ESPECIAL: EXPERIENCIAS EN INVESTIGACIÓN Y DEL AULA

José Marcos López-Mojica
UCOL. mojicajm@gmail.com

Claudia Leticia Méndez Bello
CASIO. menbell.claudia@gmail.com

María Cecilia Ávila Tabares
USAER No.21. cecyat65@yahoo.com.mx

Bárbara Nayar Olvera Carballo
UAN. barbara.olvera@hotmail.com

Resumen

El presente informe es parte de la reflexión de un grupo de investigadores interesados en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas de personas con discapacidad. Como podrá identificar el lector, la variedad de pesquisas nos muestran un panorama nacional sobre el cómo la matemática educativa ha influido en el desarrollo de estrategias de enseñanza de las matemáticas a poblaciones particulares. En el documento se dan ejemplos de atención a jóvenes con discapacidad visual, auditiva e intelectual, en el contexto de inclusión educativa a nivel básico y universitario; así como evidencia del estudio de procesos cognitivos relativos al pensamiento matemático y al análisis desde la comunidad con discapacidad. La propuesta de grupo de investigación es de suma importancia en nuestro país, pues pretende conformar un colectivo de investigadores encaminados a la misma temática y beneficiar a la comunidad de educación especial.

Palabras clave: Pensamiento Matemático. Inclusión. Discapacidad. Estrategias.

1. INTRODUCCIÓN

En investigaciones recientes se ha documentado un acercamiento entre Matemática Educativa y Educación Especial, esta aproximación ha permitido identificar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de personas con necesidades educativas especiales con o sin discapacidad, trastornos o aptitudes sobresalientes. El presente documento es parte del entusiasmo e inquietud de un grupo de investigadores de ambas disciplinas que tienen como único objeto de estudio: el fenómeno de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en poblaciones que requieren educación especial.

ISSN: 2594-1046

Las reflexiones aquí expuestas se desarrollan bajo la pregunta ¿cuál es la contribución de la Matemática Educativa en la Educación Especial? Se pretende dar evidencia de la influencia de nuestra disciplina desde cuatro experiencias, tanto de investigación como de aulas, con el fin de llegar a un consenso y poder extender el grupo a nivel nacional. Además, pretende compartir tanto ideas teóricas como metodológicas en el tratamiento de las matemáticas encaminadas a un mismo fin. Se sospecha que con lo anterior se podrían establecer marcos de referencia para un mejor acercamiento de las matemáticas a las poblaciones poco atendidas en nuestra área.

En ese sentido, en las siguientes líneas se expondrán las experiencias de colegas de la Universidad de Colima, Casi México, USAER 21 de Chihuahua y de la Universidad Autónoma de Nayarit. El primero informa sobre procesos cognitivos relacionados al pensamiento matemáticos de niños con discapacidad intelectual. La segunda reflexiona sobre el uso del conocimiento matemático de la comunidad Sorda. La tercera expresa su inquietud sobre el diseño de actividades que promuevan un aprendizaje significativo en un contexto de inclusión. La cuarta, relata su inquietud ante la discapacidad visual en el contexto universitario.

Como se puede notar con estas contribuciones, que a pesar de que se hablará de un sector de la educación especial, personas con discapacidad, se tiene una diversidad interesante tanto de escenarios empíricos, métodos, teorías. Además una variedad en niveles educativos, pues van de nivel básico hasta superior, más aun en escenarios propios de la educación especial como en situaciones de inclusión educativa.

La lógica del primer grupo de trabajo sobre educación especial y matemática educativa es mediante la exposición por sesiones para profundizar en cada uno de los escenarios. Queda abierta la invitación para las próximas reuniones en el escenario de la Escuela de Invierno para extender el estudio a otras comunidades que requieren educación especial.

2. DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO DE NIÑOS CON DISCAPACIDAD

Uno de los fenómenos más trascendentes que trajo consigo el siglo XIX ha sido la posibilidad de acceso público a la información. Por esa razón a la época actual se le ha denominado "sociedad de la información" o del "conocimiento" (Castells, 1999; Torres, 2005), pues es en el ámbito informativo y

ISSN: 2594-1046

de la comunicación donde más transformaciones tecnológicas se han observado. En ese sentido, se exige que nuestras instituciones educativas propicien condiciones para el arribo a los conocimientos en circunstancias de equidad, de inclusión y de manera integral, tanto para poblaciones regulares como para las que requieren Educación Especial.

De lo anterior se esboza la siguiente interrogante, desde Matemática Educativa ¿qué se está realizando para que las personas con discapacidad puedan desarrollar su conocimiento matemático? En López-Mojica (2013) se plantea que son pocas las investigaciones que se interesan por la población en cuestión, además argumenta que la educación de personas con discapacidad ha sido un problema ignorado por la sociedad en general, a consecuencia de: 1) el desconocimiento de las características de las afecciones y de su tratamiento, 2) la falta de investigaciones que den cuenta de los procesos cognitivos comprometidos en el desarrollo del pensamiento, 3) la falta de organización que permita una educación efectiva, 4) una incongruencia respecto a los principios de derechos humanos y 5) la falta de recursos que permitan alcanzar los objetivos de la educación.

En el entendido que en Matemática Educativa se estudian los fenómenos relacionados a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, esta sección tiene como objetivo reflexionar sobre los elementos epistemológicos, cognitivos y sociales que permitan caracterizar el pensamiento matemático de personas con discapacidad.

López-Mojica y Ojeda (2015) argumentan que en Matemática Educativa se debería interesar en los procesos particulares del pensamiento matemático de cada individuo con discapacidad, esto propiciaría a identificar las formas distintas o los caminos diferentes a los que pueden acceder a los conceptos matemáticos y con ello establecer un marco de referencia que permita el diseño de actividades de enseñanza por parte de los docentes. En ese sentido, las investigaciones que actualmente se desarrollan están encaminadas a identificar el uso de esquemas compensatorios según el tipo de discapacidad se trate.

El proyecto de investigación al que se hace referencia tiene como pregunta ¿Qué caracteriza al pensamiento matemático de niños con discapacidad? El objetivo fue caracterizar el pensamiento matemático a través de los desempeños que se observen ante situaciones matemáticas e identificar el uso de esquemas compensatorios que permiten darle sentido a los conceptos matemáticos por su uso.

Ojeda (1994) propone la interrelación de tres ejes rectores para la investigación de estocásticos en matemática educativa: epistemológico, cognitivo y social. En el primero interesa lo relativo al conocimiento matemático, el segundo refiere a los procesos específicos del pensamiento y en el tercero se considera al individuo en la interacción con la comunidad. En ese sentido, López-Mojica y Ojeda (2015) emplearon los tres ejes rectores para la investigación en la educación especial. Dada la naturaleza del objeto de estudio de esta disciplina, se incorporó al eje cognitivo lo relativo a esquemas compensatorios.

La investigación de la adquisición del conocimiento matemático de la población de Educación Especial implica establecer marcos de referencia para la creación de estrategias de enseñanza de las matemáticas. Lo anterior supone no adaptar sin más los modelos propios de la educación regular a la Educación Especial, ya que, de acuerdo a Vygotski (1997), los niños con ausencias o limitaciones tienen otras formas, usan otros caminos en la adquisición del conocimiento. Por lo tanto, se considera un error comparar los desempeños de los niños de ambas modalidades educativas.

3. UNA COMUNIDAD DE CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DE SORDOS

La Escuela, como institución, es el espacio donde se enseña y aprende. Esto no es trivial y no ocurre de manera automática ni ajena a los humanos, tampoco al conocimiento mismo ni a las situaciones, entre otros aspectos. En este sentido, es que se generan diversas problemáticas cuando se centra la atención en cómo la población estudiantil debe aprender la matemática de la escuela, y no así cómo usa el conocimiento matemático para generar diversos fenómenos como la exclusión, adherencia y opacidad (Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto, 2015).

Es decir, no podemos obviar que, pese al discurso de que la educación que se oferta en México se dice ser para todos y todas, de calidad y equidad; el Sistema Educativo Nacional actual, en su carácter homogéneo, trivializa la diversidad cultural de los estudiantes (Méndez, 2015). Por ello, el punto a discutir es la desigualdad educativa que viven grupos minoritarios; en este caso, la Comunidad Sorda.

Con base en los principios de la Teoría Socioepistemológica, el foco de discusión está en el conocimiento matemático de los Sordos, su uso y no así, las llamadas "limitantes" que tiene una persona sorda para aprender Matemáticas. Dado que el conocimiento matemático es situado y

ISSN: 2594-1046

contextualizado (Cantoral, 2013), no podríamos poner atención sólo a qué matemática nos referimos, sino a quiénes y qué elementos permiten su construcción.

De esta manera, se tiene un cambio de paradigma: pasar de ver a un individuo con discapacidad a un ciudadano que construye conocimiento matemático en comunidad (Méndez, 2015). Esto, pone la atención a los paradigmas educativos respecto a la comunidad sorda, y otros grupos minoritarios. Es decir, en Méndez (2015) se propone no partir de las "limitaciones", pues como tal no lo son, la tarea es entonces, conocer la diversidad de la población, de los usos del conocimiento matemático, y cómo es que suceden éstos. Conocer esto nos permitirá generar un marco de referencia de lo funcional del conocimiento matemático en los distintos grupos y situaciones.

Esta tarea, es ardua y obliga a estudios transversales, más del tipo etnográfico y no clínico como hasta ahora ha ocurrido con la población Sorda. Así, pensar la educación del Sordo tendría que ocurrir desde los docentes, las investigaciones e instancias educativas con una mirada desde la funcionalidad de su conocimiento matemático, no desde los hospitales, las clínicas o enfoque puramente médicos.

De esta manera, se propone una mirada centrada en los usos del conocimiento matemático de los Sordos, dada la exclusión a la que han sido sujetos, no en términos de una desigualdad social, al menos no por ahora, sino que nuestro foco de atención es el conocimiento matemático, hablaremos de una exclusión de construir socialmente conocimiento matemático (Soto, 2010); dicha en términos del *no diálogo* entre matemática escolar y la matemática funcional del cotidiano (Cordero *et al*, 2015).

Con esto se invita a una reflexión sobre los usos del conocimiento matemático de los distintos grupos humanos, lo que nos obliga a conocer esas formas propias de ser y hacer de las comunidades. En este caso, pensar en una educación *para* el sordo *desde* el sordo.

4. ELEMENTOS PARA DESARROLLAR LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA CON NIÑOS CON DISCAPACIDAD INTELECTUAL QUE ASISTEN A ESCUELAS REGULARES

El artículo 41 de la Ley general de Educación establece que la educación especial debe favorecer la atención de las personas con discapacidad en los planteles de educación básica, promoviendo la realización de ajustes curriculares y la aplicación de metodologías y materiales específicos con el fin de atender sus necesidades de aprendizaje y participación en ambientes inclusivos (Ley General de Educación, 2016).

De lo anterior es imprescindible comprender a profundidad las distintas discapacidades, en este caso la discapacidad intelectual (DI), y fundamentar las estrategias de intervención para generar aprendizajes.

De acuerdo con Verdugo y Schalock (2010) “la discapacidad intelectual se caracteriza por limitaciones significativas tanto en el funcionamiento intelectual como en la conducta adaptativa tal y como se manifiesta en habilidades adaptativas conceptuales, sociales y prácticas. Esta discapacidad aparece antes de los 18 años” (pág. 12). De acuerdo con la Asociación Americana de Discapacidad Intelectual (AAID, por sus siglas en inglés), algunas de las habilidades conceptuales a promover en los niños son: Lenguaje, lectura y escritura, conceptos relacionados con el dinero, el tiempo y los números. Estas habilidades se encuentran implicadas en el currículo de educación básica en diferentes niveles de complejidad. Por lo que es indiscutible su promoción en ese nivel educativo.

Las limitaciones que presentan los educandos con DI en su funcionamiento cognitivo-conceptual, dificulta su acceso a los aprendizajes matemáticos debido a la naturaleza abstracta de los mismos. De acuerdo con Hernández (2012) los alumnos sin discapacidad estructuran su pensamiento de manera natural y espontánea a través de la interacción con las personas y los objetos, no así quienes se encuentran en condición de discapacidad intelectual. Ellos requieren una mediación sistematizada para favorecer la construcción de conceptos.Hasta hoy se ha intentado favorecer estos aprendizajes con el diseño de estructuras didácticas personalizadas (Propuesta Educativa Específica).

La Propuesta Educativa Específica constituye un currículo personalizado para cada alumno de acuerdo con sus características de aprendizaje y las barreras que se identifican en el contexto escolar que obstaculizan el logro de propósitos educativos (colocar la cita del plan). Se construye tomando como base los contenidos curriculares oficiales para definir los propósitos, la metodología, la temporalidad y los materiales de acuerdo con las necesidades de los estudiantes.

La Propuesta Educativa se fundamenta teóricamente en tres corrientes: La teoría Psicogenética de Jean Piaget, el Constructivismo Social de Liev S. Vigotsky y el Aprendizaje Significativo de Ausubel. De Piaget se toma la información para ubicar el nivel de aprendizaje en cuanto a las nociones prenuméricas (seriación, clasificación correspondencia biunívoca, conservación, reversibilidad) y con ello posibilitar la construcción de aprendizajes considerando que "… según la posición constructivista, el conocimiento no es una copia de la realidad sino una construcción del ser humano, con los esquemas que ya posee, es decir, con lo que ya construyó en su relación con el medio que lo rodea" (Carretero,1993).

Vigotsky orienta en cuanto a la identificación de las zonas de desarrollo próximo, a la necesidad del aprendizaje colaborativo y la utilidad del acompañamiento de tutores, en tanto que "el colectivo es la fuente del desarrollo de la funciones psicológicas y, en particular, en el niño retrasado mental" (Vigotsky, 1924).

Se procura el diseño de secuencias didácticas que partan de los conocimientos previos y se encuentre significado en ellos, puesto que el contenido de aprendizaje debe tener una relación cercana con la estructura cognitiva del que aprende (Rodríguez, 2004).

Por otra parte, se toman en cuenta para la selección curricular, los criterios de relevancia y posibilidad de adquisición. Todo lo anterior debe crear situaciones de aprendizaje situado que permitan gran diversidad de experiencias, así como apoyos individuales previos y posteriores. Las experiencias de aprendizaje se dan en el aula regular, con sus compañeros de grupo, respondiendo a un enfoque inclusivo de la educación. Sin embargo, los resultados de aprendizaje son limitados, se hace necesaria la búsqueda de elementos más específicos que fundamenten las propuestas.

Se considera que el marco teórico que sustenta las propuestas educativas específicas es adecuado, por otra parte, no se ignora la situación no-inclusiva en algunas aulas escolares, la cual es un factor influyente en estos resultados (Ávila, 2015). Aun así se plantea una posibilidad de investigación enfocada en conocer: ¿Cuáles son las maneras más adecuadas en que los mecanismos internos de compensación pueden ser desarrollados por los propios educandos a partir de las premisas que establece Vigotsky?

De lo anterior podemos argumentar que de las premisas planteadas por Vigotsky (1924), ¿cuáles son más factibles a desarrollar en el nivel educativo en cuestión?

1. La vida social colectiva del niño como material para el desarrollo de funciones compensatorias internas.
2. La sustitución de unas operaciones mentales por otras.

ISSN: 2594-1046

3. Las vías indirectas del desarrollo: el afecto que impulsa al niño sin desanimarle al vencimiento de las dificultades.

Es posible la redefinición de las estrategias hasta hoy implementadas para favorecer el desarrollo de habilidades conceptuales en los estudiantes con discapacidad intelectual, revisando a detalle cada estrategia que haya demostrado ofrecer los mejores resultados, a partir de indicadores muy específicos derivados de cada una de las premisas.

La tarea pendiente es la búsqueda de indicadores, susceptibles de ser incorporados a las secuencias didácticas, así como de ser evaluados y tener evidencia del desarrollo del pensamiento matemático con base en las premisas propuestas por Vigotsky (1924), la creación e implementación de situaciones matemáticas ante la inclusión educativa y la actualización del personal docente.

5. EL TRATAMIENTO DE LA MATEMÁTICA EN ESTUDIANTES CON DISCAPACIDAD VISUAL EN LA UAN

Hoy día la inclusión de estudiantes con discapacidad es un tema que tiene importancia dentro de la integralidad social de cualquier país, tal y como lo demuestran el documento: "Educación para Todos: satisfaciendo nuestros compromisos colectivos" (UNESCO, 2009), en éste sentido, la matemática educativa es una alternativa viable que contribuye a la inclusión educativa al ser una disciplina que trata de resolver problemáticas propias de la matemática escolar, es decir una matemática que sufre modificaciones para ser incluida en los planes y programas de estudio en los diferentes niveles del sistema educativo. La mayoría de las interrogantes a resolver, están relacionadas con los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Uno de los sectores de mayor vulnerabilidad y que hoy día atañen en la población estudiantil, es la que corresponde a jóvenes con alguna discapacidad física o motriz que hace necesaria una "mirada" desde la matemática educativa, es decir, habrá que cuestionarse desde tres perspectivas: ¿cómo aprende un estudiante que posee alguna discapacidad física, concretamente ciegos y débiles visuales?, ¿cómo enseñar a un estudiante o grupo de estudiantes que poseen esta discapacidad? Y ¿cómo evaluar los aprendizajes de estudiantes ciegos y débiles visuales? Sin embargo, esta problemática se ha tratado con algunas alternativas desde los niveles básicos excluyendo, paradójicamente, a la educación medio superior y superior (Aquino, García e Izquierdo, 2012).

5.1. El contexto en la Universidad Autónoma de Nayarit (UAN)

De acuerdo con el documento rector para la Reforma Académica (2003), que contempla el actual modelo académico de la UAN, establece un nivel para el perfeccionamiento de competencias básicas, denominado Tronco Básico Universitario (TBU) y del Tronco Básico de Área (TBA) implementado en los primeros periodos escolares. Esta área de formación básica está orientada hacia la comprensión del entorno y adquisición de aptitudes y habilidades, propicias para la integración social de los estudiantes en un contexto cultural históricamente determinado. En este nivel, se asumen las competencias básicas, como lo son las cognitivas, técnicas y metodológicas integradas en unidades de aprendizaje tales como Lenguaje y Pensamiento Matemático (UAN, 2002).

Lenguaje y Pensamiento Matemático: El Caso Ernesto

Es una unidad de aprendizaje que se imparte durante el primer año de la trayectoria escolar, pertenece al TBU y tiene como competencia a lograr: "Evalúa el comportamiento de un fenómeno o situación real a través de la modelación matemática básica, para inferir y tomar decisiones pertinentes respecto a lo evaluado".

Para el cumplimiento de dicha competencia el curso se desarrolla en cuatro unidades:

Unidad 1.- Lenguaje matemático en contexto

Unidad 2.- Lenguaje y pensamiento algebraico

Unidad 3.- Representación gráfica de funciones

Unidad 4.- Introducción a la Modelación Matemática

La primera unidad pretende que el estudiante reconozca la importancia que tiene la matemática en la vida cotidiana y dentro del perfil profesional. La segunda unidad busca dar al estudiante herramientas que coadyuven al desarrollo de pequeños modelos matemáticos desde la representación simbólica. La tercera unidad trata de desarrollar el paso del lenguaje simbólico al lenguaje gráfico desde la visualización y por último la cuarta unidad converge en el desarrollo de modelos a partir de los conocimientos adquiridos en las unidades previas.

En el caso de la Unidad Académica de Derecho (UAD) en la cohorte 2014, se presente un estudiante de 18 años de edad con discapacidad visual desde su nacimiento. Se indaga a través de una entrevista, su experiencia en el aprendizaje de las matemáticas en niveles previos, mediante interrogantes como las siguientes: ¿Qué estrategias utilizaban tus maestros para la enseñanza de las matemáticas? ¿Con qué instrumentos o recursos didácticos te has apoyado para aprender matemáticas?, ¿Conoces y dominas el lenguaje Braille?.

Derivado de lo anterior, y dado que Ernesto había ido "acreditando" sus cursos sin una evaluación bien fundamentada, se decidió por trabajar cada unidad con algunos recursos táctiles como el uso de braille, dado que la UAN ofrece el recurso de traducir textos en braille, sin llegar a tener una tiflotecnia; sin embargo este lenguaje tiene algunas desventajas pues no posee signos matemáticos tales como +, - o incluso el punto como punto decimal, es una escritura plana y además la traducción de textos es muy costosa. Para el caso de la segunda unidad se optó por buscar plasmar diferentes representaciones algebraicas pintadas con pintura textil que permite el relieve y a través de éste entender los diferentes signos y las construcciones de expresiones algebraicas. Para el caso del lenguaje gráfico, en el caso al menos de la función lineal, cuadrática y cúbica, se optó por utilizar el geoplano buscando simular el plano cartesiano y donde a través de dos lazos poner los ejes de las ordenas y abscisas y mediante ligas construir las funciones.

Una de las ventajas fue que Ernesto poseía una computadora con un sistema parlante que le leía todo lo escrito, por lo que la unidad de aprendizaje fue evaluada a través de exámenes de opción múltiple (uno por unidad).

Actualmente se tiene conocimiento que en la matrícula de estudiantes de nivel superior, la UAN tiene doce estudiantes con discapacidad visual lo que hace pensar que cada vez irá en aumento esta población y donde se carece de materiales didácticos, así como de docentes capacitados para desarrollar mejoras en los procesos de enseñanza y aprendizaje para este tipo de jóvenes.

Reflexión

Es imperioso el desarrollo de recursos didácticos que faciliten los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas para unidades de aprendizaje que comprenden los currículos de nivel media superior y superior, pues no sólo se contemplan unidades en el nivel de formación básico (según el modelo académico de la UAN) si no también, en las unidades de aprendizaje disciplinares.

Lo anterior, vuelve necesaria la capacitación del docente en ésta problemática no sólo para la discapacidad visual sino también para otro tipo de capacidades.

Las instituciones no poseen la infraestructura adecuada para atender discapacidades físicas, dado que las autoridades se han preocupado por atender mayoritariamente los temas de discapacidad motriz, por tanto no se habla de una real educación incluyente.

6. CONCLUSIÓN

Como se podrá notar, el reto que asume el área de Matemática Educativa es complicado. Estudiar cada uno de los casos que requieren Educación Especial implica un estudio muy particular, incluso desde nuestra disciplina es necesario la constitución de marcos teóricos y metodológicos que permitan un acercamiento al pensamiento matemático de la población. Cada vez es necesario el trabajo conjunto entre matemática educativa y educación especial, dado al fenómeno de la inclusión educativa en los diferentes niveles del sistema educativo nacional.

Por una parte, la identificación de los procesos cognitivos relativos al pensamiento matemático de niños con discapacidad, favorecería a los docentes del nivel educativo en cuestión, establecer estrategias de enseñanza propias de cada una de la población promoviendo el uso de conceptos matemáticos. Por otro lado, el trabajo de la comunidad de conocimiento matemático del Sordo, da una pauta para reflexionar sobre el uso de los conceptos matemáticos, considerando al Sordo como un ciudadano que construye y usa su conocimiento.

En ese sentido, plantear los fundamentos de la educación inclusiva y extrapolarlos a la enseñanza de las matemáticas es de interés, pues permite garantizar la educación integral de los niños con alguna necesidad educativa especial con o sin discapacidad. Tal es el caso de la Universidad Autónoma de Nayarit, quien se preocupa por los servicios educativos de personas con discapacidad visual, adaptando estrategias y métodos para la enseñanza de las matemáticas.

Se invita pues, que en las próximas emisiones de la Escuela de Invierno se unan más trabajos de investigación y de experiencias de aula a la problemática que está asumiendo el grupo de temático.

ISSN: 2594-1046

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aké, L. P. (2015). Matemáticas y educación especial: realidades y desafíos en la formación de profesores. En J. López-Mojica y J. Cuevas (Eds.). *Educación Especial y Matemática Educativa: Una aproximación desde la formación docente y procesos de enseñanza* (15-32). México: CENEJUS.

Ávila, M.C. (2015). *Representaciones sociales y discapacidad intelectual*. (Tesis de Doctorado inédita). Instituto de Estudios Superiores Mundo Nuevo. México.

Aquino, S.P., García, V., Izquierdo, J. (julio – diciembre 2012). *La inclusión educativa de ciegos y baja visión en el nivel superior.* Un estudio de caso. Sinéctica, 39. Recuperado de http://www.sinectica.iteso.mx/index.php?cur=39&art=39_12

Cantoral, R. (2013). Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento. Gedisa, Barcelona, España.

Carretero, M. (1993). *Constructivismo y Educación*. España: Edelvives.

Castells, M. (1999). La era de la información: Economía, Sociedad y Cultura. México: Siglo XXI.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H. & Soto, D. (2015). *Discurso Matemático Escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad*. España: Gedisa.

Hernández, G. (2012). *Saberes y quehaceres de los maestros de apoyo*. Instituto de Educación de Aguascalientes. México.

López-Mojica, J. M. (2013). *Pensamiento probabilístico y esquemas compensatorios en la educación especial*. Tesis de Doctorado Inédita. México: Cinvestav-IPN.

Ley General de Educación. (1993). Diario Oficial de la Federación de México. México, D.F. 13 de julio de 1993.

Méndez, C. (2015). *Comunidad de conocimiento matemático de Sordos. Lo matemático y la escuela*. Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Departamento de Matemática Educativa, México, D.F.

Ramírez, J. C. y López-Mojica, J. M. y (2015). Una análisis curricular de la formación de profesionistas de la educación especial en matemáticas. En J. López-Mojica y J. Cuevas (Eds.), *Educación Especial y Matemática Educativa: Una aproximación desde la formación docente y procesos de enseñanza* (53-71). México: CENEJUS.

Rodríguez, M.L. (2004). La teoría del aprendizaje significativo. C.E.A.D. España. Consultado en internet el 29 de septiembre de 2016. http://eprint.ihmc.us/id/eprint/79

Soto, D. (2010). *El Discurso Matemático Escolar y la exclusión. Una visión socioepistemológica*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Departamento de Matemática Educativa, México, D.F.

Torres, R. M. (2005). Sociedad de la información/Sociedad del conocimiento. Recuperado el día 24 de junio http://www.vecam.org/edm/article.php3?id_article=94

UNESCO (2009). Informe de seguimiento de la EPT en el mundo 2009: Superarla desigualdad por qué es importante la gobernanza. Paris.

Universidad Autónoma de Nayarit, 2002,.Documento Rector para la Reforma Académica, ubicado en http://www.uan.edu.mx/d/a/sg/Legislacion/dcf4.pdf.

Verdugo, M. A y Schalock, R. (2010). Siglo Cero. *Revista española sobre discapacidad intelectual*. Vol. 41. Num. 236. España.

ISSN: 2594-1046

Vigotsky, L. S. (1924, edición en español 1989). *Fundamentos de Defectología. Obras completas. Tomo V*. Pueblo y Educación. Cuba.

Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

FORMACIÓN DE PROFESIONALES DESDE LA MATEMÁTICA EDUCATIVA

Ruth Rodríguez Gallegos
Tecnológico de Monterrey. ruthrdz@itesm.mx

Bertha Ivonne Sánchez Luján
ITCdJ, TNM. ivonnesanchez10@yahoo.com

Ismael Arcos Quezada
UAEM. ismael_arcos@msn.com

Fernando Cajas
USC. fcajas@usac.edu.gt

Alberto Camacho Ríos
ITCHII, TNM. camachoriosalberto@gmail.com

Atenea de la Cruz
UNACH. ateneadr@hotmail.com

Olda Covián
CICATA-IPN

Resumen

Se presenta la postura de un grupo de formadores de ingenieros preocupados por la matemática que debe impartirse en el nivel superior y las implicaciones al currículo. Se hace un breve recorrido por la relación entre la matemática y la ingeniería, así como los principales referentes actuales, como son el Proyecto Tuning Latinoamérica y el informe Delors. Se presentan además casos de prácticas en ingeniería, lo que nos lleva a la conclusión de que la actividad del matemático educativo en las escuelas de ingeniería le permite participar tanto en el diseño de propuestas de planes de estudio de los cursos de matemáticas, como en la generación de espacios de aprendizaje, el diseño y elaboración de libros de texto y de diversas herramientas que permitan posicionar a la matemática como objeto de conocimiento y como herramienta de modelación en el aula de los futuros ingenieros.

Palabras clave: Enseñanza de las matemáticas. Formación de ingenieros. Modelación.

1. INTRODUCCIÓN

Uno de los objetivos a perseguir por el grupo es el iniciar la construcción de un campo de conocimiento latinoamericano de aprendizaje de la ingeniería. Hemos considerado que un primer elemento clave a considerar es el cuestionarse sobre el papel de la matemática en la formación de futuros ingenieros.

Si bien nuestro interés no se limita exclusivamente a ingenieros sino a profesionales en general y a la formación de técnicos, consideramos importante iniciar con el reconocimiento de la problemática que vive en la formación de ingenieros, durante la enseñanza de la matemática, de la problemática de la formación de ingenieros.

La estructura del escrito es la siguiente:

- Crítica a modelos de formación de ingenieros en América Latina
- la relación entre matemática educativa e ingeniería educativa, desde una visión tanto histórica como actual.

Revisión de algunos marcos de referencia (no exhaustivo) para dar una visión actual

a) El caso del estudio de las prácticas del ingeniero desde la teoría TAD: un ejemplo
b) La relación de los futuros profesionales técnicos

2. CRÍTICA A MODELOS DE FORMACIÓN DE INGENIEROS

De acuerdo a Cajas (2015) en América Latina, exceptuando Brasil, el modelo histórico de la construcción de la ingeniería es bastante parecido: un modelo estadounidense, muchas veces mal copiado, que ha construido una visión filosófica de ingeniería como ciencia aplicada que en su formato curricular le da una sobrevaloración a lo abstracto, desconectando la matemática (las ciencias básicas en general) de la práctica social de la ingeniería. En ese sentido, debemos develar las condiciones históricas que hicieron: 1) que a partir de 1960 emerjan copias de cadenas curriculares provenientes de USA principalmente (vienen también de Francia, Inglaterra y Alemania); 2) que a partir de finales del siglo pasado e inicios del presente nos veamos influenciados por una visión Europea que se concentra en la construcción de "competencias", la cual no ha sido adaptada al contexto nacional y/o latinoamericano (ver Proyecto Tuning de Alfa III, Unión Europea, Universidad de Alcalá. Fundación General, 2012).

Resaltar la importancia de un movimiento liberador, auténtico, que documenta procesos de aprendizaje de personas reales en comunidades reales, donde la ingeniería y la matemática son prácticas hibridas que se entrelazan con otras para mejorar las condiciones de vida de las personas y cuyo formato curricular debe superar los dogmas creados. En este sentido, el movimiento de la Escuela

ISSN: 2594-1046

Latinoamericana de Matemática Educativa es el ejemplo a seguir, enfocándose más en la práctica y menos en lo escolar.

2.1. Relación Matemática e Ingeniería

Pollak (2007), abordó esta cuestión en varios momentos de su trayectoria como matemático, por ejemplo: ¿cuándo los educadores matemáticos se interesaron lo suficiente y empezaron a poner especial atención en la enseñanza de las matemáticas? Hacia 1970 las inquietudes acerca de la enseñanza de la enseñanza de la modelación, a fin de demostrar la aplicación y dar sentido a las matemáticas, pudo generar un primer plan de estudios. A raíz de ello, propone que la modelación por sí misma debe estar contemplada en el currículo, de esta forma la modelación se abordó más seriamente que antes y se logró motivar a los niños y mantenerlos interesados. A pesar de ello, también consideró la idea de una sociedad sin matemáticas, surgiendo así preguntas como: ¿Cómo interactuar y conectarse con las matemáticas tradicionales? ¿Cómo conectar con la estadística y la ciencia y la informática? Siendo una de las preguntas relevantes: ¿Qué es una completa la educación matemática? y ¿cuáles son las cosas que debe ir cuando los niños están aprendiendo matemáticas?

2.2. Una visión general de los planes de estudio de las matemáticas en occidente y el este.

En ese trabajo también se expusieron cuestionamientos acerca del papel de las matemáticas en el currículo general (en un Plan de estudios), se expone que para el diseño del currículo de matemáticas existen diversos factores inmiscuidos. Pero además es relevante conocer ¿Cómo se ha determinado el plan de estudios de las matemáticas (centralizada o descentralizado)? ¿Existen diferencias culturales? Sin embargo, es importante señalar que a pesar de que las matemáticas ocupan un lugar central en el plan de estudios de casi todos los países el mundo, existen diferencias en la importancia de las matemáticas como asignatura escolar. Entre esas diferencias se encuentran: el número de horas dedicado al as matemáticas, las matemáticas son vistas como un servicio o un tema instrumental para el desarrollo de un ciudadano preparado (Leung, 2007).

Guthrie (2010) hace mención de la importancia de la educación y formación en la ingeniería ya que desde la mitad del siglo pasado esta disciplina se ha desarrollado tanto, que no puede separarse de la sociedad debido a sus fuertes necesidades. También hace recomendaciones acerca de cuál sería la

ISSN: 2594-1046

educación idónea en ingeniería, es decir, que los estudiantes se formen de acuerdo a su ambiente o contexto de trabajo.

Es así que el grupo busca explorar la relación entre la Matemática e Ingeniería, desde un análisis mediado por la noción de aprendizaje. Esto es, aprendizaje de la matemática en ingeniería, aprendizaje de la matemática desde ingeniería, aprendizaje de la ingeniería.

Se sabe que el contenido de las matemáticas en las carreras de la ingeniería es significativo. Aunque los conocimientos matemáticos son abordados en los niveles básico y medio superior, su enseñanza y aprendizaje en el nivel superior deviene complicado, impactando fuertemente en la formación de ingenieros civiles. Todo plan curricular, como lo hace evidente la revisión realizada por Cajas (2013), al observarse linealmente, los programas de ingeniería ubican a las matemáticas dentro de las ciencias básicas que preceden a las materias de las ciencias de la ingeniería y las materias profesionales (*Figura 1*). Esta importancia y dificultad de las matemáticas hace que alumnos, profesores y la sociedad en general, demanden cuestionamientos que tiene que ver más con el sentido utilitario que funcional (Cordero, 2008).

Figura 1. Programa lineal de ingeniería entendida como aplicación de la ciencia básica. Tomado de Cajas (2013)

3. REVISIÓN DE ALGUNOS MARCOS DE REFERENCIA / VISION ACTUAL

A nivel regional han surgido indicadores relacionados con los roles de la matemática en la formación de ingenieros. En estos se asume una notable resistencia a la innovación por parte de aquellos docentes que se formaron en sus estudios de licenciatura hace tres décadas. Es ante esto último que los proyectos que se desarrollen en nuestra disciplina, la Matemática Educativa, deben incluir elementos que motiven y sensibilicen la aceptación gradual de los mismos, por la mayoría de los profesores.

ISSN: 2594-1046

Otra cuestión importante es la necesidad de una revisión y adaptación reflexiva de los marcos de referencia con que se dispone y no asumirles como la panacea, que, por su posición de moda, cobijan nuestras propuestas, entre los cuales podemos mencionar los siguientes.

Informe Delors (1996). En *La educación encierra un tesoro*. Informe a la UNESCO de la Comisión Internacional sobre la Educación para el siglo XXI, conocido simplemente como Informe Delors (1996), se llama la atención sobre la urgencia de disminuir las cuantiosas listas de contenidos de los cursos escolares, haciendo una debida selección de los mismos:

La selección de los aprendizajes más relevantes adquiere especial significación en la actual sociedad del conocimiento, donde los contenidos se duplican a gran velocidad y muchos pierden vigencia rápidamente. La sobrecarga de los currículos actuales hace necesario decidir de manera urgente cuáles son los aprendizajes más relevantes que han de formar parte de la educación escolar. […] Los cuatro pilares del informe Delors para el aprendizaje del siglo XXI, *–aprender a conocer, a hacer, a ser y a vivir juntos–* constituyen una referencia indispensable para establecer cuáles deben ser los aprendizajes básicos y más relevantes en la educación.

Parece, sin embargo, que en nuestras universidades la educación sigue apoyándose en gran medida en la adquisición de conocimientos, a pesar de que se reconozca que ello termina siendo un propósito inalcanzable. Estamos conscientes de que el Informe Delors (1996), es un estudio ampliamente desfasado en el tiempo (20 años atrás), y el mismo no menciona de manera explícita. que tenga que ver con las carreras de ingeniería. Sin embargo, lo mencionamos aquí por ser un referente importante que marca el inicio de la gran preocupación de centrar al alumno en el centro de su aprendizaje y de enfocar más la enseñanza a competencia macros (4 pilares) que en un apilamiento de conocimientos per se.

Proyecto Tuning Latinoamérica (2007). En este proyecto se llama la atención sobre la necesidad de que los estudiantes, más que apropiarse de una lista de conocimientos, adquiera las competencias genéricas comunes a todos los programas de licenciatura, así como de las competencias específicas del programa que estudia. Entre otras implicaciones se identifica aquella en la que se asume que los conocimientos disciplinares deben dejar de agruparse en materias o asignaturas, eliminando de esta manera algunos contenidos que ya no resultan pertinentes. (Beneitone, Esquietini, González, Marty, Siufi y Wagenaar, 2007).

ISSN: 2594-1046

Sociedad europea para la educación de la ingeniería (Société Européenne pour la Formation des Ingénieurs, SEFI).

En el *Marco de referencia para el currículo matemático en la educación de la ingeniería* (2013), esta sociedad propone una lista de las competencias matemáticas involucradas en la educación de la ingeniería, así como el nivel deseable de dominio de cada competencia por parte de los estudiantes.

Las competencias matemáticas enlistadas son:

- Pensamiento matemático,
- Razonamiento matemático,
- Planteamiento y solución de problemas matemáticos,
- Modelación matemática,
- Entidades de representación matemática,
- Manipulación de símbolos matemáticos y formalismo,
- Comunicación en, con y acerca de la matemática y
- Uso de ayudas y herramientas.

Así, cuando se acuerda el nivel de dominio deseable de cada una de estas competencias, se otorga mayor o menor importancia a cada aspecto de cada temática, en función de las competencias a desarrollar por parte del estudiante de ingeniería y, eventualmente, por el ingeniero en ejercicio profesional. En el esquema tradicional, en cambio, cada temática tiene una mayor o menor importancia en función de la estructura interna de los cursos mismos de matemáticas.

4. EL CASO DE LAS PRÁCTICAS DE INGENIEROS Y LA TAD

Romo (2007), tiene como pregunta de investigación: ¿Qué lugar darles a las matemáticas en una formación de ingeniero? Siendo esta una pregunta que también Farfán (2012) abordó en su investigación en cuanto a el surgimiento de *l´École Polytechique* entre 1794 -1850; y los trabajos desarrollados por la comisión internacional de la Enseñanza de las matemáticas a principios del siglo

XX. Sin embargo, Romo (2007) situó su pregunta de investigación en tres instituciones: las de producción, las de enseñanza y las instituciones usuarias. Las preguntas dan una idea del recorrido que realiza el conocimiento generado en cada institución, de donde se identifica, de acuerdo con Romo-Vazquez (2014):

De la institución de producción de conocimientos matemáticos a la enseñanza de las matemáticas y de ésta a los proyectos.

De la institución de producción de conocimientos matemáticos a la institución de producción de conocimientos intermediarios y de ésta a la enseñanza de las disciplinas intermediarias y finalmente a los proyectos.

De la institución de producción de conocimientos matemáticos a la enseñanza de las matemáticas, de esta a la enseñanza de las disciplinas intermediarias y finalmente a los proyectos.

Esta revisión da cuenta de la existencia de la problemática entre la transmisión de los saberes en la que se identifican además los niveles en los que se produce el conocimiento matemático y cómo lo utilizan en diversas instituciones.

Ejemplos asociados a la utilidad de la TAD para comprender la práctica de la ingeniería, se encuentran en Camacho y Romo Vázquez (2015), así como en Vázquez, Romo y Romo-Vázquez (2016). En ambos se estudian las actividades de los ingenieros desde la matemática escolar y se toman como punto de partida para el diseño de situaciones de aprendizaje, que se aplican durante los primeros años de las carreras de ingeniería (Covián y Romo-Vázquez, 2014).

4.1. La formación de futuros profesionales técnicos

A principios de la segunda década de este siglo, trabajos reportados en el estudio ICMI 20 (Damlamian, Rodrigues y SträBer, 2013) muestran resultados de investigación en didáctica centrados en la creación o búsqueda de relaciones entre las matemáticas y la industria. Esto se ha visto con más fuerza en la formación de profesionales que demandan formaciones "más prácticas" debido a la demanda de la sociedad actual que requiere personal matemáticamente capacitado para enfrentar situaciones propias de la industria. En particular se ha encauzado la investigación hacia la caracterización de las necesidades en formaciones tecnológicas o técnicas que, en teoría, preparan a estudiantes desde niveles bachilleratos para desempeñarse laboralmente. Diversas propuestas han identificado las necesidades matemáticas en las industrias propias del contexto de la población o a fin a la carrera para llevarlas a las aulas de matemáticas. También se ha mostrado la importancia de incluir programas de formación basados en la modelación matemática y matemática aplicada. Sin embargo, las cuestiones que aún quedan abiertas son ¿cómo identificar las situaciones, propias de la profesión, susceptibles de ser llevadas o relacionadas con la matemática escolar? Una vez identificada la situación ¿cómo generar dispositivos didácticos para intervenir en estas formaciones? En Guzmán, Romo y Covián (2016) se presenta una metodología basada en constructos teóricos de la TAD para la enseñanza de ecuaciones diferenciales en cursos de Control Automático para la formación de futuros Técnicos Superior Universitario. En este espacio de discutirán los principales aspectos de este tipo de formaciones y parte de la metodología propuesta para el diseño de dispositivos didácticos.

5. CONCLUSIONES

Respecto a la relación entre Matemática Educativa e Ingeniería Educativa, desde una visión tanto histórica como actual, debemos reconocer que la matemática escolar que el ingeniero necesita debe ser más funcional que la matemática formal en el sentido estricto de la palabra. De tal forma que se presente tanto como objeto de conocimiento y como herramienta de modelación.

Se considera que un profesional formado en la Matemático Educativa, puede participar en las Escuelas de Ingeniería desarrollando actividades relacionadas con alguno(s) de los siguientes aspectos (Arcos, 2015):

- Determinación de los propósitos generales del conjunto de cursos de Matemáticas, como parte de la formación escolar de los futuros profesionales de la ingeniería. Por lo tanto, en la determinación más o menos precisa de los contenidos específicos de esos cursos.
- Propuesta y exploración de las posibles maneras en las que esas temáticas deben atenderse en las aulas y en otros espacios de aprendizaje.
- Diseño y elaboración de textos y otros materiales para la enseñanza de las Matemáticas en escuelas de Ingeniería.
- Diseño y exploración de actividades de aprendizaje con o sin la ayuda de elementos y herramientas tecnológicas.

5.1. Diseño y exploración de instrumentos de evaluación de los aprendizajes.

De esta manera, todas aquellas actividades de indagación bibliográfica, hemerográfica o aquellas desarrolladas en aula o en cualquier otro escenario en donde puedan ocurrir aprendizajes de Matemáticas por parte de los estudiantes de una escuela de ingeniería, bien pueden denominarse actividades de investigación en Matemática Educativa.

Esperamos aportar a ese respecto durante la conversación educativa en la XIX Eime y contribuir en un segundo momento con posturas y respuestas a través de los interesados en integrarse a esta actividad.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arcos, I. (2015). El cálculo en Ingeniería. Ponencia en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Chiapas en Abril 2015.

Beneitone, P., Esquetini, C., González, J., Marty, M., Siufi, G., & Wagenaar, R. (2007). *Reflexiones y perspectivas de la Educación Superior en América Latina*. Proyecto Tuning. 2004-2007. Bilbao: Universidad de Deusto.

Cajas, F. (2013). La formación de Ingenieros/as Civiles y Matemáticos/as en la Actualidad: Tendencias y Desafíos. *II seminario-taller centroamericano de armonización académica regional de las licenciaturas en Ingeniería Civil y matemática*. Guadalajara, México.

Camacho A., Romo-Vázquez A. (2015) Déconstruction-construction d'un concept mathématique. In Theis L. (Ed.) Pluralités culturelles et universalité des mathématiques: enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage -Actes du colloque EMF2015 - GT5, pp. 443-453.

Cordero, F. (2008). El Uso de las Gráficas en el Discurso del Cálculo Escolar. Una visión Socioepistemológica. En R. Cantoral, Covián, O., Farfán, R. M., Lezama, J., y Romo, A. (Eds.). *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano.* México: Ediciones Díaz de Santos, S.

Covián, O. y Romo-Vázquez, A. (2014). Modelo Praxeológico Extendido una Herramienta para Analizar las Matemáticas en la Práctica: el caso de la vivienda Maya y levantamiento y trazo topográfico. *Boletim de Educação Matemática* [en línea] 2014, 28 (Abril): [Fecha de consulta: 20 de septiembre de 2015] Disponible en:<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291231123008> ISSN 0103-636X

Damlamian, A., Rodrigues, J. & Sträβer, R. (2013). *Educational Interfaces between Mathematics and Industry*. Springer.

Delors, J. (1996). *La educación encierra un tesoro*. París: Ediciones UNESCO.

Farfán, R. (2012). Socioepistemología y ciencia: El caso del estado estacionario y su matematización. México: Editorial Gedisa.

Guthrie, P. (2010). Beyond Systems Engineering – Educational Approaches for the 21st Century. En D. Grasso, M.B. Burkins (eds.), *Holistic Engineering Education*, Springer Science Business Media.

Guzmán, P., Romo, A. y Covián, O. (2016). Diseño de actividades para un curso de control automático basadas en la modelación matemática. Una propuesta desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico. En *El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza. V congreso internacional de la TAD* (Documento en proceso de edición).

Leung, F. (2007). Mathematics education in east Asia and the west: does culture matter?. *Modelling and Applications in Mathematics Education. Springer.* 09 (the 13th ICMI Study), pp 21-46

Pollak, H. (2007). Mathematical modelling – A conversation with Henry Pollak. *Modelling and Applications in Mathematics Education. Springer.* 10 (The 14th ICMI Study), pp 109-120

Romo-Vázquez, A. (2014). La modelización matemática en la formación de ingenieros. *Educación Matemática*, 314-338. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/405/40540854016.pdf

Société Européenne pour la Formation des Ingénieurs. (23 de julio de 2016). Obtenido de http://www.sefi.be/Universidad de Alcalá. Fundación General. (26 de 08 de 2012). Programas de la UE. Obtenido de Proyecto "USo+I: Universidad, Sociedad e Innovación. Mejora de la pertinencia de la educación en las ingenierías de Latinoamérica": http://areadecooperacion.fgua.es/2012/03/proyecto-alfa-usoi-universidad-sociedad.html

Vázquez, R.; Romo, A.; Romo-Vázquez, R.; y Trigueros, M. (2016). La separación ciega de fuentes: un puente entre el álgebra lineal y el análisis de señales. *Educación Matemática*, 28(2), 31-57. Recuperado de http://oai.redalyc.org/articulo.oa?id=40546500002

EXPERIENCIAS DIDÁCTICAS

Innovación en investigación en Matemática Educativa.

Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa AC (2017) Vol. II

Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

ÁREA DEL CUADRILÁTERO: UN PROBLEMA PARA CONOCER LAS DIFERENTES REPRESENTACIONES DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Sandra Areli Martínez Pérez
Centro de Ciencias y Humanidades, UNAM, miarelin@gmail.com

Olivia Alexandra Scholz Marbán
Centro de Ciencias y Humanidades, UNAM, scholzalexa@gmail.com

Miguel Ángel Huerta Vázquez
Centro de Ciencias y Humanidades, UNAM, mhuertav@gmail.com

Resumen

En este trabajo se presenta una actividad que consiste en calcular el área mínima de un cuadrilátero inscrito en un rectángulo. Los alumnos comienzan a resolver usando sus conocimientos previos de geometría tales como las definiciones de cuadrilátero, triángulo rectángulo, áreas compuestas, y a partir de estos elaboran una tabla de valores para después elaborar la gráfica, finalmente se pide que encuentran la expresión algebraica con lo que corroboran el hecho de que se trata de una función cuadrática. Se observó que los alumnos entienden que la función cuadrática puede verse con diferentes representaciones.

Palabras clave: resolución de problemas, áreas, función cuadrática.

1. INTRODUCCIÓN

En el plan de estudios del CCH está contemplado el estudio de la función cuadrática en la primera unidad de la asignatura Matemáticas 2. En dicha unidad se contempla el acercamiento a la función haciendo uso de la tabulación, la gráfica y la expresión algebraica.

Sin embargo, diversas investigaciones documentan que el concepto de función es difícil de entender, por lo abstracto de sus partes tales como el dominio y contra dominio de la función. Si a lo anterior le agregamos el hecho de lo difícil que resulta para los estudiantes entender que diferentes representaciones pueden utilizarse para presentar un mismo objeto, resulta complicado el entendimiento del tema.

De acuerdo con Duval (2006), es importante que los estudiantes utilicen símbolos y figuras que representen modelos espaciales y numéricos, e identifiquen el mismo patrón en diferentes representaciones, ya que al transitar por diferentes representaciones los alumnos podrán lograr el aprendizaje de los conceptos matemáticos.

En este trabajo se presenta una actividad que permite a los estudiantes utilizar sus conocimientos previos en geometría para comenzar a resolver el problema y luego pasar a la elaboración de la tabla de valores y la gráfica de manera natural y, por último, pasar a la expresión algebraica. Nuestro objetivo es proporcionar a otros docentes una herramienta que les permita abordar el tema de manera sencilla y clara.

2. FUNDAMENTACIÓN

Duval sostiene que el proceso matemático siempre implica una transformación de representaciones y que sólo a través de éstas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos. Las representaciones no sólo son indispensables para fines de comunicación, sino que también son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma (Duval, 2004).

Por otra parte, el acto de resolver un problema es un proceso que transita por diferentes etapas relacionadas entre sí, que parte del hecho de que el individuo reconozca y valore la situación como un problema, hasta el punto en que evalúa la solución hallada y el procedimiento empleado.

Desde hace ya varias décadas Polya identificó y describió varias etapas o categorías en el proceso de resolver problemas. Inicialmente hace referencia a la fase del entendimiento del problema; es aquí donde es importante entender la información del enunciado del problema y las posibles relaciones. Luego ubica la etapa relacionada con la concepción de un plan y el proceso de llevarlo a cabo. Finalmente, Polya identifica la fase de evaluación de la solución o soluciones y lleva a cabo una visión retrospectiva del potencial del problema. Es decir, aquí no solamente se incluye la actividad de revisar los cálculos y operaciones, sino también evaluar el sentido de la solución y el análisis de las posibles extensiones o conexiones del problema. (Polya, 1945).

Vale la pena destacar que la resolución de problemas implica la puesta en acción de estrategias. Analizar, planificar, actuar y evaluar indican diferentes acciones o momentos de una manera de proceder denominada estrategia. La estrategia se relaciona directamente con la resolución de problemas, de tal suerte que no hay estrategia sin una finalidad práctica de superar un problema; esto

ISSN: 2594-1046

es, no hay estrategia sin pasar por la planificación, coordinación, realización y evaluación de una serie de acciones dirigidas a la resolución de problemas.

Schoenfeld (1987) considera que no solamente es importante discutir las estrategias generales identificadas por Polya, sino también las subestrategias que cada una genera. Sugiere además que, para entender cómo intentan los estudiantes resolver los problemas y en consecuencia proponer actividades que pueden ayudarlos, es necesario discutir problemas en diferentes contextos y considerar dimensiones o categorías en la instrucción matemática que influyen en el proceso de resolver un problema.

Las dimensiones o categorías a las que Schoenfeld se refiere son:

- dominio del conocimiento o recursos,
- estrategias cognitivas o métodos heurísticos,
- estrategias metacognitivas y,
- sistemas de creencias.

Los *recursos*, según Schoenfeld (1987), son inventario de lo que un individuo sabe y de las formas en que adquiere ese conocimiento. El uso de unos u otros recursos en la resolución de un problema está determinado por una serie de factores, entre los que se encuentran aquellos asociados al problema, como su grado de complejidad, las formas de representación existentes y las herramientas con las que se puede resolver, tanto intelectuales como técnicas; lo cual genera que el individuo responda o actúe de cierta manera al resolver el problema. De acuerdo con este autor, hay cinco tipos de conocimientos que impactan en el uso de los recursos:

Conocimiento informal e intuitivo respecto del dominio (la disciplina) o del problema por resolver, conocimiento que en muchas de las ocasiones impide a los estudiantes entender el concepto matemático bajo estudio.

Hechos y definiciones que los estudiantes deben utilizar como parte del proceso de resolución de un problema, al plantear o seleccionar alguna vía de solución. El conjunto de recursos incluye tanto los conocimientos, hechos y definiciones básicas, como la forma en que ellos recuerdan este conocimiento y tienen acceso a él para resolver el problema.

ISSN: 2594-1046

Procedimientos rutinarios o técnicas no algorítmicas que los estudiantes utilizan para resolver ciertos tipos de problemas. Son procedimientos que se ubica en un nivel táctico; esto es, son técnicas separadas de las habilidades de nivel estratégico.

Conocimiento acerca del discurso del dominio, que se refiere a las percepciones de los estudiantes respecto de las reglas al resolver un problema, lo cual establece la dirección y los recursos utilizados en el proceso de solución.

Recursos débiles o errores consistentes que los estudiantes cometen en procedimientos simples, lo cual conduce a pensar que se trata de un mal aprendizaje.

3. METODOLOGÍA

En esta experiencia de aula el problema fue propuesto a alumnos que cursaban el segundo semestre del bachillerato, sus edades oscilaban entre los 15 y 16 años; el tema que se estaba abordando en ese momento era función cuadrática que corresponde a la unidad 1 de Matemáticas 2. El problema es el siguiente:

> Dado un rectángulo ABCD con base igual a 6 cm y altura de 4 cm. Sean P un punto sobre el lado AB, M un punto sobre el lado BC, N un punto sobre CD y S un punto sobre DA, tales que las distancias BM, CN, DS son las iguales a la distancia AP. Calcular el área mínima del cuadrilátero que se forma al unir los puntos P, M, N, S.

El alumno identificará la información que le es proporcionada en el problema y qué es lo que se le pide, a partir de ello debe formular un plan de solución.

4. RESULTADOS

El problema fue aplicado en el salón de clases, captó la atención de los alumnos quienes poco a poco fueron desarrollando sus soluciones y elaboraron sus propias conclusiones. La mayoría de ellos lo comprendió como una aplicación de la función cuadrática pero además se dieron cuenta que existían valores que la función no podía tomar, lo que implicaría una noción intuitiva del concepto de dominio.

Al leer el problema, la mayoría de los estudiantes propuso elaborar el dibujo que lo representara, después buscaron la forma para determinar el área del cuadrilátero inscrito y luego

ISSN: 2594-1046

decidieron elaborar una tabla de valores en la cual proponían diferentes distancias AP y haciendo uso de ellas calculaban el área del cuadrilátero, tal como se muestra en la Figura 1:

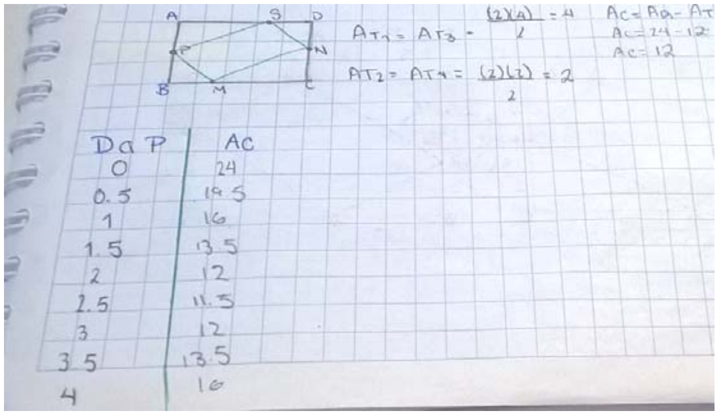


Figura 1. Ejemplo de elaboración de dibujo y tabla de valores de un estudiante

Una pregunta frecuente de los estudiantes era qué valor máximo de la distancia AP deberían considerar, por lo que se les solicitó que para cada valor de AP elaboraran un dibujo. Esto con la finalidad de que ellos mismos determinaran cuál era el valor máximo que podían utilizar (Figura 2).

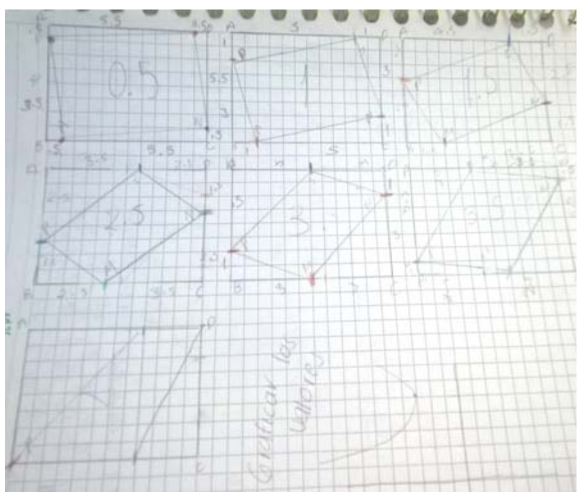


Figura 2. Ejemplo de los dibujos elaborado por un estudiante para cada distancia AP propuesta

Al observar los resultados para el área del cuadrilátero en la tabla, los estudiantes intuyeron que podría tratarse de una parábola, por lo que se les pidió que elaboraran la gráfica considerando a la distancia AP como la variable x y al área de cuadrilátero como la variable y, dicha gráfica se muestra en la Figura 3.

ISSN: 2594-1046

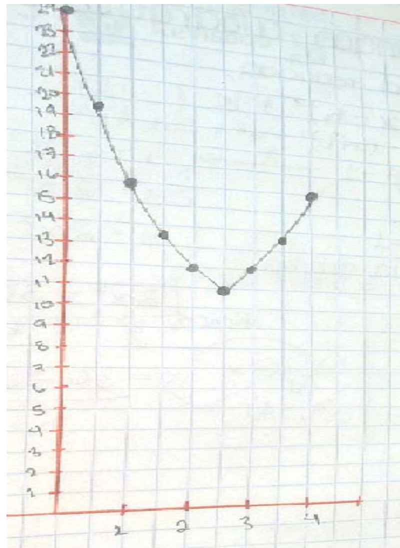


Figura 3. Ejemplo de la gráfica elaborada por un estudiante

Se dieron cuenta que el valor más bajo del área del cuadrilátero de la tabla correspondía al vértice de la parábola y que en este caso se trata del mínimo de la función.

El siguiente paso fue determinar la expresión algebraica que modelara al problema, entonces consideraron que la distancia AP sería x y usando mismo el procedimiento para determinar el área del cuadrilátero realizaron sus cálculos (Figura 4).

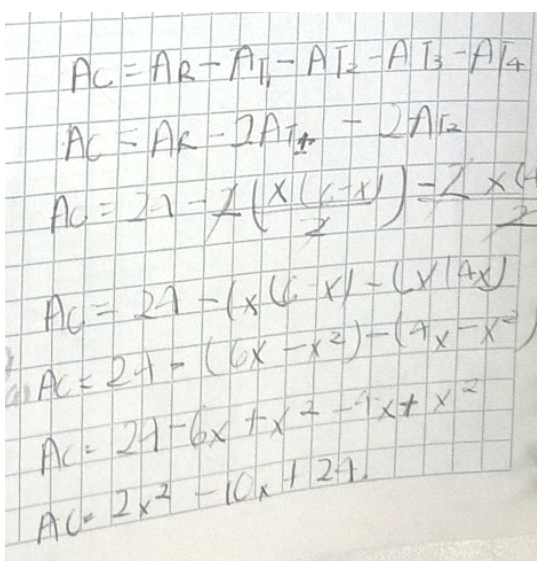


Figura 4. Ejemplo de la determinación de la expresión algebraica del problema elaborada por un estudiante

ISSN: 2594-1046

Luego se pidió que redujeran la expresión algebraica para que pudieran determinar el vértice de la gráfica (Figura 5).

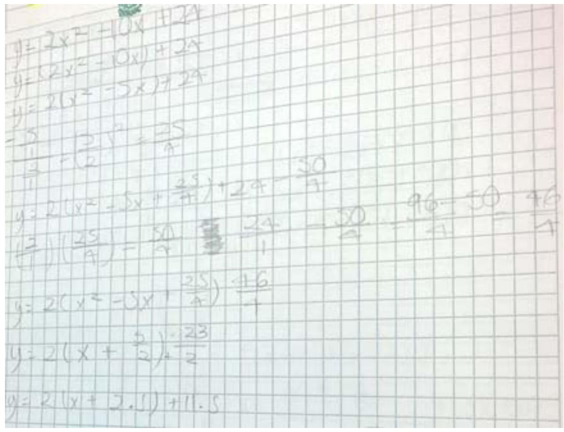


Figura 5. Ejemplo del proceso de reducción de la función hecha por un estudiante

Finalmente, se pidió al alumno que observara el valor del vértice obtenido al reducir la expresión algebraica y que lo comparara con los valores obtenidos en la tabla y con la gráfica. Con esto se concluyó que el valor mínimo del área del cuadrilátero es el valor del vértice de la parábola que representa al problema y del valor más pequeño que obtienen en la tabla de valores.

5. CONCLUSIONES

Resolver el problema permitió que usaran tres representaciones: tabular, gráfica, expresiones algebraicas. La idea de que los alumnos hagan uso de sus conocimientos previos, y que a partir de ellos comiencen a explorar lo que se puede o no usar, resulta atractivo ya que ellos se sienten involucrados con el problema.

Cuando los alumnos se dan cuenta que al momento de graficar los valores obtenidos resulta una parábola, entienden la importancia y la utilidad de la función cuadrática y que el mínimo de la función es el vértice de la parábola. Es entonces cuando la clásica pregunta ¿Para qué me sirve esto? Parece ser resuelta.

ISSN: 2594-1046

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*. Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática. La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9(1), 143-168.

Polya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical model*. Oxford: Princenton University, Press.

Schoenfeld, A. H. (1987). *Cognitive science and mathematics education*. NY: Psychology Press.

Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

MODELACIÓN EN EL AULA: INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE RECTA

Mariana Lujambio Chávez
Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Querétaro, mariana_lujambio@hotmail.com,

Víctor Larios Osorio
Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Querétaro, vilaos@hotmail.com,

Ángel Homero Flores Samaniego
Colegio de Ciencias y Humanidades-Plantel Sur, UNAM, ahfs@unam.mx

Resumen

La modelación es un método de enseñanza cada vez más común dentro de las escuelas, permite que los alumnos relacionen la matemática con otras áreas del conocimiento, se interesen más en la disciplina, así como en la comprensión de los conocimientos que se abordan en la clase de matemática dentro de un contexto. El siguiente artículo corresponde a una experiencia didáctica de modelación para abordar el tema de línea recta en la materia de geometría analítica de preparatoria. Se analizan las principales dificultades que tuvieron los alumnos al resolver un problema de modelación, así como la reflexión del profesor sobre las ventajas y las desventajas de llevar este tipo de problemas al aula.

Palabras clave: modelación, enseñanza, geometría analítica.

1. INTRODUCCIÓN

Las aulas de bachillerato de nuestro país están llenas de alumnos que no tienen una buena relación con las matemáticas. Esto probablemente es consecuencia de la forma en que han sido enseñadas, ya que los alumnos tienen que resolver problemas abstractos con poco sentido para ellos. Una manera de revertir un poco esto es abordar problemas de aplicación a través de la modelación matemática.

En particular, los conocimientos de geometría analítica ayudan a resolver problemas aplicados que los estudiantes de bachillerato son capaces de comprender, aumentando la probabilidad de despertar el interés por la matemática.

El abordaje del tema de línea recta causa en los alumnos conflictos, principalmente conceptuales, que incluyen la relación del lugar geométrico con la pendiente. Sin embargo, muchos fenómenos de la realidad se pueden representar linealmente; entonces, por medio de la modelación matemática se puede introducir al estudiante al tema, de forma que sea relevante para su aprendizaje y útil en otras materias escolares.

La situación social demanda personas mejor preparadas, que entiendan su entorno y puedan aplicar conocimientos para resolver problemas reales. Recientemente, se ha hablado de la necesidad de crear en los estudiantes competencias modeladoras como una competencia matemática básica de cualquier ciudadano (Bosch, García, Gascón y Ruiz, 2006). Con este tipo de actividades se pretende que los alumnos desarrollen competencias útiles para su actividad humana.

Dentro de esta problemática se ha desarrollado una actividad guiada para los alumnos de cuarto semestre del bachillerato perteneciente a la Universidad Autónoma de Querétaro, con la finalidad de despertar en ellos un interés por la materia, además de introducirlos al tema de la línea recta.

En este trabajo se muestran los resultados de una encuesta que se aplicó posterior a la actividad diseñada para analizar la opinión de los alumnos cuando se enfrentan a problemas de modelación, así como las dificultades que surgieron durante la actividad.

Para el desarrollo de la actividad, los alumnos ponen en acción los conocimientos adquiridos en unidades anteriores. Los materiales necesarios para la solución de un problema de matemáticas son ciertos detalles particulares de conocimientos previamente adquiridos (Polya, 2014).

2. FUNDAMENTACIÓN

La modelación matemática se puede utilizar para agregar un contexto familiar para los alumnos, donde encuentre a partir de los datos y sus conocimientos previos, un modelo a probar, entender y utilizar para resolver un problema; al respecto vale la pena resaltar la opinión de algunos autores:

> Son notables las dificultades de los alumnos para relacionar la matemática enseñada en la escuela con su vida cotidiana, la enseñanza tradicional de la matemática se da trasmitiendo contenidos sin embargo la tendencia va hacia una enseñanza de la matemática que pase a ser construida por los alumnos y el profesor. (Ferreira y Burak, 2005).
>
> Se ha evidenciado que existe una problemática consistente en el relacionar las matemáticas escolares con la resolución de problemas de la vida cotidiana… Se recurre a la puesta en práctica de la modelación matemática con el afán de entender ese puente entre la matemática escolar y la vida cotidiana. (Quiroz y Rodríguez, 2013).

ISSN: 2594-1046

Se entiende por modelación matemática el proceso involucrado en la obtención de un modelo matemático (Biembengut y Hein, 2004). El modelo matemático comúnmente es una función u otro tipo de objeto matemático que representa un fenómeno o situación problema que puede venir de la vida cotidiana u otro campo del conocimiento (Flores y Gómez, 2009).

La modelación matemática, como metodología de enseñanza, parte de un tema y sobre él se desarrollan cuestiones o preguntas que quiere comprender o resolver (Biembengut y Hein, 2004). Este tipo de tareas promueve la matematización de situaciones reales, al tiempo que lleva a los estudiantes a interpretar, reflexionar y validar los resultados matemáticos en la realidad (Gallart, Ferrando y García, 2015).

Los problemas de modelación se pueden caracterizar en dos tipos: *piensa y actúa*, y *ajuste de curvas* (Flores y Gómez, 2012). En los primeros se puede proponer un modelo a partir del enunciado del problema o del estudio del fenómeno en cuestión; mientras que en el segundo se busca la ecuación de una curva (que puede ser función o no) que mejor se adapte a una serie de puntos graficados a partir de mediciones reales de un fenómeno.

La actividad que se presenta más adelante es del segundo tipo.

3. METODOLOGÍA Y DESARROLLO

La actividad llamada *la caída de los cuerpos y una breve historia de su conocimiento*, fue realizada en la materia de geometría analítica de bachillerato perteneciente a la Universidad Autónoma de Querétaro. La actividad se realizó con un grupo de 63 alumnos, de los cuales 10 estaban re-cursando la materia y 53 pertenecían al cuarto semestre.

La actividad fue realizada en el mes de marzo de 2016, en la tercera unidad del plan de estudios como introducción al tema de la línea recta. Se colocó a los alumnos en parejas para facilitar la reflexión y guiados por el docente para resolver dudas; cada alumno eligió con quién quería trabajar.

Los alumnos ya tenían antecedentes del tema pues conocían la definición de lugar geométrico, punto, segmento, pendiente, entre otros conceptos previos a la definición de línea recta.

ISSN: 2594-1046

Por cuestiones de tiempo, el docente pidió ideas a los alumnos sobre el planteamiento y la solución para permitir que el problema fluyera para todos y nadie se quedara rezagado, sin embargo, al final se indagó sobre el número de alumnos que encontraron la respuesta por sí solos (ver Tabla 1).

El problema se basó en la relación tiempo con velocidad dada en el movimiento uniformemente acelerado, particularmente caída libre. El planteamiento de problemas está íntimamente relacionado con el *estudio del tema* (Bassanezi y Biembengut, 1997), para esto primero se hizo una lectura introductoria sobre la caída de los cuerpos con antecedentes históricos y los descubrimientos físicos característicos de este movimiento. Se informó a los alumnos que los cuerpos caen con una aceleración constante, es decir, con una velocidad creciente constantemente respecto al tiempo; se explicó a los alumnos la relación que existe entre las dos variables, para esto nos apoyamos en el empirismo.

Posteriormente se planteó la problemática: se pide a los alumnos imaginen que suben a la Torre Latinoamericana de la Ciudad de México para lanzar hacia abajo un objeto, se hace una pausa para indagar si los alumnos conocen el lugar con la finalidad de hacer el planteamiento más real; el problema da como datos la altura total de la torre; la instrucción de que el objeto es lanzado hacia abajo que permita obtener un modelo donde aparezca una velocidad inicial, ordenada en el origen, y dos valores de la velocidad a un tiempo determinado.

Se pidió a los alumnos obtuvieran un modelo matemático (ecuación) de la relación tiempo con velocidad, graficaran su modelo en un plano cartesiano, obtuvieran datos sobre la velocidad del objeto a un tiempo determinado, reflexionaran sobre los posibles valores *reales* que puede tomar el modelo, así como sobre las cotas de tiempo y velocidad que limitan al modelo matemático. Además, tenemos que considerar lo que mencionan Bassanezi y Biembengut (1997, p. 17):

> Toda solución debe ser interpretada usando los datos recogidos; si es posible, verificar su validez empírica en términos científicos. Es conveniente buscar una expresión gráfica de la solución para entenderla mejor. Un modelo será tanto mejor cuanto mayor sea su capacidad de previsión y de accesibilidad a una verificación.

Al final se revisaron en conjunto las soluciones y, por tener datos iguales para todos, se pidió que, si alguien no había llegado al mismo resultado, revisara qué parte de su solución no era correcta. Continuando con la actividad, se realizó una encuesta para indagar sobre las dificultades que tuvieron los alumnos, así como su opinión y aceptación al resolver este tipo de problemas en clase.

ISSN: 2594-1046

Cabe destacar que los alumnos ya han visto en clase de física problemas de movimiento uniformemente acelerado, de ahí se presenta un obstáculo para hacer entender que el modelo debe ser encontrado con apoyo de los temas que se están viendo en matemáticas, reflexionando la relación de variables que se presenta. Sin embargo, se hace uso del conocimiento de física para hacer un comparativo con el modelo obtenido y la fórmula que los estudiantes ya conocían sobre esta relación, y así reforzar las características del fenómeno a modelar: velocidad inicial y una aceleración constante que corresponde a la pendiente de la recta en términos de geometría analítica.

Para resolver la última parte, en la que se pide acotar el modelo a datos reales encontrando el tiempo final y la velocidad final, necesariamente se requiere el apoyo de la relación altura-tiempo, pues las condiciones finales dependen de la altura del edificio. Encontrar el modelo de esta relación se sale de lo que se requiere estudiar en la materia de geometría analítica, por lo que aquí se permite que los alumnos usen la fórmula que conocen de física; la dificultad se presenta al tener que resolver una ecuación de segundo grado, puesto que algunos alumnos, a pesar de haber terminado sus cursos de álgebra, no recordaban los métodos de solución de estas ecuaciones.

La actividad finaliza con una encuesta con la intención de analizar las dificultades de los alumnos al resolver el problema. La encuesta se aplica de forma escrita e individualmente, consiste en nueve preguntas cerradas, es decir, los alumnos sólo pueden contestar: sí, medianamente y no. También se hicieron cinco preguntas abiertas para conocer la opinión de los alumnos al realizar la actividad. Los resultados de la encuesta aplicada se muestran a continuación.

4. RESULTADOS

A continuación, se muestran los resultados de la encuesta que fue aplicada a los alumnos después de realizar la actividad.

Una de las partes necesarias para resolver un problema es comprender su enunciado; involucra saber cuál es la incógnita, cuáles son los datos, qué condiciones se tienen y si la condición es suficiente para determinar la incógnita (Polya, 2014). En la actividad, la mayoría de los alumnos lograron identificar los datos del problema, esto se atribuye a que fueron enlistados y separados del texto, permitiendo a los alumnos una buena interpretación, sin mayores dificultades. Sobre la incógnita, la mayoría de los estudiantes tuvieron dificultades para identificarla, sobre todo por tratarse de un

ISSN: 2594-1046

problema de modelación, no existe una incógnita como tal sino un planteamiento de un modelo matemático en el que deben relacionar dos variables. La dificultad se dio en identificar las variables involucradas, a pesar de que el texto desde un inicio las marcaba, además de que los datos tenían unidades (ver Tabla 1).

Una de las partes necesarias para resolver un problema es comprender su enunciado; involucra saber cuál es la incógnita, cuáles son los datos, qué condiciones se tienen y si la condición es suficiente para determinar la incógnita (Polya, 2014). En la actividad, la mayoría de los alumnos lograron identificar los datos del problema, esto se atribuye a que fueron enlistados y separados del texto, permitiendo a los alumnos una buena interpretación, sin mayores dificultades. Sobre la incógnita, la mayoría de los estudiantes tuvieron dificultades para identificarla, sobre todo por tratarse de un problema de modelación, no existe una incógnita como tal sino un planteamiento de un modelo matemático en el que deben relacionar dos variables. La dificultad se dio en identificar las variables involucradas, a pesar de que el texto desde un inicio las marcaba, además de que los datos tenían unidades (ver Tabla 1).

Observaciones	Sí	Medianamente	No
Se entendió la lectura introductoria.	77%	23%	0%
Se logró identificar cuáles eran los datos que te daba el problema.	71%	26%	3%
Se logró identificar cuáles eran las incógnitas (variables no conocidas) que te pedía el problema.	40%	43%	17%
Se entendió por qué elegimos un modelo de línea recta.	74%	14%	11%
Se dedujo las fórmulas necesarias para resolver el problema antes de que la maestra señalara las correctas.	23%	54%	26%
Se logró despejar de forma correcta para llegar al modelo solicitado.	20%	54%	26%
Obtenido el modelo, se logró sustituir correctamente cualquier valor del tiempo y encontrar una velocidad.	69%	11%	20%
Se entendió por qué el modelo sólo era válido para algunos valores de tiempo y velocidad. Obtuviste los límites.	51%	23%	26%
El problema despertó atención e interés.	46%	46%	9%

Tabla 1: Respuestas a encuesta realizada a los alumnos después de la actividad.

Los alumnos entendieron con ayuda de la lectura por qué el modelo obtenido corresponde a una ecuación lineal, por tanto, se podía modelar de esta forma. Sin embargo, no fue claro para la mayoría que con los datos proporcionados en el problema (dos puntos del lugar geométrico) podían obtener la pendiente con la fórmula conocida, para posteriormente usarla y encontrar la ecuación para las condiciones de tiempo y velocidad adecuados (modelo solicitado).

Por otra parte, entendemos que muchas de las dificultades de acceso a la geometría analítica, son las deficiencias en álgebra elemental; en general a los alumnos se les dificulta despejar y encontrar de forma simplificada la ecuación.

Según Gallart, Ferrando y García (2015) es necesario interpretar la solución matemática obtenida en la situación real, haciendo el camino inverso desde el mundo de la matemática al mundo real. Una interpretación interesante en la actividad es la de los límites o acotamientos permitidos del modelo matemático en el mundo real, ya que permite a los alumnos razonar los valores posibles para el uso de su modelo. La mayoría de los alumnos lograron entender por qué su modelo tenía que estar acotado; sin embargo, tuvieron dificultades al encontrar el valor final del tiempo, atribuidas nuevamente a las deficiencias en el álgebra elemental y la solución de ecuaciones de segundo grado.

Finalmente, se pidió más información a los alumnos sobre su experiencia al resolver un problema de modelación. Se les preguntó: ¿cómo te sentiste durante la actividad?, ¿qué fue lo que más se te dificultó en el proceso?, ¿por qué crees que esa parte se te dificultó?, ¿consideras útil resolverlo en parejas?

La mayoría de los alumnos contestaron que se sintieron estresados y confundidos, principalmente porque el ejercicio fue en parejas, lo que causó discusiones y ruido que impidieron concentrarse. Algunos alumnos comentan que lo que más se dificultó para ellos fue el planteamiento del problema. Otros pocos dejaron de intentar y sólo esperaron a que alguien más tuviera la respuesta para copiarla, pues se sintieron poco interesados.

Una parte del grupo se sintió motivado a resolver el problema porque sintieron útil lo que habían aprendido de matemática.

Aunque la mayor parte del grupo trabajó bien en la actividad, como docente fue difícil lograr que los alumnos tuvieran ideas propias que los llevaran a la solución del problema, desde la interpretación de la lectura, los datos, el tema y la fórmula matemática necesaria para resolverlo.

5. CONCLUSIONES

Según algunos investigadores (Biembengut y Hein, 2004; Ferreira y Burak, 2005), encontrar un modelo matemático requiere de conocimientos previos de parte del profesor y de los alumnos; además estos conocimientos pueden ser matemáticos como no matemáticos, también mucha creatividad y habilidad para interpretar problemas. Así pues, por ser un problema de física una parte del grupo intentó resolverlo con fórmulas conocidas de la caída libre, a pesar de que no tenían los datos requeridos para resolver el problema por ese medio. Esto nos lleva a concluir que los alumnos están más acostumbrados a querer sustituir en fórmulas dadas por el profesor que pensar en una manera de obtener la fórmula (modelo matemático) que el profesor le está pidiendo.

Al realizar la actividad de la caída libre, la dificultad para el docente fue redactar el problema de tal forma que la cantidad de información fuera suficiente para que los alumnos pudieran razonarlo y no demasiada para distraerlos del objetivo. Para que el docente ponga en práctica el trabajo de modelación debe dedicar más tiempo a la planeación de su clase, así como estar involucrado con otros temas científicos y sociales. Esto llega a desmotivar a algunos docentes que pueden carecer de tiempo al atender varios grupos; sin embargo, es un trabajo que se va haciendo más sencillo con la experiencia de llevarlo al aula cada año.

No todos los alumnos pudieron plantear el problema por sí solos pues al ser un problema que estudian más en sus clases de física, se les dificultó encontrar la relación que tenía la geometría analítica, sin poder entender que se les estaban dando dos puntos de un plano cartesiano para obtener una ecuación lineal. Esto nos lleva a reflexionar sobre las competencias que pierde un alumno si nunca se le exige razonar y sólo se le enseña a utilizar fórmulas y algoritmos que muchas veces no entienden.

Un reto para el profesor de matemática es mantener el interés de sus alumnos, que evita distracciones y, a la larga, malos resultados. Se rescata de la actividad que más del 90% de los estudiantes se sintieron interesados al resolver el problema, lo que permite se involucren en la clase,

ISSN: 2594-1046

discutan con sus compañeros, reflexionen lo qué están haciendo y se comprometan con lo que deben aprender.

Por consiguiente, consideramos que el uso de la modelación conlleva un mayor esfuerzo por parte del docente y del estudiante. Sin embargo, realizar estos problemas enriquece la clase de matemáticas, pues el estudiante da significado a los objetos matemáticos que se necesitan aprender.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bassanezi, R. C., y Biembengut, M. S. (1997). Modelización matemática: Una antigua forma de investigación- un nuevo método de enseñanza. *Números, Revista de didáctica de las matemáticas*, *32*, 13- 25.

Biembengut, M., y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*, *16*(2), 106-125.

Bosch, M., García, F. J., Gascón, J., y Ruiz, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática, 18*(2), 37-74.

Ferreira, S. A. V., y Burak, D. A. (2005). Modelagem matemática: uma alternativa de ensino aprendizagem da matemática. *IV Conferência Nacional sobre Modelagem e Educação Matemática - IV CNMEM.*

Flores, A. H., y Gómez, R. A. (2009). Aprender Matemática, Haciendo Matemática: la evaluación en el aula. *Educación Matemática*, *21*(2), 117-142.

Flores, A. H., y Gómez, R. A. (2012). La modelación matemática y la enseñanza de las cónicas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26,* Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, 1117-1182.

Gallart, P. C., Ferrando, I., y García, R. L. M. (2015). Análisis competencial de una tarea de modelización abierta. *Números; Revista de didáctica de las matemáticas, 88*, 93-103.

Polya, G. (2014). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Editorial Trillas.

Quiroz, S., y Rodríguez, R. (2013). Análisis de concepciones sobre modelación matemática en docentes de formación de educación básica. *Formación de profesionales en Matemática Educativa; Memoria de la XVI Escuela de Invierno en Matemática Educativa,* 2-9.

Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

Aprendiendo Entre Colectivos: Experiencias Para la Resignificación Del Quehacer y Desarrollo Docente en Matemáticas de Educación Primaria

Karla Gómez Osalde
Universidad Autónoma de Yucatán , karla.gomez@correo.uady.mx

Eddie Aparicio Landa
Universidad Autónoma de Yucatán , alanda@correo.uady.mx

Leslie Torres Burgos
Universidad Autónoma de Yucatán , leslie.torres@correo.uady.mx

Resumen

Se presenta una experiencia de trabajo entre un colectivo de educadoras y uno de investigadores en Matemática Educativa a partir del cual se desarrolla un programa académico orientado al desarrollo profesional de la docencia en matemáticas de educación básica. La premisa principal se fundamenta en el diálogo entre estos colectivos como un escenario en donde emergen elementos que permiten entendimientos del funcionamiento del sistema escolar y que permite una resignificación continua de las prácticas propias del quehacer docente. Esto significa que, independientemente de la formación inicial, conocimientos o concepciones con los que cuenten los docentes, es posible involucrarlos en procesos de reconceptualización de saberes y reorganización de la práctica educativa a partir de todo un programa colectivo que permita cuestionarse lo que se sabe, cómo se sabe y por qué se difunde eso que se sabe en la escuela.

Palabras clave: Profesionalización docente, educación primaria, colectividad.

1. INTRODUCCIÓN

Recientes investigaciones en el campo de la Matemática Educativa dirigen su mirada hacia el estudio y generación de epistemologías alternativas que permitan posicionar socialmente a la docencia en matemáticas en un ámbito profesional donde un tema central concierne a los estudios sistémicos del desarrollo profesional docente en los cuales se busca la incorporación no sólo aspectos cognitivos y didácticos, sino también del papel de las comunidades y lo contextual, tanto del aprendiz como del docente (Dolores, García, Hernández y Sosa, 2014).

Con esta perspectiva, se asume que la profesionalización docente en matemáticas debe desarrollarse a partir de un proceso continuo que le permita otorgar a la práctica del profesor de matemáticas los referentes teóricos-metodológicos propios de un campo disciplinar, que integre lo matemático en su actividad docente con la articulación de la especificidad didáctica y sociocultural que le son inherentes a los saberes matemáticos (Sosa, Aparicio, Jarero y Tuyub, 2014).

En el entendimiento de las consideraciones señaladas, se presenta una experiencia de trabajo colectivo entre un grupo de educadoras y uno de investigadores en Matemática Educativa a partir del cual se desarrolla un programa académico orientado al desarrollo profesional de la docencia en matemáticas de educación básica. La premisa principal se fundamenta en el diálogo entre colectivos como un mecanismo para consensar conocimientos, perspectivas y necesidades propios de la docencia matemática a partir de la articulación entre consideraciones tanto teóricas como prácticas, todo ello en la búsqueda de la mejorar en el rendimiento educativo en matemáticas. En otras palabras, es a partir del diálogo entre estas comunidades en donde emergen elementos que permiten entendimientos del funcionamiento del sistema escolar.

2. FUNDAMENTACIÓN

¿Cómo teorizar sobre la realidad educativa? Este trabajo se inscribe en el estudio del quehacer docente y la contribución del desarrollo profesional de la docencia en matemáticas con punto de partida en el entendimiento de los escenarios y condiciones educativas reales en los que se enmarcan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Con base en dicho entendimiento, se considera que previo a la conformación o generación de modelos de intervención en el campo de la docencia en matemáticas es necesario generar mecanismos para inferir las necesidades y condiciones en las que se desarrollan las realidades educativas, respetando cabalmente la naturaleza de la información que se presenta.

Para lo anterior, se comparten los principios planteados en la teoría socioepistemológica que considera los aspectos situacionales en la construcción y difusión social del conocimiento matemático (Cantoral, 2013). De esta manera, el interés estará en constituir caracterizaciones sobre las relaciones entre los principales actores educativos, profesor-alumno-saber, desde los propios entendimientos y experiencias de la comunidad docente en cuestión.

En este sentido, tiene cabida una propuesta de intervención y de desarrollo profesional docente que se configure a partir de la interacción y diálogo entre el colectivo de docentes y el de investigadores donde se compartan y socialicen los conocimientos propios de cada uno con la finalidad de lograr entendimientos genuinos. De alguna manera, lo que se genere en estos espacios de interacción influirá en el funcionamiento del sistema escolar, en el caso de este estudio a nivel de una escuela particular.

El diálogo entre estos colectivos permite resignificar las prácticas propias del quehacer docente en el sentido del desarrollo profesional continuo de la docencia en matemáticas. Esto significa que, independientemente de la formación inicial y de las prácticas, conocimientos o concepciones con los que cuenten los docentes, es posible involucrarlos en procesos de reconceptualización de saberes y reorganización de la práctica educativa a partir de todo un programa colectivo que permita cuestionarse lo que se sabe, cómo se sabe y por qué se difunde eso que se sabe en la escuela (Aparicio, Sosa y Tuyub, 2015). Es así que se generan oportunidades de debate y reflexión para que los docentes conozcan y se familiaricen con diversos paradigmas educativos, metodologías de acción, reformas educativas, entre muchos otros aspectos esenciales en el campo de la docencia en matemáticas.

3. MÉTODO

Se conformaron sesiones de trabajo y colaboración académica entre la comunidad de investigadores y expertos del Cimate-Yucatán y la comunidad docente de una escuela primaria del Estado de Yucatán, conformada por seis educadoras, una por cada grado educativo, y la directora de este plantel. Dichas sesiones conformaron espacios de diálogo entre estas comunidades que permitieron entendimientos sobre el funcionamiento y las limitaciones del sistema educativo propio de dicha escuela y nivel educativo.

A partir de lo anterior, se llevó a cabo un estudio de corte descriptivo basado en la observación participante por parte de la comunidad de investigadores con la finalidad de ganar entendimientos mutuos sobre la realidad educativa de esta escuela desde la perspectiva de su planta docente, así como las posibles causas y áreas de oportunidad.

Desde la perspectiva del investigador, se planteron las siguientes variables de estudio para diagnosticar sobre el entendimiento que tiene este grupo educadoras sobre:

- *La matemática:* Interesa la forma de entender la matemática y sus posicionamientos relativos a los saberes matemáticos analizados.

- *La didáctica de la matemática:* La forma en que conciben y deciden qué enseñar, cómo enseñar y por qué enseñar un saber matemático a lo largo de la educación primaria.
- *El desarrollo del pensamiento matemático:* Interesa entender cómo perciben los procesos y/o actividades que favorecen el pensar matemáticamente y si se percibe la diferencia entre éste y el favorecimiento de la aprehensión de conceptos matemáticos.
- *El desarrollo del pensamiento didáctico:* La forma de concebir la relación entre enseñanza y aprendizaje en matemáticas.
- *La práctica docente:* Aquello que consideran de la docencia en matemáticas, su quehacer, organización, preparación, etc.

Para tal fin, se emplearon tres técnicas de estudio:

Técnica 1. Discusión reflexiva entre la comunidad de educadoras y la comunidad investigativa con la intencionalidad de reconocer las manifestaciones de las variables de estudio.

Técnica 2. Registro de notas de campo por parte de una persona externa a ambas comunidades.

Técnica 3. Observación en el escenario real de aula en el cual se desenvuelven la comunidad de educadoras.

4. RESULTADOS

En los cuatro meses de diálogo colectivo entre el grupo de educadoras e investigadores se distinguen ciertas caracterizaciones sobre cómo se entienden o perciben las variables de estudio respecto a los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en educación primaria, mismas que se describen a continuación.

La perspectiva de la matemática recae principalmente en una concepción de ciencia exacta, estática, fija, con existencia propia e independiente de la sociedad o de la gente, incluso de los mismos docentes. Se percibe poca claridad en cuanto a la matemática como estructura y, en cambio, un mayor énfasis en los métodos procedimentales los cuales, según las educadoras, muchas veces involucran conceptos con elevado nivel de dificultad cognitiva para los estudiantes de primaria. Además, se percibe dificultad para distinguir el concepto matemático y su representación.

La perspectiva de la didáctica de las matemáticas se centra en una concepción del aprendizaje como la relación sujeto cognoscente-objeto de saber, el énfasis está en los procedimientos, definiciones y fórmulas, por lo que destacan los argumentos cuantitativos más que los de corte cualitativo. La didáctica se percibe como las actividades lúdicas o ejemplificativas, diseñadas al logro de objetivos específicos, por lo que la mayoría de las veces se recurre a introducir los contenidos por medio de preguntas o situaciones ejemplificativas para dar sentido al tema que se abordará en clase. Sin embargo, reconocen que no siempre se logra esta finalidad y que muchas veces, a pesar de dicho esfuerzo, los alumnos no logran comprender el tema planteado.

Se percibe la necesidad de seleccionar ejemplos adecuados para promover el razonamiento en los estudiantes a partir de situaciones en contextos reales, sin embargo, no hay claridad sobre los criterios para elegirlos o la manera en que puedan adecuarse a su aula, con todo lo que ello implica.

Por otra parte, puede percibirse que las educadoras no son conscientes de que el tratamiento didáctico que se da a los objetos matemáticos influye en la construcción de estos, puesto que para la comunicación de distintos saberes emplean los mismos discursos y métodos.

En cuanto a la perspectiva del desarrollo del pensamiento matemático, surgen cuestionamientos sobre las maneras para favorecerlo. Se identifican prácticas de comparación, observación, contabilización, pero se conciben como finalidad última el empleo de las fórmulas y procedimientos matemáticos de manera adecuada. Se reconoce la necesidad de provocar reflexión en los estudiantes y de retomar ideas intuitivas para vincular la matemática con su vida diaria.

El desarrollo del pensamiento didáctico se asocia a las maneras y habilidades docentes para desarrollar estrategias de aprendizaje, organizar y diseñar situaciones de aprendizaje relacionados con la vida cotidiana de los niños y encaminadas a propiciar el pensamiento lógico-matemático que permita generar en los estudiantes reflexiones acerca del uso de las matemáticas en su vida diaria. Un docente que ha desarrollado el pensamiento didáctico es dinámico, analítico, práctico, emplea diversos recursos y materiales para lograr aprendizajes en todos o la mayoría de sus estudiantes y cuenta con la capacidad de manejar aspectos teóricos, didácticos y pedagógicos necesarios para planear, diseñar y evaluar el proceso de enseñanza y aprendizaje.

La práctica docente se concibe principalmente como un quehacer de corte reiterativo que involucra planeación, organización, selección de recursos, ejemplos, ejercicios y evaluación. Todo ello

ISSN: 2594-1046

con la finalidad de que los estudiantes sean quienes conjeturen y reflexionen acerca de su interacción con el entorno para favorecer su aprendizaje.

5. REFLEXIÓN

Se considera que el entendimiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática se ven favorecidos con los espacios de diálogo e interacción entre los especialistas conocedores de la realidad educativa (constitución del sistema escolar) y los especialistas en la investigación de dichos procesos. Cada colectividad cuenta con sus propios conocimientos, prácticas, cultura y metodologías de acción que se logran resignificar y validar en el consenso y socialización de los mismos. De esta manera, el aprendizaje y la reorganización del quehacer característico de la docencia en matemáticas se retroalimenta entre ambas partes y se logran entendimientos y reconocimientos.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aparicio, E., Sosa, L., y Tuyub, I. (2015). Profesionalizando la docencia matemática en secundaria. En F. Rodríguez y R. Rodríguez (Eds.). *Memoria de la XVII Escuela de Invierno en Matemática Educativa. La Profesionalización Docente desde los Posgrados de Calidad en Matemática Educativa,* (pp. 356 - 361). Oaxaca: CIMATES.

Cantoral, R. (2013). Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento. Barcelona, España: Editorial Gedisa.

Dolores, C., García, M., Hernández, J., y Sosa, L. (2014, Eds.) *Matemática Educativa: la formación de profesores.* México: Díaz de Santos. ISBN: 978.84.9969.664.5.

Sosa, L., Aparicio, E., Jarero, M., y Tuyub, I. (2014). Matemática Educativa y Profesionalización Docente en Matemáticas. El caso de Yucatán. En Dolores, C., García, M., Hernández, J. y Sosa, L. (Eds). *Matemática Educativa: La formación de profesores* (pp. 31-47), México: Díaz de Santos. ISBN: 978.84.9969.664.5.

Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

PROPUESTA DE ACTIVIDADES PARA UN ACERCAMIENTO A LA DERIVADA DESDE LAS GRÁFICAS PARA ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

Eduardo Carlos Briceño Solís
Universidad Autónoma de Zacatecas, ecbs74@gmail.com

María Esther Magali Méndez Guevara
Universidad Autónoma de Guerrero, mguevara83@gmail.com

Julissa Rodríguez García
Universidad Autónoma de Guerrero, julissa.rg17@gmail.com

Resumen

Este trabajo muestra los avances de un estudio sobre el desarrollo del usos de las gráficas para construir nociones de función polinómica y su derivada por estudiantes de bachillerato. La propuestas es desarrollar un taller bajo la categoría graficación-modelación, sustentado en la teoría socioepistemológica, donde el desarrollo de usos de gráficas es parte importante de la misma. Compartimos una exploración con una estudiante de nivel medio superior, misma que nos permitió verificar si las actividades funcionan de acuerdo a nuestros objetivos o si necesitan ser rediseñadas. El objetivo es que el estudiante pueda graficar una función polinómica y su derivada sin tabular al identificar sus características por medio de la gráfica (los parámetros que influyen en su forma y posición en el plano).

Palabras clave: Modelación-Graficación, Variación, función polinómica.

1. INTRODUCCIÓN

Las investigaciones en torno a la derivada reportan que existen dificultades en los estudiantes respecto a este concepto en su trayectoria en la matemática escolar del bachillerato, por ejemplo, en su interpretación gráfica para su comprensión en la construcción de significados (Robles, Del Castillo y Font, 2012; Ortega y Pecharromán, 2010; Sánchez-Matamoros y Salvador-Llinares, 2008). Sin embargo, se ha contribuido a esta problemática desde diferentes miradas, por ejemplo, desde las representaciones ontosémioticas o el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional (Robles, Del Castillo y Font, 2012; Cantoral, Molina y Sánchez, 2005) por mencionar algunas contribuyendo en esta línea de investigación de contribuir a dicha problemática. Por otra parte, se encuentran investigaciones en matemática educativa que estas problemáticas se debe a la ausencia de generar en el estudiante argumentos variacionales para la comprensión del concepto de derivada (Dolores, 2000). Por otra parte, Briceño, Ramos y Zaldívar (2015) desarrollan una investigación donde ponen en juego la importancia de desarrollar estrategias variacionales con el uso de tecnología, donde el argumento de qué y cómo cambia un fenómeno físico, permite el desarrollo del pensamiento variacional. Coincidimos con estas investigaciones principalmente en que la problemática de la ausencia de argumentos variacionales es a cauda de la predominante de tratamiento de la derivada en la matemática escolar, mediante procedimientos algorítmicos para su cálculo o la definición matemática tradicionalmente analítica donde la gráfica no juega un rol importante, obstaculizando otros significados que pueden desarrollarse. Mencionamos a la gráfica ya que estos autores resaltan su importancia, sin embargo, la manera de cómo la desarrollan y analizan es distinta. Dolores (2000), Cen, Cordero y Suárez (2010), y Briceño, Ramos y Zaldívar (2015) consideran importante el uso de la gráfica como una práctica que se desarrolla en el seno de individuos para generar argumentos variacionales en situaciones específicas, pero y entender cómo se comporta la función sin conocerla primero. Ya que, como reportan Cen, Cordero y Suárez (2010), la postura del discurso matemático escolar es que la función es primero y la gráfica es utilizada para representarla sin jugar un papel importante en el aprendizaje. Mencionamos algunos ejemplos de esta importancia y cómo el estudiar a la gráfica mediante sus comportamientos permite entender qué función y cómo se comporta.

2. PRUEBA DIAGNÓSTICA DEL DISEÑO DE ACTIVIDADES

Se reporta una prueba diagnóstica que se realizó con estudiantes de primer semestre de la Universidad de Zacatecas, se presentan algunas ilustraciones de sus respuestas. La actividad consiste es que, dada una gráfica de un polinomio, se encuentre la gráfica de su derivada. El primer recurso consiste en buscar una función algebraica según le sea familiar la gráfica para luego derivarla y graficarla. Sin embargo, al no conocer las características del polinomio, se tienen interpretaciones erróneas, como, por ejemplo, en la Figura 1, un estudiante considera que se trata de una cuadrática cuya derivada es recta y siguen la misma forma que la gráfica polinómica. Otro estudiante considera tangentes en los máximos del polinomio y por lo tanto considera que eso representa la gráfica de la derivada (Figura 2). Otro de los errores es considerar un polinomio como de grado 3 lo que hace que el estudiante bosqueje la gráfica de su derivada como uno de grado 2.

Lo anterior valida la problemática sobre las gráficas de la derivada, el estudiante no encuentra una amplitud de significados ya que el único que conocen es lo algorítmico. Se puede observar que es

ISSN: 2594-1046

muy importante reconocer qué tipo de polinomio lo cual, el estudiante no domina. Consideramos que la suposición gráfica del estudiante de la Figura 2 por alguna memoria que tiene sobre que la derivada es la tangente en un punto, por lo cual realiza dicha gráfica. De tal forma que existe la problemática de generar argumentos sobre la derivada desde el contexto gráfico, por lo que este trabajo intenta analizar los argumentos que los estudiantes proponen considerando aspectos sobre que se requiere para comprender la derivada y cómo lo implementamos en contextos gráficos. En ese sentido, finalmente se toma una postura de la gráfica que resalta su uso para generar argumentos y que a continuación se describe.

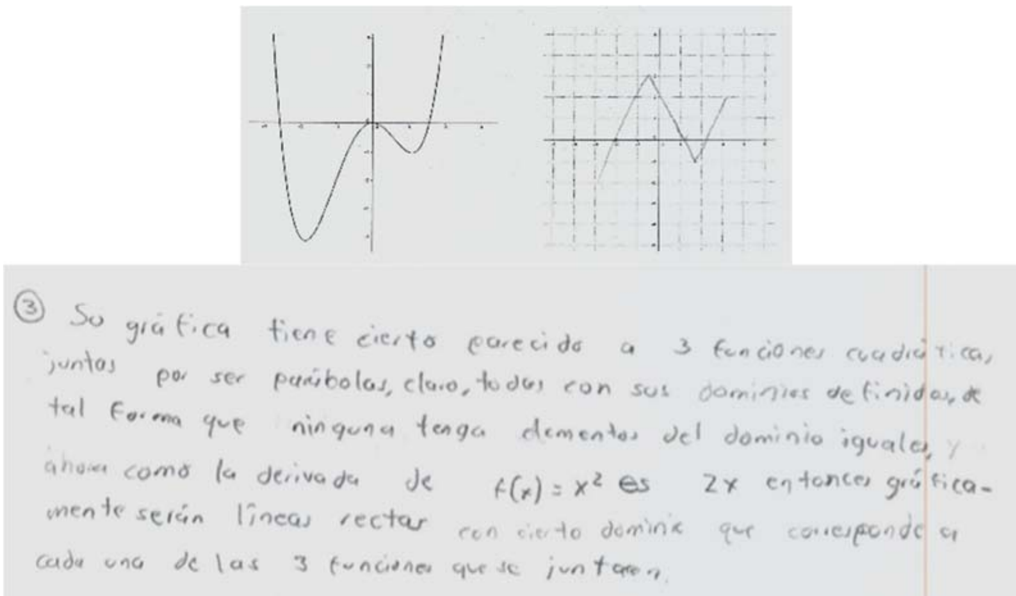


Figura 1. Considera la gráfica como cuadrática cuya deriva son segmentos de rectas

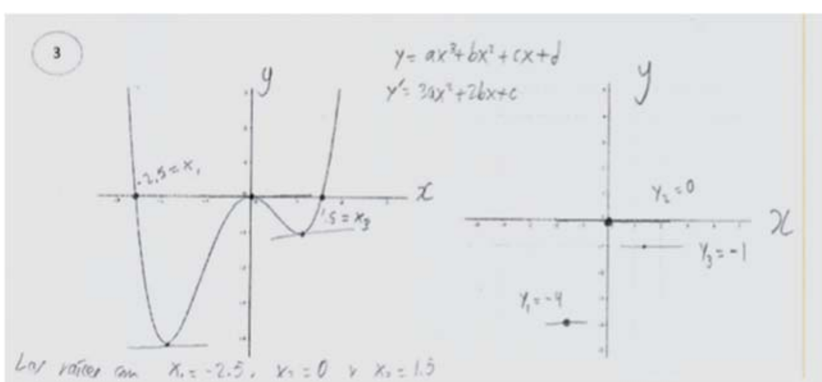


Figura 2. Interpretación errónea de la gráfica de la derivada

ISSN: 2594-1046

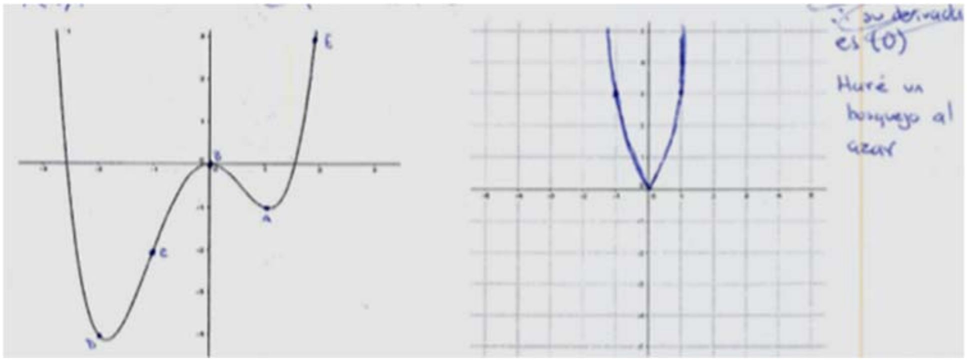


Figura 3. Tercer error reportado en la prueba diagnóstica

Por ejemplo, no se reconoce que la derivada adquiere un nuevo estatus y significados si se ancla a procedimientos donde la situación de predecir la posición de un móvil cuando se conoce su posición inicial y la variación en ese instante. Bajo esta situación, la función f no se conoce, sólo los estados de la cantidad *f(x) y f(x+h)* y las variaciones *f', f''*. Tal ejemplificación llevó a comparar dos estados que lo condujo a la analiticidad de la serie de Taylor $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2!} + \cdots,$ como un instrumento de predicción para conocer estados futuros. Por ejemplo: en la Figura 4, se tienen ciertos valores iniciales x_0, $f(x_0)$ y necesitamos conocer su estado futuro $f(x_0 + h)$. Según la gráfica siguiente $f(x_0 + h) = f(x_0) + B$, podemos observar que $B = (tanx)(h)$, si $\tan\alpha$ es la pendiente m y $m = f'(x_0)$, tenemos que $B = f'(x_0)h$. Así $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h$, que es parte de la secuencia de la serie de Taylor (Cantoral, 2000).

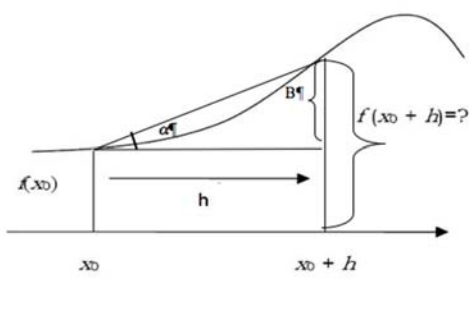


Figura 4. Análisis gráficos para predecir cómo se comporta la gráfica

De esta manera teniendo las condiciones iníciales y como varía, se puede predecir su etapa posterior en el análisis de sus comportamientos gráficos con cierta tendencia.

ISSN: 2594-1046

En Rosado (2004) encontramos cómo se construye el concepto de la linealidad del polinomio mediante el análisis de sumas en el contexto gráfico. Es decir, dada por ejemplo una cúbica y a ésta se le suma una recta, cuál será la gráfica resultante (ver Figura 5).

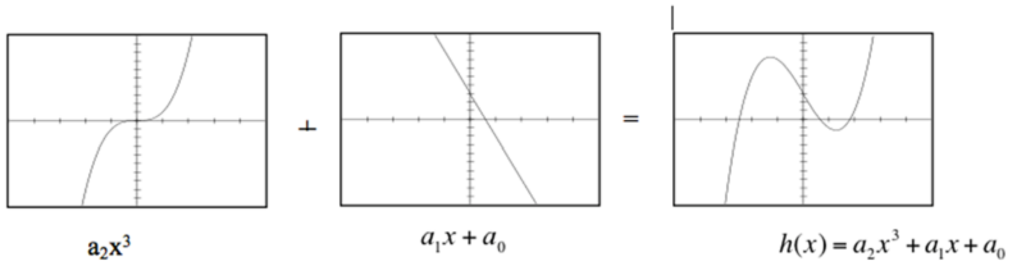


Figura 5. Actividad tomada de Rosado (2004)

Esto llevó a que se defina la linealidad del polinomio que dado cualquiera de grado ***n*** uno se fija en la parte lineal y la gráfica, y por donde corta al eje y por ahí no sólo pasa el polinomio sino también en la vecindad del cero se comporta como una recta. A eso se le debe el nombre de linealidad del polinomio (Figura 6).

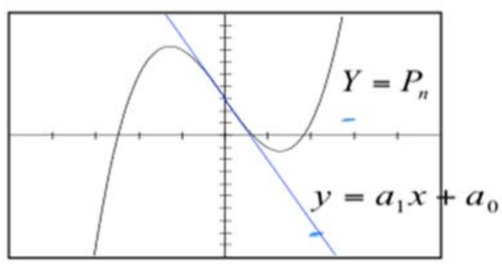


Figura 6. Gráfica de $P_n = a_2x^3 + a_1x + a_0$

Estos trabajos motivan los propósitos de esta investigación, al considerar a la gráfica como un constructo que permite el razonamiento y la argumentación en actividades donde se ponga en juego su uso. A continuación, describimos algunas investigaciones bajo este constructo mencionado.

3. REFERENTE TEÓRICO: EL USO DE LAS GRÁFICAS

El estudio del uso de la gráfica ha llevado a consolidar marcos de referencia donde la gráfica es un medio de análisis para dar evidencia de la funcionalidad del conocimiento matemático (Cordero, 2008). Esta visión no concibe a la gráfica transparente y sin efecto sobre el conocimiento matemático, por el contrario, la concibe como un medio para generar dicho conocimiento.

ISSN: 2594-1046

El uso de las gráficas sucede y se resignifica en situaciones específicas. La resignificación misma es la expresión del conocimiento funcional (Buendía, 2010). En otras palabras, la situación específica expresa de alguna manera un uso del conocimiento matemático, el cual genera argumentaciones referente objeto matemático que se esté trabajando. En este sentido, el uso de la gráfica es una herramienta que se desarrolla y norma ciertas construcciones de conocimiento, donde la argumentación es producto de una resignificación del uso.

La formulación anterior ha alcanzado una dimensión amplia en investigaciones bajo la Teoría Socioepistemológica por ejemplo, se ha caracterizado el uso de las gráficas en el discurso matemático escolar, en los libros de texto (Cen, Cordero y Suárez, 2010; Cordero y Flores, 2007); pero también se han diseñado situaciones específicas para resignificar el uso de las gráfica en ámbitos escolares (Zaldívar, Cen, Briceño, Méndez y Cordero, 2014; Briceño y Cordero, 2012). En síntesis, estas investigaciones han construido ciertas categorías del conocimiento matemático que permiten explicar otra naturaleza de ver la construcción del conocimiento matemático, en este taller nos referimos a la categoría del comportamiento tendencial de las funciones.

Nos interesa potencializar los argumentos gráficos, ya que este ámbito es poco explotado en la matemática escolar, aunque las gráficas se utilizan desde el nivel básico hasta el superior, aportando información sobre el tipo de gráficas que se encuentra actualmente en la educación básica y en el bachillerato. Esto ha proporcionado evidencias de que el uso de las gráficas tiene un desarrollo que sustenta una construcción de conocimiento matemático. Estos trabajos tienen una orientación hacia la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en un ambiente tecnológico. En estos estudios de uso de las gráficas existe una intención de caracterizar a la graficación como un conocimiento con estructura propia y susceptible de desarrollo, por lo que nuestro acercamiento pone en juego estos elementos en actividades de desarrollo del uso de las gráficas que permitiría significar los comportamientos de la función polinómica y su derivada.

Con este aspecto teórico opta esta investigación, en el diseño de una actividad sustentada por una parte lo encontrado en la prueba diagnóstica, y por otra complementada con el uso de las gráficas y ciertas consideraciones teóricas que a continuación describimos.

ISSN: 2594-1046

4. CONSIDERACIONES TEÓRICAS PARA LA INVESTIGACIÓN

Primero se considera lo reportado por Sánchez – Matamoros y Salvador- Llinares (2008) retomamos elementos importantes sobre la comprensión de la idea de la derivada:

I. Los estudiantes pueden considerar a los contextos gráficos y algebraicos como modos separados donde se aplican algoritmos sin relación para resolver problemas (pp. 277). Esto nos lleva a buscar la manera de relacionar lo gráfico y lo algebraico, aunque no necesariamente desde la postura de representaciones.

II. Otra observación es "los estudiantes de cálculo construyen sus conexiones, influidos por su experiencia previa" (pp.277), por lo que planteamos como hipótesis que es posible significar a la derivada mediante actividades que vinculen las actividades tradicionales con aquellas que involucren aspectos de variación mediante el análisis de la gráfica, es decir, incluir en sus experiencias escolares otras formas de acercarse a la derivada.

III. "Acercarse a la derivada con base en la práctica social de predicción desde la línea del pensamiento y lenguaje variacional, lo cual conlleva al estudio de fenómenos de cambio" (pp. 271). Consideramos que reconocer las prácticas y prácticas sociales podrían generar un escenario propicio para construir la noción de derivada con los estudiantes de bachillerato.

Con bases teóricas y ciertos resultados encontrados en la prueba diagnóstica se elaboró la siguiente pregunta de investigación.

> Cómo construye significados el estudiante de bachillerato sobre la derivada de la función polinómica mediante argumentos de variación global y local desde la gráfica de f(x) y f ´(x).

De tal manera que nos planteamos como objetivo general, diseñar una serie de actividades como parte de un taller, donde el estudiante argumente las características que presenta una función a través de las variaciones globales y locales por medio de la gráfica, y llegue a desarrollar argumentos en torno a la función y su derivada mediante el uso de las gráficas.

Como objetivos específicos nos planteamos:

- Desarrollar e implementar actividades donde el alumno describa las características de la gráfica de una función
- Desarrollar e implementar actividades donde el estudiante establezca la relación entre la gráfica de una función y su derivada.

ISSN: 2594-1046

- Desarrollar e implementar actividades donde el alumno bosqueje grafico de una expresión algebraica y su derivada

A continuación, se describe algunas actividades de la propuesta, su características e intencionalidad de tal forma que nos pueda brindar elementos para responder a nuestra pregunta de investigación.

5. UNA PROPUESTA PARA EL TRATAMIENTO DE LA DERIVADA DESDE LA GRÁFICA

Son ocho las actividades propuestas y de las cuales se reportan algunas de ellas en este documento, se puede decir que existen dos momentos en estas actividades, las primeras se refieren a que el estudiante se familiarice con el tipo de polinomio que está trabajando, ya que lo encontrado en nuestra prueba diagnostico tiene dificultades para reconocerlo. Las demás tiene que ver con el desarrollo de argumento gráficos para relacionar la gráfica de f(x) y f ´(x).

5.1. Actividad 1

Nota: Argumenta cada una de tus respuestas.

Explora con ayuda del programa Geogebra las formas gráficas de x^a con la condición de que a pertenece al conjunto de los números naturales.

a) ¿Qué observan en las formas de las gráficas? ¿Cuántas formas diferentes observan?

b) ¿De qué dependen las formas de las gráficas?

c) Qué cambia en la forma de las gráficas de x^a y $(x-b)^a$, con la condición de que a pertenece al conjunto de los números naturales y b pertenece a los números reales.

d) En qué se parecen las gráficas de x^a y $(x-b)^a$

e) En qué se difieren las gráficas de x^a y $(x-b)^a$

El objetivo es que el alumno con ayuda del software Geogebra explore los parámetros a y b e identifique la forma de la gráfica. Se espera con esto identifique que la forma de la gráfica depende de

ISSN: 2594-1046

que el número es 0, par o impar. Consideramos que las posibles dificultades es que se den cuenta de que hay formas parecidas pero que quizá no las asocien con los números pares e impares.

En esta misma dinámica se plantea la Actividad 2, en este caso se trata de que puedan agrupar conscientemente en pares e impares, de tal forma que puedan agrupar según el parecido de las gráficas. Consideramos que las posibles dificultades pueden darse a que no sepan en que grupo poner a la gráfica de grado par que tiene pendiente negativa.

5.2. Actividad 2.

En equipo argumenten qué observan en las siguientes gráficas de las funciones:

$x + \mathrm{a}$

$ax^2 + b\mathrm{x}$

$a(x + b)^2$

$ax^3 + bx^2 + cx + \mathrm{d}$

$b(x - a)^3$

Agrupen tipos de funciones

a) ¿Qué característica comparten?

b) ¿Qué las distingue?

Las demás actividades consisten en dada dos conjuntos, una de expresiones algebraicas y otra de gráficas, que el estudiante lo relacione. Consideramos que las primeras actividades deben permitir al estudiante describir sus características del polinomio para así, elegir su correspondiente gráfica. Es hasta esta etapa que consideramos que estas actividades permiten al estudiante analizar comportamientos gráficos y así mismo, conocer características de ellas para definir qué tipo de polinomio se está trabajando. A continuación, mostramos algunas actividades que corresponde con determinar la relación entre el polinomio y su derivada.

5.3. Actividad 6

a) Realiza un bosquejo de su derivada y argumenta como lo hiciste:

ISSN: 2594-1046

b) De acuerdo con la actividad anterior, contesta las siguientes preguntas:

1.- ¿Para qué valores del eje x, la gráfica de la función derivada es positiva?

2.- ¿Para qué valores del eje x, la gráfica de la función derivada es negativa?

3.- De acuerdo con tus respuestas anteriores ¿Qué pasa con la gráfica de la derivada cuando la función es creciente?

4.- ¿Qué pasa con la gráfica de la derivada cuando la función es decreciente?

5.- ¿Qué pasa con las derivadas cuando la función tiene un máximo o un mínimo?

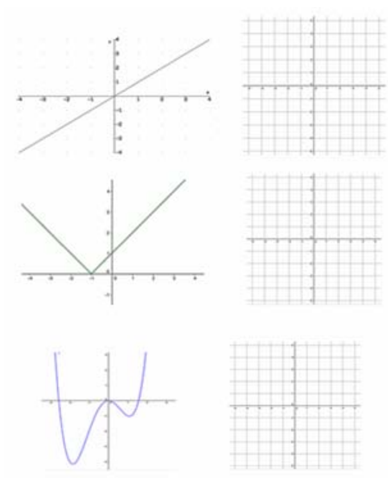


Figura 7. Actividad de establecer la gráfica de la derivada

Esta actividad trata de obtener explicaciones de los estudiantes al hacer uso de la gráfica para establecer su derivada, en qué se fijan y que herramienta utilizan para hacerlo. Como resultado esperado se espera que el alumno tome en cuenta la orientación de las gráficas sus máximos, mínimos, desplazamientos, sus curvas y cuando se presenta un pico en la gráfica. Quedando como correctas las siguientes gráficas:

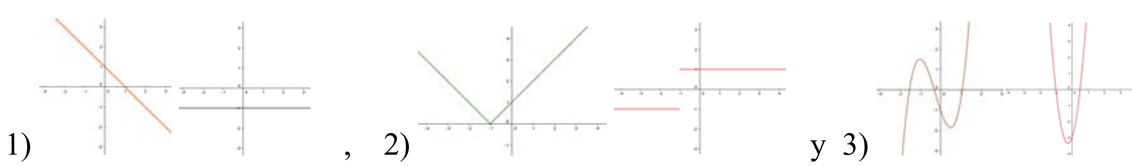


Figura 8. Gráficas esperadas por los alumnos

La posible dificultad la consideramos cuando se les presenta una gráfica con picos.

ISSN: 2594-1046

5.4. Actividades 7 y 8

La actividad 7 consiste en relacionar la gráfica de f(x) con la gráfica de su derivada, es decir obtener explicaciones en los alumnos de cómo identifican los parámetros y características de las gráficas para así poder relacionarlas (función↔derivada). Se espera que en sus argumentaciones identifiquen cuándo la función es creciente, decreciente, máximos, mínimos, positiva, negativa, pero con posibles dificultades cuando la gráfica tiene picos y cuando dos graficas tienen algunas características en común (Ver figura 8 imagen izquierda).

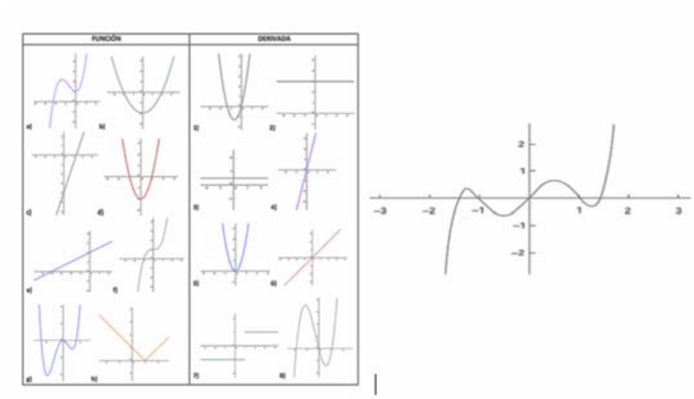


Figura 9. Gráficas para relacionar con su derivada y dado una gráfica, establecer donde f(´x)>0,f´(´x)>0.

Esta actividad que proponen Cantoral y Montiel (2001), (Figura 9 imagen izquierda) pretende utilizar para concluir las actividades y tiene como objetivo que el estudiante ponga en juego todo lo que realizó y explicó en las siete actividades anteriores. Los autores reportan que esta actividad ha tenido dificultad debido a que el estudiante no tiene argumentos variacionales debido a que solo realiza procedimientos algorítmicos. Por lo que recomienda que el estudiante pase por un universo de gráficas. Será interesante validar nuestras actividades debido a que se toman estas recomendaciones para desarrollar argumentos por medio de las gráficas en los estudiantes y sirvan como base para resolver esta última actividad.

6. REFLEXIÓN DE LA EXPERIENCIA DE INVESTIGACIÓN

El trabajo intenta validad un diseño donde el estudiante pueda desarrollar argumentos sobre la derivada en el uso de gráficas. La prueba diagnóstica anterior (figura 1, 2 y 3) provee de elementos respecto la problemática reportada. Las actividades que se muestra en este documento es un intento para lograr el desarrollo de argumentos en los estudiantes producto del análisis encontrado en la prueba diagnóstica, sin embargo, estas actividades se ubican en su mayoría en el contexto gráfico tratando de que lo use para desarrollar otras explicaciones desde la gráfica misma para la comprensión de la derivada. Siendo un ejercicio de tipo exploratorio la propuesta se valida en la última actividad, ya que requiere de argumentos variacionales y características de comportamiento de un polinomio que se obtiene en el desarrollo del uso de las gráficas. De esta forma su intencionalidad no es recurrir a los procedimientos algorítmicos y desarrollas un tipo de pensamiento matemático respecto a la derivada desde el uso gráfico. Esto permitirá el rediseño de las actividades para un mejor desarrollo de la comprensión de la derivada desde la gráfica, generando argumentos en el estudiante, pero también, sobre cómo mejorar este tipo de actividades.

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Briceño, E., Ramos, J., y Zaldívar, D. (2015). Estrategias variacionales en estudiantes de bachillerato de la UAP-UAZ en situación experimental. *El cálculo y su enseñanza*, *6*(6), 145-166.

Briceño, E. y Cordero, F. (2012). Un estudio del uso de la tecnología en situaciones de modelación del movimiento. En O. Covian, Y. Chávez, J. López, M. Méndez y A. Oktaç. *Memorias del Primer Coloquio de Doctorado*, (Pp. 203 –212). ISBN: 978-607-9023-08-9, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Buendía, G. (2010). Articulando el saber matemático a través de prácticas sociales. El caso de lo periódico. *Revista Latinoamericana de Matemática educativa, 13*(4), 129-158.

Cantoral, R. (2000). Situaciones de cambio, pensamiento y lenguaje variacional. En R. Cantoral (Ed.) *Desarrollo del Pensamiento Matemático.* México: Trillas. ITESM, Universidad Virtual. pp. 185-203.

Cantoral, R., Molina, J., y Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la Predicción. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 18.* 463-468

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001) *Funciones: Visualización y pensamiento matemático*. México: Prentice Hall.

Cen, C., Cordero, F. y Suárez, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(2):187-214.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latunoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10*(1), 7-38.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. M. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 285-309). México, D. F.: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C.

Dolores, C. (2000). Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. En R. Cantoral (Coord.). *El futuro del cálculo infinitesimal.* (Capítulo V, pp. 155-181). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ortega, T. y Pecharromán, C. (2010). Diseño de enseñanza de las propiedades globales de las funciones a través de sus gráficas. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 28 (2),* 215-225. ISSN 0212-4521, ISSN-e 2174-6486.

Robles, M., Del Castillo, A. y Font, V. (2012). Análisis y valoración de un proceso de instrucción sobre la derivada. *Educación Matemática, 24* (1), 35-71.

Rosado, P. (2004). Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica. (Tesis de maestría no publicada). Cinvestav-IPN, México.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(2), 267-296.

Zaldívar, D., Cen, C., Briceño, E., Méndez, G. y Cordero, F. (2014). El uso de las gráficas en socioepistemología y su relación con el espacio de trabajo matemático. *Revista Latinoamericana en matemática educativa*, *17* (4-I), 191-210.

Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

ALTERNATIVA DIDÁCTICA PARA EL ESTUDIO DEL MODELO GOMPERTZ

Jorge Armando Rodríguez Carrillo
Centro de Estudios Tecnológicos del Mar No. 34, carrillojro@hotmail.com

José Trinidad Ulloa Ibarra
Universidad Autónoma de Nayarit, jtulloa@uan.edu.mx

Resumen

Entender procesos biológicos (como el crecimiento) a través de medios matemáticos (tales como la modelación) es una tarea recurrente en los sistemas educativos. Sin embargo, en muchos casos, se hace bajo situaciones imaginarias o abstractas dejando de lado lo concreto, el contexto social o específico del futuro profesionista, y sin ir más allá de un simple análisis superficial de la situación. Separando, por un lado, el conocimiento matemático del científico; mientras que, por otro, no analizando la situación a detalle. Por tal motivo, bajo la estructura del diseño de aprendizaje proponemos una alternativa para la enseñanza y el aprendizaje del modelo de crecimiento Gompertz, (apoyada con tecnología, GeoGebra) que traslada al estudiante a un medio de análisis gráfico, analítico e interpretativo. Esto, con la firme intención de aportar elementos didácticos y/o servir de apoyo para el desarrollo de prácticas en el estudio de modelos matemáticos utilizados en el Área de Ciencias Biológicas, Agropecuarias y Pesqueras (ACBAP) o afines, presentes en las instituciones educativas.

Palabras clave: modelos de crecimiento, modelo Gompertz, parámetros, alternativa didáctica.

1. INTRODUCCIÓN

Los modelos de crecimiento poblacional se encuentran agrupados por dos particularidades, diametralmente opuestas, por un lado, se localizan los modelos que representan un medio ilimitado, cuyo único integrante es el modelo exponencial. Mientras que, por otro lado, están los modelos capaces de representar un espacio limitado, entre los que destacan el modelo logístico y el modelo Gompertz.

Gráficamente, todo crecimiento poblacional se describe, en primera instancia, bajo una función exponencial hasta llegar a un punto donde factores internos y externos afectan el crecimiento, provocando en el gráfico un punto de inflexión y posteriormente haciendo el crecimiento más lento hasta llegar a una estabilidad. Es decir, el crecimiento poblacional queda representado por la combinación de un gráfico de una curva exponencial (modelo exponencial) y una curva sigmoidea o en forma de S (modelos logístico y Gompertz, respectivamente). Actualmente, la ecuación conocida como curva de Gompertz es usada en muchas áreas, tales como la biología y la medicina, para modelar

ISSN: 2594-1046

fenómenos o situaciones donde el crecimiento es lento al principio y al final del período. Con base en lo anterior, puede afirmarse que este tipo de modelos pueden ser utilizados perfectamente para estudiar:

- El crecimiento poblacional en un ambiente con recursos limitados.
- El crecimiento de la talla o peso de un organismo.
- El número de bacterias en una caja de Petri.
- La población de animales en una isla.
- Tiempo de respuesta a medicamentos en pacientes.
- Ventas de un producto donde el total de venta tiene límite.

Sin embargo, atender contenidos biológicos, tales como el crecimiento, a través de medios matemáticos, como la modelación, es una tarea recurrente en los espacios de estudio en el ACBAP. Con la firme intención de aportar elementos didácticos y/o servir de apoyo para el diseño de prácticas en el estudio de modelos matemáticos utilizados en dicha área u otras, se pretende, a través de este trabajo, proponer una alternativa para la enseñanza y el aprendizaje del modelo Gompertz, con ayuda de una situación de aprendizaje (apoyados con tecnología, GeoGebra) que traslada al estudiante a un medio de análisis gráfico e interpretativo aplicados a un contexto social y/o profesional. Cabe hacer mención, que el diseño se presenta como medio de enseñanza, como herramienta en la enseñanza, como medio que remodela el contenido y/o como medio de intercambio académico.

Con lo anterior, se presenta una situación de aprendizaje que sirve de ayuda en el estudio (analítico y gráfico) del modelo de crecimiento Gompertz, con el uso de una metodología que involucra el empleo de la tecnología y que muestra una nueva forma de modelar. Para ello, hemos dividido el trabajo de la forma siguiente: En primera instancia, se expone al modelo Gompertz como concepto y se desarrolla un análisis gráfico de los parámetros que intervienen en él. Posteriormente, se fundamenta el papel que juega el contexto social para la creación de situaciones de aprendizaje y la forma en que éstas, aunado al empleo de la tecnología, dan origen a una nueva forma de modelar que promueve la interacción entre los cuatros marcos representacionales (verbal, numérico/tabular, gráfico y algebraico). Estableciendo así a la modelación como vínculo para acortar la separación existente entre los contenidos aprendidos en el aula escolar y su aplicación en la práctica profesional. Finalmente, se muestra una situación de aprendizaje que se considera idónea para la enseñanza del modelo Gompertz. Dicha situación se muestra a la par de un análisis hecho en la aplicación de la misma a un grupo de tercer semestre de la Escuela Nacional de Ingeniería Pesquera del ACBAP de la Universidad Autónoma de Nayarit, reconociendo el proceso de resignificación de conceptos que siguen los estudiantes frente a situaciones que requieran el análisis de contenidos matemáticos y científicos, con la traslación de las mismas a un contexto social específico.

2. DESARROLLO

El modelo Gompertz puede definirse como un modelo que aporta información importante en el estudio de situaciones o fenómenos de crecimiento poblacional o de cualquier índole bajo un espacio limitado de recursos y donde el crecimiento máximo o puede ser muy pequeño o muy grande. Por su parte, al ser un modelo de crecimiento que representa un medio limitado como el logístico, se describe por medio de un gráfico de tipo sigmoidea o, lo que es lo mismo, en forma de "S". En su comportamiento gráfico identificamos tres fases: el crecimiento exponencial (primera), la interacción con el medio (segunda) y el equilibrio (tercera), véase figura 1.

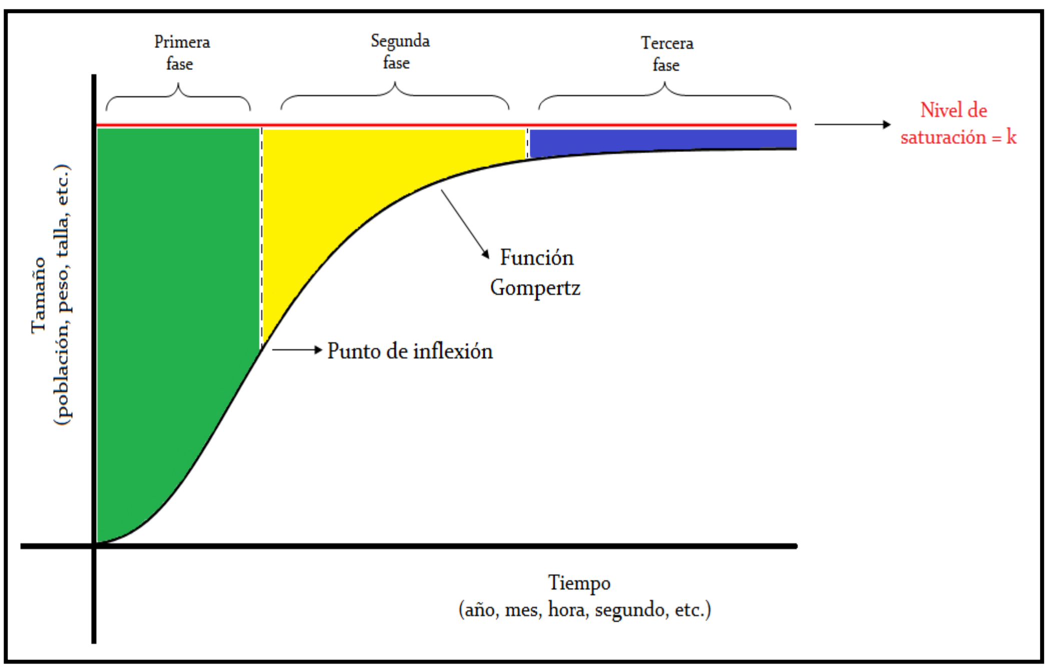


Figura 1. Fases del modelo Gompertz.

Fase de crecimiento exponencial. Se ha denominado así debido a que, de manera gráfica, en su etapa inicial, el modelo Gompertz se comporta como un modelo exponencial. En este momento, el crecimiento de la población o rasgo no se ve afectado por ningún factor, de los que rodea el medio, que impida su crecimiento y, por tal, se genera un crecimiento exponencial de forma pura.

Fase de interacción con el medio. En esta etapa, el crecimiento poblacional o rasgo se ve afectado por los factores, que intervienen en el medio, impidiendo así su crecimiento exponencial. Ello hace que el crecimiento sufra una desaceleración haciéndolo pausado, lento.

Fase de equilibrio. Para esta última etapa, la interacción que mantiene el crecimiento de la población con el medio, que nace desde la etapa dos, continúa su efecto cada vez con mayor fuerza, impidiendo se desarrolle el crecimiento. En este momento, el crecimiento experimenta una desaceleración cada vez mayor hasta alcanzar un equilibrio en el mismo.

2.1. Descripción de los parámetros.

A pesar de existir un sin número de ecuaciones que reflejan un modelo Gompertz, se ha tomado, por los parámetros que utiliza, el siguiente:

$$P(t) = k \cdot e^{-\ln\left(\frac{k}{P_0}\right) \cdot e^{-rt}}$$

Elementos P(t), t y e.

El elemento P(t), en el modelo Gompertz, indica el tamaño de la población existente de un determinado organismo, o el crecimiento de uno de sus rasgos (peso, talla, etc.) en un tiempo establecido denominado “t” y expresado en años, mes, días, horas, etc. Por su parte, el elemento “e” es el símbolo que representa la base del logaritmo natural, es decir, cuyo valor aproximado es de 2.7183. Cabe resaltar que P(t) juega el papel de variable dependiente, t de variable independiente y “e” de constante.

Parámetro k.

Al representar el modelo Gompertz un medio limitado, el parámetro k, teóricamente, es el valor que indica la capacidad de carga o límite con que cuenta un sistema donde se esté desarrollando un crecimiento poblacional o bien alguna cualidad (talla, peso, etc.) de un organismo. Sin embargo, en la práctica (mundo real) no se trata de un valor que pueda obtenerse por medio de la asignación propia, debido a que toda población mantiene cambios permanentes, ganancias y pérdidas, en su crecimiento generando así fluctuaciones alrededor de un valor promedio (Odum y Sarmiento, 1998, p. 169). El valor de este promedio es lo que representaría, en una situación práctica, el valor del parámetro "k". Por lo tanto, el parámetro "k" no es más que la población máxima que podría existir en un sistema, o bien, la medida máxima que alcanzaría algún rasgo de un organismo: $\lim_{t\to\infty} P(t) = k$

Parámetro P_0.

Para todo crecimiento, ya sea poblacional o correspondiente a alguna cualidad (peso, talla, etc.) de un organismo, es indispensable el reconocimiento de un valor inicial pues de lo contrario no habría crecimiento alguno. En este sentido, y para el modelo Gompertz, el parámetro P_0 es la población, peso o talla inicial existente en el sistema u organismo. Por lo tanto, el parámetro P_0 (población, peso o talla inicial) deberá ser siempre mayor que cero, pero menor que el límite de la capacidad de carga (parámetro k). Para comprender mejor, analizaremos, por medio de cuatro casos, las relaciones existentes entre los parámetros P_0 y k.

Relación entre los parámetros k y P_0.

Caso I. Si $P_0 < k$ la población crece, hasta verse afectada por los diversos factores del medio ambiente, y alcanza una planicie, el nivel de saturación o capacidad de carga, k. Gráficamente, lo que ocurre, es la curva Gompertz. Véase figura 2.

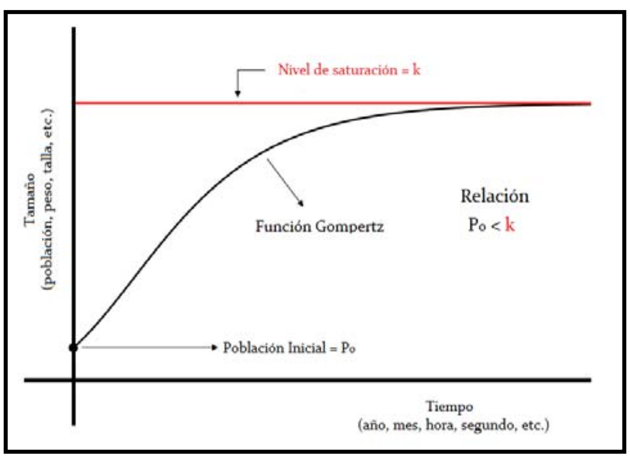


Figura 2. Relación Po < k.

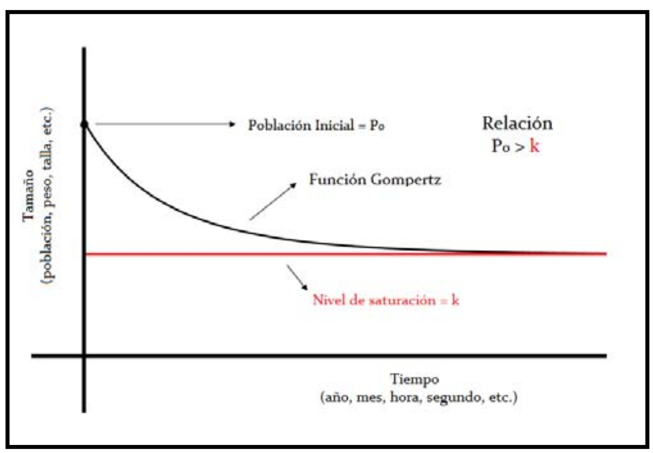


Figura 3. Relación P0 > k.

Caso II. En dado caso de que se considere una población inicial mayor que el límite de carga del medio ($P_0 > k$), el gráfico decrece hasta alcanzar una asíntota que ha de ser el nivel de saturación, k. La gráfica que se desarrolla no pertenece a la familia del modelo Gompertz, véase la figura 3.

Caso III. Si se considera una población inicial igual al límite de carga del sistema, $P_0 = k$, se describe una gráfica del tipo constante donde $P(t) = P_0$ o, en su defecto, $P(t) = k$. Por tal motivo, la gráfica que se forma no pertenece a la familia del modelo Gompertz, véase la figura 4.

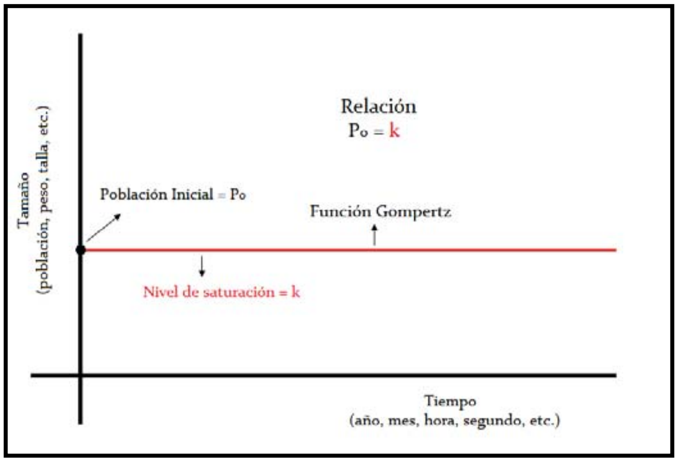


Figura 4. Relación $P_0 = k$.

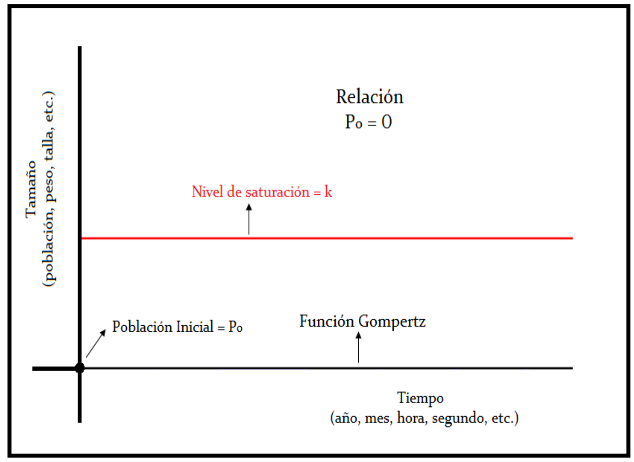


Figura 5. Relación $P_0 = 0$.

Caso IV. La $P_0 = 0$. Cuando la población inicial es igual a cero, es decir que no se tuviera una población inicial, entonces sería imposible desarrollar una gráfica, véase la figura 5.

Parámetro r.

El modelo Gompertz, como ya se mencionó, refleja un crecimiento limitado a causa de la interacción que hay entre las ganancias y las pérdidas de la población o del rasgo del organismo. A esta interacción se le denomina tasa instantánea de crecimiento poblacional, se denota por la letra “r” y no es un valor constante. Por lo que, a lo largo de todo el crecimiento se describe de distinta forma, véase la figura 6.

> Al inicio del crecimiento poblacional o crecimiento de algún rasgo del organismo, la tasa instantánea de crecimiento poblacional se encuentra con un valor igual a cero (1), es decir, aún no intervienen ni las ganancias ni las pérdidas del fenómeno. A partir de ese momento y hasta el punto de inflexión, el crecimiento se desarrolla de forma pura (2), al igual que con el crecimiento exponencial, por lo que sólo existen ganancias en el fenómeno de crecimiento y no hay pérdidas que afecten al mismo. Por su parte, el punto

de inflexión del fenómeno marca el inicio de la desaceleración del crecimiento, este efecto se debe a que en el desarrollo del crecimiento empiezan a afectar las pérdidas y por tal inicia el forcejeo con las ganancias, así continúa durante un buen período hasta que, finalmente (4), alcanza su equilibrio en la cantidad de ganancias y pérdidas, es decir, se genera una estabilidad que acompaña con fluctuaciones a un nivel de saturación límite (Wallace, King y Sanders, 1992, p. 133).

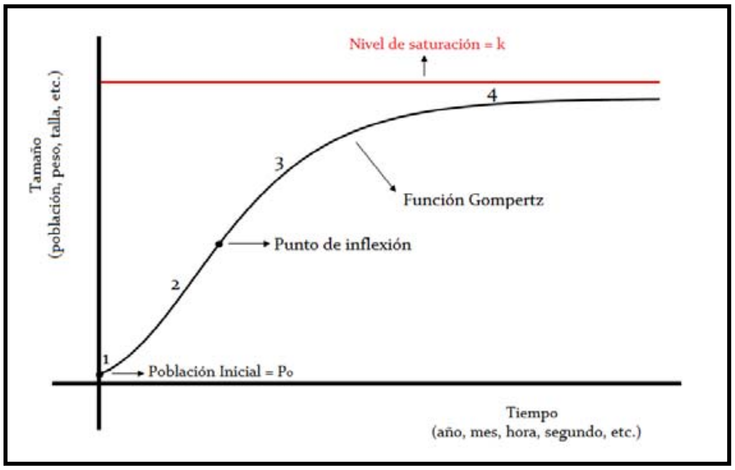
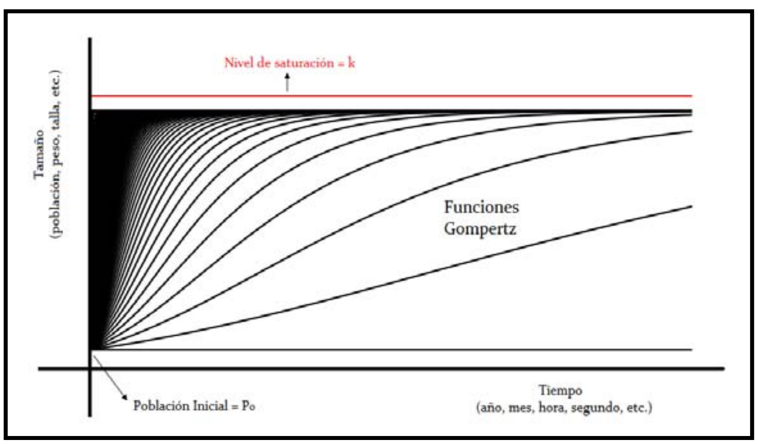


Figura. 6. Fases del parámetro "r".

Valores de r.



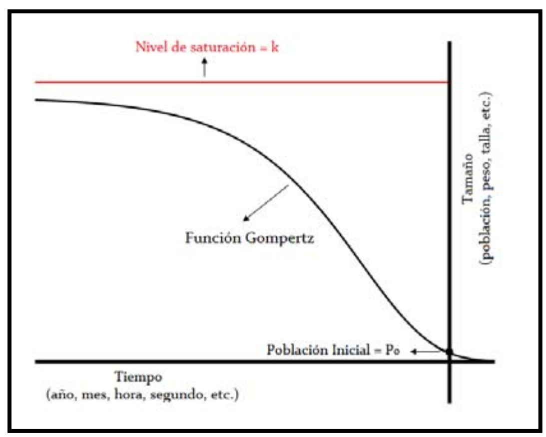


Figura. 7. Curva con valor "r" positivo.

Figura. 8. Curva con valor "r" negativo.

Los valores de "r" pueden ser variados, sin embargo, unos pueden hacer que se desarrolle, gráficamente, la función Gompertz y otros no lo permiten. Si los valores de "r" son mayores a cero ($r > 0$) se produce el gráfico que representa al modelo Gompertz, en la figura 7, conforme los valores de "r" van en aumento, la curva de Gompertz se va a acercando cada vez más al eje de las "y": Por su parte, si los valores de "r" fuesen negativos o menores a cero ($r < 0$) no se produce una curva de crecimiento con significancia, véase figura 8, todo ello debido a que la curva se prolonga para valores negativos en el tiempo y eso no es posible en la vida real. Por lo tanto, la ecuación que resulta para $r < 0$, no corresponde a una ecuación de Gompertz útil para fines prácticos.

3. UNA PROBLEMÁTICA EN LA OBTENCIÓN DE UN MODELO MATEMÁTICO

La modelación matemática en el sistema escolar se ha acrecentado en los últimos años convirtiéndose en una herramienta útil para la resignificación de contenidos matemáticos (Suárez, 2006). Sin embargo, utilizar la modelación matemática como proceso o herramienta no sólo debe servir para reconstruir contenidos matemáticos sino también debe cumplir la función de reestructurar contenidos científicos ubicados en un contexto social y/o profesional futuro del estudiante y así ser el puente entre la escuela y la práctica profesional. Trabajar la modelación matemática, en situaciones de crecimiento, es una tarea recurrente en el ACBAP o afines, de algunas instituciones. Sin embargo, muchas de las ocasiones, se hace bajo esquemas o datos imaginarios, simulación de situaciones, donde sólo se busca encontrar un modelo matemático que simbolice la situación y que permita hacer estimaciones futuras. Atendiendo así, solamente la importancia del conocimiento matemático (obtención del modelo), dejando de lado el conocimiento científico que presentan los procesos biológicos. El proceso que utilizan los profesionales de dichas áreas se compone de cuatro elementos: datos, interpretación, ajuste y predicción.

Datos. Consiste en tomar nota sobre un conjunto de datos que representan una situación problemática. Dichos datos, en su mayoría, son dictados por el profesor, extraídos de un libro, inventados o, en el mejor de los casos, obtenidos a través de una práctica de laboratorio.

Interpretación. En este paso, se debe identificar las variables que involucran la situación y cómo éstas se relacionan. Posterior a ello, distribuir los datos gráficamente en un plano cartesiano e interpretar qué tipo de comportamiento presenta la situación.

Ajuste. Consiste en ajustar los datos a modelos ya establecidos (lineal, cuadrático, cúbico, polinómico, exponencial, logístico, Gompertz, entre otros). Así pues, encontrar el modelo que mejor ajuste los datos sin tomar en cuenta lo que se está analizando en la situación.

ISSN: 2594-1046

Predicción. Paso final del proceso en el cual ya una vez establecido el modelo que representa la situación, se busca estimar resultados futuros o tomar acciones para la mejora.

Este proceso, utilizado en el ACBAP limita al estudiante a simplemente ajustar un conjunto de datos a un modelo pre-establecido buscando, de esta forma, una representación algebraica que mejor describa la situación sin analizar la interrelación que pueda tener con ella. Tal y como lo señalan Ulloa y Rodríguez (2013) no basta con encontrar un modelo, en su representación algebraica, que mejor ajuste a un conjunto de datos, sino identificar qué tanto se relaciona y sí tiene coherencia con el conocimiento científico (proceso biológico) a estudiar en una situación particular. Es decir, el modelo en su representación algebraica deberá ser el punto de partida para analizar una situación problemática a través de sus distintos marcos representacionales restantes (discurso verbal, gráfico, numérico/tabular) y así decidir si es adecuado o no. Con lo anterior, consideramos que el proceso de modelación matemática, a diferencia del utilizado en el ACBAP, debe contemplar a un modelo matemático como la representación de una situación a través de distintos marcos de representación: verbal, gráfico, numérico/tabular y algebraica, véase la figura 9.

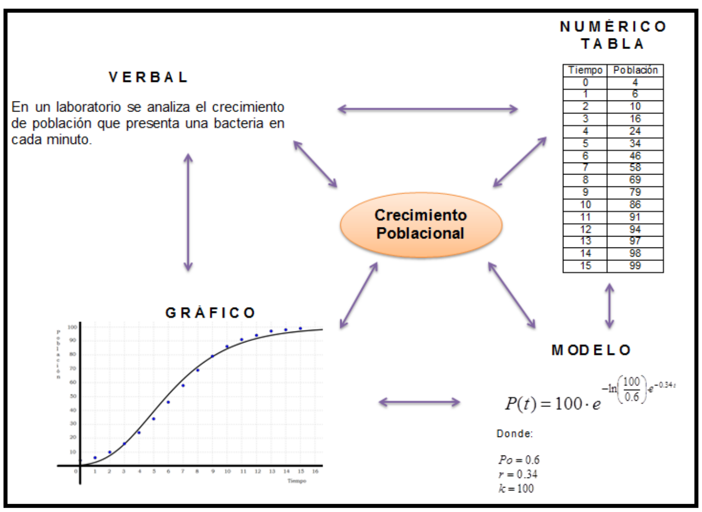


Figura 9. Marcos representacionales de los modelos.

Todos los modelos representacionales: verbal, numérico, gráfico y algebraico, están relacionados entre sí. Si uno tiene alguna variación, los otros también la tendrán. Sin embargo, para tomar una decisión correcta sobre el modelo que mejor ajuste y represente a una situación problemática es importante conocer el fenómeno que se está analizando. Es decir, si el modelo seleccionado no tiene coherencia con lo que se analiza entonces deberá ser desechado y buscar otro.

ISSN: 2594-1046

4. SITUACIÓN DE APRENDIZAJE.

Aplicación de la función Gompertz. El caso de la actividad humana como fuente de conocimiento.

Objetivo. El alumno desarrollará la capacidad de relacionar una situación problemática con el modelo que lo representa.

Espacio. Aula de clase.

Equipo y herramienta utilizada: Computadora personal. Software GeoGebra. Impresora de tinta HP 1200. Hojas de papel cuadriculado. Hojas de papel blanco. Lápiz.

Organización del grupo. Esta actividad; análisis e interpretación, de forma gráfica y analítica, de una situación problemática contextual que describe un crecimiento a través de los parámetros del modelo Gompertz que lo represente podrá ser desarrollada de forma individual o en parejas.

Criterios de desempeño. El alumno será competente para analizar situaciones problemáticas a través de un modelo Gompertz que la represente cuando:

- Identifique la información en libros, artículos y de reportes de campo.
- Realice el acomodo y agrupación ordenada de cada uno de los elementos que la componen.
- Elabore el formato o tabla de toma de datos pertinente a la información obtenida.
- Obtenga el modelo en formatos gráfico y analítico.
- Analice una (s) práctica(s) social (es) de su profesión o vida cotidiana.

5. DESARROLLO

5.1. Situación problemática.

Los datos que se presentan en la tabla siguiente representan la talla media (cm) por edad (años) obtenida de lecturas directas de edad realizadas con ejemplares del stock de rape (lophius budegassa).

Edad (años)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Talla (cm)	9.2	16.5	22.9	28.8	34.7	38.6	44.4	49.0	52.3	56.0	60.8	63.4

¿Cómo queda la distribución gráfica de los datos?

ISSN: 2594-1046

El comportamiento de los datos, ¿corresponde a un modelo Gompertz? ¿Por qué?

Estima posibles valores de los parámetros que representan la situación problemática (P_0, k y r). Escribe el modelo que consideras representa la situación.

Explica las razones de tus valores y modelo propuestos

Abre GeoGebra, captura los datos de la situación problemática, introduce los parámetros y grafica tu modelo de estimación.

¿Se ajusta a la mayor parte de los datos?

Manipula los parámetros hasta encontrar el modelo que mejor ajusta a los datos.

Con el modelo obtenido, construye una tabla con valores reales de la situación problemática y los arrojados por el modelo obtenido.

Edad (años)	Talla real (cm)	Talla modelo (cm)
1		
2		
3		
4		

Con ayuda de los datos arrojados por tu modelo, responde:

¿Qué talla tiene el pez en 2 años? _________________________________

¿Qué diferencia existe con la del dato original? ______________________

¿Qué talla tiene el pez al cabo de 1 año? ____________________________

¿Qué diferencia encuentras con la del dato original? __________________

¿Cuál habrá sido la talla del pez al nacer? ___________________________

¿Con relación a los datos originales es lógico que este valor haya sido la talla inicial del pez? ¿Por qué?

ISSN: 2594-1046

5.2. Aspectos metodológicos

Para la puesta en escena de la situación de aprendizaje, se consideró una sesión de dos horas con treinta minutos, con estudiantes e instalaciones del tercer semestre de ingeniería pesquera de la Universidad Autónoma de Nayarit, en la unidad de aprendizaje de modelación matemática.

<table>
<tr><th>Pregunta/Respuesta gráfica</th><th>Análisis</th></tr>
<tr><td>¿Cómo queda la distribución gráfica de los datos?

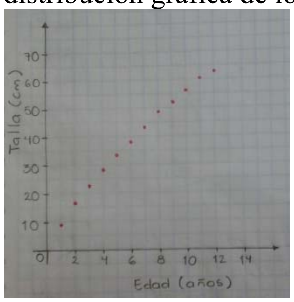


Figura 10.

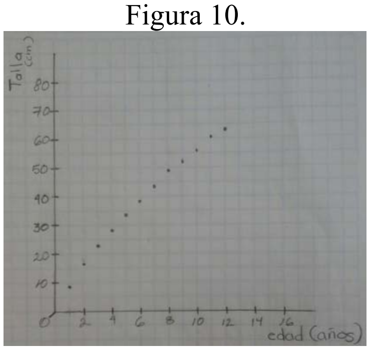


Figura 11.</td><td>Al momento de graficar la situación problemática, los datos de la tabla, los resultados obtenidos fueron similares entre los 20 estudiantes, véase la figura 10 y la figura 11.

No se presentó dificultad alguna para la construcción de la gráfica.</td></tr>
<tr><td>El comportamiento de los datos, ¿corresponde a un modelo Gompertz? ¿Por qué?</td><td>Para contestar este par de preguntas, primeramente, los alumnos identifican que se trata de un crecimiento limitado.

Determinan que se trata de un crecimiento tipo Gompertz y la principal razón que plantean es que su punto de inflexión parece situarse en un tiempo muy tardío.</td></tr>
</table>

ISSN: 2594-1046

Estima posibles valores de los parámetros que representan la situación problemática.

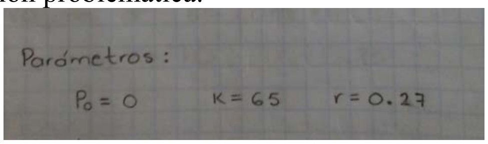


Figura 12.

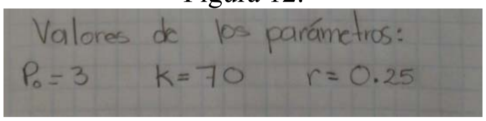


Figura 13.

Para esta pregunta, las respuestas de los estudiantes [ver figura 12 y figura 13] oscilaron en los valores siguientes:

Po = De 0 a 3.

K = De 65 a 75.

r = De 0.25 a 0.30

Escribe el modelo que consideras representa la situación.

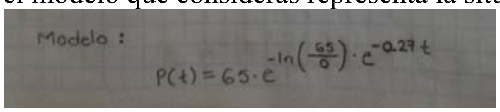


Figura 14.

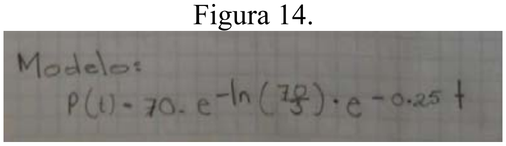


Figura 15.

Al plantear valores similares para los parámetros propició que los modelos sugeridos por los estudiantes también fueran similares.

Explica las razones de tus valores y modelo propuestos.

Abre GeoGebra, captura los datos de la situación problemática, introduce los parámetros y grafica tu modelo de estimación. ¿Se ajusta a la mayor parte de los datos?

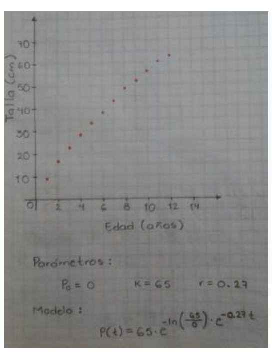


Figura 16.

Al momento de graficar los datos en el software GeoGebra, los estudiantes logran darse cuenta si la estimación de los valores de cada uno de los parámetros y por ende del modelo planteados por ellos mismos fueron o no los adecuados.

Discusión Rogelio [ver figura 16. y figura 17.]:

Monitor: “¿Se ajustó tu modelo al de los datos?”

Rogelio: “No.”

Monitor: “¿Qué te resultó?”

Rogelio: “Una línea recta sobre el eje “x”.”

Monitor: “¿Qué valores consideraste para cada parámetro?”

Rogelio: “$P_0 = 0$, k = 65, r = 0.27”

Monitor: “¿$P_0 = 0$?”

Rogelio: “Sí”

Monitor: “¿Por qué la consideraste como tal?”

Rogelio: “Pues por el gráfico, vi que para allá iba.”

Monitor: “¿Qué se está analizando en la situación?”

Rogelio: “El crecimiento de un pez.”

Monitor: “Al nacer un pez, ¿nace con cero

ISSN: 2594-1046

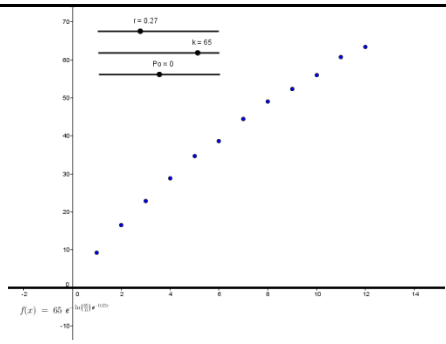


Figura 17.

centímetros?”

Rogelio: “No. Ah, ya entendí.”

Monitor: “¿Qué entendiste?”

Rogelio: “Pues “P_0” no puede ser cero. Debe ser mayor que cero.”

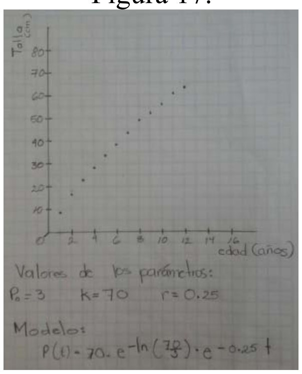


Figura 18.

Discusión Manuel [ver figura 18 y figura 19]:

Monitor: “¿Te resultó la función Gompertz?”

Manuel: “Sí.”

Monitor: “¿Se ajustó a los datos del problema?”

Manuel: “Más o menos.”

Monitor: “¿Qué valores consideraste para cada parámetro?”

Manuel: “P_0 = 3, k = 70, r = 0.25”

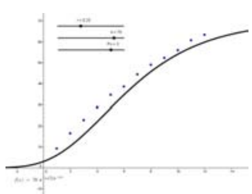


Figura 19.

Manipula los parámetros hasta encontrar el modelo que mejor ajusta a los datos.

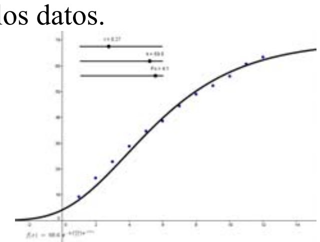


Figura 20.

Al variar los parámetros, los estudiantes determinaron que los valores que mejor ajustan los datos del problema son:

$P_0 = 4.1$

$K = 69.6$

$r = 0.27$

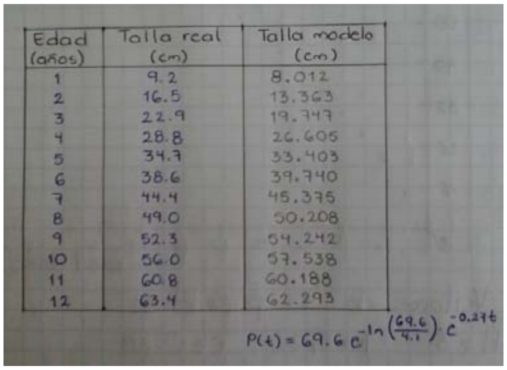
Lo que produjo el modelo de la figura 20.

$$f(t) = 69.6e^{-\ln\left(\frac{69.6}{4.1}\right)e^{-0.27t}}$$

Con el modelo obtenido, construye una tabla con valores reales de la situación problemática y los arrojados por el modelo obtenido.

El modelo encontrado por los estudiantes, numéricamente, no presenta diferencias de consideración, ver figura 21. Es decir, se asemejan mucho con los reales de la situación.

ISSN: 2594-1046



Edad (años)	Talla real (cm)	Talla modelo (cm)
1	9.2	8.012
2	16.5	13.363
3	22.9	19.747
4	28.8	26.605
5	34.7	33.403
6	38.6	39.740
7	44.4	45.375
8	49.0	50.208
9	52.3	54.242
10	56.0	57.538
11	60.8	60.188
12	63.4	62.293

$$P(t) = 69.6\, e^{-\ln\left(\frac{69.6}{4.1}\right) \cdot e^{-0.27t}}$$

Figura 21.

Discusión Martha.

Monitor: “Con base a los datos arrojados por el modelo obtenido, ¿qué talla tiene el pez en 2 años?”

Martha: “13.363 cm”

Monitor: “¿Qué diferencia encuentras con la del dato original?”

Martha: “En el dato original es más grande.”

Monitor: “¿Con cuánto?”

Martha: “Más de 3 cm.”

Monitor: “¿Qué talla presenta el pez al cabo de un año?”

Martha: “Es de 8.012 cm.”

Monitor: “¿Qué diferencia hay con la del dato original?”

Martha: “Otra vez es más grande la del dato original.”

Monitor: “¿Por cuánto?”

Martha: “Más de un centímetro.”

Monitor: “Si en dos medidas has visto que las tallas no son iguales, entonces, ¿por qué tomar este modelo como el indicado?”

Martha: “Porque en otros datos son más grandes las medidas arrojadas por el modelo que las originales. Además, las diferencias son pequeñas.”

Monitor: “Entonces, ¿no es necesario que un modelo se ajuste totalmente a todos los datos originales?”

Martha: “No, el modelo es una representación general, como si fuese un promedio. Además de que sirve para predecir.”

Monitor: “¿Predecir?”

Martha: “Sí, podemos estimar valores.”

Monitor: “O sea que, ¿se puede conocer cuál fue la talla inicial del pez?”

Martha: “Saber exactamente no, pero sí estimarla con sólo sustituir en el modelo obtenido.”

Monitor: “A ver, ¿cuál pudo ser su talla inicial?”

Martha: “De 4.1 cm.”

ISSN: 2594-1046

	Monitor: "Con relación a los datos originales, ¿es lógico que este valor haya sido la talla inicial del pez?" Martha: "Sí, porque en un año marca 9.2 cm." Monitor: "¿Y eso qué tiene que ver?" Martha: "Que es más pequeña que lo tuvo en un año. Si hubiera salido más grande que 9.2 cm entonces no sería lógico. Además, es la misma talla que obtuvimos con GeoGebra, P0 = 4.1 cm."

6. SUGERENCIAS PARA EL TRABAJO FUTURO

Con este trabajo se espera contribuir a entender los momentos de construcción que vive un estudiante al analizar y comprender situaciones de crecimiento a través de la modelación matemática en sus distintos marcos representacionales (verbal, numérico/tabular, gráfico y algebraico), sabiendo diferenciar y relacionar el conocimiento matemático con el científico y viceversa, haciendo uso de la tecnología. Esperamos que este trabajo sea el origen de un cambio en la metodología empleada por el ACBAP, que ya no consista en sólo buscar un modelo algebraico que mejor represente una situación, sino que ahora se tome en cuenta lo que se analiza, el contexto, el conocimiento científico y el matemático aplicado, de manera aislada y conjunta para una mejor resignificación de conceptos por parte del estudiante. Sin embargo, para encontrar el modelo algebraico que mejor se ajuste a los datos de la situación se requiere de mucho tiempo y paciencia si se hace a lápiz y papel. Por lo que, para erradicar esta circunstancia creemos conveniente la utilización de la tecnología para tal aspecto. Se plantea utilizar la tecnología como un medio y como una herramienta que contribuya en el proceso de modelación matemática. La tecnología como medio involucra utilizarla para analizar las características y función principal de los parámetros de un modelo bajo ciertas circunstancias. Mientras que, la tecnología como herramienta sirve de enlace entre una situación problemática y el modelo que mejor la represente, o viceversa.

ISSN: 2594-1046

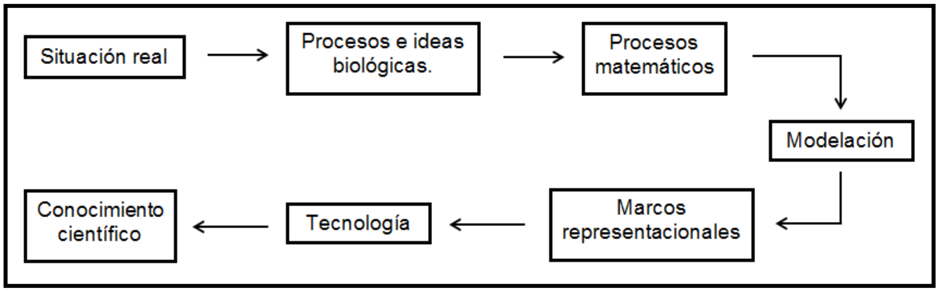


Figura 22. Proceso modelación matemática con tecnología.

Se espera así, que el profesor y/o estudiante se apropie de la metodología para la modelación matemática (figura 22) cuyo proceso consiste en que a partir de una situación real (apropiada a su entorno de estudio) representativa de procesos e ideas biológicas y analizada a través de procesos matemáticos tales como la modelación, en sus cuatro marcos representacionales, y con el apoyo de la tecnología logre construir o resignificar el conocimiento científico.

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Odum, E. y Sarmiento, F. (1998). *Ecología. El puente entre ciencia y sociedad*. México: Editorial Mc Graw – Hill Interamericana.

Suárez, L. (2006). El uso de las gráficas en la modelación del cambio. Un estudio socioepistemológico. (Memoria predoctoral no publicada). Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN. México.

Ulloa, J. y Rodríguez, J. (2013). La modelación matemática como puente entre el conocimiento científico y el matemático. *Revista Electrónica de Veterinaria, 14*(02).

Wallace, R., King, J. y Sanders, G. (1992). *Conducta y ecología. La ciencia de la vida*. México: Editorial Trillas.

Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

PROYECTO DE INTERVENCIÓN DIDÁCTICA: LA FRACCIÓN PARTE-TODO

Verónica Castro Cossío,
Escuela Primaria Miguel Hidalgo, verocascoss@gmail.com

Angélica Dueñas Cruz
Escuela Normal Manuel Ávila Camacho, duenascruz@gmail.com

Resumen

El proyecto de intervención didáctica denominado "La fracción parte-todo para la resolución de problemas" fue aplicado en un grupo de sexto grado de primaria de la ciudad de Zacatecas, durante el ciclo escolar 2014-2015, tiene la intención de demostrar que los alumnos van adquiriendo saberes de mayor complejidad a partir de la conceptualización de conocimientos básicos sobre un tema determinado, en este caso las fracciones. El proyecto de intervención está planteado a partir elementos retomados de la investigación-acción y de secuencias de situaciones didácticas con el propósito de completar los estándares curriculares que propone la normatividad mexicana vigente.

Palabras clave: enseñanza de las matemáticas, didáctica, didácticas específicas

1. INTRODUCCIÓN

Con la intención de reconocer la importancia de trabajar los contenidos matemáticos de una manera vinculada y progresiva, se diseñó y se aplicó el proyecto de intervención didáctica denominado "La fracción parte-todo, una base para la comprensión de problemas de razón" mediante el cual se implementaron estrategias con el fin de analizar y reflexionar la importancia de trabajar los contenidos matemáticos de una forma vinculada y gradual. La fracción parte todo es una base para la comprensión de problemas matemáticos más desarrollados puesto que se refiere a la representación de la partición de un todo, la unidad representa ese todo

2. EL CONTEXTO EDUCATIVO

El proyecto de intervención didáctica denominado "La fracción parte-todo", fue llevado a cabo en un grupo de 20 alumnos de sexto grado de educación primaria en Zacatecas, durante el ciclo escolar 2014 – 2015.

Tiene la intención de analizar, reflexionar y reconocer la importancia de trabajar los contenidos matemáticos de una manera vinculada y progresiva con la finalidad de que los alumnos sean capaces de resolver problemas con un grado mayor de dificultad, pasando así de trabajar con fracciones parte todo a problemas que impliquen el uso de fracción como razón.

3. METODOLOGÍA

Como parte de la investigación se implementó un proyecto de intervención didáctica retomando lo estipulado en la investigación–acción (Fierro, Fourtoul y Rosas, L. (2008) tomando en cuenta la importancia de analizar la práctica docente con la finalidad de mejorarla, haciendo un análisis del contexto, diagnosticando, planeando e implementando estrategias, para después analizar los resultados. Un elemento al que se le dio primordial importancia fue la flexibilidad que presenta un proyecto de intervención didáctica al estar evaluándose conforme se implementan las estrategias.

Durante la implementación del proyecto se plantearon secuencias de situaciones didácticas (Brousseau, 2007), esto con la finalidad de que los alumnos desarrollaran el conocimiento matemático y a su vez se enfrentaran a problemas con una mayor complejidad cada vez.

Este proyecto fue planificado a partir de los estándares curriculares que se proponen dentro del eje Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico en el Programa de estudios vigente (SEP, 2011), mismos que estipulan el conocimiento que los alumnos deben de dominar al finalizar el periodo escolar, siendo los siguientes:

- Lea, escriba y compare números naturales, fraccionarios y decimales.
- Resuelva problemas aditivos con números fraccionarios o decimales, empleando los algoritmos convencionales.
- Resuelve problemas que impliquen multiplicar o dividir números fraccionarios o decimales entre números naturales, utilizando los algoritmos convencionales.

ISSN: 2594-1046

4. TRABAJANDO CON FRACCIONES PARTE-TODO

El proyecto de intervención estuvo conformado por distintas fases, cada una con propósitos delimitados que llevaban al dominio gradual de saberes matemáticos referentes al tema y a los estándares curriculares.

La primera fase diagnóstica tuvo como función apoyar a la delimitación del tema, así como también fue de ayuda para reflejar de una forma más detallada las áreas de oportunidad que presentaban los alumnos en cuanto al tema de fracciones.

En la fase diagnóstica se implementó una herramienta conformada por cuatro problemas con el fin de identificar el nivel de dominio de cada uno de los estándares curriculares por parte de los alumnos. Los resultados de dicha herramienta mostraron que el 80 % de los alumnos que tenían dominio de la escritura de números fraccionarios, el 35 % de los alumnos logró comparar más de la mitad de los números fraccionarios propuestos, 20% de los alumnos logró resolver problemas aditivos con fracciones y solamente el 10% de los alumnos logró resolver problemas con el uso de división y multiplicación de fracciones.

Posterior a la fase diagnóstica se plantearon cuatro fases de intervención en el área disciplinar, cada una de ellas dio prioridad a trabajar los distintos estándares curriculares. La segunda fase tuvo la finalidad de que los alumnos que aún no completaban el proceso de comprensión y aprendizaje de lectura y escritura de números fraccionarios lograran el dominio. La tercera fase intentó que los alumnos lograran comprender que las fracciones tienen distintas magnitudes según la unidad que se fraccione, así como también que la magnitud de éstas depende tanto del numerador como del denominador. La cuarta fase pretendió que los alumnos aplicaran sus conocimientos básicos de suma y resta, así como la escritura y comparación de fracciones al resolver problemas aditivos con el uso de fracciones. La quinta fase propuso a los alumnos resolver problemas de división y multiplicación de fracciones, para finalizar con una evaluación final para conocer los avances que se obtuvieron a partir de la implementación del proyecto.

Durante la aplicación de las distintas estrategias fue posible encontrar que los alumnos comprendieron que para fraccionar la unidad no sólo es necesario partir en determinado número una unidad, sino que estas particiones tendrán que ser equitativas. Las fracciones fueron trabajadas como

ISSN: 2594-1046

medida con mayor facilidad, aunque algunos alumnos siguieron mostrando dificultad con las fracciones que representaban una cantidad mayor a la de una unidad.

Como parte final del proyecto de intervención se llevó a cabo una evaluación mediante una nueva herramienta arrojando como resultados un aumento de nivel de conceptualización en los distintos estándares curriculares, con lo que es posible reflexionar que conforme aumenta el número de alumnos que conceptualiza adecuadamente saberes básicos como la lectura y escritura de fracciones, a su vez aumenta el número de alumnos que es capaz de resolver problemas tanto aditivos como multiplicativos con el uso de fracciones.

5. CONCLUSIONES

Este proyecto de intervención didáctica nos ayuda a reflexionar sobre la importancia que tiene el orden en que se trabajen los distintos temas en el área de matemáticas, es claro cómo es necesario que los alumnos posean una concepción clara sobre lo que es y representa una fracción, para poder compararla con distintos números posteriormente y asimismo pasar después a resolver problemas que impliquen el uso de algoritmos básicos de forma convencional con números fraccionarios.

Los alumnos desarrollarán sus habilidades y destrezas a partir de lo sencillo hasta llegar a una complejidad mayor, por tanto, el docente deberá tener claro qué saberes previos poseen sus alumnos, para poder partir de ahí a nuevos conocimientos.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la Teoría de las Situaciones Didácticas*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Fierro, C., Fourtoul, B., y Rosas, L. (2008). Transformando la práctica docente: una propuesta basada en la investigación-acción. México: Paidós.

SEP. (2011). Programas de estudio. Guía para el maestro. Sexto grado. En SEP, *Programa de Estudio de Sexto grado* (pág. 64). México: SEP.

Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

CÁLCULO APROXIMADO DEL VOLUMEN DE UNA SANDÍA Y UN FLORERO

Rafael Pantoja Rangel,
CUCEI, Universidad de Guadalajara, rpantoja@prodigy.net.mx

Rosaura Ferreyra Olvera
CUCEI, Universidad de Guadalajara, ferreyrarosaura@gmail.com

Ricardo Ulloa Azpeitia
CUCEI, Universidad de Guadalajara, ricardo.ulloa@cucei.udg.mx

Resumen

En este reporte se presentan los resultados obtenidos de un taller realizado con alumnos de nivel superior, en el que se trabajó con actividades de aprendizaje sustentadas en situaciones problema de la vida cotidiana, el caso de un recipiente y de una sandía, cuyo propósito fue promover la enseñanza y aprendizaje del cálculo de volumen de sólidos de revolución a partir de la modelación matemática. Se implementó la metodología de trabajo colaborativo, se hizo uso del video digital y los software Tracker y GeoGebra, con la finalidad de propiciar un aprendizaje significativo del cálculo de volúmenes por el método de sólidos de revolución, que una vez analizados los instrumentos de control y evaluación resultó ser un estudio positivo.

Palabras clave: Integración, Sólido de revolución, Modelación, Grupo colaborativo, Ajuste de curvas.

1. INTRODUCCIÓN

A lo largo de la historia se ha visto que los conocimientos que se adquieren en el aula, por lo general, se quedan sólo en ejemplos en papel y lápiz, ya que pocas veces son llevados a la práctica. Es por esto que se presenta una propuesta didáctica para que los alumnos se den cuenta y relacionen las aplicaciones del cálculo en su entorno, específicamente del cálculo del volumen de sólidos de revolución obtenidos de objetos cotidianos, por ejemplo: una sandía, una manzana, un huevo, un foco, un lápiz, un florero, entre otros. El estudio se centra en investigar los efectos que tiene el empleo de la modelación matemática de situaciones problema de la vida diaria y el trabajo colaborativo, con el apoyo del software Tracker y GeoGebra, sobre el aprendizaje de los alumnos en el tema de sólidos de revolución: el caso de la sandía y de un florero.

Se coincide con la apreciación de Flores, Valencia, Dávila y García (2008) quienes señalan que antes del cálculo, las matemáticas sólo describían lo fijo y estático, pero con el cálculo, se ha podido describir el movimiento y lo dinámico; al establecer una comparación, podría decirse que antes del cálculo las matemáticas sólo proporcionaban fotografías de la realidad, y después de él, películas. Se afirma, sin lugar a dudas, que un buen curso de cálculo cambia la percepción del estudiante, lo cual es uno de los propósitos de esta investigación, que se sustenta en la modelación matemática, la metodología ACODESA y las Tecnologías de la Información (TIC) con el propósito de propiciar el aprendizaje de los sólidos de revolución.

Heck (2008) se plantea la pregunta: ¿Cuál es el volumen y el área de la superficie de un huevo de gallina? Para dar respuesta a esta cuestión, en su estudio se utilizó la modelación con el álgebra, la geometría y técnicas de regresión, apoyadas en el software GeoGebra. Es importante señalar que el empleo de situaciones problema cotidianas (Hitt y Gonzalez, 2015) involucra contextos que suelen ser interesantes para los estudiantes por ser familiares y encontrarse en su vida diaria. Por tal motivo, el taller describe una propuesta, en la que se plantea la situación problema de calcular el volumen de un florero, objeto de adorno en un hogar mexicano y adquirido en una fábrica de vidrio soplado de la cuna alfarera de Tonalá, Jalisco, México, y una sandía, rica fruta mexicana (figura 1).

Como una acción de la propuesta, previamente se calcularon los volúmenes, para el recipiente con el llenado de agua con una medida de un litro y para la sandía con una báscula (para lo cual se investigó su densidad promedio) y con el principio de Arquímedes.


Figura 1. Fotos de la sandía y del florero.

2. METODOLOGÍA

La modelación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es un tema que en las últimas décadas ha cobrado relevancia, porque se ha incorporado a los diferentes currículos escolares en todos los niveles educativos. Se han publicado diversos trabajos que sugieren que la modelación matemática, particularmente concebida como una Práctica Social, tiende puentes entre la escuela y su entorno (Arrieta y Díaz, 2015; Hitt y González, 2015). En algunas investigaciones (Pantoja, Ulloa, y Nesterova, 2013; Pantoja, Guerrero, Ulloa, y Nesterova, 2016), se han dedicado a estudiar las

ISSN: 2594-1046

actividades que requieren de una destreza eficiente y creativa, con el propósito de articular y comprender diferentes representaciones de situaciones de la vida cotidiana y relacionarlas con la enseñanza y aprendizaje de la matemática, en las que se tratan situaciones del contexto familiar al estudiante, como son el llenado de recipientes, el atletismo, lanzamiento de objetos, giro y desplazamiento sin resbalar de una rueda, entre otros.

La modelación permite al profesor considerar el entorno cultural y social, para abordar situaciones problema dentro de contextos familiares vinculados a los alumnos. Es decir, el profesor tendrá en esta actividad muchas opciones que le favorecen para relacionar los conceptos matemáticos con el mundo real, de tal manera que los alumnos puedan vislumbrar y otorgar una mayor importancia a las matemáticas escolares.

Desde esta mirada, la modelación matemática promovió la construcción de significados de objetos de la vida cotidiana y su relación con el cálculo integral, de una manera más cercana al área de trabajo de los estudiantes, en este caso, el aprendizaje del cálculo de volumen de sólidos de revolución.

3. FASE EXPERIMENTAL

La fase experimental dio inicio sin problemas y se conformaron los grupos colaborativos de manera arbitraria: cuatro con tres, dos con cuatro y uno con dos alumnos. Enseguida se les proporcionaron los materiales en formato digital: el manual de Tracker y GeoGebra, dos videos correspondientes a la situación problema llenado de recipientes.

Cabe mencionar que al menos un integrante de cada equipo dispuso de una computadora de escritorio, lo que le permitió trabajar con el software GeoGebra y manipular el video con Tracker. En esta sesión se describió de manera general el funcionamiento del software Tracker y sus características. Los prerrequisitos considerados para el taller fueron trazar gráficas de funciones, métodos de integración, calcular longitudes, áreas y volúmenes, avalados por el profesor del curso con base en los exámenes aplicados en el desarrollo del curso.

Se les entregó la hoja de trabajo para desarrollar la actividad, el video previamente grabado de la situación problema a resolver, el manual del Tracker y del GeoGebra. Las actividades, las interacciones alumno-profesor, las hojas de trabajo que se les proporcionaron y la encuesta de opinión

ISSN: 2594-1046

aplicada, arrojaron evidencia de que, mediante el trabajo individual y colaborativo, con el Tracker y GeoGebra, los alumnos lograron aproximar los volúmenes de los sólidos de revolución.

Para la fase experimental se dispuso de un grupo de 28 alumnos de ingeniería de segundo semestre, a quienes se les dio una introducción sobre la influencia que tienen las matemáticas en nuestro entorno, específicamente en el tema de sólidos de revolución, por ejemplo, se les cuestionó sobre cómo calcular el volumen de un extinguidor (ubicado en el laboratorio), como una situación problema común, es decir, como un ejemplo de que la modelación matemática es un proceso involucrado en el contexto cotidiano.

Se continúo con el ejemplo del extinguidor, se hizo un dibujo de acuerdo a su forma, en este caso un cilindro, más la parte superior. Se midió su radio y la altura para aplicar la fórmula $V_{cilindro} = 2\pi rl$ y aproximar su volumen. Se les explicó a los estudiantes que existen otras situaciones en la vida diaria (como la planteada) que se relacionan con el cálculo de sólidos de revolución, por ejemplo: una rueda, el llenado de recipientes, el volumen de balón, una copa, una taza, entre otros objetos de la vida cotidiana, que, si bien ya han sido tratados y se ha calculado su volumen, en las áreas del conocimiento respectivas, no se les relaciona con la matemática escolar.

Se trabajó en un ambiente de trabajo colaborativo y se les proporcionó el video sobre el llenado del recipiente y la sandía, el manual del software Tracker y del GeoGebra. Se les pidió manipular los videos con Tracker, a partir de lo cual se generaron la gráfica y los datos correspondientes al llenado y a la forma de la periferia (contorno) del recipiente. Posteriormente se exportaron los datos a GeoGebra, para calcular la aproximación de los sólidos de revolución de la modelación del recipiente y de la sandía. Las actividades se grabaron en video para su posterior análisis.

4. HOJA DE PREVALORACIÓN

Con la finalidad de adentrar a los alumnos en la propuesta, se les pidió que relacionaran un conjunto imágenes de objetos (Figura 2) de la vida cotidiana con una figura geométrica. Se observa que varios alumnos no tienen una idea clara para relacionar las matemáticas con su entorno, incluso, se menciona que ocho alumnos no contestaron nada al respecto. Por ejemplo, eso de que la forma de huevo es una esfera o que una maceta tiene la forma de cono, dista mucho del conocimiento cultural que los alumnos tienen de su contexto, porque recordemos que son alumnos de segundo semestre de

ISSN: 2594-1046

ingeniería y por lo tanto tienen antecedentes generados por su historial educativo y por la matemática escolar cursada.

Figura 2. Imágenes de objetos de la vida cotidiana y su relación con figuras geométricas.

5. APROXIMACIÓN DEL VOLUMEN DEL RECIPIENTE

Se les presentó el florero (recipiente) de la Figura 1 a los alumnos y se les pidió que describieran la situacion problema e indicaran alguna forma para encontrar su volumen. De acuerdo a los resultados mostrados (Figura 3), se observa que tienen algunas ideas, pero no se preguntan cómo encontrar la función que modele esa situación, que es la ayuda que brinda Tracker.

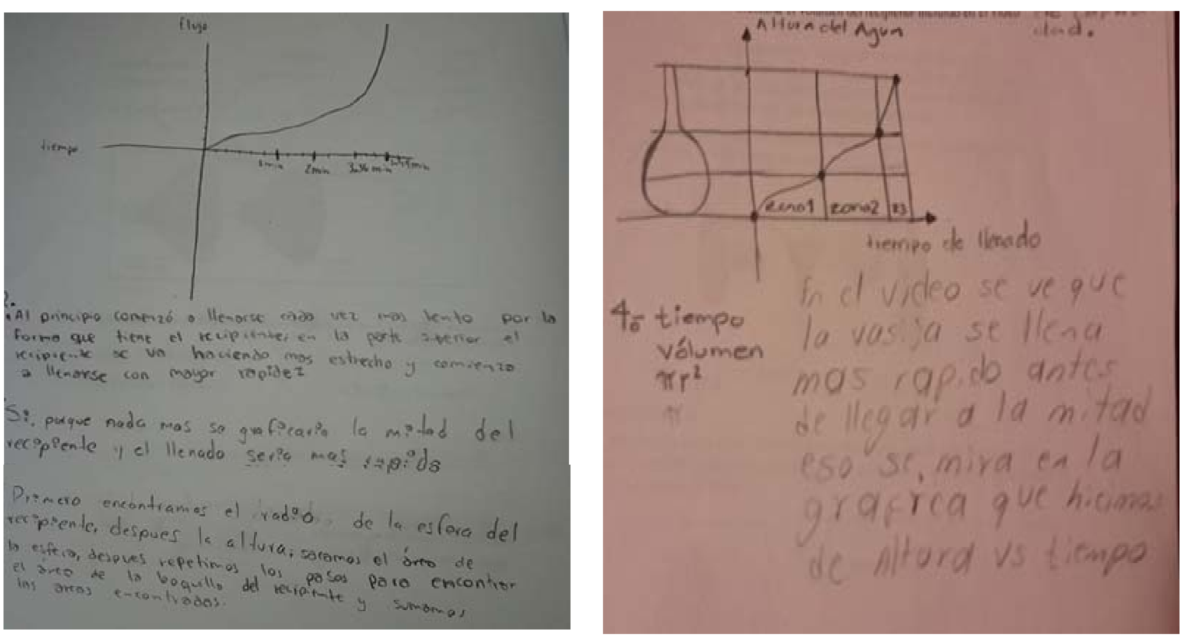


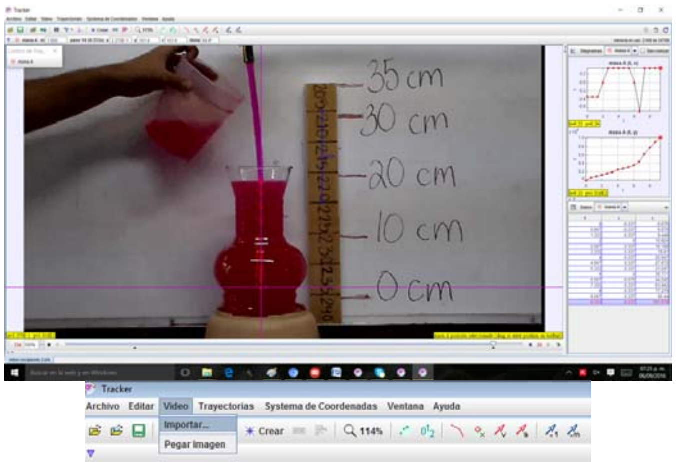
Figura 3. Función que representa el llenado del recipiente

Ya en el taller, se les explicaron aspectos del software Tracker, su funcionamiento, uso, herramientas y comandos, y se procedió a analizar el video proporcionado. Se les explicó que el

Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

sistema de coordenadas se ubica de acuerdo a la conveniencia del usuario, al igual que el funcionamiento de sus rutinas: el manejo de la vara de calibración, el ajuste de cuadro por segundo, la selección de la parte del video a analizar, la obtención de la trayectoria del objeto en cuestión, la tabla de datos y las diferentes gráficas (Figura 4a) que proporciona este software. Se explicó a los alumnos cómo insertar un video en Tracker: Video ➔ Importar (Figura 4b). Se les comentó a los estudiantes que Tracker trabaja en un ambiente Windows, es decir, pueden guardar, abrir, copiar o imprimir un archivo.



a

b

Figura 4. Pantalla principal de Tracker

De igual forma, se les mencionó que es importante que en el set de grabación se coloque una unidad de medida visible relacionada con su magnitud, porque será la interfaz entre el mundo real y lo digital. En la Figura 5 se muestra la tira de papel a un costado del recipiente, donde cada cuadrito mide 1 cm.

ISSN: 2594-1046

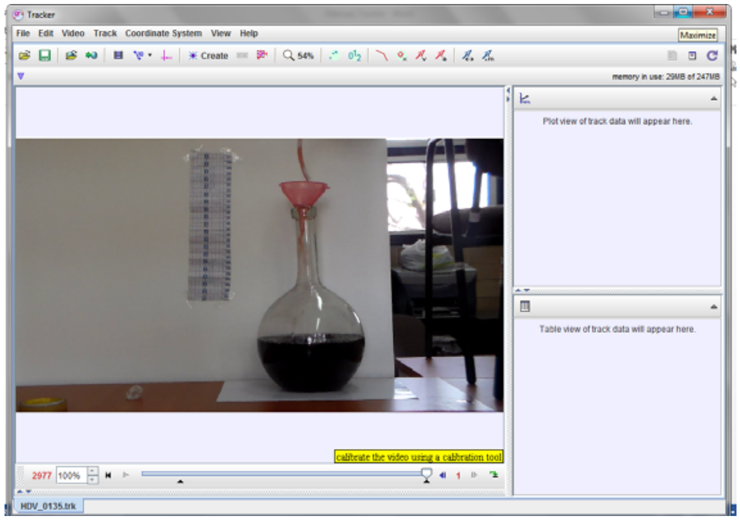
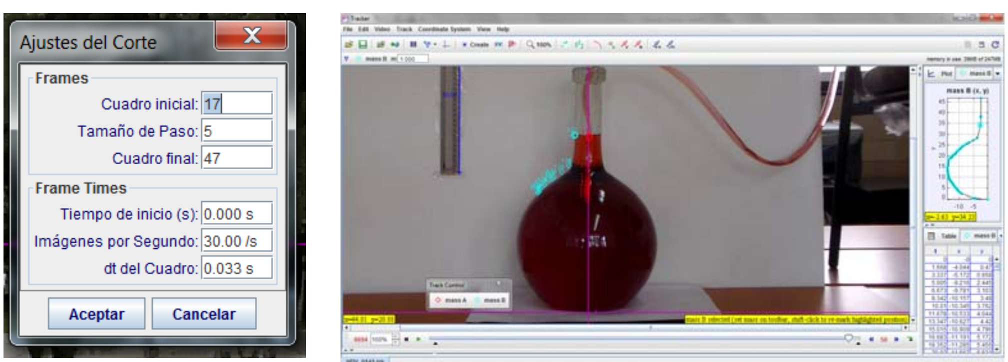


Figura 5. Elementos de Tracker: Unidad de medida, ejes coordenados y video.

Cuando el video a analizar integra más contenido que el requerido para describir el movimiento del objeto, se le sugiere al usuario que con los controles de video seleccione el segmento que se empleará, además se debe elegir el número de cuadros que serán referencia, por ejemplo en la Figura 6a se inicia la marca del primer punto en el cuadro inicial 17 y el siguiente será 5 cuadros adelante, *i.e.* Tracker adelanta el video para marcar el punto sobre la trayectoria en el cuadro 22 y así hasta llegar hasta el cuadro 47. Paralelo a este procedimiento se señalan las marcas en la gráfica que se presenta en la pantalla del computador, en la parte superior derecha y como datos en la parte inferior derecha. Figura 6b.



a b

Figura 6. Rutina de Ajuste de corte y elementos de la situación problema.

Como siguiente paso, se sitúan los ejes coordenados en el lugar que beneficie la exploración de la trayectoria de objeto, en este caso, con el eje vertical en el centro del recipiente. La vara de

ISSN: 2594-1046

calibración se activa y se ubica sobre la unidad de medida que se colocó en el video (Figura 7). Se les explicó a los alumnos que la vara de calibración (segmento de línea azul que se acorta o alarga) se coloca en la referencia que se tiene en el video como interfaz entre la medida real y los pixeles de la pantalla.

Lo único que resta definir es ***Crear*** una ***masa puntual*** para indicar a Tracker que es un solo objeto el que se moverá, que en este caso será el llenado del recipiente. Así que todo está listo para señalar la trayectoria con ***Shift + clic.*** Una vez creada la masa puntual, enseguida se marcará la trayectoria del objeto (para este ejemplo es el llenado del recipiente), situamos el mouse sobre el borde izquierdo del recipiente (en el cuadro inicial) y se oprime ***Shift + clic***, cuyo efecto es que cambia el puntero del mouse, y se marca el primer punto sobre el video, aparece un punto sobre la gráfica y las coordenadas en la tabla de datos (Figura 6). Si no pasa esto, entonces hay que revisar el procedimiento.

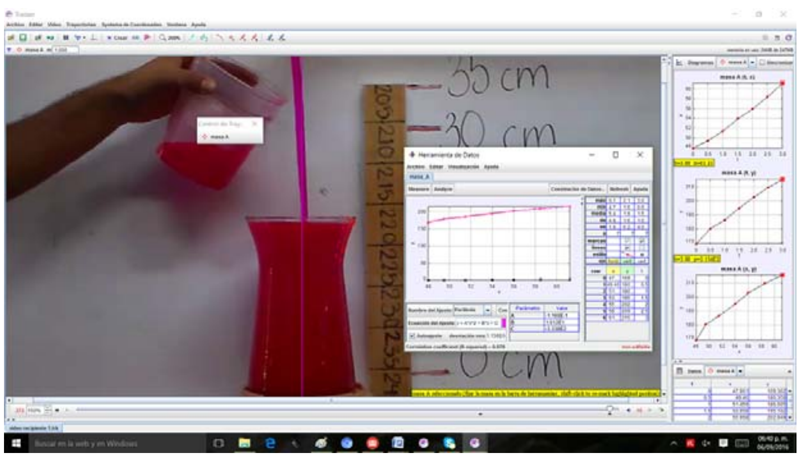


Figura 7. Llenado de recipientes y sus representaciones: visual, numérica, gráfica

Una vez que se termina el proceso de señalización de la trayectoria, se obtienen tres gráficas (***x*** *vs.* ***t***, ***y*** *vs.* ***t***, ***y*** *vs.* ***x***) relacionadas con el llenado del recipiente (Tracker permite otras variables), que se activan en la opción ***Diagramas***. Los alumnos tuvieron dudas sobre el manejo del software, en específico, como las siguientes: cómo acotar el video para analizar sólo la parte de interés, como ubicar y señalar la magnitud de la "***vara de calibración***", cómo elegir el ***Tamaño de paso***, cómo crear la ***masa puntual*** y el inicio del proceso de registrar los puntos de la trayectoria.

ISSN: 2594-1046

En particular, durante la actividad del llenado de recipientes se mostró cómo exportar los datos obtenidos del análisis del video de Tracker a GeoGebra, porque la rutina de ajuste de funciones de Tracker es limitada, lo que no sucede con el GeoGebra.

Durante el desarrollo de la actividad, la descripción del comportamiento de los estudiantes se refleja en la respuesta que proporciona el equipo 4 a la pregunta ¿El ajuste se puede representar con una sola función durante el proceso del llenado? y que fue: “No, necesitamos dos ajustes, en nuestro caso utilizamos un ajuste con la mitad de los datos y otro con el resto, ya que de esa manera podemos obtener un mejor modelo que representa el llenado del recipiente, porque con un solo ajuste nuestro margen de error es muy alto a la hora de calcular el volumen del recipiente”.

Esta pregunta corresponde a la segunda parte en la hoja de trabajo del llenado del recipiente y, como se observa, los estudiantes tenían la idea que con un solo ajuste iban a tener un error muy alto a la hora de calcular el volumen, en cambio, si utilizan dos o más, se tendría una mejor aproximación. Después de entregados los reportes, al cuestionar a los estudiantes sobre cuál fue el mejor ajuste para encontrar el volumen del recipiente, el equipo 5 comentó “un polinomio de grado 5: 11.939 litros”, pero el equipo 2 interrumpió y dijeron que “no, es mejor utilizar dos ajustes (Figura 8) para tener un margen de error más pequeño al momento de aplicar la integral para obtener el volumen del sólido de revolución: 9.756 litros”.

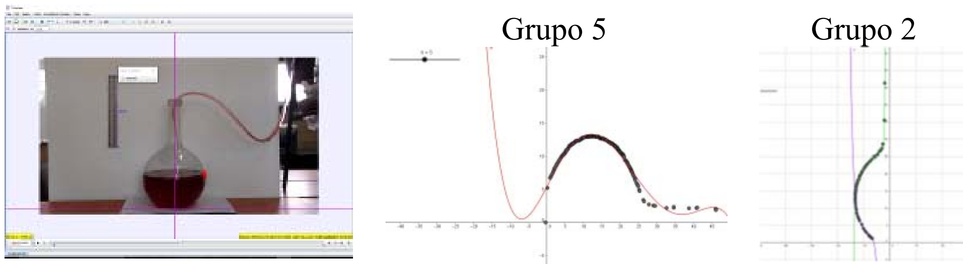


Figura *8.* Ajuste del recipiente con dos polinomios de grados 5 (color morado) y 7 (color verde)

Los demás equipos realizaron uno o dos ajustes, por ejemplo, los equipos 1, 4 y 6 realizaron dos ajustes, pero no terminaron de calcular el volumen del recipiente y el grupo 7, con un ajuste con polinomio de grado 6, encontró un volumen de 17.06 litros.

En conclusión, como se muestra, se obtuvieron distintos volúmenes del recipiente, lo cual provocó discusión entre los grupos colaborativos y se concluyó que la mejor aproximación al volumen fue el propuesto por el equipo 2, porque empleó dos ajustes, con base en la forma del recipiente y por

ISSN: 2594-1046

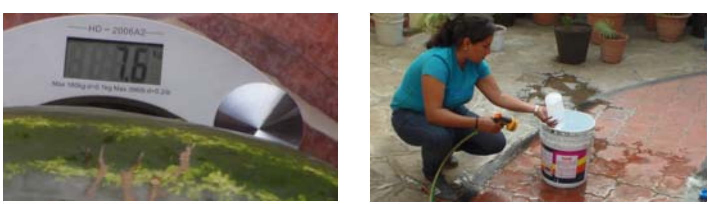
tanto, una mejor aproximación al volumen del recipiente: 8.150 litros. Cabe mencionar que el volumen encontrado de manera matemática incluye el grosor del recipiente, además de los errores que haya durante el cálculo, detalles que se deben tomar en cuenta pues al comparar el valor del volumen obtenido de manera analítica con la realidad, no se consideró y eso incrementa el error.

Al finalizar la primera sesión se cubrió lo planeado y se dejó como tarea extraclase, replicar la actividad realizada en el aula: seleccionar un recipiente, grabar el video de llenado, analizarlo con Tracker y elaborar un reporte que se presentó ante sus compañeros al inicio de la siguiente sesión.

6. APROXIMACIÓN DEL VOLUMEN DE LA SANDÍA

Para el segundo día de taller, la primera actividad fue la presentación del llenado de recipientes que los alumnos desarrollaron como tarea extraclase. Se hicieron las siguientes observaciones: la grabación del llenado no se mostraba estable, el liquido vertido no fue constante, no había unidad de referencia. A pesar de estos problemas, lograron modelar con Tracker el llenado del recipiente seleccionado, es decir, se motivaron y de manera incipiente tal vez, se propició en ellos un pensamiento matemático, básico para la siguiente acción: el cálculo del volumen de la sandía.

Luego de una explicación y aclaración de las dudas generadas por la réplica realizada por los estudiantes de la tarea extraclase, se les entregó la hoja de trabajo y el video previamente grabado de la situación problema a resolver: Aproximar el volumen de una sandía. Antes del trabajo de los estudiantes, el volumen de la sandía fue calculado por los instructores del taller, pues se consideró propicio generar elementos para comparar los resultados de los alumnos. Se empleó una báscula para aproximar el volumen (Figura 9a), para ello se consultó en internet la densidad de la sandía y se aproximó el volumen a 7.6 kg. Como un segundo método, se utilizó el principio de Arquímedes (Figura 9b) y la sandía se sumergió en una cubeta de 21 litros de agua y desalojó la cantidad de agua equivalente a 7.800 litros de agua.

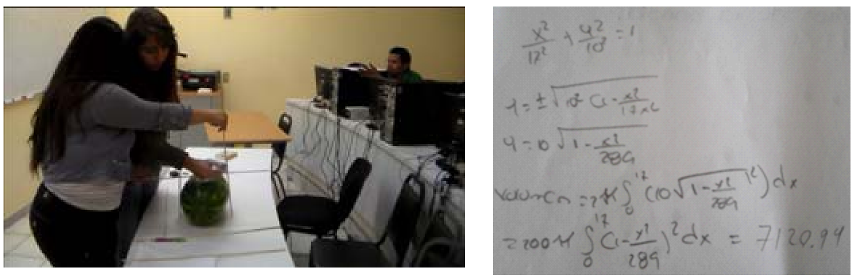


a b

ISSN: 2594-1046

Figura 7. Aproximación del volumen de la sandía.

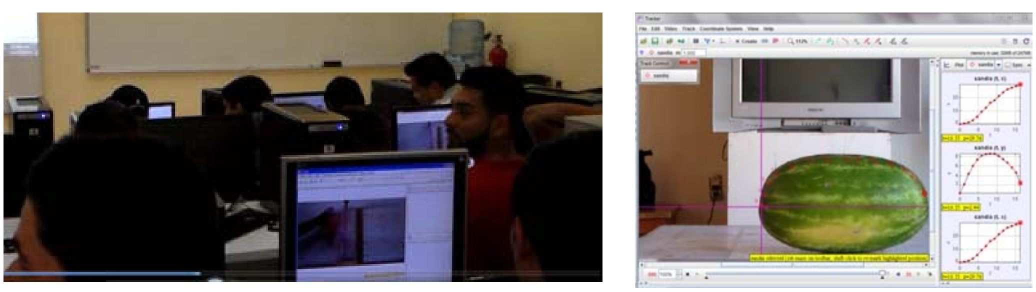
Por su parte, los alumnos consideraron la proyección de la sandía sobre el plano XY como una elipse y dos de las alumnas con palitos rectos, (figura 10ª), aproximaron los ejes mayor y menor de la elipse, 34 cm. y 20 cm., respectivamente. Estos valores, se sustituyeron en la ecuación de la elipse (Figura 10b), se empleó la fórmula, tratada en el aula, de los sólidos de revolución con el GeoGebra y aproximó el volumen de la sandía. Sin embargo, es importante señalar que no todos los alumnos obtuvieron este resultado, ya que algunos dijeron que la forma geométrica a la que se asemejaba la sandía era un óvalo, así que al preguntárseles de la ecuación de un óvalo no supieron qué contestar.



a b

Figura 8. Cálculo de las medidas de una sandía a partir de la ecuación de la elipse.

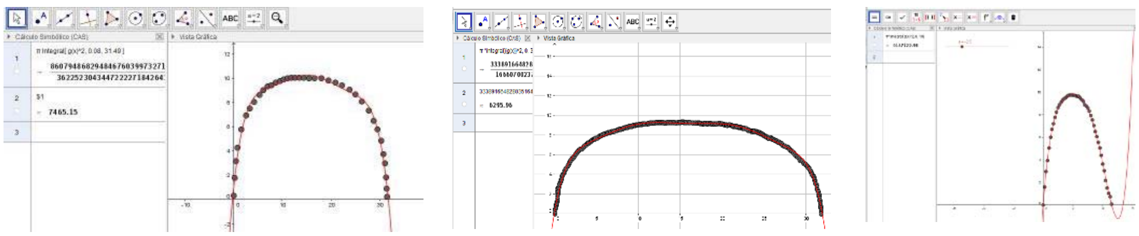
En el empleo de las TIC para el acercamiento al volumen de la sandía, los alumnos (Figura 9a) insertaron el video en Tracker e iniciaron el proceso: seleccionar el segmento de video, colocación de los ejes coordenados, ubicación de la vara de calibración y la señalización de la periferia de la sandía (Figura 9). Se obtuvieron los datos, que se exportaron a GeoGebra, porque la rutina de ajuste de funciones del Tracker es limitada.



a a

Figura 9. Análisis realizado por los alumnos del video de la sandía con Tracker

En la Figura 10 se presentan tres resultados reportados por los alumnos, que no coindicen entre ellos, porque una vez que se le cuestionó el procedimiento realizado con Tracker, comentaron que la vara de calibración no la ubicaron de manera adecuada sobre la unidad de referencia colocada en el video. Ya antes se comentó de la importancia de señalar en forma precisa la vara se calibración, porque es la interfaz entre el mundo real y la computadora. De acuerdo a los resultados se concluye que la variabilidad de los resultados que se generaron por circunstancias tales como: la defectuosa señalización de la periferia que implica datos erróneos, el grado del polinomio de ajuste que cada equipo seleccionó y la colocación de los ejes coordenados, claro, además de la habilidad para manipular el software.



Grupo 1	Grupo 2	Grupo 4
7465.15 cm^3	6295.96 cm^3	6147.12 cm^3

Figura 10. Aproximación del volumen de la sandía con GeoGebra.

7. OPINIONES DE LOS ALUMNOS

Al final de la hoja de trabajo se les cuestionó a los estudiantes sobre la situación problema:

Pregunta ¿Conoces alguna figura geométrica que se asemeje a la forma de la sandía? Si es afirmativo, entonces dibújala, investiga su ecuación.

Respuesta: Sí, se parece a una elipse.

A partir de la conclusión dada por el equipo 2, se observa que logran calcular el volumen de la sandía y lo relacionan con las matemáticas escolares, además de darse cuenta que los resultados afirman que al aproximar el volumen de un objeto de la vida cotidiana no es exacto el resultado, pues la modelación matemática, en este caso, aproxima el volumen del objeto de la vida cotidiana, como se señala en la:

Respuesta: Si tenemos que decidir cuál volumen es más aproximado al real…decidimos que fue el obtenido por Tracker, ya que concluimos que la sandía no es una elipse en revolución…tiene algunas deformaciones.

Las respuestas emitidas por los estudiantes corroboran que los resultados del estudio fueron positivos:

Pregunta: ¿Qué aspectos llamaron más tu atención?

Lo alumnos coinciden en que les llamó la atención observar cómo la tecnología y el trabajo a lápiz y papel es importante para aprender matemáticas, además utilizar para las aplicaciones que hay en la vida cotidiana:

Respuesta 1: "El uso de Tracker y GeoGebra me gustó porque pude ver que las matemáticas y el cálculo que aprendí en el aula sirven en la vida real".

Respuesta 2: "El cómo la tecnología nos ayuda a relacionar la matemática con situaciones cotidianas, algo que no es común ver".

Respuesta 3: "Que antes no encontraba la relación de funciones o cosas matemáticas con la vida cotidiana y que el software de matemáticas nos ayuda a resolver y comprender más fácilmente los problemas".

Respuesta 4: "Hubo muchos aspectos que llamaron mi atención, pero el que más fue el uso de los programas (Tracker) pues motiva e incluso facilita cómo pasar de situaciones cotidianas a las matemáticas".

Pregunta: ¿Volverías a tomar un taller de sólidos de revolución? ¿Por qué?

Respuesta 1: "Sí, porque con actividades como éstas aprendes mejor las matemáticas y su relación con tu entorno y es que a veces me pregunto, ¿Esto en que sirve? ¿Dónde las aplico?".

Respuesta 2: "Porque me agrada y me motiva que pueda utilizar las matemáticas en cosas que antes no me hubiera imaginado, como el volumen de una sandía".

Respuesta 3: "Porque con actividades cotidianas, aprendo mejor los conceptos que veo en la escuela".

Todas las respuestas dadas a esta pregunta afirman que los alumnos volverían a participar, porque les ayudó a entender mejor el concepto matemático tratado, además de relacionarlos con situaciones cotidianas.

Para concluir el análisis de la encuesta, se cuestionó a los estudiantes sobre las actividades realizadas y las respuestas fueron diversas, algunas enfocadas al gusto por el trabajo colaborativo, el uso de Tracker y GeoGebra y mostrar agradecimiento al profesor.

Respuesta 1: "Me gustó ver que las gráficas, funciones y fórmulas matemáticas se pueden aplicar en la vida real".

Respuesta 2: "Me gustaron mucho las actividades que realizamos, me parecieron muy importantes, fueron de mucha ayuda, el compañerismo excelente, me gustaría que mis clases de matemáticas tuvieran más actividades así".

Respuesta 3: "Me llamó la atención ver cómo lo visto en clase se puede reflejar en actividades diarias, algo que a veces no lo observamos porque las matemáticas por lo regular se me hacen aburridas, pero esto sí me gustó".

Respuesta 4: "Muy buen taller, sería bueno que durara más tiempo o que se realizaran más actividades como éstas en el salón, pero en equipo porque así puedes aprender mejor y es más divertido".

Respuesta 5: "Pienso que deberían realizar más dinámicas grupales como éstas en las clases de matemáticas, sobre todo en conceptos que no son muy claros, como ahorita que aclararon que los sólidos de revolución y sus aplicaciones ya los entendí mejor".

Respuesta 6: "Me gustó trabajar en equipo, así las actividades fueron fáciles de resolver y mis compañeros me ayudaron a entender cosas que se me complicaron. Sugiero más actividades de éstas en cálculo".

8. ANÁLISIS DE LA ENCUESTA

Las respuestas dadas por los estudiantes afirman que es mejor aprender de manera colaborativa, porque exponen sus ideas, escuchan a sus compañeros, llegan a acuerdos y conviven para propiciar aprendizaje. El taller les gustó y aseveran que trabajar con los paquetes Tracker y GeoGebra favorece

ISSN: 2594-1046

la comprensión de las matemáticas en situaciones reales, e incluso, aumenta su interés y motivación para aprender.

9. ANÁLISIS DEL OBJETO DE LA PROPUESTA

Con base en las evidencias del estudio se observó que el efecto que produce la modelación matemática en situaciones de la vida cotidiana fue positivo. Es decir, los alumnos mostraron competencias y habilidades para interpretar situaciones reales, relacionar actividades como el llenado de recipientes y el volumen de la sandía con los sólidos de revolución y se promueve la interacción entre sus compañeros para fortalecer ideas, argumentos y conocimientos matemáticos.

Por otro lado, el trabajo colaborativo propició la discusión de ideas, se establecieron acuerdos en beneficio de todo el grupo, elaboración de argumentos y conclusiones matemáticas que trajeron consigo un aprendizaje significativo. Con base en esto, se concluye que el objetivo se alcanzó de manera satisfactoria y conforme a lo planteado en la propuesta. Fue importante incluir actividades con situaciones del entorno de los estudiantes, porque mostraron interés y motivación al trabajar con circunstancias relacionadas con su entorno, ya que expresaron su satisfacción por esta forma alternativa para aprender. El aprendizaje se dio de una manera diferente a un aprendizaje tradicional, los alumnos trabajaron a su propio ritmo sin tener la “presión del profesor” como varios expresaron.

Los alumnos opinaron que este tipo de actividades son muy importantes porque aprenden a relacionar los sólidos de revolución con su entorno, de una forma más sencilla que en el aula de clases.

Los cálculos de las actividades propuestas contribuyeron al aprendizaje de las matemáticas desde otra perspectiva en la motivación y el interés de los alumnos, debido a que lo invitan a la creatividad, que imagine las gráficas o las funciones que relaciones la situación y que se genere un ambiente colaborativo, para la descripción de la respuesta más adecuada.

Al trabajar con los paquetes Tracker y GeoGebra, el alumno desarrolla habilidades para interpretar situaciones reales, establecer relaciones entre las matemáticas y conceptos, como aplicar el concepto de sólido de revolución en el diseño de: recipiente y sandía, además de calcular las integrales definidas para resolver problemas de volumen.

Influyó de manera importante en su vida escolar, pues según los comentarios, jamás se hubieran imaginado que con el análisis de una fotografía o video se aprende matemáticas, sobre todo con temas de cálculo que, como ellos lo expresan, "son difíciles de comprender".

De acuerdo al análisis de las fuentes de información recopiladas, se concluye que el empleo de la modelación matemática propicia resultados favorables en el aprendizaje del tema de sólidos de revolución.

10. CONCLUSIONES

En la investigación se notó que las actividades que incluyen situaciones problema relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, apoyadas en conjunto con el empleo de la tecnología y el trabajo colaborativo, propician en los alumnos un rol más activo en su aprendizaje, porque es partícipe de la construcción de su aprendizaje, ya que desarrolla capacidades y habilidades que fortalecen la interacción alumno-alumno y alumno profesor, para defender sus ideas y puntos de vista con base en la experiencia adquirida.

El trabajo colaborativo ayudó a reflexionar sobre los conocimientos aprendidos. Se explicaban entre ellos y se percataban si lo habían entendido de manera similar o si había diferencias que pudieran tomarse en cuenta. Además, el trabajo colaborativo ayudó a aumentar el interés, fomentó la creatividad, imaginación, promovió y fortaleció la interacción de los alumnos hacia las matemáticas.

Las situaciones problema analizadas en la investigación generaron ventajas sobre las actividades rutinarias de papel y lápiz, ya que las primeras ayudan a que el alumno relacione las aplicaciones del cálculo en su entorno, porque involucran contextos que son interesantes para el estudiante por ser familiares y encontrarse en su vida diaria. Además, comentaron que les gustaría aplicar lo aprendido en otras situaciones como: volumen de un tinaco, un foco y una probeta.

Otro de los factores importantes fue el uso de la tecnología, que integrada en el diseño didáctico, motivó al estudiante a aprender matemáticas, facilitó la interpretación de datos y gráficos que se obtienen a partir de la puesta en escena de las situaciones problema, porque se genera una reflexión sobre los procedimientos empleados, parámetros y factores que intervinieron en la propuesta.

ISSN: 2594-1046

En el caso de Tracker lo consideran un medio eficaz para reunir y analizar los datos de un problema cotidiano, que se emplea para hacer posible el análisis de algunas situaciones, que de otra manera no sería posible. Permitió la creación de un modelo dinámico que describe el fenómeno a estudiar. De este modo se establece el grado de viabilidad del modelo con la realidad en relación con su grado de predicción de datos reales. Además de que este modelo se compara con los datos reales, es decir, su fiabilidad.

La propuesta fue interesante y se se cumplió con lo propuesto, pero quedan pendientes detalles importantes a tomar en cuenta, tales como: preguntar a los alumnos el concepto de función, fórmulas de figuras geométricas, fallas en las fórmulas de integración, problemas para trazar gráficas, problemas con los comandos de Tracker y GeoGebra.

11. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arrieta, J., y Díaz, M. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(1), 19-48.

Heck, A. (2008). *Mathematical Brooding over an egg*. Obtenido de http://www.maa.org/external_archive/joma/Volume8/Heck/Measurements.html

Hitt, F., y González, A. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. *Springer Science+Business Media*, 201-219.

Pantoja, R. Guerrero, L., Ulloa, R., y Nesterova, E. (2016). Modeling in problem situations of daily life. *Journal of Education and Human Development, 5*(1), 62-76. ISSN: 2334-2978 (Electronic Version). DOI: 10.15640/jehd.v5n1a1. Published by American Research Institute. Recuperado el 23 de Mayo de 2016 de http://jehdnet.com/.

Pantoja, R., Ulloa, R., y Nesterova, E. (2013). La modelación Matemática en situaciones cotidianas con los software AVIMECA y MATHCAD. Revista Virtual *Góndola*, *revista de Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias,* *8*(1), 8-22. ISSN 2145-4981. Recuperado de http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/GDLA/article/view/5020.

LABORATORIOS

Innovación en investigación en Matemática Educativa.

Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa AC (2017) Vol. II

Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

La Emergencia de lo Cuadrático Desde la Modelación del Movimiento

Jaime Arrieta Vera
Instituto Tecnológico de Acapulco, jaime.arrieta@gmail.com

Ricardo Benítez Jiménez
Instituto Tecnológico de Acapulco, benitezjimenezricardo@gmail.com

Onésimo Ramos Magallón
Instituto Tecnológico de Acapulco, oramosmagallon@me.com

Resumen

La emergencia de lo cuadrático desde las prácticas de modelación del movimiento de Galileo es el centro de este laboratorio. En éste se analizan parábolas desde las conjeturas que Galileo realizó en sus prácticas de modelación, restringido el estudio a la parábola como la trayectoria de un proyectil y a la parábola como la relación entre tiempos y espacios recorridos por un esfera en un plano inclinado. Los participantes modelarán los fenómenos de caída libre y tiro parabólico, basándose en las prácticas extraídas de los folios originales de Galileo con ayuda de software de simulación multiplataforma desarrollado por el Laboratorio Virtual Móvil de Ciencias Básicas. La perspectiva teórica que soporta este trabajo es la Socioepistemología.

Palabras clave: Modelación, lo Cuadrático, Parábola, Galileo, Simulación.

1. PROPÓSITO Y ALCANCE

Las intenciones del laboratorio son cinco.

- Realizar una aproximación a los conceptos de experimentación, simulación y modelación, definir las características, diferencias y similitudes de cada uno de estos, así como su importancia en la Matemática Educativa.
- Analizar las prácticas hipotéticas de modelación de Galileo relacionadas con los fenómenos de caída libre y tiro parabólico, levantando hipótesis acerca de las herramientas que utilizó, los procedimientos que desarrolló y los argumentos que esgrimió.
- Realizar una primera aproximación a la validación de las hipótesis a partir del análisis de los folios originales de Galileo.
- Modelar las prácticas hipotéticas de Galileo con apoyo de dos simuladores virtuales que permiten la experimentación de los fenómenos de Caída Libre y Tiro Parabólico.

- Presentar el Laboratorio Virtual Móvil de Ciencias Básicas (LVMCB) como una herramienta que ayude en el proceso de aprendizaje-enseñanza en las instituciones educativas.

La importancia del laboratorio radica en que el análisis de las prácticas de Galileo puede servir de base para diseños de aprendizaje con base en la modelación, particularmente de la modelación del movimiento, a través de simuladores digitales multiplataforma.

1.1. Perfil del participante

Este laboratorio está dirigido a profesores de los niveles secundaria, medio superior y superior de las áreas de matemáticas y física, así como para estudiantes de licenciatura o posgrado de física, matemáticas o matemática educativa con interés en la temática de modelación y aplicaciones y matemática en contexto.

2. MARCO CONCEPTUAL

El soporte de este trabajo está basado en las tres dimensiones de la perspectiva teórica sistémica, la dimensiones didáctica, cognitiva y epistemológica en un contexto social. La Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa responde a la construcción de nuestros sistemas conceptuales desde tres planos, la dimensión didáctica íntimamente relacionada con el saber. El saber no se limita, en esta perspectiva, a definir la relación que este guarda con los objetos matemáticos, sino a posicionar al ser humano, en sus distintas dimensiones. El segundo plano, la práctica social correspondiente a toda actividad humana como base de la construcción de nuestros sistemas conceptuales. El tercer plano, el plano teórico, se ocupa de caracterizar las articulaciones teóricas, con una fuerte evidencia empírica, de nociones, procesos y términos del modelo de construcción social del conocimiento (Cantoral, 2013).

Desde la mirada socioepistemológica, nos distinguimos de perspectivas que aluden a las nociones matemáticas como objetos que precisen ser enseñados desde la obra matemática. En esta investigación privilegiamos la matemática como herramienta además provista de intenciones, de procedimientos y argumentaciones. Una matemática que propicia formas de actuar en contextos específicos.

Concebimos a la modelación como una práctica que articula dos entidades, con la intención de intervenir en una de ellas, llamado lo modelado, a partir de la otra, llamado el modelo. La diversidad, tanto de las entidades que intervienen en la articulación como de la naturaleza de la intervención, hacen posible identificar a la modelación como una práctica recurrente en diferentes comunidades (Arrieta y Díaz, 2015).

Una entidad se convierte en modelo cuando el actor lo usa para intervenir en la otra entidad, por lo que deviene en herramienta. Los entes matemáticos al modelar, son herramientas. Desde esta perspectiva el modelo no existe independiente de la actividad de quién modela.

La articulación de los entes iniciales da lugar a un nuevo ente, al modelo, mo, que resulta adherido a lo modelado, ma. Tal articulación constituye una nueva entidad para la vivencia de quien modela y que podemos denotar (ma, mo) y que nominamos dipolo modélico (DM).

La naturaleza de la modelación radica en la potencia que imprime la articulación y la intencionalidad de intervenir. Esto implica la necesidad de interactuar con la entidad en la que se desea intervenir, es decir la necesidad de la experimentación en sentido amplio. Sin embargo, la interacción con lo que se pretende modelar, no es suficiente para caracterizar a las prácticas de modelación, esta suficiencia se establece con el acto de articular dos entes con la intención de intervenir en uno a partir del otro.

En el trabajo de Galileo articula planos inclinados, con esferas, con datos numéricos, con diferentes figuraciones y con expresiones en lenguaje natural. Para manufacturar el tiempo, Galileo construye diferentes articulaciones, el tiempo-peso, el tiempo-segmento, el tiempo-pulso y el tiempo-número. Estas son herramientas que utiliza Galileo para modelar, las utiliza con diferentes intenciones.

Lo diverso de las herramientas lo otorga la diferencia en las intenciones, argumentos y procedimientos. Esta diversidad se devela en el análisis de estos elementos que hemos llamado deconstrucción (Galicia, 2015).

El esquema de prácticas y herramientas y/o productos que guían al laboratorio parte de la experimentación con el fenómeno, obteniendo datos, se modelan, obteniendo modelos y con estos se simula, obteniendo simulaciones del fenómeno, para concluir se contrastan los datos del fenómeno simulado con el fenómeno.

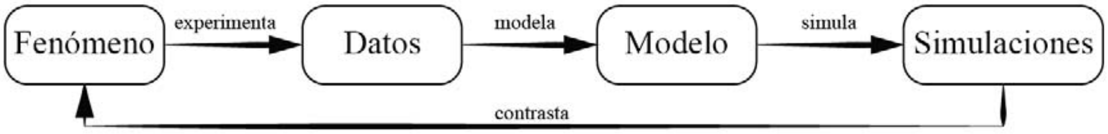


Figura 1. Esquema de prácticas.

3. MÉTODO

El laboratorio se dividirá en tres etapas. En la primera etapa se estudiarán los conceptos de experimentación, simulación y modelación, las prácticas de modelación hipotéticas de Galileo y también la parábola de Apolonio, en la segunda etapa se estudiará la parábola como la trayectoria de un proyectil y la parábola como el modelo gráfico del movimiento de una esfera descendiendo por un plano inclinado, para la tercera etapa se estudiarán estas parábolas a través de dos simuladores de modelación de la Caída Libre y del Tiro Parabólico, así como también la presentación de LVMCB. Para ello se pone en escena un diseño de aprendizaje en cada etapa. Se utilizan simulaciones digitales elaboradas por nosotros, para tablets, smartphones y computadoras y software de matemáticas interactivo, GeoGebra.

En cada etapa se proponen actividades de modelación a los participantes y posteriormente se reflexiona con base en sus producciones y en los folios originales de Galileo.

La dinámica del taller implica trabajo en equipo y discusiones grupales. Los materiales de trabajo son PC´s, folios originales de Galileo, software elaborado en Unity y Geogebra y tres diseños de didácticos.

3.1. Diseños didácticos

En el laboratorio utilizaremos tres diseños didácticos, uno para cada etapa.

Primer diseño. Alrededor del año 1600 el plano inclinado es sugerido a Galileo por Guidobaldo del Monte para estudiar la trayectoria parabólica de los proyectiles. Guidobaldo sostiene, en el primer tratado moderno de mecánica el Liber mechanicorum (1577) (Drake, 1978) que la trayectoria del proyectil es de una parábola invertida, que está formado por la holgura de una cuerda en posición horizontal.

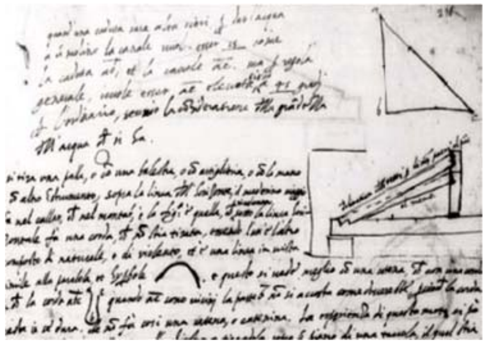


Figura 1. En su "Meditatiunculae" Guidobaldo anotó en 1592 sus resultados sobre la trayectoria de los proyectiles (Reen, 2009)

Galileo Galilei (1564-1642), matemático y físico italiano, conocía las trayectorias parabólicas ya que, aunque no las denominaba así, experimentaba con tiros parabólicos, este hombre fue el primero que dio una descripción moderna y cualitativa del movimiento de proyectiles dando las bases para su conocimiento y demostró que la trayectoria de cualquier proyectil es una parábola. Galileo realizó un experimento con dos objetos: impulsó uno horizontalmente desde una mesa y dejó caer otro cuerpo desde el borde verticalmente. Al dejar caer un cuerpo A verticalmente y lanzando horizontalmente en el mismo instante un objeto B con una velocidad horizontal, Galileo Galilei comprobó que ambos caen al mismo tiempo; es decir tardan lo mismo en llegar al suelo.

Galileo en el Teorema I, proposición I de su obra Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias, plantea sus conclusiones sobre las trayectorias de proyectiles.

> "Un proyectil que se desliza con un movimiento compuesto por un movimiento horizontal y uniforme y por un movimiento descendente, naturalmente acelerado, describe, con dicho movimiento, una línea semiparabólica" (Galileo, 1638).

Álvarez y Posadas (2003) utilizan el arreglo experimental de la figura 2 y contrasta los datos obtenidos con los que Galileo presenta en sus folios, particularmente en el folio 116 v.

Para este diseño de aprendizaje, se comparten las producciones de los equipos y con base en estas y en los folios 116v y 181r de los manuscritos de Galileo se analiza, en una discusión grupal, a la parábola como modelo para la trayectoria de un proyectil. Para ello se analizan las intenciones, los procedimientos y los argumentos al modelar.

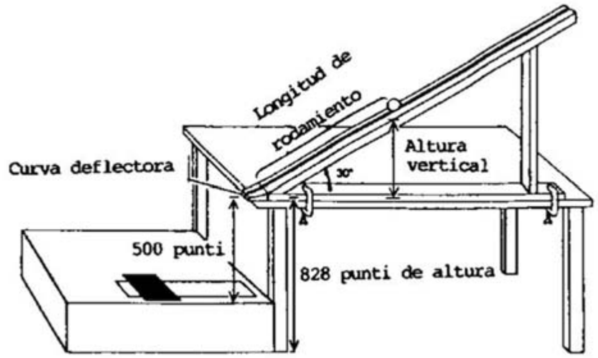


Figura 2. Arreglo experimental propuesto por Álvarez y Posadas (2003) para reproducir el experimento de Galileo

Para esta etapa del laboratorio se pretende que los participantes modelen el tiro parabólico de un proyectil con ayuda de un simulador digital que forma parte de LVMCB, recojan los datos, analicen el fenómeno con diferentes configuraciones, para esta actividad se conformarán equipos de tres o dos participantes.

Segundo diseño. Por otro lado, la caída libre es un fenómeno habitual, objeto de estudio de los antiguos griegos, quienes lo habían tratado de explicar sin realizar experimento alguno, las ideas propuestas por estos permanecieron casi 2000 años. Galileo Galilei fue quien cambió la manera en la que se percibía dicho movimiento.

Regresando a la antigua Grecia, Aristóteles había establecido que entre más pese un cuerpo, más rápido es la caída de este. Esta afirmación parecía ser razonable. ¿Por qué un cuerpo más pesado no habría de caer con más rapidez?

El problema radica en que los objetos ligeros son frenados por la resistencia del aire, por lo tanto, no deben considerarse sólo relativamente pesados. Es cierto que en 1589 Galileo emprendió una serie de meticulosas pruebas con caída de cuerpos. Estos caían con demasiada rapidez como para facilitar la medición de la velocidad con la que estos caían, especialmente por la falta de las herramientas para medir períodos breves de tiempo.

El fenómeno de caída libre se encuentra en forma experimental en una obra de Galileo Galilei Ammannati (1564-1642), físico y astrónomo italiano, fundador de la ciencia de la cinemática y con ello la construcción de la metodología experimental en la física actual. La obra de Galileo que contiene el experimento de la caída libre, ha sido objeto de opiniones encontradas, que, en caso de haber realizado el experimento, el científico italiano aplicó, en muchos casos, un análisis matemático ideal (plano liso sin fricción, bola perfectamente esférica) Ilustración 2.1, contrario a lo que sería en una situación real (plano rugoso con fricción, bola cuasi-esférica) (Álvarez y Posadas, 2003).

Figura 2. Plano inclinado en el museo "Galileo Galilei".

En la época de Galileo prevalecían diversas conjeturas entorno a la relación entre las distancias que recorrían un objeto en caída libre y sus velocidades. Por ejemplo, Leonardo Da Vinci enuncia la relación que guardan la velocidad con la distancia recorrida por un objeto en la caída libre (Álvarez, 2012):

> "El cuerpo que se mueve con movimiento natural adquiere en cada estadio de movimiento estadios de velocidad; tales estadios (de velocidad) se encuentran en la misma proporción el último respecto al penúltimo como el segundo respecto al primero."

Para esta etapa del laboratorio se pretende que los participantes modelen el fenómeno de caída libre de un proyectil con ayuda de un simulador digital que forma parte de LVMCB, capturen los datos, analicen la simulación con diferentes configuraciones, para esta actividad se conformarán equipos de trabajo de tres o dos participantes.

Tercer diseño. En este tercer diseño didáctico se propone a los participantes del laboratorio, organizados en equipos, analizar las características y los elementos principales que constituyen una parábola, mediante GeoGebra, software de uso libre, que permite la graficación de fórmulas matemáticas de manera interactiva, considerando la modelación, la recolección de datos y las diferentes configuraciones obtenidas con ayuda de los simuladores digitales, se grafican dichos datos para construir la parábola que rige cada uno de los diferentes fenómenos, se analizan los elementos característicos de dichas parábolas con ayuda de hojas de cálculo.

Se expone ante los participantes el LVMCB, plataforma en la cual podrán tener acceso a la información básica de la misma y también a los diferentes simuladores utilizados en el presente laboratorio.

ISSN: 2594-1046

4. CONSIDERACIONES FINALES

El presente laboratorio ayudará a reconocer la importancia de la experimentación, simulación y modelación en el aula, partiendo de las prácticas de modelación del movimiento que Galileo realizó. Los entendimientos al respecto sin duda contribuyen al diseño de actividades para ser incorporadas al discurso matemático escolar.

Los participantes lograrán identificar las características y elementos propios de las parábolas, que se extraen en cada uno de los diseños didácticos, también serán capaces de distinguir las parábolas que se utilizan en los diseños didácticos con base en las intenciones, argumentos y procedimientos.

Se utiliza software elaborado por el LVMCB para el reconocimiento de los elementos de una parábola y se compara con la definición de parábolas, sus elementos y características. El trabajo se realiza en equipos de trabajo de tres o dos participantes y se culmina con una discusión de todo el grupo.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Álvarez, J. y Posadas, V. (2003). La obra de Galileo y la conformación del experimento en la física. *Revista Mexicana de Física*, 49 (1): 61–73.

Álvarez, J. (2012). El fenómeno de la caída de los cuerpos. *Revista Mexicana de Física*, 58: 36–40.

Arrieta, J. y Díaz L. (2015). Una Perspectiva de la Modelación desde la Socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 18 (1): 19-42.

Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Drake, S. (1978). *Galileo at work: his scientific biography*. Chicago: University of Chicago Press.

Galicia, A. (2015). *Desplazamiento de la práctica de diluciones desde la comunidad de ingenieros bioquímicos a la escuela*. Tesis doctoral no publicada. Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero. México.

Galilei, G. (1638). *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*. Recuperado de https://cienciaescolar.files.wordpress.com/2009/05/galileo-galilei.pdf

Reen, J. (2009). La revolución de Galileo y la transformación de la ciencia. *Investigación y Ciencia*, 394: 50-59.

Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

PAPIROFLEXIA Y GEOMETRÍA DINÁMICA PARA DISCUTIR COVARIACIÓN EN COORDENADAS POLARES

Marcela Ferrari Escolá
Universidad Autónoma de Guerrero; mferrari@uagro.mx

José Antonio Bonilla Solano
Universidad Autónoma de Guerrero, jbonillasolano@gmail.com

Manuel Trejo Martínez
Universidad Autónoma de Guerrero, mtrejo14@gmail.com

Resumen

Proponemos trabajar con actividades de aprendizaje diseñadas utilizando doblado de papel y geometría dinámica, en particular GeoGebra, como generadores del ámbito discursivo. La construcción geométrica de una curva será el disparador de una red de modelos que conllevará reflexionar sobre covariación en coordenadas polares. Percibir y estudiar la covariación, es decir, la simultaneidad de dos variaciones diferentes que se afectan mutuamente nos permitirá fortalecer nuestro acercamiento al concepto de función en el sistema de coordenadas polares. En Socioepistemología basamos los diseños de aprendizaje y utilizamos el experimento de enseñanza como metodología para la gestión del laboratorio dirigido a estudiantes y profesores de nivel superior.

Palabras clave: coordenadas polares – covariación – curvas – geometría dinámica

1. INTRODUCCIÓN

Desde los inicios de la matemática educativa investigadores se interesan por evidenciar cómo construir, con estudiantes de diferentes niveles educativos, el concepto de "función", aquel saber matemático troncal en cursos que involucran la variación y el cambio. Varios son los que reflexionan desde la idea de "covariación", término que se utiliza desde finales de los noventas y principios de este siglo al considerarlo como un prerrequisito para la apropiación de función. Basta mencionar el trabajo de Confrey & Smith (1995), uno de los pocos que reflexiona, en aquella época, sobre funciones particulares como la función exponencial, considerando que: "*the construction of a counting and a splitting world and their juxtaposition through covariation provide the basis for the construction of an exponential function*" (p.80). O la investigación de Saldhana y Thompson (1998) donde reportan que no es trivial la comprensión de gráficas que representan un continuo covariando de estados de cantidades.

Carlson, Jacobs, Coe, Larsen & Hsu, (2002), por su parte, proponen una mirada piagetiana para evidenciar lo complejo de desarrollar el razonamiento covariacional con el fin de construir una visión más integral de las funciones a través de eventos dinámicos. Ideas que son retomadas años después por Oehrtman, Carlson y Thompson (2008); Nagle, Moore-Russo, Viglietti y Martin (2013); Moore, Paoletti y Musgrave (2013); Johnson (2015); Hitt y González (2015); Ferrari, Martinez, Méndez, (2016), entre otros. Efectivamente, Carlson *et al.* (2002) y Johnson (2012, 2015) usan el llenado de recipientes para estudiar la variación y el cambio en eventos dinámicos. Por su parte, Moore *et al.* (2013) analizan la representación gráfica de funciones en los sistemas de coordenadas cartesianas y polares. Weber y Thompson (2014) abordan funciones de dos variables y sus representaciones gráficas mientas que Nagle *et al.* (2013) analizan la conceptualización de la pendiente. En varios de los reportes mencionados coinciden en la necesidad de propiciar un acceso intuitivo al concepto de función desde la noción de covariación, privilegiando las representaciones gráficas antes de presentar expresiones algebraicas. En nuestra investigación, consideramos necesario propiciar la emergencia de una red de modelos donde las actividades de construir geométricamente puntos, tabular, graficar y ajustar, en tanto se percibe la covariación inmersa, generan un ambiente discursivo idóneo para la construcción de conocimiento matemático.

2. MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

Como investigadores, consideramos necesario realizar estudios sistémicos. Es decir, empaparnos y analizar las prácticas escolares inherentes a la transmisión del saber, ser conocedores de prácticas de referencia que reflejan el desarrollo de ese saber, percibir las prácticas sociales que hablan de interacciones y herramientas, así como estudiar las prácticas discursivas que evidencian la significación y consensos adoptados. Hablamos entonces de comunidades que entrelazan sus producciones, donde el tiempo y el lugar, los sujetos y sus interrelaciones, los argumentos y herramientas, los avances y retrocesos, van construyendo conocimiento.

Adoptamos entonces la Socioepistemología como sustento teórico de los diseños de aprendizaje que proponemos para este laboratorio, en búsqueda de propiciar la confluencia y relación dialéctica de aspectos que consideramos fundamentales al abordar un fenómeno didáctico. Contemplar y analizar el devenir de una noción a un objeto de saber; caracterizar las concepciones de los alumnos; dar cuenta de cómo vive una noción en las aulas y el discurso matemático escolar que se genera, ser conscientes que la matemática es un bien cultural inmerso en una sociedad y tiempo determinados que condiciona su comunicación y apropiación (Cantoral, 2013) conlleva profundizar en la reorganización de la obra matemática, en la reconstrucción de significados y en la matemática como actividad humana (Cordero, Cen & Suárez, 2010).

En este sentido la revisión socioepistemológica reportada en Ferrari (2008) alrededor de covariación logarítmica sustenta el diseño del experimento de enseñanza (Steffe & Thompson, 2000) que proponemos analizar en este laboratorio. Encontramos en ella una cuidadosa mirada de argumentos matemáticos que han caído al olvido por la matemática escolar imperante. El importante papel que las construcciones geométricas jugaban en siglos anteriores, en aquellos donde se insinuaba un estudio robusto de la variación y el cambio, donde emergen herramientas matemáticas que permiten describir fenómenos, y donde la covariación como elemento unificador de modelos antecede a la idea de función (Ferrari y Farfán, 2010).

Es Euler quien distingue, en el siglo XVIII, entre funciones algebraicas y trascendentes en su obra *Introductio in analysin infinitorum*:

> "Functiones dividuntur in Algebraicas & Trascendentes; illæ"sunt, quæcomponuntur per operationes algebraicas solas, hævero in quibus operationes trascendentes insunt". [Las funciones se dividen en algebraicas y trascendentes; las primeras están formadas únicamente a través de operaciones algebraicas y las segundas suponen, en su formación, operaciones trascendentes. (Tomado de Martínez, 2008, p. 77)]

Martínez (2008) advierte que "lo que está en el fondo de esta definición es el hecho de que las funciones algebraicas son aquellas que se obtienen a través de un número finito de operaciones elementales y las segundas mediante un número infinito de operaciones elementales" (p.78). Argumento que emerge del desarrollo en serie de potencias de funciones como la exponencial, la logarítmica y las trigonométricas, manteniéndose en el discurso matemático de la época y fortaleciéndose a la par del análisis matemático.

Debeaune, discípulo de Descartes, desafía a los estudiosos de principios del siglo XVII a "Encontrar una curva tal que, para cada punto P, la distancia entre V y T, puntos donde la vertical y la línea tangente cortan al eje, sean siempre iguales" (Figura 1).

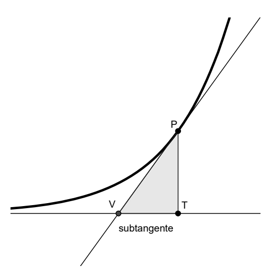


Figura 1: Interpretación gráfica del desafío de Debeaune

ISSN: 2594-1046

Según Hairer y Wanner (1996) es Leibnitz, en 1684, quien propone años después una respuesta al problema planteado, resolución que Agnesi (1748) utiliza en su libro *Instituzioni analitiche ad uso della gioventú italiana. Libro Secondo del Calcolo Differenziale* al discutir la continuidad de una función dando un giro didáctico al acercamiento epocal del Cálculo. Sin embargo, según Dennis y Confrey (1997) se puede proponer otra respuesta desde el trabajo de Descartes.

Dennis y Confrey (1997) involucran el uso de geometría dinámica en la construcción de una curva, siendo el círculo unitario y ciertas rectas tangentes y secantes elementos importantes, sustentando la evolución de los puntos en la semejanza de triángulos.

3. SOBRE LOS APORTES DE AGNESI Y DESCARTES DESDE EL TRABAJO DE AGNESI

Agnesi (1748) propone modelar un fenómeno particular descrito no por la observación de un cuerpo cayendo, práctica frecuente en la comunidad de los físicos, sino por un desafío geométrico, típica actividad de la comunidad de matemáticos. Es aquí donde la semejanza de triángulos, que se percibe, conforma la herramienta principal del modelo geométrico.

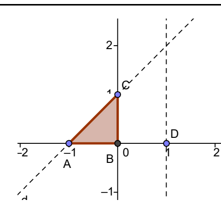
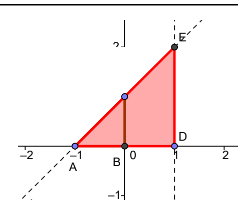
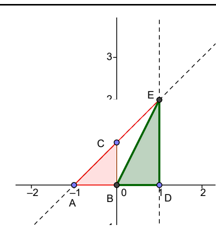
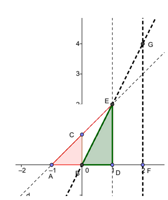
Elementos de la construcción		Construcción geométrica
Triángulos	Puntos	
ABC semejante a ADE	C = (0,1) E = (1,2)	 
ODE semejante a OFG	E = (1,2) G = (2,4)	 

Tabla 1: Interpretación de la construcción propuesta por Agnesi

Descubrir otras regularidades, que cobran vida al reconocer progresiones en la construcción de los catetos de los triángulos rectángulos, nos permite predecir el siguiente segmento sin construirlo, sino calculándolo. Nuevamente la práctica de multiplicar sumando nos regresa a lo numérico, a lo cuantificable, en tanto que la forma de la curva nos desafía a unir los puntos construidos geométricamente o calculados numéricamente, y nos cuestiona sobre su crecimiento o decrecimiento, que Agnesi soluciona desde lo infinitesimal (Figura 3).

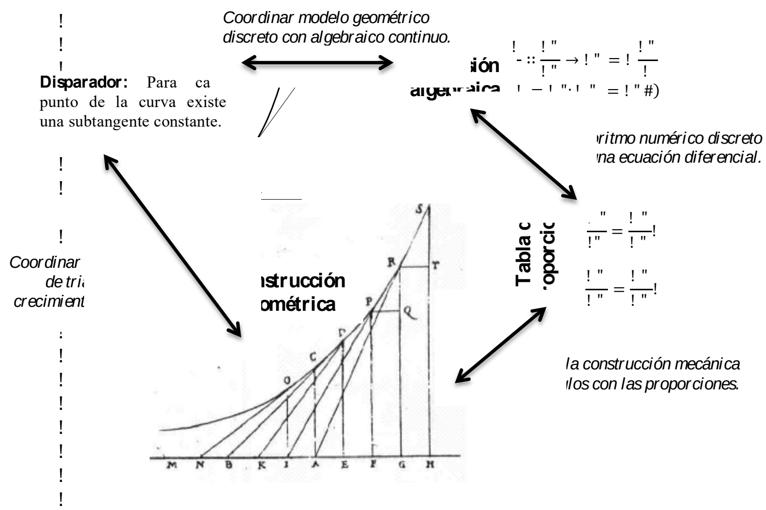


Figura 2: Esquema de elementos presentes en la obra de Agnesi (1748)

4. DESDE EL TRABAJO DE DESCARTES

Dennis y Confrey (1997) basándose en el trabajo de Descartes proponen la construcción de una curva, el círculo unitario y ciertas rectas tangentes y secantes elementos importantes, sustentando la evolución de los puntos en la semejanza de triángulos.

La construcción geométrica se inicia con un círculo unitario con el que se determina el primer punto de la curva, (1, 0), al intersecar el eje de las abscisas. Un punto colocado sobre la circunferencia determina la construcción de los puntos de la curva, ya que la semirrecta que lo une al origen del sistema de coordenadas determina la base de la covariación logarítmica a través del coseno del ángulo establecido. Las ordenadas de los puntos se establecen con una partición constante, en el ejemplo, $y_n - y_{n-1} = {}^{1}/_{4}$, en tanto que las abscisas se van construyendo con el uso de semejanza de triángulos y las circunferencias que de ellos surgen (Tabla 2).

Observamos entonces, en ambas construcciones, que se afanan en describir formalmente fenómenos que se imbrican en una *covariación logarítmica*, desde una construcción geométrica. Es decir, aquella coexistencia entre una variación regida por diferencias constantes y otra por razones constantes; una donde se puede reconocer una progresión aritmética y en la otra una progresión geométrica, es decir, una, respondiendo a un crecimiento lineal y la otra a un crecimiento

ISSN: 2594-1046

exponencial. Lo complejo no radica en cada una de estas variaciones, sino justamente en su coexistencia, su codependencia, su coconstrucción, dando vida a una función logarítmica o a una función exponencial dependiendo de qué variación juega como independiente y cual como dependiente. En su empresa, utilizan ciertas herramientas matemáticas conocidas, crean otras, articulan los modelos logrados, actividades que constituyen el basamento de nuestros diseños de aprendizaje.

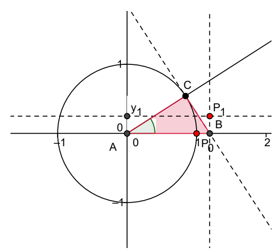
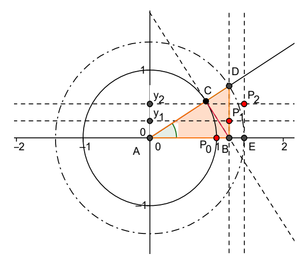
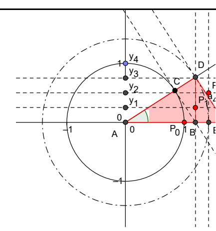
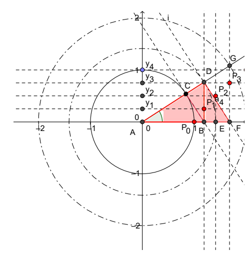
Elementos de la construcción		Consrtucción geométrica
Triángulos	Puntos	
ABC semejante a ABD B es intersección de la tangente al círculo unitario y el eje *x*. D es la intersección de la vertical por B y la recta AC.	$P_0 = (0,1)$ $P_1 = \left(\sqrt[4]{2}, \frac{1}{4}\right)$ $P_2 = \left(\sqrt[2]{2}, \frac{1}{2}\right)$	 
ADB semejante a ADE E es intersección de circunferencia que pasa por D con eje *x*. F es la intersección de tangente a esta circunferencia que pasa por D y el eje *x*.	$P_3 = \left(\sqrt[4]{8}, \frac{3}{4}\right)$ $P_4 = (2,1)$	 

Tabla 2: Interpretación de la construcción de Descartes (Dennis y Confrey, 1997)

Ideas similares utilizaremos para la construcción de curvas especiales donde la covariación imperante emergerá de ciertas regularidades, haciendo hincapié en aquellas curvas geométricas que en el siglo XVIII las separaron de las funciones algebraicas. El desafío ahora será reflexionar de ellas en el sistema de coordenadas polares, donde x´s y y´s serán reemplazadas por ángulos y radios, es decir, por r´s y θ´s.

5. COVARIACIÓN EN EL SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

Uno de los principales motivos de la introducción del sistema de coordenadas polares, de acuerdo al discurso matemático escolar (dME) es la necesidad de estudiar ciertas curvas o regiones que se simplifican con el uso de este lenguaje (Ramírez y Ferrari, 2011). Montiel, Vidakovic y

Kabael (2008) señalan que cuando los estudiantes son introducidos al sistema de coordenadas polares “reconocen” ciertas gráficas y ecuaciones claves. Sin embargo, la prioridad del sistema cartesiano por sobre el sistema polar en el dme deriva en fenómenos como el señalado en Montiel *et al*. (2008) y Montiel Vidakovic, Elstak y Wilhelmi (2009), es decir, que los estudiantes tienden a “trasladar” hacia el sistema polar nociones o procedimientos que utilizan en el sistema cartesiano al iniciarse en el manejo de los nuevos elementos en juego, la relación radio-ángulo. Efectivamente, se consideran un semi-rayo, que refiere al eje polar y que comanda la medida de ángulos considerándolos como coordenadas angulares; y, un segmento indicando el lado final del ángulo, y al cual se puede referir como coordenada radial.

El sistema coordenado polar nos invita así, a imaginar una recta girando alrededor del polo lo que daría cuenta de la característica de simetría en las curvas, y que a la vez el hecho de que cada intervalo de 2π lleva al mismo segmento. Aspectos importantes en el hecho de que el sistema de coordenadas polares resulte más adecuado que el sistema cartesiano para describir curvas que tengan simetrías o que describan ecuaciones o fenómenos en los que haya periodicidad. La simpleza de escritura tales como $r = \theta$ o $r = a\theta$ que dan cuenta de una función constante u otras curvas descritas por expresiones como $r = ae^{b\theta}$ o $r = a/\theta$ (Figura 3) son características del sistema de coordenadas polares donde θ es considerado la variable independiente y r como variable dependiente.

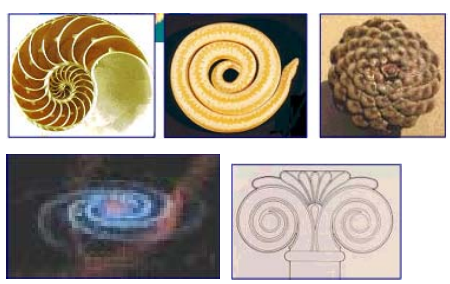


Figura 3: Imágenes extraídas de: Ortega y Ortega (2004)

6. DISEÑO DEL EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA

El laboratorio propuesto se desarrolla en tres sesiones de una hora y media. En la primera sesión se invita a los participantes a construir un caracol nautilus con papiroflexia ideas tomadas de un vídeo de Tomoku Fuse [1]. Nos interesa, en particular, propiciar la emergencia de una red de modelos en tanto manipulamos una hoja de papel y le damos una particular forma (Figura 4).

ISSN: 2594-1046

Figura 4: Construcción de un nautilus en papel

Se inicia la construcción con una hoja de color, tamaño carta, siendo el primer desafío extraer de ella el cuadrado de mayor área posible. Luego, construir un romboide isósceles y establecer la primera partición regular de su diagonal mayor, utilizando la idea de "la mitad de la mitad" repetidamente determinándose así trapecios de igual distancia entre sus bases. La diagonal mayor de estos trapecios da lugar a la forma final del plegado. Preguntas como ¿qué varía? ¿cómo varía? ¿qué se mantiene constante? ¿cómo describir el crecimiento y la forma del caracol? guían la discusión inicial de este laboratorio.

En la segunda sesión, se propone utilizar GeoGebra para describir la forma del caracol nautilus. Se parte de la pregunta: ¿Qué elementos geométricos se distinguieron en tanto se construía el caracol con el plegado de papel? ¿qué y cómo cuantificar los cambios?

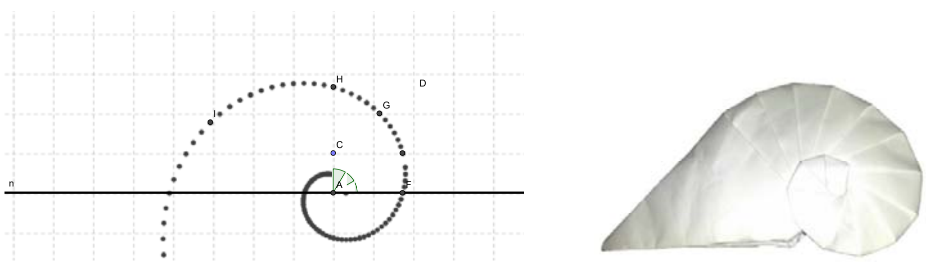


Figura 4: Esquema de un nautilus en coordenadas polares

En la tercera sesión se propicia la discusión de las conclusiones que los grupos de trabajo lograron en las sesiones anteriores; así como, sobre el diseño de aprendizaje propuesto.

7. CONSIDERACIONES FINALES

Tanto en la construcción que presenta Agnesi en su libro de Cálculo como en la que proponemos discutir para modelar el caracol nautilus, es el triángulo rectángulo inicial quien

ISSN: 2594-1046

determina la curva. En el caso de Agnesi la atención está en sus catetos y su razón, en tanto que en la construcción del nautilus es el ángulo inicial y el cateto horizontal r_0.

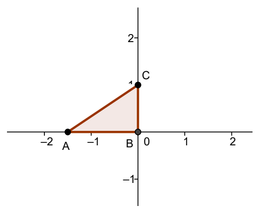
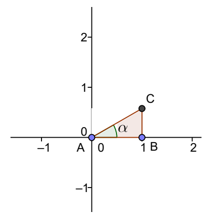
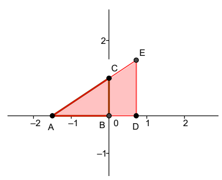
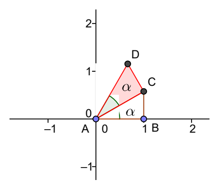
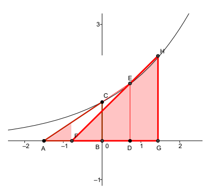
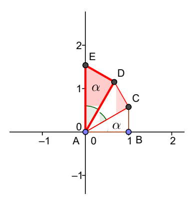
Sistema coordenado cartesiano $[(x, y)]$		Sistema coordenado polar $[(r, \theta)]$	
Triángulo inicial ABC C = (0,1) convención matemática $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ determinan la construcción			Triángulo inicial ABC B = (1,0) convención matemática $\overline{AB}$ y α determinan la construcción
ABC semejante a ADE $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DE}}$ C y E son puntos de la curva			ABC semejante a ACD $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}$ B, C, D son puntos de la curva
El corrimiento de triángulos semejantes se hace con $\overline{AD} - \overline{AB}$ constante			El corrimiento de triángulos semejantes se hace con α constante
$y = ka^{bx}$		$r = r_0 e^{b\theta}$	

Tabla 3: Entre sistema coordenado cartesiano y polar

La construcción geométrica de estas curvas propicia reflexionar sobre el papel que juegan los triángulos rectángulos y su semejanza, ya sea en el sistema coordenado cartesiano o en el polar. Cuestionarnos sobre cómo varían las variables, cuáles son ellas, dónde radica la regularidad en sus crecimientos, cuál es la gráfica que ajusta los puntos construidos son los disparadores del laboratorio que proponemos desarrollar. Nos interesa que los participantes generen una red de modelos donde la argumentación colectiva sea el motor de la construcción de saberes.

ISSN: 2594-1046

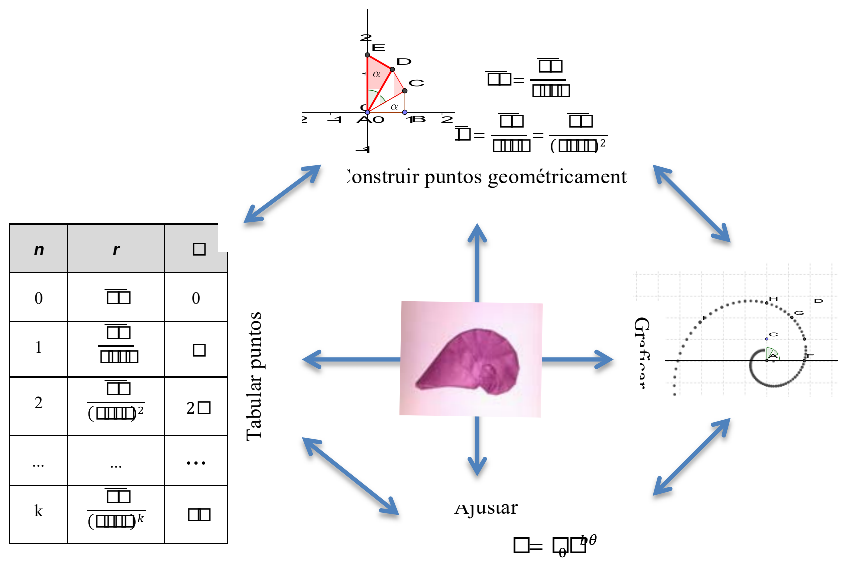


Figura 5: Red de modelos del caracol nautilus

8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Agnesi, M. (1748). *Instituzioni analitiche ad uso della gioventú italiana.* Libro Secondo del Calcolo Differenziale. Milano, Italia: Nella Regia Ducal Corte.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. España: Gedisa.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and study. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 352–378.

Confrey, J. & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(1), 66–86.

Codero, F., Cen, C. & Suárez, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 13*(2), 187-214.

Dennis, E. & Confrey, J. (1997). Drawing Logarithmic Curves with Geometer's Sketchpad: A Method Inspired by Historical Sources. En J. King & D. Schattschneider (Eds.), *Geometry Turned On: Dynamic Software in Learning, Teaching and Research*. Washington D.C., USA: Mathematical Association of America.

Ferrari, M, Martínez-Sierra, G. & Méndez, M. (2016). "Multiply by Adding": Development of the Logarithmic-Exponential Covariational Reasoning in High School Students. *Journal of Mathematical Behavior 42*, 92-108

Ferrari, M. & Farfán, R. M. (2010). Una socioepistemología de lo logarítmico. [Número especial]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13*(4), 53-68.

Ferrari, M. (2008). *Un acercamiento socioepistemológico a lo logarítmico: de multiplicar sumando a una primitiva*. Tesis de Doctorado. Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Hairer, E. & Wanner, G. (1996). *Analysis by Its History.* New York, USA: Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag.

Hitt, F., & González-Martín, A. S. (2015). Covariation between variables in a modelling process : The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. *Educational Studies in Mathematics 88*(2), 201–219.

Johnson, H. L. (2012). Reasoning about variation in the intensity of change in covarying quantities involved in rate of change. *Journal of Mathematical Behavior*, *31*(3), 313–330. doi:10.1016/j.jmathb.2012.01.001.

Johnson, H. L. (2015). Together yet separate: Students' associating amounts of change in quantities involved in rate of change. *Educational Studies in Mathematics 89*(1), 89-110. doi:10.1007/s10649-014-9590-y.

Martínez, C. (2008). El concepto de función en la obra de Euler: un recorrido a través de la constitución del Análisis Matemático Moderno. *Revista Miscelánea Matemática 46*, 73-91.

Montiel, M., Vidakovic, D., & Kabael, T. (2008). Relationship between studens' understanding of functions in cartesian and polar coordinate systems, *Investigations in Mathematics Learning*, 1(2), 52-70

Montiel, M., Vidakovic, D., Elstak, I., & Wilhelmi, M. (2009). Using the onto-semiotic approach to identify and analyze mathematical meaning when transiting between different coordinate systems in a multivariate context. *Educational Studies in Mathematics*. Vol.72, pp.139-160.

Moore, K. C., Paoletti, T., & Musgrave, S. (2013). Covariational reasoning and invariance among coordinate systems. *Journal of Mathematical Behavior*, *32*(3), 461–473. doi:10.1016/j.jmathb.2013.05.002.

Nagle, C., Moore-Russo, D., Viglietti, J., & Martin, K. (2013). Calculus Students' and Instructors' Conceptualizations of Slope: a Comparison Across Academic Levels. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *11*, 1491–1515. doi:10.1007/s10763-013-9411-2.

Oehrtman, M., Carlson, M. P. & Thompson, P. W. (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' understanding of functions. En M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics education* (pp. 150-166). USA: Series: MAA.

Ortega, I. & Ortega, T. (2004): Evolventes y espirales. *Épsilon 57*, 477-492.

Saldanha, L. & Thompson, P. W. (1998). Re-thinking convariation from a quantitative perspectivie: Simultaneous Continuous Variation. En W. N. Berensah y S. B. Coulombe (Ed.), *Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education - North America*. Raleigh, N.C: North Carolina State University.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh, & A. E. Kelly (Eds.), *Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 267–307). Hillside, NJ: Erlbaum.

ISSN: 2594-1046

Ramírez, T. & Ferrari, M. (2011). Las coordenadas polares: Algunos de sus usos en disciplinas de investigación específicas. En L. Sosa, R. Rodríguez, y E. Landa (Eds.) *Memoria de la XIV Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (pp.111-117). Zacatecas. Diciembre 2011.

Tomoko Fuse: *Origami Instructions: Navel Shell, spiral origami art desing* Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=-n1K_gKP_7Q

Weber, E., & Thompson, P. W. (2014). Students' images of two-variable functions and their graphs. *Educational Studies in Mathematics 87*(1), 67–85

ISSN: 2594-1046

MODELACIÓN ESCOLAR. EXPERIMENTACIÓN Y ANÁLISIS DE VARIACIONES EN LAS GRÁFICAS

María Esther Magali Méndez Guevara
Universidad Autónoma de Guerrero memmendez@uagro.mx

Karen Zúñiga González
Universidad Autónoma de Guerrero kzg.93@live.com

Nancy Marquina Molina
Universidad Autónoma de Guerrero nmarquina@uagro.mx

Resumen

Concebimos a la modelación como una práctica social inherentes al desarrollo de la ciencia, difusión y aceptación del conocimiento científico, de ahí nuestro interés en desarrollar esta práctica en la matemática escolar. La concepción de laboratorio nos da pie para desarrollar nuestras ideas sobre modelación, desde la experimentación y estudios de situaciones y/o fenómenos específicos. En esta ocasión pretendemos compartir y discutir diseños basados en la modelación escolar mediante actividades que parten del estudio de las gráficas en relación a una situación. Se problematiza sobre las variaciones globales y cómo las condiciones iniciales de experimentación intervienen. La dinámica se divide en tres momentos, el primero permitirá conocer las concepciones que se tienen sobre la modelación y vivenciar nuestra propuestas mediante el desarrollo de actividades en trabajo colaborativo, seguido los invitaremos a conocer y discutir el eje que sustenta los diseños propuestos, y finalmente se invita a los partícipes a discutir sobre la inclusión de estas actividades en las clases de matemáticas.

Palabras clave: Experimentación, gráficas, variaciones, tendencias y estabilidad

1. PROPÓSITO Y ALCANCE

El laboratorio busca implementar, discutir y adaptar diseños de situación (DS) que son creados en un ambiente de investigación, y tienen la intención de ser medios que puedan incluirse en la matemática escolar, de manera que se pueda problematizar y desarrollar el saber matemático.

En nuestro caso nos interesa incluir las prácticas de modelación en las actividades del docente de matemáticas mediante una categoría de construcción de conocimiento matemático llamada modelación escolar, el caso particular será el desarrollo del uso de las gráficas en el estudio de las variaciones y las condiciones iniciales de la experimentación.

La forma de adaptar los diseños, es compartirlos y discutirlos con profesores que viven el día a día el discurso matemático escolar. Principalmente buscamos incluir en las prácticas docentes los elementos que consideramos promueven una matemática funcional mediante una categoría de

ISSN: 2594-1046

modelación. El taller podría favorecer la formación de redes entre profesores e investigadores con los cuales sea posible desarrollar investigaciones posteriormente.

La actividades se detonan desde el estudio de fenómenos Físicos, que son tratados desde el Nivel Básico en la secundaria hasta el Nivel Superior, y que a nosotros nos da un contexto para resignificar el proceso de modelación en el estudio de las condiciones iniciales y las variaciones, tangible en el desarrollo del uso de las gráficas. Los fenómenos son:

- El estudio del movimiento rectilíneo uniforme y rectilíneo uniformemente acelerado.
- El estudio de las temperaturas.
- El estudio de la fuerza sobre un objeto.

Desde este escenario buscamos significar y desarrollar saberes entorno al desarrollo del uso de la gráfica en la modelación de estos fenómenos. Con esto evidenciamos también la transversalidad de la matemática.

2. ELEMENTOS TEÓRICOS

La modelación se reconoce como la estrategia por excelencia del ser humano para generar conocimiento (D´Ambrosio, 2009). Sin embargo, la visión generalizada sobre modelación en la matemática escolar consiste en concebirla como un proceso establecido que conviene implementar para resolver problemas o movilizar competencias, de manera que este proceso se muestra aislado a quienes lo usan. Para nosotros, la modelación es una práctica social en donde los actores principales del desarrollo de conocimiento son participes del proceso, esto lo llevamos al discurso Matemático Escolar y en el proponemos a la modelación escolar como una categoría de conocimiento matemático que promueve el desarrollo y articulación de los conocimientos matemáticos, en este sentido la modelación es un proceso de construcción en sí mismo de conocimiento matemático.

Los diseños se sustentan en elementos de la teoría Socioepistemológica (Cantoral, 2013), sobre todo de aquellas que nos permiten caracterizar el rol de la modelación en la construcción social del conocimiento, así se han formulado categorías de conocimiento matemático basados en el proceso de modelación (Méndez, 2013; Suárez & Cordero, 2010; Méndez, 2008; Arrieta, 2003), desde estas se toman los medios y procesos que han permitido estudiar cómo la matemática adquiere sentido y se desarrolla en sus usos ante situaciones específicas (Cen, Zaldívar, Briceño, Méndez & Cordero, 2014; Méndez & Cordero 2014), por ejemplo en comunidades de estudiantes de la educación media superior y superior.

Se pretende compartir y discutir diseños de aprendizaje basados principalmente en la categoría llamada modelación escolar (Méndez, 2013), cuyos elementos son:

- La experimentación o experiencia evocada; de donde se obtienen y tienen sentido los datos a estudiar; las condiciones iniciales y el comportamiento general del fenómeno darán significado a los dominios o rangos de funciones, en general conllevará a la formulación de los modelos matemáticos.
- El estudio de las variaciones locales y globales en los datos expresados en gráficas o tablas numéricas.
- La descripción, análisis y ajuste de comportamientos que transforman los datos en modelos, con los que es posible predecir a corto o largo plazo (o aproximar a un valor específico) el fenómeno o situación estudiada.

Figura 1. Elementos de la categoría de modelación

Los elementos mencionados se hacen tangibles en los diseños, los cuales pasan por tres momentos, los cuales no necesariamente son lineales y consecutivos. Estos son:

El Momento 1: Está caracterizado por la emergencia de usos que explican los cambios que ocasiona la modificación de condiciones en el experimento que se realizó. Usos detonados por la situación de transformación, en donde se caracterizan variaciones globales. Es decir, por el comportamiento del tipo de variación.

El Momento 2: Está caracterizado por el estudio del cambio de una posición a otra o de un intervalo de tiempo a otro, para determinar cuánto o cómo varia algo en ese intervalo, o bien, en los intervalos en donde sucede un cambio (propio de la situación de variación).

El momento 3, surge según la comunidad que participe en la realización del diseño. Este momento se caracteriza por los usos del conocimiento cristalizados ante la intención de acercarse lo más posible a un valor específico. Estos usos se valen de las propiedades de variación en intervalos pequeños cercanos al valor que se quiere aproximar (esto sucede en la situación de aproximación).

Con esta categoría se busca generar escenarios para resignificar conocimientos matemáticos, reconociendo cuáles son las funciones de estos ante el análisis, la predicción y la argumentación sobre situaciones específicas en donde es inherente el cómo y por qué se hacen visible los elementos esenciales, la variación y el comportamiento de lo estudiado, es decir las formas.

3. MÉTODO

El ambiente del laboratorio es adecuado para desarrollar nuestra categoría pues mediante el análisis y la reflexión se construyen hipótesis sobre las experiencias, esto lleva a postular, ajustar y convenir herramientas matemáticas que describan y predigan lo estudiado, es decir los modelos.

Nuestra propuesta es gestionar en el laboratorio el desarrollo de una matemática funcional lo que implica que los partícipes en el desarrollo de situaciones construyan y articulen usos del conocimiento matemático donde la modelación escolar es el eje argumentativo.

La gestión del laboratorio se realiza en tres fases:

Fase 1. La experimentación. Análisis de lo sucedido en la experimentación o, en la experiencia evocada o simulada, esto se realiza mediante actividades en equipo, las cuales invita a definir qué variables intervienen en la situación, qué variables se pueden relacionar.

Fase 2. La especulación. Se discute cómo se pueden relacionar las variables, qué significan según el experimento y cómo se puede expresar esa relación esto se hace en equipo y en el colectivo para compartir usos.

Fase 3. El consenso y la identidad de usos. Se convienen en los equipos qué herramientas matemáticas permiten articular los elementos que intervienen en las situaciones enfatizando en el funcionamiento de estas según su intención. Esto último llevará a reconocer identidades en los usos del conocimiento matemático.

ISSN: 2594-1046

4. LOS DISEÑOS QUE SE DESARROLLAN EN EL LABORATORIO

Durante el desarrollo de los momentos de cada diseño sucede un desarrollo de usos del conocimiento matemático que se articula de manera inevitable ante la formulación de argumentos en torno a las herramientas matemáticas construidas, los modelos, que permiten caracterizar y predecir los fenómenos estudiados, a este hecho le llamamos Desarrollo de redes de usos de conocimiento matemático (Drucm). Los diseños que proponemos implementar en el laboratorio transitan por los siguientes momentos.

DS Drucm		Estudiando el movimiento
Usos de las gráficas y las expresiones analíticas	Momento 1	Consta de la experimentación donde se devela los usos de las gráficas en tanto **se convienen las variables y sus relaciones.** Se **desarrolla la gráfica** para las **variaciones a trozos**. Se convienen y analizan las variables a considerar para comunicar y caracterizar el movimiento.
	Momento 2	Consta de la experimentación y **desarrollo de la gráfica** para las **variaciones a trozos**. Se estudia las variaciones del movimiento dadas diferentes condiciones, para realizar ajustes y las tendencias en las gráficas que expresan como es el movimiento.
	Momento 3	Desde **la articulación** de la gráfica dadas diferentes condiciones a la expresión algebraica. Se analiza **la variación y el comportamiento general de la gráfica** para poder proponer una expresión algebraica que reúne las condiciones del experimento y la acción del movimiento durante cierto tiempo.

Tabla 1. Describe las expectativas del diseño de la situación sobre el estudio del movimiento

En las actividades sobre el estudio del movimiento (Tabla 1), se invita a estudiar; el desplazamiento de un objeto en línea recta, a lo largo de tres puntos, con esto se tiene la intención de conocer cuáles son los usos cotidianos de las gráficas en donde se busca resignificar el espacio de graficación, y promover desde ahí el desarrollo del uso de las gráficas para describir distancias recorridas con respecto del tiempo en donde se construyen o develan saberes sobre función y función a trozo, también promovemos el desarrollo del uso de gráficas velocidades en ciertos tiempos, en donde es posible resignificar a la integral definida mediante el estudio de situaciones de movimiento (Tocto & Méndez, 2015). En general las actividades se desenvuelven desde el estudio del movimiento mediante la articulación de modelos y el fenómeno (Figura 2). Para el desarrollo de estas actividades recurrimos al sensor del movimiento y al programa que nos facilita la visualización de las gráficas, también se emplea el geoGebra como medio de argumentación en los modelos de funciones a trozos.

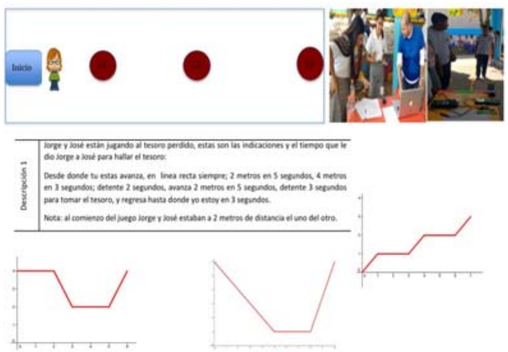


Figura 2. Imágenes de la Situación del estudio de movimiento.

Mientras que las actividades que se proponen para el estudio de la temperatura versa básicamente sobre el análisis de las condiciones iniciales y cómo estas se expresan en las gráficas en tanto su variación global y su tendencia, y finalmente se pide que se postulen modelos que se ajusten a los datos que se tienen de esta situación (Tabla 2).

Se estudian básicamente dos fenómenos; el enfriamiento o calentamiento de sustancias (Agua y/o silicón) y el equilibrio térmico (Figura 3). Las actividades giran entorno en el estudio de las variaciones globales y su tendencia, lo cual motiva a postular alguna función conocida dado el comportamiento que se identifica en las gráficas y los incrementos numéricos.

ISSN: 2594-1046

DS Drucm		Frio vs caliente, ¿se establece?
Desarrollo de usos de las gráficas y articulación con modelos numéricos y algebraicos	**Momento 1**	Este consiste en conjeturar desde el sentido común sobre la tendencia de la temperatura bajo ciertas condiciones. Se toman datos puntuales de la temperatura y se bosquejan gráficas, donde **se convienen las variables y sus relaciones,** esto se expresada en usos de las gráficas**.**
	Momento 2	Consta de la experimentación y **desarrollo de la gráfica** para las **variaciones globales**. Se estudia las variaciones del cambio de la temperatura con respecto al tiempo en ciertas condiciones de experimentación. Sucede un desarrollo del uso de las gráficas dado que se argumenta sobre cómo afecta a las variaciones globales, visibles en gráficas, las diferentes condiciones de experimentación.
	Momento 3	Consiste en analizar las variaciones y postular alguna relación algebraica o analítica que se corresponda con la gráfica y la situación estudiada. Se prueba y se ajusta los modelos propuestos. Se analiza **la variación de los datos numéricos y el comportamiento general de la gráfica** para poder proponer una expresión que reúne las condiciones del experimento, su variación y tendencia en cierto tiempo.

Tabla 2. Describe las expectativas del diseño de la situación sobre el estudio de la Temperatura

Para la realización de las actividades nos apoyamos de sensores de temperatura y calculadoras graficadoras, estos medios nos permitirán visualizar las variaciones globales de las gráficas y obtener los datos numéricos para analizar las variaciones en intervalos de tiempo, con ello dar elementos a los partícipes para postular expresiones que se ajusten a la gráfica y la situación que se estudia.

ISSN: 2594-1046

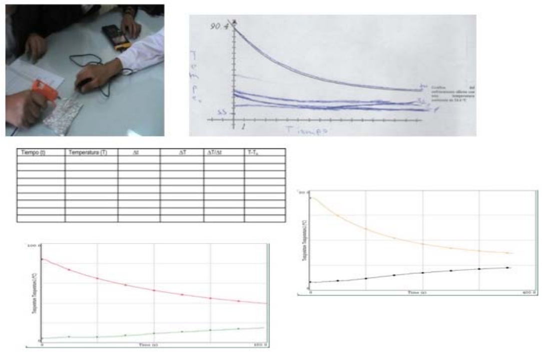


Figura 3. Imágenes de la Situación del estudio de la temperatura

Finalmente se plantea el estudio de gráficas que expresan la variación de la fuerza de un objeto en movimiento durante el transcurso del tiempo, nos enfocamos básicamente al estudio de las variaciones globales con respecto a las condiciones de experimentación.

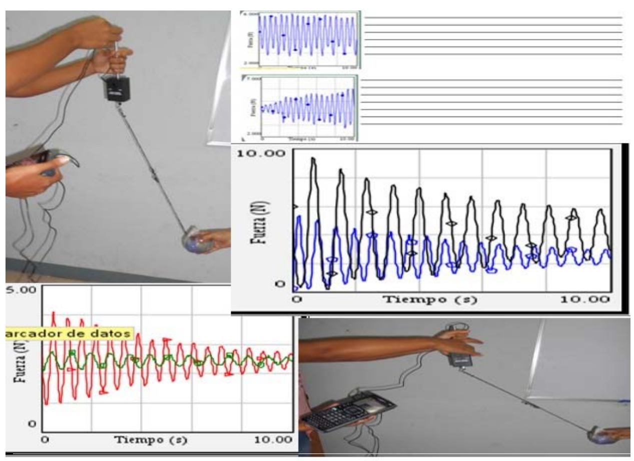


Figura 4. Imágenes de las actividades de fuerza

En este caso nos interesa que los participantes analicen la relación que existe entre los modelos gráficos y las condiciones iniciales cuando experimentamos con un sensor de fuerza utilizando objetos redondeados de diferente tamaño, colgados de un hilo y puestos en movimiento. Las gráficas obtenidas de la tensión ejercida sobre la cuerda cuando pende a ésta un objeto en movimiento pretenden provocar diferentes argumentos que relacionen los parámetros de las gráficas con características específicas de la situación tales como: tamaño de la bola, largo de la cuerda de la que pende y el ángulo desde que se suelta la bola, mismas que deberán corroborar experimentando.

ISSN: 2594-1046

DS Drucm		¿Graficando fuerza?
Desarrollo de usos de las gráficas para la predicción de la situación.	**Momento 1**	Consiste en el análisis de una situación dada y su interpretación por medio del bosquejo de una gráfica. **Se convienen y analizan las variables** a considerar para la construcción de un modelo gráfico.
	Momento 2	Consta de la experimentación y la obtención del modelo gráfico a partir del uso del sensor de fuerza bajo diferentes condiciones experimentales. A partir del estudio de **las variaciones de las gráficas modificando las condiciones iniciales del experimento** se pretende la elaboración de **argumentos** que sustenten la **predicción** del comportamiento de las gráficas.
	Momento 3	**La articulación** de las condiciones iniciales de experimentación, **postulando** a los parámetros que intervienen en los modelos gráficos, significando con esto la tendencia del comportamiento y/o la estabilidad de la curva. Se analiza **la variación y el comportamiento general de la gráfica** bajo las diferentes condiciones iniciales, sucede una articulación de las gráficas con el fenómeno modelado.

Tabla 3. Describe las expectativas del diseño de la situación sobre el estudio de la fuerza

Con estas actividades se promueven la inclusión de prácticas de modelación mediante una categoría que desarrolla y artícula los usos de conocimientos matemático que la comunidad pueda desarrollar para describir y predecir qué sucede con la situación vivida.

5. A MANERA DE CONCLUSIÓN

Esperamos generar un laboratorio de modelación en donde se resignifique el uso de las gráficas desde argumentos cotidianos, matemáticos y físicos. Esto será importante y dará identidad a sus usos del conocimiento. Por ejemplo en una situación de movimiento se pidió analizar una gráfica velocidad- tiempo y describir las distancias recorridas del móvil, esto ha mostrado dos usos de la gráfica, una tiene que ver con argumentos de la Física escolar, específicamente la fórmula para calcular la velocidad, y el otro argumento se corresponde con la matemática, en tanto usan la integral definida.

La figura 5 muestra cómo se usa la gráfica desde el argumento de la física para obtener las funciones por intervalos de tiempo. Esto permite determinar las variaciones locales de velocidad y posteriormente permitió saber las distancias recorridas por intervalos y en total de esta.

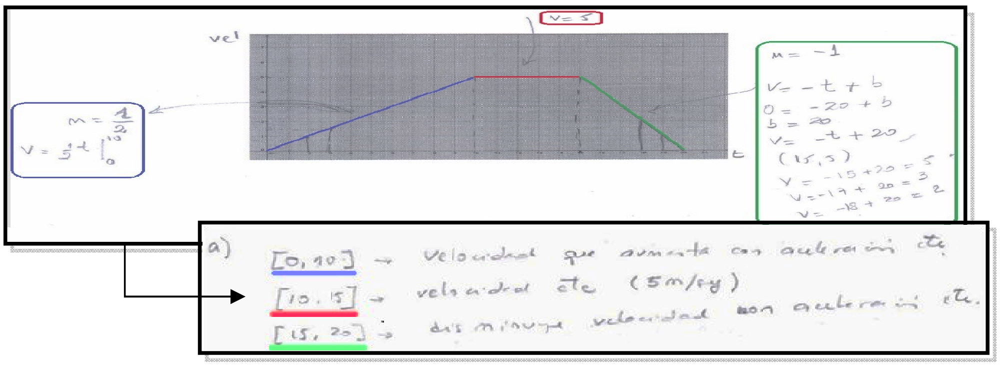


Figura 5. Uso de la gráfica que se desprende de argumentos de la Física escolar (Tocto, 2015)

Mientras que la figura 6 muestra cómo se usa la gráfica para identificar comportamientos en los intervalos, marcados como creciente, constante, decreciente y se identifican los puntos de cambio de estos comportamientos para así emplear la fórmula de punto pendiente y así obtener las funciones a trozos, y finalmente calcular la integral definida a cada función según sus extremos de variación.

Esto nos deja evidenciar que si bien podría observarse la misma representación no son iguales, y eso se caracteriza por el uso de gráfica, la cual da significados a los saberes que confluyen y la situación misma.

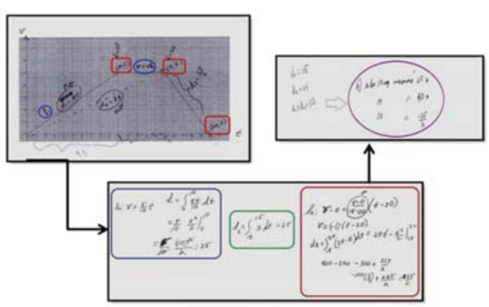


Figura 6. Uso de la gráfica que se desprende de argumentos matemáticos (Tomado de Tocto, 2015)

ISSN: 2594-1046

Entre los argumentos matemáticos que se promueven están; el espacio de graficación cartesiano, función, función a trozos, derivada e integral definida así como la estabilidad expresada como la tendencia de las gráficas en las situaciones del estudio de fuerza y la temperatura.

Si bien las actividades que se proponen están aún en exploración se espera alcanzar los objetivos de cada actividad y con los resultados obtenidos fortalecer la epistemología de usos de cada diseño.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. (Tesis doctoral no publicada). Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Cantoral, R. (2013). Teoría socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento. Barcelona, España: Gedisa.

Cen, C., Zaldívar, D. Briceño, E., Méndez, M., y Cordero F. (2014). El espacio de trabajo matemático y la situación específica de la matemática funcional: Un ejercicio de diálogo. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 17 (4-III), 417-436.

D´Ambrosio, U. (2009). *Mathematical Modeling: Cognitive, Pedagogical, historical and political dimensions. Journal of mathematical modelling and application*, 1 (1), 89-98. In: http://proxy.furb.br/ojs/index.pho/modelling

Méndez, M. (2013). *Desarrollo de red de usos del conocimiento matemático: la modelación para la matemática escolar*. (Tesis inédita de doctorado). Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Méndez, M. (2008). *Un estudio de la evolución de la práctica: La experiencia de modelar linealmente situaciones análogas,* (Tesis de maestría no publicada). Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, México.

Méndez, M. Y Cordero. F. (2014). *La modelación. Un eje para la red de desarrollo de usos. En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 27*. (Pp. 1603-1610) Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Suárez, L. Y Cordero, F. (2010). Modelación-graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio sociepistemológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(4-II), p. 319-333.

Tocto, M. y Méndez, M. (2015). Modelación y la emergencia de la integral. En F. Rodríguez & R. Rodríguez (Eds.) *Memoria de la XVII Escuela de Invierno en Matemática Educativa. La profesionalización Docente desde los Posgrados de Calidad en Matemática Educativa* (pp. 226-231). Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A. C.

Tocto, M. (2015). *Modelación escolar y la caracterización de la integral definida*, Tesis de maestría no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, México.

Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

EXPERIENCIAS Y COLECTIVIDAD PARA EL DESARROLLO PROFESIONAL DOCENTE EN MATEMÁTICAS DE EDUCACIÓN BÁSICA

Eddie Aparicio Landa
UADY, alanda@correo.uady.mx

Karla Gómez Osalde
UADY, karla.gomez@correo.uady.mx

Landy Sosa Moguel
UADY, smoguel@correo.uady.mx

Resumen

Se presenta una propuesta orientada al desarrollo profesional de los profesores de matemáticas de educación básica como una forma de coadyuvar en la búsqueda de una mejora continua de sus prácticas y los fines de la docencia matemática. Se asume como principio fundamental la idea de colectividad progresiva, es decir, la idea de que la mejora en las prácticas de los profesores y de la docencia matemática en general, no es un asunto de individuos, sino de colectividades dinámicas. La propuesta incorpora una fase de diseño de experiencias de aprendizaje (DEA) matemático como aquello que habrá de situar y favorecer en el colectivo, procesos de reconceptualización de saberes y reorganización de prácticas, que a su vez se reconozca y acepte como un modus operandi conceptual, propios de y para la profesión, por ejemplo, cuestionando y consensuando sobre lo que se sabe, cómo se sabe y por qué ha de llevarse eso que se sabe a la escuela.

Palabras clave: Experiencias de aprendizaje, docencia matemática, educación básica, colectividad.

1. INTRODUCCIÓN

¿Qué se espera de un profesor de matemáticas? O más ampliamente, ¿qué se espera de la docencia en matemáticas? La respuesta a este tipo de preguntas pudiera ser tan simple como dicta el sentido común, que los estudiantes (personas), aprendan matemáticas. Y a su vez, tal respuesta da cabida a otra interrogante ¿qué significa aprender matemáticas? De modo que se podría concebir una respuesta igualmente sencilla, tal como el que las personas usen adecuada y correctamente sus conocimientos matemáticos para plantear y resolver problemas. En consecuencia, el fin último de los profesores o de la docencia en matemáticas sería, por transitividad, lograr que las personas aprendan a plantear y resolver problemas usando matemáticas.

Lo expresado en las líneas anteriores es sin duda, el entendido social común de lo que se espera de un proceso de enseñanza aprendizaje en matemáticas. No obstante, se ha documentado ampliamente la complejidad que ello encierra, incluso para quienes expresamente se han formado profesionalmente para realizar tal labor y el logro de tal fin. Para tener una idea de esa complejidad, basta decir que la comunidad investigativa la ha situado en el funcionamiento de un sistema de interrelaciones entre profesor, estudiante y matemáticas, poco fácil de modelar. En la literatura especializada puede verse lo cuantioso y diverso de las aproximaciones teóricas y metodológicas desarrolladas en las últimas décadas para generar explicaciones y soluciones a dicho problema. Aquí solo se muestran unas a modo de ejemplo y referencia (Ball, Thames y Phelps, 2008; Shulman y Shulman, 2007; Núñez, Arévalo y Ávalos, 2012; Lewis, Perry y Murata, 2006; Lee, 2008; Thompson, 1992; Pajares, 1992; Chapman, 1993; Ponte, 2001; Gómez - Chacón y Planchar, 2005; Sánchez, 2011; Cantoral y Reyes G, 2014; Sosa, Aparicio, Jarero y Tuyub, 2014; Dolores, García, Hernández y Sosa, 2013; Lezama y Mariscal, 2013).

En este orden de ideas e intentando abonar en el tema, se describe y presenta una propuesta orientada al desarrollo profesional de los profesores de matemáticas de educación básica (primaria y secundaria), como una forma de coadyuvar en la búsqueda de una mejora continua de sus prácticas y los fines de la docencia matemática. En tal propuesta se asume como principio fundamental la idea de colectividad progresiva. Es decir, la idea de que la mejora en las prácticas de los profesores y de la docencia matemática en general, no es un asunto de individuos, sino de colectividades dinámicas.

2. MARCO TEÓRICO

Hoy día se acepta que el conocimiento o el aprendizaje de las personas (incluido el relativo a las matemáticas), es resultado de prolongados procesos en los que se conjuga tanto la actividad cognitiva como la sociocultural. Así, el conocimiento o aprendizaje matemático de una persona se considera asociado al tipo de experiencias y contextos en los que esta se sitúe (Aparicio y Sosa, 2013). En tal sentido, es innegable que la práctica docente en matemáticas debe significar o ir más allá de una actividad de "transmisión", mostración de conocimientos, conceptos y temas disciplinares, centrada esencialmente en la cognición y dejando fuera lo social. En tal sentido, es claro que el desarrollo profesional de los docentes también debe ir más allá de una simple "actualización" de contenidos o conocimientos pedagógicos, disciplinares, prácticos, entre otros, debe situárseles en la posibilidad de sumar y desarrollar continuamente experiencias colectivas de reconceptualización de su profesión y en forma general, de los (sus) saberes que son propios de ésta. En palabras más cortas, el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas no pudiera ser ajeno a sus contextos y a procesos de reconceptualización.

ISSN: 2594-1046

Dicho así, esta propuesta comparte la tesis planteada en la teoría socioepistemológica en matemática educativa (Cantoral, 2013), al considerar que el conocimiento matemático se construye y reconstruye socialmente mediante prácticas compartidas, de modo que el centro de los análisis para generar entendimiento y propuestas de intervención al sistema de enseñanza no ha de estar en los conceptos matemáticos per se, si no en las prácticas sociales, o más específicamente, en los contextos en los que tienen cabida la significación y resignificación de saberes.

Por los aspectos arriba referidos, teóricamente la propuesta se configura entorno a la idea de un trabajo colectivo de reconceptualización de saberes, para el desarrollo de experiencias profesionales docentes asociadas a las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje (construcción escolar). De este modo, la atención está puesta en la posibilidad de desarrollar una forma didáctica de pensar y practicar las matemáticas en situación escolar, por parte de los profesores.

Para lo anterior, en la propuesta se incorpora una fase de diseño de experiencias de aprendizaje (DEA) matemático como eso que habrá de situar y favorecer en el colectivo, procesos de reconceptualización de saberes y reorganización de prácticas, que a su vez se reconozca y acepte como un modus operandi conceptual, propios de y para la profesión, por ejemplo, cuestionando y consensuando sobre lo que se sabe, cómo se sabe y por qué ha de llevarse eso que se sabe a la escuela.

3. DESARROLLO

La dinámica por seguir en esta propuesta consiste en desarrollar tres momentos considerados esenciales para alcanzar una sensibilidad didáctica en matemáticas, mismos que se señalan en la Tabla I.

Los DEA que se mencionan forman parte de la “Colección Didáctica de las Matemáticas en educación básica” (2015) y del material para la educación matemática en secundaria “Actividades de aprendizaje para el aula. Primer y segundo grado”, (2014, 2015).

Por la naturaleza del contenido presentado, el laboratorio está dirigido a profesores de matemáticas desempeñándose en educación primaria y secundaria, o bien, aquella audiencia interesada en el desarrollo profesional docente y el aprendizaje de las matemáticas en estos niveles educativos.

ISSN: 2594-1046

Momento	Estrategia
1. Interpretación docente de problemáticas didácticas en matemáticas.	Discusión guiada sobre la naturaleza de problemáticas asociadas a procesos de enseñanza aprendizaje matemático en educación básica, a partir de ejemplos específicos.
2. Análisis y diseño de propuesta didáctica en matemáticas.	Reconocimiento de aspectos teóricos y metodológicos que implica el diseñar experiencias de aprendizaje (DEA) matemático.
3. Tránsito de prácticas docentes.	Ejemplificación de aprendizajes funcionales a partir de una reconceptualización de saberes matemáticos y reorganización de prácticas.

Tabla I: Dinámica de trabajo

4. CONSIDERACIONES PARA EL DESARROLLO DE EXPERIENCIAS PROFESIONALES DOCENTES EN MATEMÁTICAS

Considerar al proceso de diseño de experiencias de aprendizaje (DEA) matemático como un modus operandi conceptual de apoyo para el desarrollo profesional docente, en particular para educación básica, posibilita generar una plataforma de cuestionamiento sobre las interrelaciones entre la práctica docente, la reconceptualización y resignificación de saberes matemáticos, así como el favorecimiento de aprendizajes funcionales como elementos centrales para transitar de un paradigma educativo centrado en contenidos temáticos y conceptos caracterizado por prácticas docentes centradas en lo instruccional ("enseñanza"), hacia uno centrado en lo matemático, caracterizado por los aspectos referidos con anterioridad, cuyas prácticas docentes se distinguen por favorecer condiciones socio-constructivas de aprendizaje y conocimiento funcional.

Durante el proceso de análisis del cómo y para qué se elaboraron los DEA con un tratamiento didáctico específico, se establecen una serie de consideraciones metodológicas y prácticas, reportadas y descritas con mayor profundidad en Aparicio y Sosa (2013), no obstante, aquí se retoman de forma sintética.

4.1. Consideraciones metodológicas

- Establecimiento de la relación sistémica entre un aprendizaje esperado, el saber específico y el eje de pensamiento asociado.

ISSN: 2594-1046

- Problematización del saber matemático a partir del planteamiento y análisis de cuestionamientos de índole epistemológico, cognitivo y didáctico.
- “Ingeniería didáctica” y elaboración de diseños.

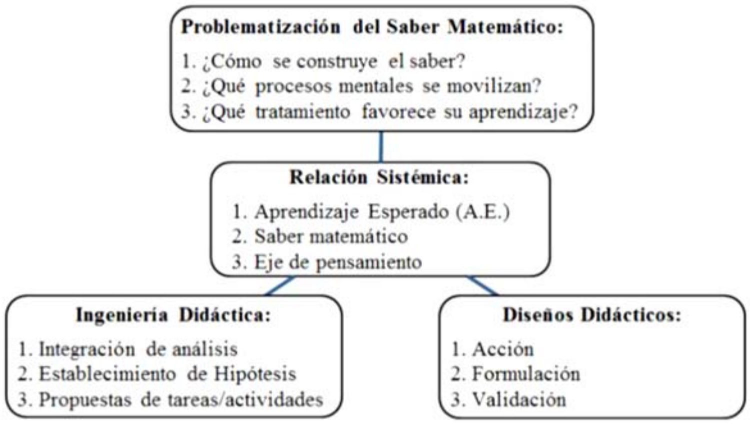


Figura 1: Esquema de articulación didáctica para la elaboración de DEA’s, (Aparicio y Sosa, 2013)

DEA, primaria	DEA, secundaria
Contextualización de la actividad matemática: Situación de comparación entre superficies empleando unidades de medida no convencionales.	Contextualización de la actividad matemática: Situaciones sobre medidas de superficies con formas geométricas regulares y sus relaciones.
Reconocimiento y selección de variables: Relaciones entre longitud y anchura para caracterizar una superficie.	Reconocimiento y selección de variables: Descomposición de un polígono regular en triángulos regulares y congruentes entre sí.
Diseño de tareas didácticas: Medir una superficie significa compararla con otra y determinar qué tan mayor o menor es una medida respecto a la otra.	Diseño de tareas didácticas: Resignificar la fórmula para calcular el área de un polígono regular a partir de la relación de la medida de la apotema y la medida de la altura de los triángulos congruentes que constituyen el polígono regular.
Desarrollar procesos de pensamiento matemático: Solicitar una estrategia para medir superficies a partir del ordenamiento y comparación de figuras.	Desarrollar procesos de pensamiento matemático: Solicitar un modelo para medir superficies a partir de la relación entre los elementos que constituyen las figuras regulares.

Tabla 2: Consideraciones prácticas para el tratamiento didáctico de los DEA

ISSN: 2594-1046

4.2. Consideraciones prácticas

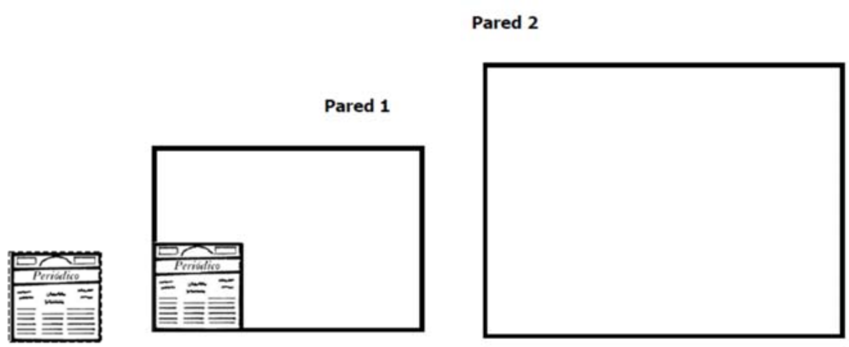
- Contextualización de la actividad matemática.
- Reconocimiento y selección de variables.
- Diseño de tareas didácticas.
- Desarrollo de procesos de pensamiento matemático.

Para precisar en su entendimiento, se plantean dos ejemplos (Figuras 2 y 3) de tareas que conforman los DEA para la educación primaria y secundaria. Las consideraciones prácticas propias del tratamiento didáctico se presentan en la Tabla 2.

Aprendizaje esperado: *Medir la superficie de una figura y relacionarlo con el tamaño de sus dimensiones*.

TAREA 1. Recorta la siguiente imagen del periódico y realiza lo que se te indica.

I. Las siguientes imágenes representan dos paredes de una casa. Obsérvalas y escribe el número de veces que cabe el periódico en cada pared.



II. Si una persona que ha pintado casas sabe que por cada 6 periódicos debe usar 1 bote de pintura. ¿Cuántos botes de pintura se necesitarían para cada pared? Tacha

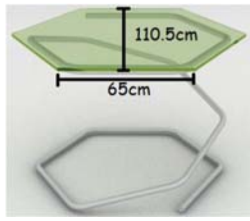
Figura 2: Un ejemplo de DEA en el eje Forma, espacio y medida para educación primaria

ISSN: 2594-1046

Aprendizaje esperado*: Resolver problemas geométricos en contextos cotidianos que impliquen calcular el área de polígonos regulares*.

TAREA 1. Lee con atención las siguientes situaciones y realiza las operaciones necesarias para darles solución.

1. En la mesa con forma hexagonal presentada en la imagen, cada lado mide 65 cm. ¿Cuántos centímetros cuadrados mide toda su superficie?



2. Los ladrillos que comúnmente se emplean para cubrir superficies de banquetas, pasillos o parques, son como los que se muestran en la imagen 31.2. ¿Cuál es la medida de la superficie (área) ocupada por la

Imagen 3: Un ejemplo de DEA en el eje Forma, espacio y medida para educación secundaria

5. REFLEXIONES FINALES

La propuesta expuesta en forma general a lo largo de este escrito se ha trabajado con diferentes colectivos docentes de matemáticas en educación primaria y secundaria. Como parte de dicho trabajo colectivo se ha podido reconocer dos aspectos fundamentales que coadyuvan en el desarrollo profesional de los docentes y, por ende, a la profesionalización de la docencia en matemáticas en educación básica.

Por un lado, está la práctica concerniente a los DEA, entendidos no como un fin ensimismo, sino el asidero de oportunidades en donde el colectivo de docentes vivencia experiencias profesionales propias de la enseñanza aprendizaje en matemáticas y se sitúan en procesos de reconceptualización de saberes y desarrollo de una forma didáctica de pensar sobre sus prácticas. A esto se le ha designado como principio de sensibilización didáctica.

Lo anterior, aunado a la implementación de los DEA, ha puesto de manifiesto cierto grado de cambio en la organización de las prácticas en las aulas, percibiéndose mayor interés, participación y disposición por parte de los estudiantes hacia el estudio, mediante la realización de actividades centradas en su aprendizaje y en una visión funcional de los saberes matemáticos.

ISSN: 2594-1046

Por otro lado, se percibe que el trabajo en colectivo ha permeado de identidad y reconocimiento profesional a la comunidad docente, lo que favorece al cuestionamiento y búsqueda argumentada de una mejora continua de su quehacer y de las prácticas propias de la docencia de manera dinámica y continua.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aparicio, E. y Sosa, L. (2013). Contenidos matemáticos en secundaria. Una propuesta para su tratamiento escolar. En Sosa, L., Hernández, J. y Aparicio, E. (Eds.). *Memoria de la XVI Escuela de Invierno en Matemática Educativa,* (pp. 154 - 159). México: Red Cimates.

Aparicio, E., Sosa, L. y Jarero, M. (Eds.) (2014). *Educación matemática en secundaria. Actividades de aprendizaje para el aula*. Primer grado. Yucatán, México: UADY-SEGEY.

Aparicio, E., Sosa, L. y Jarero, M. (Eds.) (2015). *Educación matemática en secundaria. Actividades de aprendizaje para el aula*. Segundo grado. Yucatán, México: UADY-SEGEY.

Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Theacher Education*, 59(5), pp. 389-407.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Cantoral, R. y Reyes-Gasperini, D. (2014). Socioepistemología y empoderamiento docente: acciones para un cambio educativo. *Bolema. Boletim de Educação Matemática,* 28(48), 360.382.

Chapman, O. (1993). Facilitating In-Service Mathematics Teacher Self-Development. Proceedings of PME XV (pp. I/228-235). Tsukuba, Japón

Colección Didáctica de las matemáticas en educación básica. Material para el alumno. (2015). Primera edición. Matemáticas 1°, 2° y 3° Grado. Nivel primaria. Secretaría de Educación de Yucatán y Universidad Autónoma de Yucatán. México.

Crisólogo, D., García, M., Hernández, J. y Sosa, L. (2014, eds.) Matemática Educativa: la formación de profesores. México: Diaz de Santos. ISBN: 978.84.9969.664.5.

Gómez – Chacón, I & Planchar, E. (2005). Educación matemática y Formación de profesores: Propuestas para Europa y Latinoamérica. Bilbao: Servicio de Publicaciones Universidad de Deusto.

Lee, J. (2008). A Hong Kong Case of Lesson Study. Benefits and Concerns. *Teaching and Teacher Education*, 24(5), pp. 1115-1124.

Lewis, C., Perri, R. y Murata, A. (2006). How Should Research Contribute to Instructional Improvement? The Case of Lesson Study. *Educational Researcher*, 35(3), pp. 3-14.

Lezama, J. y Mariscal, E. (2013). El aula en el imaginario de los profesores de matemáticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 26, pp. 1791- 1800. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Nuñez, M., Arévalo, A. y Ávalos, B. (2012). Profesionalización docente: ¿es posible un camino de convergencia para expertos y novatos? *Revista Electrónica de Investigación Educativa* 14(2), pp. 10-24. Consultado en hhttp://redie.uabc.mx/vol14no2contenido-ninezetal.html.

Pajares, M. F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research, 62*(3), 307–332.

ISSN: 2594-1046

Ponte, Da J. P. (2001). Investigating mathematics and learning to teach mathematics. In F. L. Lin & T. J. Cooney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 33–52). Dordrecht: Kluwer

Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. *PNA*, 5(4), pp. 129-145

Shulmanl, L. y Shulman, J. (2007). How and What Teachers Learn: A Shifting Perspective. *Journal of Curriculum Studies,* 36(2), pp. 257-271.

Sosa, L., Aparicio, E., Jarero, M., Tuyub, I. (2014). Matemática Educativa y Profesionalización Docente en Matemáticas. El caso de Yucatán. En Dolores, C., García, M., Hernández, J. y Sosa, L. (Eds). *Matemática Educativa: La formación de profesores* (pp. 31 – 47), México: Diaz de Santos. ISBN: 978.84.9969.664.5.

Thompson, A.G. (1992). Theachers'Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research. En D. A. Grows (Ed.), *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning* (pp.127.146). Nueva York: MacMillan

ISSN: 2594-1046

ANÁLISIS DE TEXTOS MATEMÁTICOS A TRAVÉS DEL EOS

Evaristo Trujillo Luque
Instituto Tecnológico de Sonora, Instituto Tecnológico de Sonora

Rafael Antonio Arana Pedraza
Instituto Tecnológico de Sonora, rafael.arana@itson.edu.mx

Omar Cuevas Salazar
Instituto Tecnológico de Sonora, omar.cuevas@itson.edu.mx

Resumen

Este taller pretende presentar al participante la configuración epistémica como medio de análisis de textos matemáticos donde se espera que los participantes delaten que un texto resulta significativo en la medida que los objetos primarios que aparezcan en él, y más aún, que exista una relación articulada entre ellos; mediante lo anterior observar cómo se interpretan los constructos teóricos que brinda el EOS de manera colectiva en su implementación y cuáles son las prácticas asociadas en este proceso.

Palabras clave: Enfoque Ontosemiótico, Configuraciones Epistémicas, textos matemáticos.

1. PROPÓSITO Y ALCANCE

Este laboratorio inicia con una breve semblanza del uso del Enfoque Ontosemiótico (EOS) en la región noroeste de México, particularmente en el estado de Sonora, donde se cuenta con dos instituciones que brindan un estudio de posgrado enfocado en Matemática Educativa; donde se ha utilizado el EOS para el describir, desarrollar y analizar propuestas didácticas, prácticas docentes, significados institucionales, entre otros. Particularmente en el Instituto Tecnológico de Sonora, durante el desarrollo de estos trabajos de investigación se ha detectado que los usuarios de esta teoría han manifestado dificultades para lograr identificar los elementos que se ponen en juego; específicamente en la detección de los objetos primarios que califica el EOS y la naturaleza de sus relaciones a través de una configuración epistémica. Por lo anterior, el objetivo del taller es presentar al participante la configuración epistémica como medio de análisis de textos matemáticos para identificar como un texto es más significativo al incorporar y articular más objetos primarios; para observar cómo se interpretan los constructos teóricos que brinda el EOS de manera colectiva en su implementación y cuáles son las prácticas asociadas en este proceso.

Además de lo anterior, se desea compartir la experiencia que se ha vivido en la Maestría en Matemática Educativa del Instituto Tecnológico de Sonora, con un inicio en agosto del 2012 y con

ISSN: 2594-1046

seis generaciones, tres en proceso y tres concluidas con las que se cuenta un total de 11 titulados de los cuales cinco utilizando el EOS con la intención de brindar un contexto para comentar los alcances que vislumbramos de la teoría como instrumento para abordar las problemáticas de la Educación Matemática.

Por las razones expuestas consideramos que el laboratorio aporta un medio para dar a conocer algunos de los constructos teóricos utilizados, conocer los problemas puedan surgir en el uso del EOS en un ambiente social, más allá de trabajarlo de forma individual por un grupo reducido de personas (tesista, asesor de tesis y algún revisor) y estrechar relación con el gremio de Matemática Educativa.

2. MARCO TEÓRICO

El EOS es un marco teórico que ha surgido en el seno de la Didáctica de las Matemáticas con el propósito de articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje (Godino, 2011).

2.1. Sistemas de Prácticas y significados sistémicos

Según Godino, Batanero y Font (2009), se considera práctica matemática a toda actuación o expresión realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos. Sin embargo, más que estudiar una práctica en particular para un problema concreto, resulta de mayor interés estudiar el sistema de prácticas (operativas y discursivas) puestas en manifiesto al abordar algún tipo de situación problemática. Los sistemas de prácticas se pueden dividir en dos: el que realiza una persona (significados personales), o las que se realizan en el seno de una institución (significados institucionales).

La tipología básica de significados que establecen Godino, Batanero y Font clasifica a los significados institucionales en los siguientes tipos:

- Implementado: en un proceso de estudio específico es el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente.
- Evaluado: el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.
- Pretendido: sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.

- Referencial: sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático.
- Respecto de los significados personales se clasifican los siguientes tipos:
- Global: corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el sujeto relativas a un objeto matemático.
- Declarado: da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional.
- Logrado: corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. En el análisis del cambio de los significados personales que tiene lugar en un proceso de estudio interesará tener en cuenta los significados iniciales o previos de los estudiantes y los que finalmente alcancen.

Estos significados personales e institucionales se organizan y relacionan con los sistemas de prácticas como se muestra en la Figura 1.

En el EOS se considera que los objetos matemáticos emergen de un sistema de prácticas donde se ponen en juego diferentes elementos para resolver cierta situación que se presenta. Godino, Batanero y Font (2009) clasifican estos elementos que se ponen en juego en seis objetos primarios:

- Situaciones—problemas: representa el origen o la razón de ser de la actividad, siendo, aplicaciones extra matemáticas, ejercicios, tareas, entre otros.
- Lenguaje (elementos lingüísticos): sirve de instrumento para la acción (términos, notaciones, gráficos, expresiones representados en sus diferentes registros).
- Conceptos: se introducen como definiciones o descripciones.
- Proposiciones: enunciados sobre conceptos.
- Procedimientos: algoritmos, operaciones, entre otros.
- Argumentos: enunciados para validar, explicar o justificar las proposiciones y procedimientos que relacionan los conceptos entre sí.

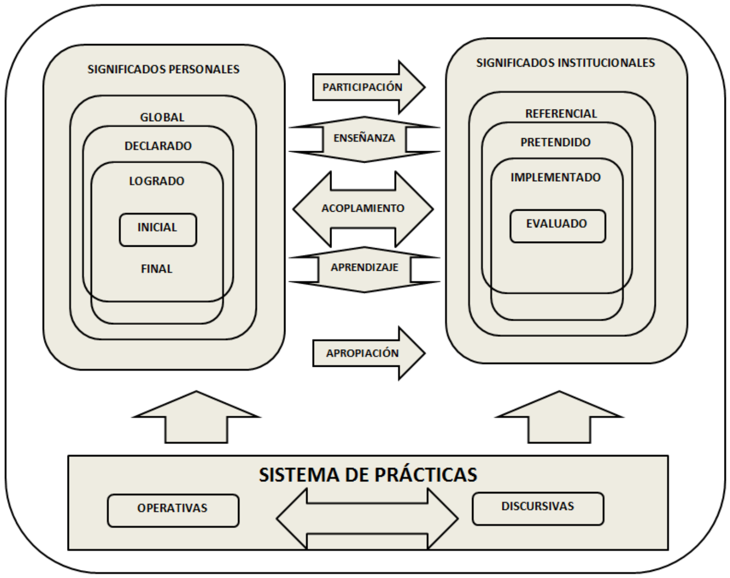


Figura 1. Tipos significados personas e institucionales. Adaptado de Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática por Godino, Batanero y Font, 2009.

El análisis de los seis objetos primarios y sus relaciones permiten establecer una configuración epistémica (figura 2), en otras palabras, como interactúan los objetos puestos en juego permitiendo conocer la anatomía, en este caso, de un texto matemático. (Font y Godino, 2006)

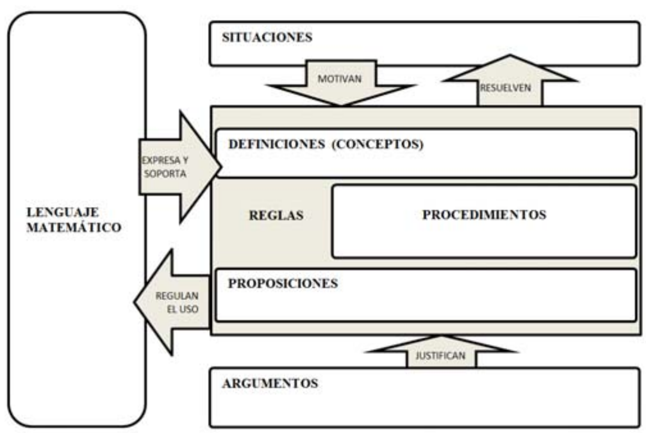


Figura 2. Relación de los objetos primarios en una configuración epistémica. Adaptado de La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores por Font y Godino, 2006.

2.2. Método

En la primera sesión, se realizará una caracterización del marco teórico del EOS en comparación con otros marcos teóricos utilizados en la Matemática Educativa. Además de lo anterior, se realizará una presentación resumida de los trabajos de tesis desarrollados en la comunidad de matemática educativa en nuestro estado, así como las conclusiones y alcances que han tenido. Durante esta sesión el participante podrá aportar de manera voluntaria e individual sobre las ideas expuestas. Además de lo anterior, al cierre de la primera sesión se delinearán los diferentes elementos que conllevan los análisis a través del EOS.

Durante la segunda sesión, se definirán los objetos matemáticos primarios que establece el EOS y se le brindará al participante material para que de manera individual identifique estos objetos en un pequeño texto. Después se dividirán los participantes por equipos, donde cada uno analizará en conjunto un objeto matemático primario. Al final del debate de ideas por equipo, se expondrán los objetos detectados en el texto y de manera grupal se enriquecerán con las participaciones de quienes trabajaron otro objeto primario. Al cierre de la sesión, se analizarán las relaciones que guardan los diferentes objetos matemáticos primaros con el fin de que emerja el concepto de configuración epistémica y de manera grupal se formará un sistema de prácticas con los objetos primarios detectados a través de su configuración.

En la tercera sesión, los participantes trabajarán de manera individual en la detección de los objetos primarios y la configuración epistémica para dos textos (un texto tradicional y uno no tradicional), esto tiene la finalidad de que con el análisis del EOS se comparen ambas formas de enseñanza. De manera grupal se realizará una discusión sobre las conclusiones a las que llegaron con el análisis anterior.

3. DISEÑO DIDÁCTICO

La primera sesión iniciará con una presentación del taller, los alcances y el objetivo de las actividades que se desarrollarán a lo largo de las sesiones. Una vez realizado lo anterior, se llevará a cabo por parte de los expositores una breve exposición sobre el EOS realizando una comparación con otros marcos teóricos utilizados en la Matemática Educativa, específicamente su comparación con la Socioepistemología, la cual tiene gran auge en el sur de nuestro país. En el noroeste de México, específicamente en Sonora, el EOS ha representado una línea de trabajo importante en la comunidad de Matemática Educativa del Instituto Tecnológico de Sonora y la Universidad de Sonora, por esto, se analizarán de manera resumida algunos trabajos realizados a la luz del EOS (objetivo, alcance, resultados y conclusiones) con el fin de establecer los elementos básicos que

ISSN: 2594-1046

declara el marco teórico. Durante la exposición se invitará a los participantes a emitir sus opiniones o cuestionamientos sobre la teoría y/o las investigaciones que se analizan.

En la segunda sesión se les presentará un texto con el que se trabajará, en un primer momento de manera personal, después de unos minutos de intentar distinguir los elementos que se proponen por el EOS se les solicitará que discutan por equipos los resultados obtenidos. La intención de la discusión por equipo les permitirá comparar la realización del ejercicio y compartir con pares su práctica, además de opinar semejanzas y diferencias. Este ambiente generará las condiciones para solicitar que expongan brevemente uno objeto específico asignado por los desarrolladores. Para trabajar en esta parte se les brindará de manera impresa un formato en forma de tabla para que llenen conforme avanza la actividad (ver tabla 1), de manera opcional se compartirá el archivo para que se trabaje y se proyecte al momento de exponer.

Después de la exposición se considera un debate sobre la pertinencia de la elección de los elementos propuestos por el EOS, se espera que este sea el momento más intenso del laboratorio. Este ejercicio permitirá observar los posibles conflictos que se puedan generar durante el debate, la forma de argumentar de los participantes y evaluar sus prácticas sociales compartidas. En este momento se profundiza en la descripción de los elementos propuestos por el Enfoque Ontosemiótico y se concilian las ideas para llenar la tabla. En la medida que se llegue a las conciliaciones sobre la clasificación de los elementos se irá llenando un rotafolio para resumir las ideas y sean visibles por los participantes; las ideas vertidas como parte de esta reflexión grupal, darán pauta a la emergencia del concepto de configuración epistémica. Como forma de cierre se comentará por parte de los responsables del laboratorio su experiencia individual con este ejercicio.

En la sesión tres se retoma la idea de configuración como una articulación de los elementos considerados en la tabla, esta articulación entre ellos se comenta de manera grupal y se utiliza una representación en forma de diagrama (ver figura 2) y se discute la pertinencia de la estructura presentada y el uso de las flechas para conectar las ideas expuestas. Realizado lo anterior, se les brindará a los participantes dos fragmentos de textos matemáticos para analizar, identificar los objetos primarios puestos en juego y elaborar una configuración epistémica de cada uno. El primer texto tiene una tendencia al método tradicionalista de enseñanza de las matemáticas, mientras la segunda corresponde a una propuesta que supone emplear ideas relacionadas con la Matemática Educativa.

Situaciones	Intervinientes
	Emergentes
Lenguaje	Intervinientes
	Verbal:
	Gráfica:
	Numérica:
	Notación:
	Emergentes
	Verbal:
	Gráfica:
	Numérica:
	Notación:
Conceptos	Intervinientes
	Emergentes
Procedimientos	Intervinientes
	Emergentes
Proposiciones	Intervinientes
	Emergentes
Argumentos	Intervinientes
	Emergentes

Tabla 1. Formato para la detección de los objetos primarios de un texto matemático

Una vez realizado este análisis se espera que los participantes presenten dos configuraciones similares a las que se presentan en la figura 3 y figura 4; es decir se pretende que desarrollen las configuraciones epistémicas de los textos de dos enfoques distintos y se pueda apreciar el alcance del uso del EOS, mediante una comparación entre configuraciones resaltando las características de que presentan.

Además, se espera que los participantes delaten que un texto resulta significativo en la medida que los objetos primarios que aparezcan en él, y más aún, que exista una relación articulada entre ellos.

ISSN: 2594-1046

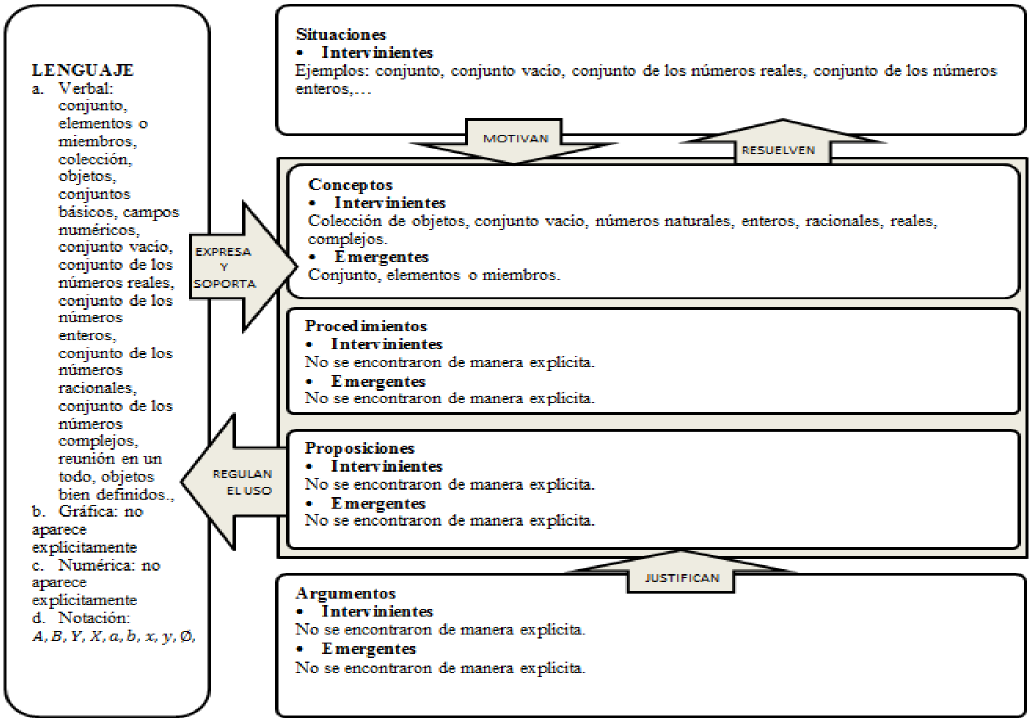


Figura 3. Configuración epistémica texto tradicionalista. Adaptada de Caracterización del significado institucional de referencia de las nociones básicas de la teoría de conjuntos por Trujillo (2011).

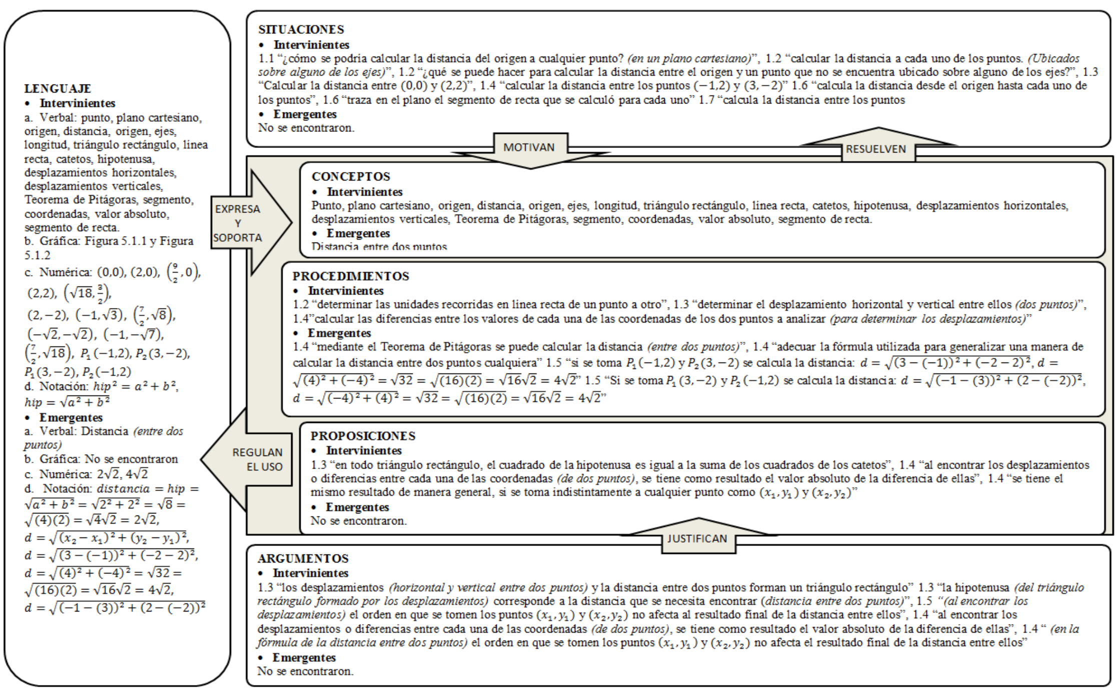


Figura 4. Configuración epistémica texto no tradicionalista. Adaptado de Diseño y análisis de una propuesta didáctica para la enseñanza de la circunferencia por Arana, 2016.

ISSN: 2594-1046

4. CONSIDERACIONES FINALES

De acuerdo a Font y Godino (2006) el análisis de los seis objetos primarios y sus relaciones permiten conocer la anatomía de un texto matemático, a través de las relaciones que forman los objetos primarios en una configuración epistémica, la cual resulta ser una herramienta útil al profundizar en lo que se entiende por una situación rica, donde una mayor articulación de los objetos primarios (intervinientes y emergentes) generan mejores estructuras en el texto.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arana, R. (2016). *Diseño y análisis de una propuesta didáctica para la enseñanza de la circunferencia* (tesis de maestría no publicada). Instituto Tecnológico de Sonora, México.

Font, V. y Godino, J. (2006) La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaço Matematica Pesquisa*, 8 (1), 67-98. Recuperado de: http://webs.ono.com/vicencfont/index_archivos/EMP.pdf

Godino, J. (2011). *Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.* XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recuperado de: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores _idoneidad.pdf

Godino, J. Batanero, C. y Font, V. (2009). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Recuperado de: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Trujillo, E. (2011). *Caracterización del significado institucional de referencia de las nociones básicas de la teoría de conjuntos* (tesis de maestría no publicada). Universidad de Sonora, México.

Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

COMPETENCIAS MATEMÁTICAS. UNA PROPUESTA PARA SU IDENTIFICACIÓN Y FAVORECIMIENTO DESDE LA FORMACIÓN DE PROFESORES

Judith Hernández Sánchez
Universidad Autónoma de Zacatecas, judith700@hotmail.com

Carolina Carrillo García
Universidad Autónoma de Zacatecas, cgcarolin@hotmail.com

José Iván López Flores
Universidad Autónoma de Zacatecas, ivan.lopez.flores@gmail.com

Resumen

En este taller nos proponemos identificar y evaluar competencias matemáticas, utilizando ciertas tareas y problemas relacionados con la matemática y su enseñanza. Para proponer, analizar y reflexionar sobre posibles herramientas que coadyuven en el quehacer del profesor de matemáticas al momento de implementar en el aula un currículo por competencias se utilizará la triada tarea-teoría-reflexión. Es decir, se propone evidenciar a través de la resolución de ciertas tareas matemáticas el uso de algunos elementos del análisis didáctico que nos permitan identificar las competencias matemáticas que se pueden favorecer. Además, se plantea la experiencia y el conocimiento profesional de los profesores como un elemento central para el desarrollo de esta tarea.

Palabras clave: Competencias, identificación, formación de profesores, análisis didáctico.

1. INTRODUCCIÓN

En la actualidad, varios países de Latinoamérica se encuentran en un proceso de universalización de la Educación Media Superior (EMS); en otros, su obligatoriedad ya se encuentra establecida en sus leyes o normativas (INEE, 2011). Lo anterior pone en el centro de atención expectativas y retos inherentes para lograrlo de la mejor manera.

Obligatorio o no, la educación media es tema de preocupación en muchos países y está presente en las agendas de organismos internacionales. Tres son los asuntos que se discuten consistentemente: a) las finalidades que se le encomiendan a este ciclo educativo; b) la atención a la equidad social; y c) la relevancia y pertinencia curricular (INEE, 2011, pág. 24).

En algunos países se propone que una posible, aunque parcial, respuesta a estos retos y expectativas es a través de la orientación educativa por competencias. Sin embargo, para el caso de la matemática escolar este nuevo enfoque demanda a su vez una manera diferente de interpretar el currículo (Gómez, 2007); siendo los profesores los responsables directos de lograr en el aula una perspectiva funcional de los contenidos matemáticos.

Al respecto, si bien es cierto que se han tomado varias acciones, en ocasiones la experiencia de los profesores de matemáticas no es tomada en cuenta o es desestimada. En nuestra opinión, el conocimiento adquirido a través de la experiencia del profesor y/o durante su formación puede y debe coadyuvar en la tarea de llevar al aula esta nueva perspectiva.

2. PROPÓSITO Y ALCANCE

En este taller nos proponemos identificar y evaluar algunas de las competencias matemáticas inmersas en los niveles secundaria y bachillerato de nuestro sistema educativo. Los participantes deberán ser profesores de matemáticas en servicio en los niveles educativos mencionados, se tratará de ubicar el papel que juega la experiencia y el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas al momento de discutir el instrumento propuesto para identificar las competencias que se favorecen con ciertas tareas matemáticas.

Para lograr el objetivo planteado, se involucrará a los participantes del taller en la resolución y análisis de ciertas tareas y problemas relacionados con la matemática como objeto de estudio, así como con su enseñanza, vinculándola con la tarea docente.

3. MARCO TEÓRICO O CONCEPTUAL

Tomaremos como marco teórico el análisis didáctico y su papel en la formación de profesores (Gómez, 2007; Lupiáñez, 2009 y Lupiáñez y Rico, 2008) y como instrumento inicial el propuesto en Moreno, Meza y Azcárate (2007).

Para proponer, analizar y reflexionar sobre posibles herramientas que coadyuven en el quehacer del profesor de matemáticas al momento de implementar en el aula un currículo por competencias, se utilizará la triada tarea-teoría-reflexión. Es decir, se propone evidenciar a través de la resolución de ciertas tareas matemáticas el uso de algunos elementos del análisis didáctico que nos permitirán identificar las competencias matemáticas que se pueden favorecer.

Además, se plantea la experiencia y el conocimiento profesional de los profesores como un elemento central para el desarrollo de esta tarea.

4. MÉTODO

Se plantea para el desarrollo del taller iniciar con la solución de ciertas tareas matemáticas específicas; de esta manera se promoverá que el profesor adopte primero el papel de estudiante. Enseguida a través de preguntas de corte didáctico, el profesor cambiará paulatinamente de rol; para ello se le pedirá que teorice sobre lo realizado. Se espera que el profesor sea capaz de identificar el contenido matemático que se puede poner en juego al momento de resolver la tarea bajo ciertas situaciones y contextos. Por último y con el uso del instrumento propuesto se le pedirá que localice las competencias que se espera el estudiante movilice. Todo lo anterior dotará de diferentes dimensiones a la tarea analizada, teorizando desde el conocimiento profesional del profesor. Por último, se reflexionará sobre el instrumento, lo encontrado y se contrastará con lo propuesto por otros profesores.

De esta forma, el profesor identificará las competencias, desempeños y capacidades (matemáticas o genéricas) que se favorecen al resolver problemas o ciertas tareas matemáticas. Se discutirán las diferentes dimensiones de las competencias, dando un énfasis especial en aquellas que influyen en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Se pondrá en evidencia el conocimiento profesional del profesor de matemáticas y el papel de la experiencia y creencias del profesor al momento de identificar y evaluar competencias.

5. CONSIDERACIONES FINALES

Este taller se ha implementado en dos ocasiones, una en un ámbito local y otra a nivel internacional. Los resultados obtenidos nos llevan a considerar el análisis didáctico una propuesta con la cual los profesores podemos identificar, acotar y organizar los diferentes significados del contenido matemático escolar; además de proponer las expectativas de aprendizaje cuando los estudiantes se enfrenten a tareas diseñadas, analizadas o seleccionadas con cierto fin de instrucción.

En esta ocasión queremos evidenciar que los significados para cierto contenido matemático pueden estar supeditados a aquellos “significados de referencia” establecidos en los programas de estudio. Sin embargo, para las expectativas de aprendizaje se espera que se comprueben otras dimensiones del conocimiento profesional de los profesores de matemáticas. Asimismo, se espera que la triada tarea-teoría-reflexión permita dotar de más dimensiones y significados a las distintas componentes del currículo; posicionando la experiencia del profesor de matemáticas en un lugar significativo en la adaptación de materiales didácticos que apoyen la tarea de llevar al aula contenidos funcionales mediante el enfoque por competencias.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Gómez, P. (2007). *Análisis didáctico. Una conceptualización de la enseñanza de las Matemáticas. (Capítulo 2). En desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. España: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

INEE (2011). *La Educación Media Superior en México. Informe 2010-2011*. México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades del aprendizaje de los escolares. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)* (pp. 225-236). España: Instituto de Estudios Altoaragoneses y Universidad de Zaragoza.

Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. España: Universidad de Granada.

Moreno, M., Mesa, G. y Azcárate, C. (2007). Competencias y evaluación: desarrollo de un instrumento de análisis y caracterización de problemas matemáticos de nivel superior. *Actas de Comunicaciones del XI SEIEM*, La Laguna.

Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

PAUTAS PARA EL DISEÑO DE INSTRUCCIÓN DEL PROFESOR CON LA CALCULADORA CLASSPAD FX-CP400

Diana del Carmen Torres Corrales
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional,
diana.torres@cinvestav.mx

Jesús Eduardo Hinojos Ramos
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional,
jesus.hinojos@cinvestav.mx

Resumen

El presente laboratorio da un ejemplo de cómo diseñar la instrucción del profesor para un tópico de su labor profesional con el uso de tecnología. La calculadora (ClassPad fx-CP400) es una herramienta que permite representar y facilitar la significación de conceptos matemáticos. Tomamos como ejemplo uno de los principales modelos utilizados en la Ingeniería, el modelo lineal, el cual incluye expresiones algebraicas de grado uno, tales como ecuaciones e inecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y valor absoluto. El uso de la calculadora mencionada consideramos, con evidencia empírica, permitirá generar interés e inclusión dentro de las matemáticas y del sistema educativo para los estudiantes de nuevo ingreso a Ingeniería; además de incluir una variedad de maneras de entender, visualizar y comunicar el comportamiento de fenómenos de interés en la Matemática.

Palabras clave: diseño instruccional, tecnología, modelo lineal, Ingeniería, ClassPad fx-CP400**.**

1. PROPÓSITO Y ALCANCE

Este laboratorio tiene como propósito presentar al profesor (en formación o en servicio) un ejemplo de diseño instruccional, donde la tecnología funja como facilitador entre los elementos involucrados en la significación de la Matemática a través del uso de las gráficas.

Se toma como caso particular el aula de matemáticas en Ingeniería en el tema de modelo lineal, que involucra las expresiones algebraicas de grado uno (ecuaciones e inecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones y valor absoluto) y las diferentes formas de representarlas. La herramienta tecnológica puesta en uso es la calculadora ClassPad fx-CP400, puesto que permite realizar operaciones aritméticas y algebraicas, así como la graficación y la visualización de los parámetros implicados. Se toma como referencia del tema, la propuesta del libro de Cuevas (2016) aplicada como prueba piloto alrededor de 45 grupos de clases de la asignatura de Fundamentos de Matemáticas durante tres semestres y un verano académico en los años escolares 2015 y 2016. Los estudiantes que cursaron dicha asignatura eran 1350 aproximadamente y correspondían al nuevo ingreso de programas de Ingeniería del Instituto Tecnológico de Sonora.

Dillon (2012) nos menciona que, desde el inicio de la Ingeniería, los ingenieros desarrollaron y utilizaron modelos para representar de manera conveniente ciertos compartimentos de su interés, tales representaciones se convirtieron gradualmente en una forma de hablar y pensar propia de su comunidad, lo que figuró con el paso del tiempo en una práctica compartida. De esta forma, los ingenieros incluyen una variedad de maneras de entender, visualizar y comunicar el comportamiento de sistemas que están diseñando y construyendo, incluyendo tablas, diagramas, dibujos, modelos matemáticos y modelos a escala, para con ello dar una idea de cómo funciona un sistema, prediciendo y explicando su comportamiento.

Es por ello que, en la formación matemática de los estudiantes de Ingeniería, se presenta de manera continua el uso de representaciones simbólicas, algebraicas y gráficas de modelos que incorporan el fenómeno bajo estudio. Uno de los principales modelos utilizados en Ingeniería por su simplicidad es el modelo lineal, el cual es visto en las distintas asignaturas de matemáticas y de especialización, como una herramienta que permite predecir, explicar y asociar el comportamiento de fenómenos.

Este laboratorio está dirigido a profesores (en formación o en servicio) de los niveles medio superior o superior, interesados en la incorporación de los recursos tecnológicos para el diseño instruccional en el aula de matemáticas. Siendo deseable que tengan nociones del uso de otras herramientas tecnológicas, tales como software o calculadoras graficadoras.

2. MARCO TEÓRICO

2.1. La tecnología

Moreno (2005) relata las tres transiciones cognitivas mayores que habla en su libro M. Donald, *Origins of the Modern Mind* de 1993. Las transiciones han generado un nuevo sistema de representación de la realidad, las cuales tiene que ver de manera importante con la memoria. La primera transformación, *fase mimética*, constituye el empleo del cuerpo como sistema de representación, donde el *Homo Erectus* tuvo la capacidad de evocar sucesos de su entorno sin lenguaje, y además fabricar utensilios; de la primera transformación se produjo la simbiosis entre memoria, herramientas y vida social. En la segunda transformación, *fase mítica*, el hombre logra consolidar y profundizar la vida en comunidad a través de los sistemas articulados de signos sonoros hasta el lenguaje. La tercera transformación, *fase de las representaciones externas*, se inicia la elaboración de un soporte de la memoria que supera los límites dados por la biología, comienza

ISSN: 2594-1046

la transformación tecnológica de la memoria, "entendiendo por tecnología el empleo del conocimiento para hacer cosas de una forma que resulte reproducible" (Moreno, 2005, p.1).

2.2. Visualización y graficación

La actividad de visualizar requiere la construcción de un espacio de referencia, en el cual las representaciones de los objetos matemáticos sean interrelacionadas. Visualizar es la habilidad de construir significados como un articulador entre lo que se ve y se aprende. En Matemática Educativa, desde que los recursos computacionales son accesibles a la comunidad en general, la mayoría de los trabajos relacionados a visualización involucran el uso de recursos tecnológicos para propiciar actividades cognitivas (Acuña, 2012).

Es de interés especial la graficación para la Matemática, su uso en el sistema escolar radica en la necesidad de relacionar representaciones gráficas y algebraicas para la significación de conceptos. Los ambientes escolares donde se da la graficación son: (1) la construcción utilizando la relación entre dos variables de una ecuación (utilizar tablas de valores como parejas de puntos que se ubican en un plano cartesiano), (2) graficación a través de operaciones gráficas (aplicar transformaciones a una gráfica base a partir de la modificación de ciertos parámetros en la ecuación) y (3) el uso de la graficación por medio de simulaciones utilizando tecnología (Suárez, 2014).

2.3. Socioepistemología

Este laboratorio se plantea desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, donde consideramos que será posible observar usos y argumentaciones que dan los participantes en el entorno tecnológico, cuando lleven a cabo diseños donde la graficación sea la base para la construcción del conocimiento matemático. Lo anterior, está basado en las investigaciones de Cordero (2011), donde se hace explícito el papel de la graficación como una práctica social, puesto que esta se observa tanto en ámbitos escolares como no escolares por la necesidad de interpretar información (fenómenos, problemas, entre otros). Así también, el autor nos menciona que la tecnología permite entender aspectos y formas de la actividad humana que transforman o resignifican las relaciones funcionales que se involucran en ambientes gráficos.

La resignificación progresiva o apropiación del conocimiento es uno de los principios de la Teoría Socioepistemológica, en el cual se establece que el conocimiento matemático se construye a través de significaciones, las cuales no son estáticas, sino que están en constante evolución, de acuerdo a los contextos donde está en uso el conocimiento matemático, por lo que la significación es funcional, relativa y contextual (Cantoral, 2013).

Las actividades por desarrollar en el laboratorio, tomando como base a la Socioepistemología, consistirán en dos tipos, en la primera, se dará una breve introducción al uso de la calculadora, con la finalidad de familiarizar a los asistentes con la herramienta tecnológica; en la segunda, se elaborarán diseños, por parte de los profesores, donde se profundizará en el uso de las gráficas como argumentos para significar la matemática en los estudiantes.

3. MÉTODO

El laboratorio constará de tres sesiones, con una duración de hora y media cada una, estas a su vez se dividirán en distintos momentos, donde se organizará a modo de taller con estrategias de trabajo individual, grupal y de exposición magistral.

3.1. Primera sesión

Durante la primera sesión se presentará a los facilitadores del laboratorio, el propósito, alcances y objetivo que se pretende y el marco teórico que respalda al mismo, así como una reflexión inicial colectiva donde se mencionarán las transiciones de la sociedad desde el punto de vista del desarrollo tecnológico.

En un segundo momento, se discutirá con los asistentes respecto a la incorporación de la tecnología en el aula de matemáticas y sus experiencias utilizándola en la práctica docente, así como las consideraciones que ellos tienen al respecto del uso de calculadoras graficadoras y software.

En un tercer momento se presentará el equipo tecnológico con el cual se trabajarán las sesiones del taller y se expondrá de manera magistral cuáles son sus funciones, bondades y ventajas con respecto a otras herramientas con similares capacidades, proporcionando a los participantes material impreso como apoyo.

3.2. Segunda sesión

La segunda sesión corresponderá a ejemplificar el uso de la calculadora y su incorporación en el aula de clases de matemáticas, tomando el caso de la asignatura de Fundamentos de Matemáticas del Instituto Tecnológico de Sonora con la propuesta didáctica de Cuevas (2016).

Durante la sesión se trabajarán los ejercicios de esta, su resolución de manera tradicional y con la calculadora con la finalidad de que los asistentes obtengan familiaridad con ella, y reflexionen acerca del apoyo que representa la herramienta tecnológica.

Finalmente se discutirá sobre cómo elaborar un diseño de instrucción, donde la calculadora se incorpore como un elemento que permita significar la Matemática, mediante la incorporación de los elementos teóricos descritos anteriormente.

3.3. Tercera sesión

La tercera sesión estará enfocada al trabajo por equipos, donde los profesores harán uso de la calculadora para elaborar un diseño de instrucción para el tema de su elección, el cual presentarán a los demás equipos para debatir y contrastar las distintas estrategias empleadas.

4. DISEÑOS DIDÁCTICOS

En este apartado, se mostrarán algunas de las actividades que se realizarán durante las tres sesiones del laboratorio.

4.1. Manejando la Calculadora fx-CP400

Para el diseño se utiliza el emulador de la calculadora para PC Windows, sin embargo, las instrucciones y pasos son las mismas que las utilizadas en la calculadora.

Encender la calculadora y esperar a que esta cargue el sistema, una vez que termine deberá mostrarse la siguiente pantalla (ver figura 1).

Seleccionar la opción Main (indicada como un ícono rojo en la parte superior central de la pantalla) presionándola con el stylus, esto abrirá el programa de manejo algebraico principal y es con base en este programa como se desarrollará la actividad; la pantalla deberá mostrarse como se indica en la figura 2; en caso de no aparecer en blanco, siga las instrucciones del Apéndice 1 (material que se dará durante el taller).

En la parte inferior de la Pantalla Main, se tiene un menú de configuraciones que podemos modificar para trabajar con cuestiones relacionadas con el Cálculo y nuestras preferencias, a continuación, se describen los efectos que tiene cada configuración, para el presente taller trabajaremos en: Standard/Real/Rad.

Figura 1: Pantalla principal de la calculadora.

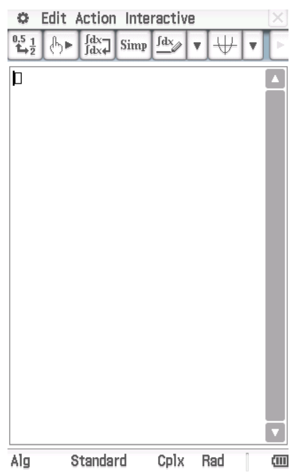


Figura 2: Pantalla principal de la opción Main.

Al presionar con el stylus sobre ellas, observará que cambia el modo de presentar/recibir la información en la calculadora, en este sentido se tiene:

- Standard/Decimal, Standard muestra las fracciones en notación $\frac{p}{q}$, mientras que Decimal mostrará las primeras 10 cifras decimales después del punto de manera predeterminada.
- Real/Cplx: Real, al trabajar con polinomios muestra las soluciones reales de las ecuaciones, mientras que Cplx, muestra tanto las soluciones reales como las soluciones imaginarias.

ISSN: 2594-1046

- Rad/Deg/Gra: Rad trabaja los ángulos en radianes (la división del arco de una circunferencia en fracciones de π), Deg trabaja los ángulos en grados sexagesimales (la división de la circunferencia en 360° unidades de 1° cada una), mientras que Grad (grados centesimales) trabaja la división de la circunferencia en 400 partes.

En la figura 3 se muestran los ejemplos de lo anteriormente mencionado.

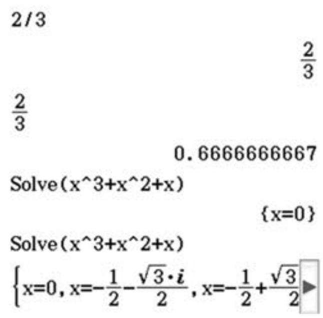


Figura 3: Ejemplos de la configuración de la calculadora.

Nota: Si aparece una flecha enseguida de algún renglón, al presionar sobre ella con el stylus se ve el resto del renglón.

Presione el botón *Keyboard* (su ubicación se muestra en la figura 4), ubique el menú *Math1*, *Trig* y *abc*, ya que estos son los que utilizaremos en los siguientes pasos, para desactivar el teclado presione nuevamente el botón *Keyboard*.

Figura 4: Ubicación del botón Keyboard, en el apéndice 2 se describen sus funciones.

5. TRABAJO CON EXPRESIONES ALGEBRÁICAS DE GRADO UNO

Por medio de la pantalla principal (Main) de la calculadora fx-CP400, se ejemplificarán diversas técnicas relacionadas con el tema de expresiones algebraicas de grado uno, en un primer momento se trabajará sobre las cuestiones del álgebra: simplificación de expresiones y despejes para la solución de ecuaciones de una incógnita y la interpretación de los resultados.

Uno de los ejemplos que se resolverá es:

$$\sqrt{x-3} = \sqrt{2x+6}$$

Donde el resultado de despejar la variable x es $x = -9$, sin embargo, la calculadora mostrará como respuesta la figura 5 (si la calculadora está configurada en reales):

solve($\sqrt{x-3}=\sqrt{2x+6}$)
No Solution

Figura 5: Ejemplo de solución de expresiones algebraicas.

Esto se debe que al sustituir el valor de $x = -9$ en ambos lados de la ecuación, se obtiene:

$$\sqrt{-9-3} = \sqrt{2(-9)+6} = \sqrt{-12} = \pm 2\sqrt{3}i$$

Es decir, se tiene como resultado un número complejo, el que normalmente no se aprecia de forma evidente si el trabajo se realiza de forma manual, pues se espera sólo un resultado numérico, mas no la comprobación de dicho resultado con el contexto del problema.

Otros ejemplos que se trabajarán en la sesión se muestran en la figura 6:

Solve(6x−5=(4x+3))
{x=4}
Solve($4-\frac{3}{x}=6-\frac{5}{x}$)
{x=1}
Solve($\sqrt{x-7}=\sqrt{2x+4}$)
{x=−11}

Figura 6: Ejemplo de ejercicios de expresiones algebraicas.

En relación con la resolución de sistemas de ecuaciones de 2x2, se mostrará mediante el uso de la calculadora cómo graficar las ecuaciones que conforman al sistema e interpretar que la solución del mismo consiste en encontrar el punto donde ambas ecuaciones tienen el mismo valor, tanto para x como para y, es decir, la intersección de ambas rectas o bien, si ambas rectas no se intersecan en ningún punto, dicho sistema no tiene solución.

ISSN: 2594-1046

Un ejemplo que ilustra lo anterior es el sistema de ecuaciones conformado por:

$$39x - 91y = -28$$
$$6x - 14y = 7$$

Al resolverlo mediante el uso de la calculadora se obtiene lo expuesto en la figura 7.

$$\left\{\begin{array}{l} 39x-91y=-28 \\ 6x-14y=7 \end{array}\right|_{x,\,y}$$

No Solution

Figura 7: Ejemplo de sistema de ecuaciones lineales de 2x2 inconsistente.

Lo cual puede comprobarse gráficamente con las herramientas de la calculadora (ver figura 8).

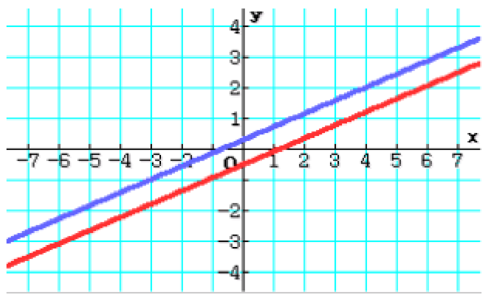


Figura 8: Solución gráfica de un sistema inconsistente.

En el caso de sistemas donde la solución existe, se mostrarán tanto los métodos de solución por medio de álgebra como la visualización del punto donde ambas rectas se intersecan, por ejemplo, en el caso del sistema de ecuaciones:

$$3x + 4y = 5$$
$$2x - 3y = -8$$

Donde la resolución algebraica se realiza de distintas maneras (ver figura 9).

Solve({3x+4y=5, 2x−3y=−8}, ▶

{x=−1, y=2}

$$\left\{\begin{array}{l} 3x+4y=5 \\ 2x-3y=-8 \end{array}\right|_{x,\,y}$$

{x=−1, y=2}

Figura 9: Ejemplo de sistema de ecuaciones lineales de 2x2 consistente.

Gráficamente, se muestran ambas rectas y se identifica la solución del sistema por medio del punto de intersección (ver figura 10).

ISSN: 2594-1046

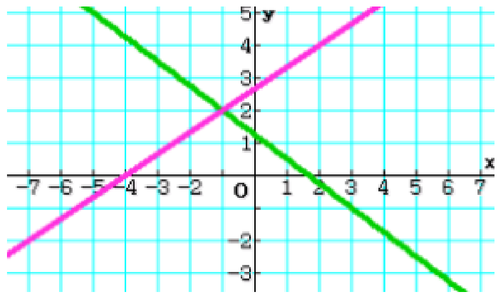


Figura 10: Solución gráfica de un sistema consistente.

Para el caso de los sistemas de ecuaciones de 3x3, se mostrará cómo resolverlos algebraicamente mediante el uso de las herramientas integradas en la calculadora, por ejemplo, el sistema:

$$
\begin{gathered}
2x + y = 5 \\
-3x + 2z = 7 \\
3y - 8z = 5
\end{gathered}
$$

La resolución mediante el uso de la calculadora se muestra en la figura 11.

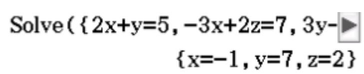


Figura 11: Ejemplo de sistema de ecuaciones lineales de 3x3.

Otra de las cuestiones que se trabajarán es la resolución de inecuaciones unilaterales, bilaterales y con valor absoluto, por ejemplo: $\frac{5}{2}x - 4 \leq 2$; $-4 < 4x + 6 < 2$; $|2x + 6| < 4$.

Algebraicamente se observarán las soluciones de dichas inecuaciones (ver figura 12).

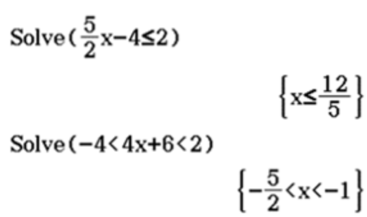


Figura 12: Ejemplo de inecuaciones lineales.

Y se trabajará con la interpretación gráfica de los resultados que proporciona la calculadora, el cual se presenta como una condición de falso-verdadero (0-1) dependiendo del intervalo de solución donde la inecuación es válida (ver figura 13).

ISSN: 2594-1046

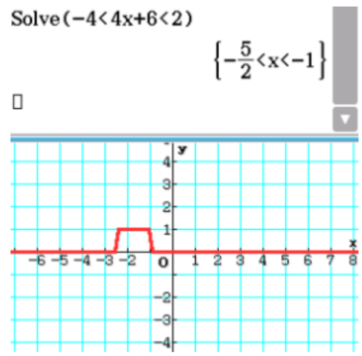


Figura 13: Solución gráfica de inecuaciones

En el caso de inecuaciones con valores absolutos, se mostrará cómo resolverlas, reescribirlas como una inecuación bilateral y cómo interpretar gráficamente su solución utilizando los comandos y opciones de la calculadora (ver figura 14).

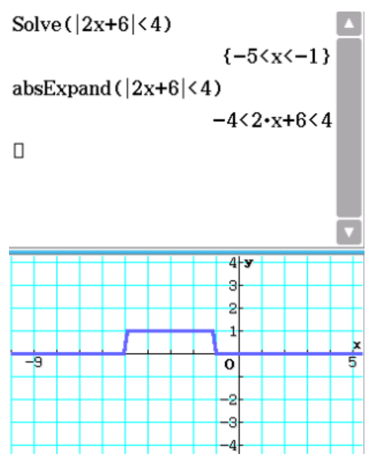


Figura 14: Solución de inecuaciones con valor absoluto.

De esta forma, se ilustrará que la calculadora no sólo permite resolver las cuestiones, sino que la interpretación de los resultados gráficos, simbólicos y numéricos dados por la herramienta tecnológica permiten amplificar el trabajo matemático mental. Posterior al trabajo de familiarización con la calculadora, se mostrará de manera general, cuáles son las consideraciones que se deben tomar en cuenta al diseñar una clase donde se incorpore el uso de la tecnología: sus momentos, pertinencia, disponibilidad y espacio. Finalmente, en conjunto con los facilitadores del curso, los profesores elaborarán un diseño para instrucción de un tema por equipos, para ser desarrollado con las calculadoras y expuesto a los participantes del laboratorio.

6. CONSIDERACIONES FINALES

Consideramos pertinente la realización de este laboratorio, para que el profesor se familiarice con el uso de la calculadora fx-CP400 y su incorporación al diseño instruccional del aula de clase de matemáticas. También porque con este laboratorio se presenta como ejemplo la inclusión de la tecnología como facilitador en la significación de un tema básico para el nivel medio superior y superior, el modelo lineal. De manera relevante, mencionamos la potencialidad que brinda la calculadora fx-CP400 al vincular representaciones algebraicas y graficas de valores reales y complejos, presentándolos de manera amigable al usuario.

7. AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a CASIO Académico México y al Instituto Tecnológico de Sonora, por hacer posible el escenario y los medios para la realización de este laboratorio.

8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acuña, C. (2012). *La visualización como forma de ver en matemáticas; un acercamiento a la investigación*. España: Gedisa.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*. España: Gedisa.

Cordero, F. (2011). La modelación y la graficación en la matemática escolar. En L. Rodríguez, R. Quintero, y A. Hernández (Coords), *Razonamiento Matemático. Epistemología de la Imaginación (Re)pensando el papel de la Epistemología en la Matemática Educativa* (pp. 377-399), España-México: Gedisa-Cinvestav.

Cuevas, O. (2016). *Aplicaciones de las matemáticas mixtas a la educación*. México: Tabook.

Dillon, C. (2012). Models: What Do Engineers See in Them? En C. *Bissell* y C. *Dillon* (Eds), *Mathematical and Other Modelling in Engineering and Technology Ways of Thinking, Ways of Seeing* (pp. 47-69), Berlín: Springer.

Moreno, L. (2005). *Cognición, Mediación y Tecnología.Matemática Educativa*. México: Cinvestav-IPN.

Suárez, L. (2014). *Modelación-Graficación para la Matemática Escolar*. México: Díaz de Santos

Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

MODELACIÓN Y TECNOLOGÍA EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS A NIVEL BACHILLERATO: ALGUNOS EJEMPLOS DE SITUACIONES DE APRENDIZAJE

José David Zaldívar Rojas
Universidad Autónoma de Coahuila, México
Gonzalo Medina Ramírez
Universidad Autónoma de Coahuila, México
Alibeit Kakes Cruz
Universidad Autónoma de Coahuila, México

Resumen

Paulatinamente, el uso de las nuevas tecnologías, como paquetes de geometría dinámica, *applets,* calculadoras o sensores, se ha convertido cada vez en algo más común dentro de las clases de matemáticas. Sin embargo, en la actualidad existen resistencias sobre las ventajas de la integración de tecnología a las clases. Posiblemente debido a un desconocimiento de la misma, el temor de los profesores a lo desconocido, o al poco control de grupo que generan estas tecnologías e inclusive el que se desconozcan qué ventajas y posibilidades ofrece a dichos ambientes educativos. Por esta razón, en este taller se presentan algunas *situaciones de aprendizaje* basadas en la modelación como ejemplos de cómo es posible integrar tecnología al aula de matemáticas, resaltando la funcionalidad del conocimiento y el desarrollo de significados alrededor de diversos conceptos matemáticos.

Palabras Clave: Modelación, Tecnología Escolar, Situaciones de aprendizaje, Bachillerato

1. PROPÓSITO Y ALCANCE

Investigaciones en Matemática Educativa cada vez enfrentan el surgimiento de nuevas tecnologías con potencialidades para su integración en el aula de matemáticas, proporcionando sin duda transformaciones en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Actualmente, una de tales transformaciones tiene que ver con la creación de ambientes de aprendizaje donde la matemática sea funcional y sea percibida también como una ciencia experimental, pero, además, se promuevan diferentes representaciones de los conceptos matemáticos. El propósito que se persigue con el presente taller es que, a través de situaciones de aprendizaje diseñadas con base en la Modelación, es decir, en el *uso del conocimiento matemático* como una herramienta que permita tomar decisiones, integrando además recursos tecnológicos como calculadoras, los estudiantes tengan una ventana a elementos funcionales del conocimiento matemático que en ambientes de lápiz y papel difícilmente pudiesen vivenciar (Cordero, 2006; Villarreal, 2012).

Los participantes del taller discutirán una serie de situaciones de aprendizaje donde la tecnología tiene un rol protagónico, y a través de su uso, se discuten elementos didácticos que pueden potenciarse con la integración de la tecnología para el aprendizaje de las matemáticas. Nuestra finalidad es la de proveer a los profesores de estrategias y de ejemplos plausibles para el salón de clases y afectar de manera benéfica su práctica docente. Así mismo, se pretende discutir tecnologías novedosas como calculadoras graficadoras y su instrumentalización.

Por otro lado, se pretende dejar ver entre los participantes del taller la importancia de las diferentes representaciones y la conexión que puede existir entre ellas y maneras en las cuales se pueden aprovechar para el desarrollo de diversos tópicos en el nivel bachillerato.

2. MARCO CONCEPTUAL

La *Modelación Matemática y las Aplicaciones* son, en general, temas centrales que en los últimos años se convirtieron en tendencias dentro de la investigación en Matemática Educativa. Esta importancia relacionada a dichos tópicos se debe principalmente a la evidencia brindada en diversas investigaciones que hacían ver la poca vinculación que existe entre la escuela y su entorno (Lave, 1988), y a la imposibilidad de la transferencia del conocimiento aprendido en la escuela a la vida cotidiana de los estudiantes (Arrieta & Díaz, 2015). Inclusive en diversos libros de texto de diferentes niveles se aprecia una tendencia a integrar un “mundo extra-matemático” que enriquezca a las actividades y al currículo con la finalidad de hacer que las matemáticas sean útiles fuera del ámbito escolar (Niss, et al., 2007).

Sin embargo, se reconoce que estas categorías, aunque juegan un rol importante en las aulas de clases de muchos países y es considerada dentro de los planes curriculares como una manera de enseñar y aprender matemáticas, aún existe una brecha importante entre los ideales expresados en las reformas curriculares innovadoras y las prácticas escolares que sustancialmente se desarrollan día a día. Se afirma que es muy complejo encontrar actividades de modelación *genuinas* dentro del salón de clases de matemáticas (Niss, et al., 2007).

Dentro de la presente propuesta, se asume como postura de modelación como aquel *proceso* por medio del cual se pretende entablar una relación, a través de *modelos matemáticos,* entre un mundo extra-matemático y las matemáticas (Niss, Blum y Galbraith, 2007) (Figura 1).

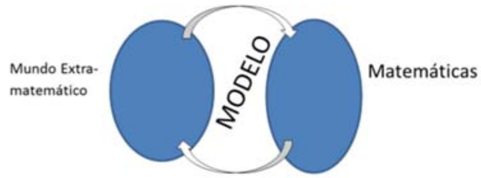


Figura 1. Matemáticas y el mundo extra-matemático (Tomado de Niss et al, 2007, p.4).

Lo anterior implica que la modelación se considere como un proceso mediante el cual se pueden desarrollar competencias matemáticas para la aplicación de las mismas con propósitos extra-matemáticos (Niss, et al., 2007; García, Gascón, Higueras, Bosch, 2006).

Por otro lado, la integración de la tecnología a la clase de matemáticas conlleva –o debería conllevar- una transformación de las prácticas educativas, de los contenidos y de las formas de conocer (Villarreal, 2012). Considerando que la tecnología por sí sola no será el vehículo de la mejora, sino se acompaña de cambios en la práctica docente. De esta manera, la tecnología escolar, como las calculadoras graficadoras, se convierten en herramientas útiles que permiten el desarrollo del pensamiento matemático, puesto que estimulan la reflexión y hacen más activos a los estudiantes, propiciando el diálogo entre estudiantes y profesor, de manera que se construyan significados de manera conjunta (Ursini, 2006).

2.1. Método

El proceso de modelación matemática se inicia con la *conceptualización* de alguna Situación-Problema. Posteriormente, a través de simplificar, estructurar, precisar los datos y relaciones, así como establecer suposiciones de entrada en el dominio extra-matemático, se traduce la situación al lenguaje matemático, es decir, se *matematiza*. En esta *matematización* se utilizan métodos, teoremas y relaciones matemáticas conocidas, se resuelven las ecuaciones derivadas y se dan datos como resultados matemáticos. Estos resultados son traducidos posteriormente al mundo extra-matemático con la finalidad de interpretar resultados, validar el modelo y evaluarlo con base en la matemática y la plausibilidad de los datos para dar solución al problema real. Este ciclo se repite con la intención de validarlo (Niss, et al., 2007; Biembengut & Hein, 1997; Zaldívar, en prensa) (ver figura 2).

Las anteriores relaciones dentro del proceso de modelación es lo que sustenta el diseño de las situaciones de aprendizaje que se propondrán en el laboratorio. Cabe mencionar que la integración de la tecnología será crucial y transversal a todo el proceso, y claramente permitirá el uso del conocimiento matemático a través de la resolución de una situación-problema vivencial que

ISSN: 2594-1046

permita a los participantes hacer consideraciones sobre la realidad y evidenciar así la funcionalidad del conocimiento.

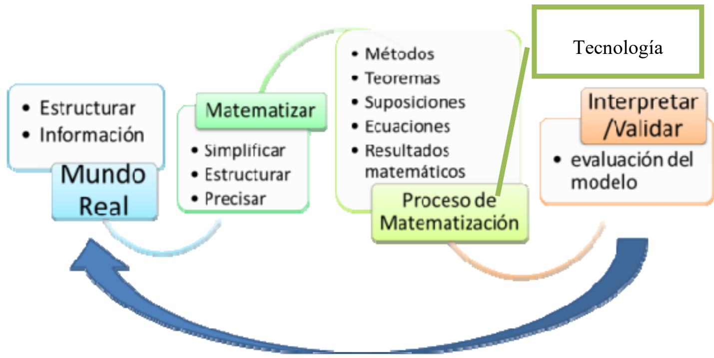


Figura 3. Proceso de modelación matemática (Tomado de Zaldívar, en prensa)

La forma en la cual se implementará el taller será el siguiente:

- Momento 1: Discusión de las situaciones de aprendizaje en equipos de trabajo. Se proponen actividades que hacen alusión a situaciones cotidianas con ayuda de la tecnología escolar como serán calculadoras. Se obtendrán diferentes representaciones semióticas que indican el comportamiento de los fenómenos.
- Momento 2: Producciones y discusión de los participantes. Se harán evidentes los procedimientos y resultados. Se realizarán consensos y discusiones grupales.
- Momento 3: Reflexiones sobre los conocimientos abordados durante la situación y sobre el uso de la tecnología. Se discutirá la fundamentación de las situaciones de modelación y su posible implementación en el aula de matemáticas.

3. SITUACIONES DE APRENDIZAJE

Las Situaciones de aprendizaje que se decidieron incluir en el taller responden al anterior proceso de modelación, donde se integra una componente tecnológica que permita también construir significados y que propicie el tránsito y la articulación entre diversas representaciones semióticas (Hitt, 1998), a través del uso de tablas de datos, gráficas y ecuaciones.

El diseño de estas situaciones de aprendizaje, que estuvo bajo la coordinación de nuestro grupo de investigación, pretende hace emerger justificaciones funcionales por medio de los usos del conocimiento matemático. En las situaciones, no se privilegian los conceptos matemáticos, sino sus usos y las argumentaciones en torno a la modelación y su desarrollo.

Algunos ejemplos de situaciones de aprendizaje que se discutirán con los asistentes son las siguientes:

3.1. Situación de Aprendizaje 1: ¿Qué tiene que ver un hueso con mi altura?

Objetivo: Determinar la relación que existe entre la longitud del fémur y la altura de una persona por medio del uso de gráficas y tablas de ajuste.

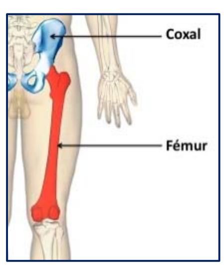
Para esta actividad es necesario contar con los siguientes materiales:

- Cinta métrica
- Al menos 14 personas, 7 varones y 7 mujeres. Se harán mediciones para las mujeres y para los hombres ya que difieren las relaciones.

Discusión de la situación

¿Se han preguntado alguna vez cómo es que los paleontólogos son capaces de decir cuánto media un dinosaurio? Pues bien, para ello, utilizan la toma de datos y a las matemáticas.

Para estimar la altura de un individuo, los forenses y antropólogos suelen utilizar huesos largos de la pierna. Los datos son fiables siempre que se utilicen huesos adultos, y primero hay que determinar si el hueso utilizado es de un hombre o de una mujer.



En esta actividad estimaremos la altura de hombres y mujeres en función de las medidas del fémur. Veremos que las fórmulas se pueden estimar por medio de rectas.

ISSN: 2594-1046

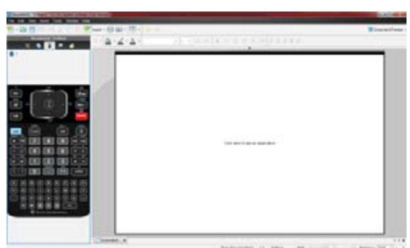
El fémur es el hueso más largo y resistente del cuerpo humano. Se localiza en el muslo. Asegura la unión entre los huesos de la pelvis y la articulación de la rodilla. Juega un papel muy importante en el movimiento de la pierna. Caminar, correr, saltar: es esencial en todas estas actividades.

Desarrollo de la Situación

Usando la cinta métrica cada equipo va a completar la siguiente tabla de longitud del fémur y la altura de la persona.

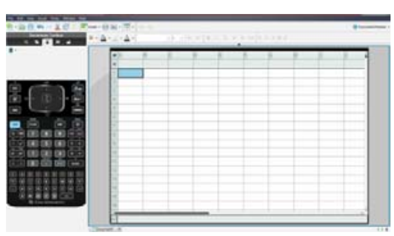
	P-1	P-2	P-3	P-4	P-5	P-6	P-7
Longitud del fémur (cm)							
Altura de la persona (cm)							

Una vez que tengas los datos registrados, usaremos el programa TI-NSpire (o similar) para analizarlos gráficamente y tratar de encontrar relaciones entre los datos.



1. Abre el programa y realiza lo que se te pide. Debes de visualizar una pantalla similar a la siguiente figura:

2. Da *clic* derecho en cualquier parte de la pantalla en blanco y selecciona la opción “Listas y hoja de cálculo” del menú que aparece. Debes visualizar algo como:



3. Introduce los datos en la hoja de cálculo que aparece tal y como los recopilaste. En la parte de arriba de la tabla (marcada con A, B, C, etc.) puedes poner el nombre de la variable que

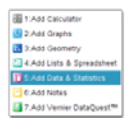
ISSN: 2594-1046

escribas en la columna. Nosotros marcamos la columna A como “fémur” para indicar la longitud del fémur recopilado, y “altura” para poner la altura de la persona.

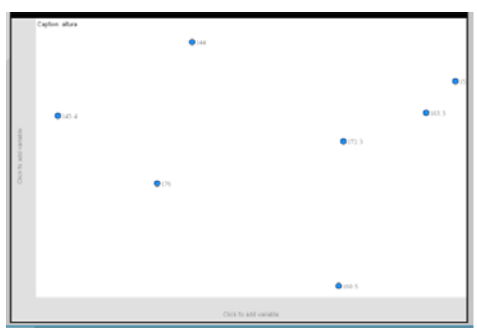
A femur	B altura	C	D

A femur	B altura
38.4	152.8
42.8	163.3
48.1	176
46.6	172.3
45	168.5
34.7	144
35.3	145.4

4. Posteriormente, agrega una nueva hoja de trabajo. Para ello, en la calculadora teclea “ctrl”+ “+page” (tecla “doc”). En esta hoja al dar clic en cualquier parte aparecerá nuevamente el menú y escogeremos la opción “Add data & Staticstis”.

Al dar clic en esta opción, automáticamente aparecerán nuestros puntos que acabamos de registrar en la tabla.



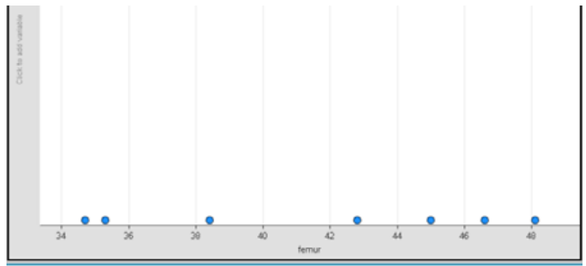
Notemos que, en esta pantalla, en el eje horizontal y vertical se puede apreciar la leyenda “Clic para insertar variable”:

5. En esos recuadros vamos a declarar nuestras variables que escribimos en la tabla. En el eje horizontal agregaremos la variable “fémur” y en el eje vertical, la “altura”. De esta manera tendremos que la altura dependerá de la variable “fémur”.

ISSN: 2594-1046

Para agregar la variable, solo demos clic en “clic para agregar variable” y seleccionemos cada una de las variables. Veamos el efecto:

Podrán observar cómo los datos automáticamente se ajustan a lo que solicitamos. Ahora agreguen en la variable dependiente la variable “altura”.



Responder las siguientes preguntas:

1. ¿Qué observan al definir en los ejes a las variables?

2. ¿Qué les dice esa relación?

3. ¿Cuánto medirá una persona cuyo fémur mide 51 cm de longitud? (acá es posible que ustedes encuentren por medio de “regresión” la curva que mejor se acomoda a los datos, en este caso, la longitud del fémur y la altura están en una relación lineal).

4. ¿Cuánto medirá aproximadamente una persona cuyo fémur mide 38 cm?

5. ¿Cómo queda la relación entre la altura con respecto a la longitud del fémur?

6. Comparen las gráficas que se obtienen de “hombres” y mujeres”, ¿qué observan?, ¿existen diferencias?

3.2. Situación de Aprendizaje 2: ¿Debo preocuparme?

Propósito: Utilizar la calculadora científica como un recurso didáctico para abordar temas de Física. Tales como conversión de unidad en la calculadora y posibilidad de ofrecer una alternativa para justificar el porqué de las fórmulas que permiten realizar conversiones.

Situación planteada a los estudiantes:

Desde hace un par de horas, Mauricio, un estudiante de intercambio en Estados Unidos, se ha empezado a sentir mal. Él recuerda que su madre le ha dicho que cuando la temperatura del cuerpo está por encima de los 39.5º C es momento de tomar medidas y acudir al médico de inmediato, ya que podría haber problemas derivadas de la fiebre.

Un amigo suyo le ayuda a tomarse la temperatura. Al hacerlo, su amigo le comenta que tiene en ese momento 101.5º F.

ISSN: 2594-1046

Mauricio sólo sabe que 0 grados centígrados equivale a 32 grados Fahrenheit y que 212 grados Fahrenheit son 100 grados centígrados. ¿Debería preocuparse Mauricio?

Desarrollo de la situación:

Caso 1.

Esta actividad se puede resolver de al menos dos maneras. Nuestro interés en la visualización nos obliga a llevar el argumento de la respuesta más allá de un desarrollo algebraico y centrarnos en el uso de la gráfica como un elemento integrador que permite argumentar sobre la situación planteada.

En este problema se puede pedir al estudiante que llene tablas con las conversiones de centígrados a Fahrenheit, sin embargo, es posible que el estudiante realice "reglas de tres directas" para resolver el problema. Esta estrategia no funcionará porque la relación entre grados centígrados y Fahrenheit no es directamente proporcional, ¿cómo le haría ver a su estudiante que la regla de tres no funciona?

Al no encontrar en la "regla de tres" un elemento que permita resolver el problema, los estudiantes están en *situación de aprendizaje.* Esto significa que deben construir otras herramientas matemáticas para resolver la situación. La pregunta que podría ayudarles a reflexionar sobre una estrategia distinta es cuestionarles sobre *cuánto cambia la temperatura por grado.* Es decir, si se eleva la temperatura un grado centígrado, cuánto varió la temperatura en Fahrenheit. Esto significa reflexionar sobre la variación por grado.

Con esta estrategia los estudiantes pueden obtener lo siguiente:

$$\frac{\Delta°\mathrm{F}}{\Delta°\mathrm{C}} = \frac{212-32}{100-0} = \frac{180}{100} = 1.8$$

Esto significa que por cada grado centígrado que se eleve la temperatura, se eleva 1.8 grados Fahrenheit: 1.8º F/º C.

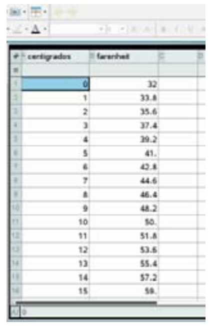
De esta manera es posible solicitarles a los estudiantes que completen una tabla en la Ti-Nspire (o similar) y encuentren relaciones entre cada grado centígrado y los Fahrenheit.:

1.Abrir el programa de CAS Ti-Nspire y agregar una hoja de "listas y hoja de cálculo".

2. Se pueden agregar los nombres de las columnas, podrían ser "centígrados" y "Fahrenheit".

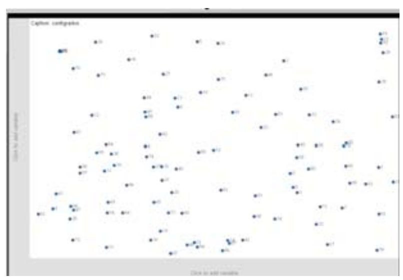
ISSN: 2594-1046

3. Se recomienda hacer 100 datos, dadas la facilidad de rellenar las tablas conviene tener más datos, además de que permite analizar cómo cambian los grados Fahrenheit. Recuerde que por cada grado que aumentan los centígrados hay un cambio de 1.8 en los Fahrenheit. Se podría visualizar algo como lo siguiente:



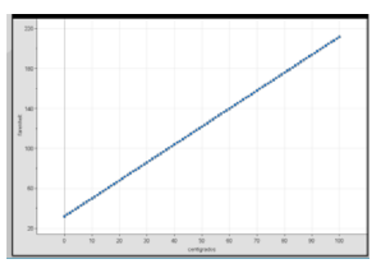
centigrados	farenheit
0	32
1	33.8
2	35.6
3	37.4
4	39.2
5	41.
6	42.8
7	44.6
8	46.4
9	48.2
10	50.
11	51.8
12	53.6
13	55.4
14	57.2
15	59.

4. Agregar otra hoja de trabajo y en ella abriremos “Add data & Statistics”. Automáticamente veremos repartidos nuestra nube de puntos.



5. Insertar como se mostró anteriormente las variables “centígrados” y “Fahrenheit” en las casillas de “agregar variable”. La variable independiente es “centígrados” y “Fahrenheit” es la dependiente. ¿Qué pasaría si invertimos la relación? ¿Qué puedes concluir al respecto?

6. ¿Qué relación puedes encontrar entre grados centígrados y Fahrenheit? Con ayuda de la “regresión” podemos solicitar la ecuación del comportamiento de nuestras variables, la cual corresponde con la fórmula para “pasar de” centígrados a Fahrenheit.



7. ¿Qué puedes concluir con respecto a la situación de Mauricio?

Caso 2.

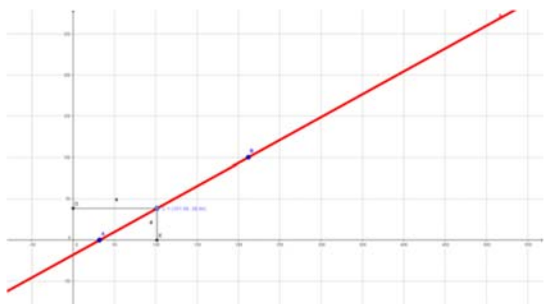
Es posible trabajar con los estudiantes de una manera enteramente gráfica la relación entre Centígrados y Fahrenheit. Para ello, utilizaremos el Geogebra.

1. Abrir el programa de Geogebra y ubicar dos puntos: el (32, 0) y el (212, 100). ¿Por qué este par de puntos?, ¿Qué estaríamos graficando?, ¿cuáles son las variables dependiente e independiente, respectivamente?

2. Construir una "recta que pasa por dos puntos" y hacer que dicha recta pase por los puntos anteriormente construidos.

3. Ubicar un punto en dicha recta. ¿Qué representaría este punto?

4. ¿Es posible con este dato dar una respuesta a la condición de Mauricio? ¿Por qué?



3.3. Otras situaciones

A continuación, mencionaremos sin detalle, otras situaciones de aprendizaje que se pretenden discutir y sus propósitos.

Situación de Aprendizaje 3: ¡Gotas de Sangre por donde quiera! (basado en Medina, s.f.)

Propósito: Modelar la relación que existe entre el diámetro que adquiere una gota de sangre al caer al piso y la relación con la altura de una persona. Tomando como apoyo la versatilidad de la calculadora Class Pad 400 para realizar diferentes representaciones de funciones y el ajuste de una curva.

Situación de Aprendizaje 4: Leyes de Mendel y binomio al cuadro

Propósito: La importancia de buscar la transversalidad de temas de matemáticas con otras ciencias en específico con Biología, abren la posibilidad de modelar la segunda ley de Mendel apoyada en las herramientas de la calculadora Fx-991 ES Plus o Fx -82 Plus ES.

Situación de Aprendizaje 5: La Carrera de caballos y calculadoras científicas.

ISSN: 2594-1046

Propósito: simular el lanzamiento de un par de dados para abordar el tema de probabilidad de que ocurra un evento apoyado en las funciones de las calculadoras.

Situación de Aprendizaje 6: Representación gráfica de desigualdades

Propósito: Mostrar el potencial de la calculadora Class Pad 400 para representar sistemas de desigualdades lineales.

Situación de Aprendizaje 7: Raíces de un polinomio

Propósito: mostrar el apoyo que puede ofrecer una calculadora Fx-991 ES Plus o Fx -82 Plus ES, para determinar las raíces de un polinomio. Ofreciendo reducir el tiempo cálculo al a tratar de encontrar las raíces a partir del ensayo y error.

4. COMENTARIOS FINALES

La intención del taller es la de dar a conocer cómo la modelación podría integrarse a las clases de matemáticas de nivel bachillerato a través del diseño e implementación de situaciones de aprendizaje donde se integre una componente tecnológica para generar significados y el tránsito entre diferentes registros de representación. Lo anterior responde a que la investigación ha dejado ver que los profesores tienen dificultades al momento de orquestar ambientes y actividades de aprendizaje donde se involucre a la modelación, aun cuando dichos profesores hayan tenido un entrenamiento en matemáticas o formados como profesores de matemáticas donde se hayan enfatizado únicamente el desarrollo de contenidos matemáticos.

El uso de la tecnología propicia además una reflexión sobre el rol que tienen la noción de función y otros conceptos matemáticos dentro de la escuela y que es posible, con ayuda de esos dispositivos tecnológicos, el uso de diferentes representaciones y de manera más importante, la articulación entre dichas representaciones. Lo anterior no significa que sin los dispositivos tecnológicos los profesores no tendrían posibilidades de llevar a cabo estas actividades en el aula. Es posible rediseñar nuestras actividades utilizando por ejemplo otros materiales como calculadoras más sencillas, de tal forma que la toma de datos en la experimentación sea un elemento importante para la reflexión sobre la matemática.

Por último, es importante resaltar el crear las oportunidades para que los profesores desarrollen esta capacidad o competencias de modelación de manera que posteriormente puedan integrarla en su práctica docente de manera efectiva. Consideramos que este taller aporta a dicho desarrollo profesional del profesor de matemáticas. Esperamos que el contenido del taller sirva para reflexionar sobre la importancia de su práctica docente y reformule las actividades que desarrolla en el salón de clases.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arrieta, J. & Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18(1), p. 19-48.

Biembengut, M. y Hein, N. (1997). Modelo, modelación y modelaje: métodos de enseñanza aprendizaje de matemáticas. *Épsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*, 38, 209-222.

Bosch, M.; García, F.; Gascón, J. y Ruiz-Higueras, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática*, 18(2), p. 37-74.

Cordero, F. (2006). La modellazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamento-apprendimento della matematica. *La Matematica e la sua Didattica*, 20(1), 59-79.

Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum. *Educación Matemática,* 10(2), 23-45.

Lave, J. (1988). *La cognición en la práctica*. España: Paidós.

Medina, G. (s.f.). Implementación de Competencias en el Aula a través de un Caso de C.S.I. Apoyado en TI-Nspire™ CX CAS. Recuperado el 25 de agosto de: https://education.ti.com/sites/LATINOAMERICA/downloads/pdf/Caso_de_CSI_apoyado_en_la_TI-Nspire_CX_CAS.pdf

Niss, M., Blum, W. & Galbraith, P. (2007). Part 1. Introduction. En W. Blum, P. Galbraith, H-W. Henn, M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education*. New York: Springer. 3-32.

Ursini, S. (2006). Enseñanza de las matemáticas con tecnología (EMAT). En Rojano, T. (Ed.), Enseñanza de la física y matemáticas con tecnología: modelos de transformación de las prácticas y la interacción social en el aula. Secretaría de Educación Básica: México, D.F.

Villarreal, M. (2012). Tecnologías y educación matemática: necesidad de nuevos abordajes para la enseñanza. Virtualidad, Educación y Ciencia, 3(5), 73-94.

Zaldívar, J. (en prensa). Una reflexión sobre la modelación desde la construcción social del conocimiento matemático. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* volumen 29.

AVANCES DE INVESTIGACIÓN

Innovación en investigación en Matemática Educativa.

Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa AC (2017) Vol. II

ISSN: 2594-1046

IMPORTANCIA DE LA APLICACIÓN DE RETOS MATEMÁTICOS PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO EN ESTUDIANTES DE SECUNDARIA

Ofelia Rodríguez Arellano Alondra
Universidad Autónoma de Baja California, México. alondra.rodriguez@uabc.edu.mx

Gricelda Mendivil Rosas
Universidad Autónoma de Baja California, México. gmendivil@uabc.edu.mx

Diana Edlyn Arámburo Pulido
Universidad Autónoma de Baja California, México. edlyn.aramburo@uabc.edu.mx

Diana Marlene Valenzuela Cabanillas
Universidad Autónoma de Baja California, México. marlene.valenzuela@uabc.edu.mx

Resumen

El presente trabajo plasma avances de una investigación en proceso, cuyo objetivo es potencializar el pensamiento matemático mediante la aplicación de retos matemáticos a estudiantes de secundaria e identificar su nivel de comprensión lectora, para coadyuvar al desempeño académico. La metodología es de corte cuantitativo, se utilizarán dos instrumentos, cuestionario y pruebas de comprensión lectora. Este estudio contribuye al beneficio de los alumnos, porque consiste en desarrollar las competencias matemáticas, habilidades y mejorar su desempeño académico, lo cual produce un impacto positivo en la sociedad, al formar jóvenes capaces de enfrentarse a los problemas de la vida.

Palabras clave: Reto Matemático, Pensamiento Matemático, Situación a-didáctica.

1. INTRODUCCIÓN

Las instituciones educativas tienen como objetivo lograr la calidad de la educación, incrementar el aprovechamiento académico y favorecer las competencias matemáticas. Sin embargo, la interrogante sigue siendo la misma: ¿qué estrategias y métodos pueden utilizarse para lograr estos objetivos?

Lo anterior evidencia que el proceso de aprendizaje de matemáticas en los estudiantes de secundaria es de gran importancia, por eso surge la necesidad de brindar estrategias didácticas matemáticas, bien diseñas y planteadas por el profesor que sean de relevancia para el educando (Cubero, 2014). Esto para que los estudiantes desarrollen su razonamiento y principalmente su pensamiento matemático, lo cual traerá como consecuencia el favorecimiento de competencias matemáticas y mejoras en el desempeño escolar.

Durante la clase de matemáticas se observa continuamente que al presentarle al aprendiz un problema matemático, lo primero que quiere saber es qué debe hacer, y antes de leer las instrucciones o el mismo problema acude con su maestro o con sus compañeros para preguntarles en qué consiste la actividad. En otro caso, el estudiante tiene los datos del problema, pero no sabe cuáles son los medios para resolver la situación planteada. Estas situaciones demuestran que durante la clase se requiere que el profesor haga hincapié en el análisis de datos de una situación problema, que conduzca al alumno a la reflexión, con la finalidad de que éste establezca sus rutas de acción pata resolver los ejercicios que se le han propuesto.

Por tal motivo, esto se convierte en un problema de comprensión que se puede erradicar con la implementación de retos matemáticos en donde se dé énfasis en entender el problema y, con base en ello, tomar decisiones de cómo resolverlo. Si se analizan estos pasos, se observa que están estrechamente ligados con el pensamiento y razonamiento matemático, debido a que se trabajan procesos como el análisis, la argumentación de resultados y la validación de procedimientos.

Por otra parte, los colegiales presentan dificultades para concentrarse, pensar lógicamente, argumentar sus resultados y explicar ante el resto de los compañeros sus procedimientos. Estos procesos en conjunto representan aspectos importantes que contribuyen a que, en un momento dado, puedan solucionar problemas de la vida, por eso es importante formar a jóvenes que se conviertan en "personas conscientes y responsables de sus capacidades, procesos y resultados de aprendizaje" (Elosúa y García, 1993, p. 1).

Entonces, considerando las necesidades de la institución educativa observada, así como las áreas de oportunidad que se busca favorecer y desarrollar, es oportuno investigar cómo los retos matemáticos pueden contribuir a potencializar el pensamiento matemático. Al respecto, Yampufé (2009) comenta que "los procesos cognitivos tales como razonar, demostrar, argumentar, interpretar, identificar, relacionar, graficar, calcular, inferir y efectuar algoritmos" (p. 2) engloban al pensamiento matemático.

De acuerdo a lo anterior, esta investigación pretende dar respuesta a las siguientes interrogantes:

¿Cómo contribuye el uso de retos matemáticos a la potenciación del pensamiento matemático, al razonamiento, demostración y argumentación?

¿Cuál es el efecto del uso de retos matemáticos en el desarrollo de competencias matemáticas y cómo favorece el proceso de aprendizaje de las matemáticas?

2. MARCO TEÓRICO

2.1. Razonamiento matemático

Se ha demostrado que las matemáticas son aplicables en el contexto próximo de toda persona, sin embargo, es relevante mostrar que la enseñanza y el aprendizaje de ellas tienen gran impacto en los individuos porque, como mencionaron Tapia y Cofré (2003), “es una ciencia deductiva que agiliza el razonamiento y forma la base estructural en que se apoyan las demás ciencias” (p. 19). De manera que se ha de aprovechar toda situación para poder potencializar estas habilidades en los escolares.

Ferrándiz, Bermejo, Sainz, Ferrando y Prieto (2008) comentan que el razonamiento lógico matemático es la capacidad que presentan los individuos para resolver problemas, realizar deducciones y fundamentar las soluciones con argumentos sólidos. Entonces es propio de los alumnos que manifiestan un buen razonamiento matemático habilidades como: emplear fórmulas en su vida diaria, experimentar, preguntar y resolver problemas lógicos.

2.2. 2.2 Situación a-didáctica

La situación a-didáctica se desprende de la Teoría de Situaciones didácticas, creada por Brousseau, quien es considerado como uno de los principales exponentes y pionero de la didáctica de la matemática, desde los años 70 (Soto, 1993). Esta teoría propone un modelo desde el cual pensar la enseñanza como un proceso centrado en la producción de los conocimientos matemáticos en el ámbito escolar y permite comprender la vinculación e interacción entre alumno, docente y los saberes matemáticos y cómo los estudiantes aprenden.

Una situación a-didáctica es un proceso que vive el educando, debido a que el docente no interviene en la resolución del problema planteado, sólo se encarga de diseñarlo y relacionarlo con un problema de la vida real, para que el estudiante pueda resolverlo haciendo uso de sus conocimientos previos y consolidar el aprendizaje del objeto matemático (Chavarría, 2006).

Por otra parte, Gómez (2015) menciona que las situaciones a-didácticas consisten en un problema en el cual no está explícitamente expuesta la intención de aprendizaje que se debe lograr, de tal manera que se busca que las decisiones que tomen los jóvenes para resolver el problema se basen en la lógica de la situación, más que en un procedimiento que se espera que lo apliquen memorísticamente.

ISSN: 2594-1046

La solución de situaciones a-didácticas permite al alumno generar hipótesis y conjeturas, ya que el docente al encargarse de proponer problemas semejantes a las situaciones de la vida real, le brinda la oportunidad de construir sus propios conocimientos (Chavarría, 2006). Aunado a lo anterior, Masachs, Camprubí y Naudi (2005) concluyeron que el estudiante al resolver satisfactoriamente el problema, crea sentimientos de confianza para enfrentarse a nuevas situaciones a-didácticas que les plantee el profesor.

2.3 Pensamiento matemático

El pensamiento matemático opera en una red compleja de conceptos, teoremas, leyes o reglas. Por eso al potenciar el pensamiento matemático también se desarrollan "procesos avanzados del pensamiento como abstracción, justificación, visualización, estimación o razonamiento bajo hipótesis" (Cantoral y Montiel, 2012, p. 20). Además, ayuda a comprender cómo el estudiante asimila la información matemática y cuál es el proceso que éste realiza, para adquirir nuevos conocimientos.

Cantoral y Montiel (2012) proponen tres perspectivas distintas para desarrollar el pensamiento matemático:

Primero se entiende como "una reflexión espontánea que los matemáticos realizan sobre la naturaleza de su conocimiento y sobre la naturaleza del proceso de descubrimiento e intervención en matemáticas" (p. 19).

Por otro lado, se concibe "como parte de un ambiente científico en el cual los conceptos y las técnicas matemáticas surgen y desarrollan en la resolución de problemas" (p. 19).

Una tercera perspectiva "considera que el pensamiento matemático se desarrolla en todas las personas en el enfrentamiento cotidiano a múltiples tareas" (p. 19), lo cual demuestra que el desarrollo de dicho pensamiento no es propio exclusivamente del trabajo que se efectúa dentro del salón de clases, en la asignatura de matemáticas.

Para esta investigación se ha considerado tomar en cuenta el segundo y tercer punto, ya que mediante la implementación de retos matemáticos, los cuales son situaciones desafiantes, se puede desarrollar el pensamiento matemático. También es interesante notar que no sólo en el aula se logra potenciarlo sino que los estudiantes, durante la elaboración de actividades diarias, es posible que adquieran nuevas habilidades, las cuales impacten sobre este pensamiento.

Desarrollar el pensamiento matemático significa potenciar habilidades cognitivas importantes dentro del aprendizaje de cualquier asignatura, en este caso, específicamente en el área de las matemáticas. De allí que el programa de estudios (SEP, 2011) indique que el desarrollo de las capacidades de razonamiento debe ser propiciado por el profesor mediante la comprensión de problemas, el cual tiene por objetivo que el escolar reflexione sobre las acciones que ha de hacer, así como explicar y argumentar el resultado que obtuvo una vez que resolvió el problema.

2.4 Retos matemáticos

De Icaza (2012) propone retos matemáticos, los cuales son considerados como lecciones finales o situaciones con el objetivo de integrar los conocimientos que se han adquirido durante un tiempo determinado. También se busca desafiar al alumno para que demuestre sus conocimientos previos y pueda consolidar estos con los nuevos aprendizajes.

Un reto matemático, como su nombre lo dice, suele ser una situación retadora o desafiante en la que el estudiante se enfrenta directamente con un problema. Pero este problema no es sencillo, ni demasiado fácil de resolver, ni imposible. Éste tiene el objetivo de modificar, ampliar o fortalecer el conocimiento matemático aprendido. Así que al diseñarlos se ha de pensar en crear una situación que motive al aprendiz a analizar, reflexionar y argumentar (SEP, 2014).

La resolución de retos matemáticos tiene una relación con el desarrollo del pensamiento matemático, puesto que también se potencian "procesos avanzados del pensamiento como abstracción, justificación, visualización, estimación o razonamiento bajo hipótesis" (Cantoral y Montiel, 2012, p. 20). También permiten que los aprendices generen ideas y cuentan con una variedad de procedimientos que pueden utilizar para resolverlo. Asimismo, facilita el trabajo de pares y sin duda apoya la comprensión lectora (SEP, 2014). Estos aspectos son indispensables para desarrollar una clase de matemáticas de forma efectiva y significativa, aparte que se motiva a los colegiales a seguir aprendiendo.

Igualmente, las actividades que tienen por objetivo retar al cerebro propician que el alumno se prepare para enfrentar situaciones cotidianas y tonifica la actividad cerebral (Jensen, 2004), éste es el caso de la aplicación de retos matemáticos. De manera que más que obtener los resultados del reto, lo verdaderamente enriquecedor es el proceso que realiza el estudiante para llegar a la solución y cómo él argumenta sus resultados.

Al usar retos matemáticos para potencializar el pensamiento matemático también se favorecen las cuatro competencias matemáticas de educación básica que propone el Programa de

Estudios de Educación Básica: resuelve problema de manera autónoma, comunica información matemática, valida procedimientos y resultados y maneja técnicas eficientes (SEP, 2011). Y esto, a su vez, trae como consecuencia mejores resultados en el aprendizaje de matemáticas. Además como señala Jensen (2004) "el mejor modo de desarrollar el cerebro es a través de la resolución de problemas desafiantes" (p. 57).

3. MÉTODO

Se ha seleccionado como metodología para este estudio el enfoque cuantitativo, puesto que ofrece la posibilidad de generalizar los resultados de manera amplia y brinda la posibilidad para comparar los resultados obtenidos con estudios similares que se han realizado anteriormente (Hernández, Fernández y Baptista, 2010). Se caracteriza por ser una investigación explicativa y exploratoria. Su población de estudio son 675 estudiantes correspondientes al turno matutino, de los cuales 354 son mujeres y 321 hombres. La muestra se conforma por 74 alumnos, 36 hombres y 38 mujeres. Los cuales serán seleccionados por medio de un muestreo no probabilístico, pues se convocará a dos grupos de estudiantes, adscritos a la asignatura de Matemáticas 2, quienes cursen el segundo grado de secundaria, comprendiendo las edades de 13 a 14 años.

Los instrumentos que se utilizarán para recopilar información para este estudio serán dos, un cuestionario y una prueba de comprensión lectora, basada en la propuesta del programa PISA (2005). A continuación se describen cada uno de ellos.

El cuestionario es uno de los instrumentos "más utilizado para recabar los datos, que consiste en un conjunto de preguntas respecto de una o más variables a medir" (Hernández, Fernández y Baptista, 2010, p. 217). En la investigación se aplicará un cuestionario dirigido a estudiantes de secundaria, el cual estará integrado por preguntas cerradas, basado en la siguiente escala Likert: (5) Siempre; (4) La mayoría de las veces sí; (3) Algunas veces sí, algunas veces no; (2) La mayoría de las veces no y (1) Nunca.

Los datos que arroje serán analizados de manera estadística; estos permitirán describir las características de los retos matemáticos que diseñan los profesores para potenciar el pensamiento matemático e identificar los beneficios de fortalecer el pensamiento matemático, como medio para desarrollar las competencias matemáticas y mejorar el desempeño académico.

El segundo instrumento que se usará es la prueba de comprensión lectora, ésta se caracteriza por "proporcionar al alumnado un texto relativamente corto, seguido de varias preguntas que, a su vez, tienen varias alternativas de respuesta de entre las que el alumno debe elegir la que considere correcta" (PISA, 2005, p. 9). Para cada reactivo hay una sola respuesta considerada correcta.

Para esta prueba se utilizarán los parámetros específicos del programa nacional de lectura, registrados en el Programa PISA (2005), que a continuación se describen:

- Comprender globalmente: Capacidad de identificar la idea principal o general de un texto
- Obtener información: Capacidad para localizar y extraer una información en un texto.
- Elaborar una interpretación: Capacidad para extraer el significado y realizar inferencias a partir de la información escrita.
- Reflexionar sobre el contenido de un texto: Capacidad para relacionar el contenido de un texto con el conocimiento y las experiencias previas.
- Reflexionar sobre la estructura de un texto: Capacidad de relacionar la forma de un texto con su utilidad y con la actitud e intención del autor. (p. 7).

Estos aspectos de comprensión son el referente para distinguir las destrezas cognitivas necesarias para lograr la lectura efectiva.

En esta prueba se aplicará el texto titulado "El lago Chad" (PISA, 2005, p. 10). Se caracteriza por contener un cuadro con información gráfica. Una vez presentado el texto al alumno, se le proponen cinco preguntas, cuatro son de obtención de información y una de reflexión. "Por otro lado, se trata de un texto con gráficos y datos estadísticos lo que confirma la idea de que la lectura, por su importancia, ha de ser una actividad transversal a todas las áreas" (PISA, 2005, p. 10). En este caso la lectura está estrechamente ligada con la resolución de problemas matemáticos.

Es pertinente la aplicación de esta prueba, porque sus características se encuentran dirigidas al área de matemáticas y dentro de la investigación tiene el propósito de analizar el proceso de los alumnos de secundaria para explicar un problema, obtener los datos, justificar procedimientos y validar resultados, e identificar el nivel de comprensión lectora que presentan los estudiantes para interpretar los retos matemáticos.

4. CONCLUSIONES

Existe una amplia área de oportunidad en la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que ha promovido buscar estrategias que den resultados favorables en la mejora educativa que se desea lograr. De allí que se haya propuesto en este estudio la implementación de retos matemáticos como estrategia para potenciar el pensamiento matemático, aunado con el análisis, la reflexión y argumentación de los resultados que obtienen los estudiantes de estas situaciones desafiantes.

El marco teórico, las acciones e instrumentos que se usarán en esta investigación son muestra del aporte que se hará a la suma de investigaciones relacionadas con el potenciamiento del pensamiento matemático, debido a que se considera un aspecto importante que reforzar constantemente para llegar al logro del aprendizaje de matemáticas.

Finalmente se destaca que este trabajo promueve el diseño de retos matemáticos, y la guía del profesor para resolverlos, como medio para facilitar el aprendizaje de las matemáticas, así como preparar a los estudiantes a que adquieran habilidades y destrezas que los lleven a enfrentarse con éxito a los problemas de la vida y contribuir positivamente en la sociedad.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cantoral, R. y Montiel, G. (2002). Desarrollo del Pensamiento Matemático: El Caso de la Visualización de Funciones. *Actas de la 15 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. Buenos Aires, Argentina: Grupo Editorial Iberoamérica.

Chavarría, J. (2006). Teoría de las Situaciones Didácticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 1*(2).

Cubero, K. (2014). La tarea académica inteligente: valioso componente en la medición del proceso de aprendizaje. *InterSedes: Revista de las Sedes Regionales, 15*(32), 31-45.

De Icaza, A. (2012). *Matemáticas 1*. México: Santillana.

Elosúa, M, y García, E. (1993). *Estrategias para enseñar y aprender a pensar*. Madrid: Narcea

Ferrándiz, C., Bermejo, R., Sainz, M., Ferrando, M., y Prieto, M. (2008). Estudio del razonamiento lógico-matemático desde el modelo de las inteligencias múltiples. *Anales de psicología, 24*(2), 213-222.

Gómez, I. (2000). Matemática Emocional. Los efectos en el aprendizaje matemático. España: Narcea

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2010). *Metodología de la Investigación. (5ta edición)*. D.F, México: Mc Graw Hill.

Jensen, E. (2004). Cerebro y aprendizaje: competencias e implicaciones educativas. Madrid: Narcea SA Ediciones.

Masachs, A., Camprubí G. y Naudi, M. (2005). *El aprendizaje significativo en la resolución de problemas matemáticos*. Recuperado de: http://www.unne.edu.ar/unnevieja/Web/cyt/com2005/9-Educacion/D-013.pdf

Programa PISA. (2005). *Pruebas de comprensión lectora*. Recuperado de: http://www.mecd.gob.es/dctm/ievaluacion/internacional/pisa2000cuadlectura3.pdf?documentId=0901e72b80110627

Secretaría de Educación Pública (SEP) (2011). *Programa de estudios de Educación Básica*. México: Autor.

Soto, M. (1993). Didáctica de las Matemáticas. *Revista de la Facultad de Educación Universidad de Castilla*, (8), 173-192. Disponible en: http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2282535

Tapia, A., & Cofré A. (2003). *Cómo desarrollar el razonamiento lógico matemático (3ra edición)*. Santiago: Editorial Universitaria.

Yampufé, C. (2009). *Apuntes acerca del pensamiento matemático*. Recuperado de: https://gaebc.files.wordpress.com/2012/05/apuntes-acerca-del-pensamiento-matematico.pdf

ISSN: 2594-1046

REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA DE LA INVESTIGACIÓN DIDÁCTICA EN TRIGONOMETRÍA

Olivia Alexandra Scholz Marbán
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados.olivia.scholz@cinvestav.mx
Gisela Montiel Espinosa
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, IPN. México; gmontiele@cinvestav.mx

Resumen

En el marco de la investigación de doctorado para estudiar el desarrollo del pensamiento trigonométrico en la transición de lo geométrico (razón trigonométrica) a lo variacional (función trigonométrica) en el nivel medio superior con estudiantes de entre 15 y 17 años de edad, se inició con la revisión bibliográfica de diversos autores que han estudiado las dificultades de los temas de trigonometría a nivel bachillerato, que han planteado estrategias de enseñanza para abordar los temas de Trigonometría o que han realizado un estudio histórico epistemológico acerca de la Trigonometría. Esta revisión se realizó con la finalidad de contar con el panorama de antecedentes que sean útiles para plantear una propuesta que nos oriente en la problematización del saber matemático puesto en juego durante el tránsito de lo geométrico a lo variacional en la Trigonometría escolar.

Palabras clave: Trigonometría, pensamiento geométrico, pensamiento variacional, bachillerato.

1. INTRODUCCIÓN

En los programas de estudio del nivel medio superior en México se plantea el estudio de la Trigonometría desde las razones trigonométricas a las funciones trigonométricas, se contempla que los estudiantes de entre 15 y 17 años de edad adquieran conocimientos geométricos y variacionales a lo largo de su formación antes de abordar los temas de Trigonometría. Sin embargo, en el programa operativo no se contemplan actividades que involucren la Geometría con el estudio de la Trigonometría.

Se han realizado diversos estudios para detectar y reportar las dificultades que presentan tanto estudiantes como profesores respecto a los temas de Trigonometría que se estudian en el bachillerato, se han diseñado y propuesto estrategias para abordar el estudio de los temas trigonométricos en la escuela. Sin embargo, notamos que las investigaciones se enfocan en alguno de los dos grandes temas: o las razones trigonométricas o las funciones trigonométricas, pero no hay estudios de lo que ocurre en el tránsito de uno a otro. Es por esto que nuestro objetivo de investigación es caracterizar el desarrollo del pensamiento trigonométrico en su transición de lo geométrico a lo variacional, identificando las herramientas, los razonamientos y el lenguaje matemático puesto en uso en cada momento.

Planteamos de inicio dos preguntas de investigación: ¿Qué condiciones instruccionales, didácticas y de socialización en el aula, hacen emerger las herramientas, los razonamientos y el lenguaje trigonométrico, en situaciones de modelación? Y, considerando la transición de lo geométrico a lo variacional, ¿Cuáles y cómo permiten su evolución?

Nuestra investigación se realizará con estudiantes de nivel medio superior en México con el propósito de estudiar el desarrollo del pensamiento trigonométrico en el tránsito de lo geométrico a lo variacional, para lo que se tomará como punto de partida el estudio de la Trigonometría desde el contexto del círculo para vincular lo trigonométrico con lo geométrico y, desde lo geométrico, avanzar hacia lo variacional dentro del mismo contexto del círculo.

La investigación se realizará bajo el enfoque de la metodología de la investigación basada en diseños propuesta por nuestro interés de estudiar el desarrollo del pensamiento matemático en condiciones escolares particulares. Esta metodología tiene un enfoque pragmático, retomado de la Ingeniería, y una orientación teórica, se centra en un tema en particular y desarrolla teorías locales mediante el estudio sistemático de las formas de aprendizaje y los medios que se relacionan con éstas (Cobb, Confrey, Lehrer y Schauble, 2003).

2. FUNDAMENTO TEÓRICO

Los estudios históricos epistemológicos realizados por Bressoud (2010) y por Montiel (2005) nos dan un panorama del surgimiento histórico de la Trigonometría, al señalar el escenario en el que ésta se desarrolla. En el caso de Bressoud (2010), menciona los trabajos de Hiparco, Ptolomeo y Euclides que se centran en el estudio del círculo y su necesidad de encontrar distancias dentro de modelos geométricos circulares que representaban la Tierra, la Luna y el Sol. Montiel (2005), por otra parte, caracteriza los principios para la construcción social del conocimiento trigonométrico y reconoce también la importancia del contexto geométrico en el desarrollo de lo trigonométrico. Montiel asocia la práctica social de la anticipación con la herramienta de la razón trigonométrica y hace mención de que surgen en un contexto estático-proporcional mediante el uso de un lenguaje Geométrico-numérico, mientras que las funciones trigonométricas las asocia con la práctica social de la predicción, cuyo contexto es dinámico-periódico y su lenguaje son las curvas-ecuaciones.

Estas investigaciones marcan la importancia de vincular lo geométrico con lo trigonométrico, lo cual ha sido retomado por diversos autores en sus propuestas didácticas y han obtenido resultados favorables en el aprendizaje de los estudiantes. Sin embargo, para continuar con estas investigaciones falta estudiar lo que sucede en el tránsito de lo estático a lo dinámico en el estudio de la Trigonometría escolar y caracterizar el desarrollo del pensamiento trigonométrico en ese tránsito de lo geométrico a lo variacional. Además de proponer, de ser posible, estrategias que permitan al estudiante transitar de la razón trigonométrica a la función trigonométrica sin que pase por la ruptura usual de la enseñanza actual, que inicia el estudio de las razones trigonométricas desde lo aritmético, desvinculando la Geometría de la Trigonometría y culmina con el estudio de las funciones trigonométricas en el círculo trigonométrico con el cambio de medida angular de grados a radianes.

Nuestro primer fundamento teórico será la construcción social del conocimiento trigonométrico, aunque durante el desarrollo del proyecto de investigación debemos fundamentar acerca del pensamiento geométrico y el pensamiento variacional para poder sustentar el diseño de intervención didáctica, así como para realizar el análisis de su puesta en escena. Estos fundamentos surgirán de la revisión bibliográfica cuando ésta se concluya.

3. METODOLOGÍA

En este momento de la investigación se está realizando la revisión bibliográfica que dará sustento al trabajo. Se recopilaron investigaciones tanto históricas, didácticas y teóricas que, aborden las dificultades de aprendizaje de estudiantes o profesores en temas de Trigonometría de nivel medio superior; las que proponen actividades didácticas para superar alguna dificultad de las ya reportadas, o que sugiera una estrategia distinta para iniciar el estudio de la Trigonometría con estudiantes de bachillerato; las investigaciones históricas del surgimiento de la Trigonometría, enfocadas principalmente a los temas de razones trigonométricas y funciones trigonométricas así como también el cambio de medida angular de grados a radianes.

La revisión bibliográfica se ha realizado mediante búsquedas en bases de datos de revistas de educación matemática, las estrategias de búsqueda han sido filtrar los artículos por medio de las palabras clave como son trigonometría, funciones trigonométricas, razones trigonométricas, seno, coseno, tangente, ángulos. Una vez localizados los documentos que tratan los temas que son de

ISSN: 2594-1046

interés para nuestra investigación, se realiza la lectura del resumen y la introducción para determinar si aporta elementos útiles a nuestra investigación.

Posteriormente, se clasificaron para distinguir si los documentos son reflexiones históricas, investigaciones teóricas o propuestas didácticas. Para hacer esta clasificación, se identificó en cada documento su objeto de estudio, las preguntas de investigación, su fundamento teórico, la metodología, los resultados y su aporte a la disciplina.

4. RESULTADOS

Dentro de las investigaciones que reportan dificultades en el aprendizaje de la Trigonometría, revisamos las siguientes: De Kee, Mura y Dionne (1996), quienes realizan un estudio acerca de la comprensión del seno y el coseno en estudiantes de nivel secundaria y encuentran algunas dificultades como son el que los estudiantes aplican las razones trigonométricas a triángulos que no son rectángulos o ángulos que no son agudos, que en el caso de las funciones trigonométricas todas las gráficas que resultan curvas las consideran funciones trigonométricas, que en el círculo trigonométrico no asocian el valor del seno y coseno al ángulo central sino a las coordenadas (x,y) del círculo.

Otro estudio que se realizó para observar la comprensión de las razones trigonométricas con estudiantes de Licenciatura fue el de Araya, Monge y Morales (2007), y reportan las dificultades encontradas al aplicar tareas trigonométricas a los estudiantes. Por ejemplo, la interpretación de los enunciados, es decir, al pasar del enunciado de un problema al esquema o dibujo ubican de manera errónea la incógnita o el ángulo dado; el empleo de las fórmulas, el uso de procedimientos algebraicos como por ejemplo el despeje de la incógnita cuando se encuentra en el denominador y no poder explicar cómo se definen las razones trigonométricas.

Kendal y Stacey (1998) reportan una investigación acerca de los dos métodos de enseñanza (método del triángulo rectángulo y método del círculo unitario) para introducir la Trigonometría escolar básica, con la finalidad de observar cuál es el que promueve mejor comprensión de los conceptos y dominio de habilidades en la resolución de triángulos rectángulos (cálculo de longitud de los lados y medida de sus ángulos).

Las autoras comentan que ellas prefieren abordar el aprendizaje de la Trigonometría usando el método del círculo unitario para definir las funciones trigonométricas y usarlo en todos los cuadrantes, pero conectando el círculo unitario con el triángulo rectángulo y las técnicas de solución que se aplican en el método del triángulo rectángulo. Esto puede permitir a los estudiantes experimentar significados reales y concretos para las definiciones de Trigonometría y proporcionarles bases para temas más avanzados.

Si bien las investigaciones previas se centraron en concepciones y dificultades considerando el cómo se enseña Trigonometría, Grabovskij y kotel'nikov (1971) resaltan que: "una de las dificultades es que las funciones trigonométricas de argumentos numéricos no pueden ser estudiadas en este nivel por métodos analíticos, y se tiene que recurrir a las ideas geométricas para ayudar al alumno en su comprensión" (p. 147). A nivel de propuesta didáctica, presentan situaciones experimentales que combinan el estudio de la cinemática con el estudio de las matemáticas para extender los conceptos de ángulo y arco, con distintos métodos para medir estas cantidades.

El planteamiento de los autores es usar experimentos de forma similar a como se usan en las clases de Física, con el propósito de que los estudiantes vean la construcción de las funciones trigonométricas y puedan analizar sus propiedades. Los experimentos están diseñados partiendo de la base del círculo trigonométrico y el plano cartesiano para obtener las gráficas de las funciones trigonométricas con aparatos concretos, que al manipularlos a base de movimiento y luz proyectan sombras en una pantalla blanca y describen las curvas de las funciones trigonométricas.

Algunas investigaciones plantean propuestas didácticas para iniciar el estudio de la Trigonometría y rescatan la importancia de vincular la Geometría al estudio de la Trigonometría. Por ejemplo, Quinlan (2004), para iniciar el estudio de la Trigonometría con estudiantes (grado 9), propone medir la altura del salón de clase usando instrumentos de medición como escuadras, un metro y un popote, para trabajar con los ángulos de 45°, 60° y 30° usando las escuadras. En su propuesta sugiere iniciar el estudio de las razones trigonométricas partiendo de la razón tangente y después introducir el seno y coseno. El enfoque de su propuesta es ir de concreto a lo abstracto, evitar comenzar con las definiciones, ir de lo particular a lo general, empezar con los ángulos especiales antes de pasar a los ángulos agudos generales, sumergir a los estudiantes en el contexto de cualquier nuevo concepto antes de explicar tecnicismos, definiciones y usar lenguaje matemático.

Cavanagh (2008) concuerda con la postura de Quinlan (2004) de iniciar el estudio de las razones trigonométricas con actividades antes de introducir las definiciones y también sugiere iniciar con la razón tangente antes del seno y el coseno, pero parte del conocimiento previo de los estudiantes, iniciando el estudio de la razón tangente asociándola a la pendiente de una recta.

Gutmann (2003) propone una forma de calcular el seno y coseno de la suma de dos ángulos, su aporte va encaminado al estudio de las identidades trigonométricas y relacionarlas con los segmentos dentro del círculo unitario. Esta propuesta está pensada para estudiantes que ya han estudiado las relaciones trigonométricas en el círculo unitario y son capaces de reconocer los segmentos que representan el coseno o seno de un ángulo y el radio.

Weber (2005) reporta resultados positivos en una investigación, sobre la comprensión de la función trigonométrica, con estudiantes de nivel universitario. El autor resalta que la Trigonometría es un tema que conjuga lo algebraico, lo geométrico y el razonamiento gráfico, y ello favorece la comprensión del precálculo y cálculo. Weber identifica que "las funciones trigonométricas son operaciones que no se pueden expresar como fórmulas algebraicas que involucren procedimientos aritméticos, y los estudiantes tienen problemas para razonar sobre tales operaciones y visualizar estas operaciones como funciones". Su investigación se basa en la noción teórica de Procepto, propuesta por Gray y Tall (1994), que se define como "la amalgama de tres componentes: un proceso que produce un objeto matemático, y un símbolo que se utiliza para representar a cualquiera, proceso u objeto" (p. 92).

El autor menciona que para obtener el seno de un ángulo y razonar acerca de las propiedades de los valores numéricos de expresiones trigonométricas, ya sea por el método del triángulo rectángulo o del círculo unitario, se tiene que recurrir a procesos geométricos. Por las actividades que desarrollan los estudiantes se infiere que para él las construcciones geométricas son: el trazo de la circunferencia con centro en el origen del plano cartesiano, el trazo del radio a un ángulo (medido con transportador) y la lectura de las coordenadas donde el radio corta a la circunferencia, esto último para obtener el seno y el coseno del ángulo.

Su investigación utiliza un diseño experimental para responder si los estudiantes universitarios comprenden las funciones trigonométricas a nivel de procepto, considerando un grupo de control. Weber trabajó con dos grupos, uno de 31 estudiantes que llevaron el curso de manera tradicional y otro de 40 estudiantes que recibieron la instrucción experimental que consistió de tres etapas:

- Procedimiento. Consistía en mostrar a los estudiantes el algoritmo de solución y mecanizarlo.

- Proceso. Reflexionar acerca del procedimiento una vez que se ha aplicado varias veces para darle significado al procedimiento.
- Precepto. Cuando el estudiante entiende el proceso es capaz de anticipar resultados y razonar acerca de las propiedades de salida del proceso. Cuando esto ocurre, el estudiante puede ver el símbolo de la operación como el propio proceso y el resultado de la operación.

El autor refiere que las limitaciones de los que reciben instrucción estándar, en cuanto a las funciones trigonométricas, son el papel que juegan las figuras geométricas en la comprensión de las funciones trigonométricas, porque deben relacionar las funciones trigonométricas con el modelo geométrico apropiado. Y el nivel de control que los estudiantes sienten que tienen cuando operan con la función seno, ya que los estudiantes no perciben la función seno como un proceso significativo o dirigido a un objetivo, sino como un algoritmo para encontrar una respuesta.

Si bien la “construcción geométrica” a la que hace referencia Weber (2005) no es de la misma naturaleza que aquella referida al triángulo rectángulo, en las investigaciones de De Kee *et al*. (1996) y Kendal y Stacey (1998) se reconoce en Weber un intento por articular las herramientas matemáticas, más que separarlas como métodos de enseñanza.

Una mirada alternativa es la de Moore, LaForest y Kim (2012), quienes diseñan actividades didácticas, en el contexto del círculo, que van desde la medición angular hasta la graficación de las funciones trigonométricas y que favorecen el razonamiento cuantitativo, el uso del radio del círculo como unidad de medida y el razonamiento covariacional. Es decir, no proponen un diseño didáctico para aprender el concepto de función trigonométrica, sino una serie de tareas que le dan coherencia al uso de múltiples nociones matemáticas relacionadas con ella.

En cuanto a las investigaciones histórico epistemológicas, Bressoud (2010) presenta una breve revisión histórica del desarrollo de la Trigonometría y en ella reporta cómo se introduce al ámbito escolar y va cambiando su presentación, desde su introducción a partir del círculo trigonométrico hasta nuestros días que se comienza en el contexto del triángulo rectángulo. Bressoud menciona que la Trigonometría surgió para entender y explicar fenómenos astronómicos, así como para apoyar la navegación. Explica cómo se desarrollaron las medidas de los ángulos en la circunferencia y el surgimiento del triángulo rectángulo para determinar longitudes, usando la proyección de la sombra de un objeto y el ángulo del sol. El autor destaca que la Trigonometría tuvo su origen con la observación del cielo, en la Grecia antigua, y nace a partir de construcciones geométricas, de ahí que surja la Trigonometría en el círculo trigonométrico.

En Montiel (2005) encontramos una caracterización, de corte histórico-epistemológica, sobre la construcción social del conocimiento trigonométrico que permite explicar la distinción de las herramientas trigonométricas, en relación a su uso, y con ello entender los fenómenos didácticos más comunes en el aula y fundamentar innovaciones didácticas cuyo objetivo sea desarrollar el pensamiento matemático, más que el dominio de los objetos (razones, funciones o series) trigonométricos.

También en un escenario histórico, pero haciendo un estudio desde la Matemática Educativa, Montiel (2011) realiza un estudio de las prácticas sociales y de referencia que enmarcan la emergencia al conocimiento trigonométrico. La autora identifica tres prácticas de referencia que son la matematización de la astronomía, la matematización de la física y la matematización de la transferencia de calor, y a partir de ellas distingue tres momentos de construcción social del conocimiento trigonométrico: de anticipación, de predicción y de formalización.

El estudio de Montiel (2011) se fundamenta en la teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, lo cual implica que problematiza el saber, cuestionando su estatus como lo que debe ser enseñado y aprendido, y que reconoce la emergencia de significados en la actividad del individuo, visto éste como sujeto social.

La revisión bibliográfica realizada hasta el momento nos da un panorama del surgimiento histórico epistemológico de la Trigonometría, de las dificultades de aprendizaje detectadas en estudiantes, los niveles de comprensión que presentan tanto estudiantes como profesores y de algunas propuestas didácticas para darle sentido al estudio de la Trigonometría en el aula.

5. CONCLUSIONES

Aún no se termina la revisión bibliográfica, pero hemos encontrado que algunos clasifican por niveles de comprensión a los estudiantes y plantean las dificultades que se presentan en el estudio de la Trigonometría, algunos autores proponen secuencias didácticas, aunque no todos reportan resultados porque no siempre las aplican con estudiantes sino que en algunos casos se quedan a nivel de propuesta. Hay autores que manifiestan una postura a favor de iniciar el estudio de la Trigonometría desde el contexto del círculo aunque algunos no presentan resultados sino sólo presentan reflexiones con base en el estudio realizado. Al momento no hemos encontrado una investigación que aborde el pensamiento geométrico relacionado con el estudio de lo trigonométrico, a lo más resaltan la visualización y en cuanto al pensamiento variacional, la propuesta que aborda un poco el tema es la de Moore *et al*. (2012) que menciona el razonamiento covariacional.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Araya, A.M., Monge A., y Morales, C. (2007). Comprensión de las razones trigonométricas: niveles de comprensión, indicadores y tareas para su análisis. *Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación*, 7(2), 1-31.

Bressoud, D. (2010). Historical reflections on teaching trigonometry. *Mathematics Teacher* 104(2), 106-112.

Cavanagh, M. (2008). Trigonometry from a different angle. *Australian Mathematics Teacher* 64(1), 25-30.

Cobb, P., Confrey, J., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational researcher* 32(1), 9-13.

De Kee, S., Mura, R., y Dionne, J. (1996). La comprehension des notions de sinus et cosinus chez des élèves du secondaire. *For the Learning of Mathematics* 16(2), 19-22.

Grabovskij, M., & Kotel'Nikov, P. (1971). The use of kinematic models in the study of trigonometric functions. *Educational Studies in Mathematics* 3(2), 147-160.

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: Aproceptual view of elementary arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education* 26(2), 114–141.

Gutmann, T. (2003). A direct approach to computing the sine or cosine of the sum of two angles. *Mathematics Teacher* 96(5), 314- 318.

Kendal, M., & Stacey, K. (1998). Teaching Trigonometry. *Australian Mathematics Teacher* 54(1), 34-39.

Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica*. [Tesis doctoral no publicada]. México: CICATA - IPN.

Montiel, G. (2011). Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio socioepistemológico. México: Ediciones Díaz de Santos.

Moore, K., LaForest, K., & Kim, H. (2012). The unit circle and unit conversions. *Proceedings of the Fifteenth Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 16-31). Portland, OR: Portland State University.

Quinlan, C. (2004). Sparking interest in trigonometry. *The Australian Mathematics Teacher* 60(3), 17-20.

Weber, K. (2005). Student's understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal* 7(3), 91-112.

ISSN: 2594-1046

Reflexiones desde el Perfil de Egreso de Profesores de Secundaria a Partir del Análisis de los Argumentos de Alumnos Normalistas

María del Carmen Fajardo Araujo
Universidad Autónoma de Querétaro. carmulita_@hotmail.com
Víctor Larios Osorio
Universidad Autónoma de Querétaro. vil@uaq.mx

Resumen

De acuerdo con el perfil de egreso para profesores de secundaria, estos deberán contar con determinadas habilidades como la argumentación, la comunicación de ideas, el dominio de la asignatura que imparten, entre otras; con la finalidad de incitar a sus alumnos a estar alfabetizados matemáticamente. Este trabajo hace una clasificación de los argumentos y de algunos procesos cognitivos manifestados en estos, que alumnos de sexto semestre de una Escuela Normal dieron en tareas diseñadas para alumnos de tercer grado de secundaria. La intención de la identificación de argumentos lleva a reflexionar sobre aquellas áreas que se deben fortalecer en el futuro profesor de secundaria, sobre todo porque él será el responsable de generar en sus alumnos competencias como la validación, la resolución de problemas, la comunicación de información matemática y el manejo eficiente de técnicas.

Palabras clave: Procesos cognitivos, esquemas de argumentación, profesores de secundaria.

1. INTRODUCCIÓN

Los orígenes de las escuelas Normales se remontan al año 1822 con el establecimiento de la Compañía Lancasteriana (IEESA, 2012), cuyo objetivo era reducir los índices de analfabetismo en México. Para el año de 1900, una vez considerado el magisterio como carrera, se habían creado ya cuarenta y cinco Escuelas Normales en el país. Ante las necesidades de fortalecimiento y renovación de la formación de profesores se dan una serie de cambios en el Plan de Estudios a lo largo del tiempo y para 1984 el cambio no sólo fue curricular, sino que se establece como obligatorio el nivel bachillerato para ingresar a cualquier modalidad de estudio ofertada en las escuelas Normales, esto porque se eleva el grado de estudios a nivel Licenciatura. Con la creación en 1996 del Programa para la Transformación y Fortalecimiento Académico de las Escuelas Normales se generan cambios en los planes y programas de estudio, en la formación y actualización del personal docente, en la gestión institucional, en la regulación del trabajo académico de los maestros de las escuelas Normales y en el mejoramiento y equipamiento.

Los cambios en los planes y programas de estudio se aplicaron en dos etapas 1197-1998 para Normales encargadas de formar profesores de primaria y la segunda etapa 1998-1999 para educación preescolar, educación especial, física y tecnológica y secundaria. El plan con el que trabaja actualmente la Licenciatura en Educación Secundaria en cualquiera de sus especialidades, corresponde al año 1999 y de acuerdo con este plan la formación de los profesores debe corresponder a las finalidades y los contenidos que la legislación educativa asigna a la educación básica, por lo que el profesor deberá promover el desarrollo en los estudiantes de un conjunto de conocimientos, habilidades y valores (SEP, Planes de Estudio, 1999).

El perfil de egreso del profesor de educación secundaria tiene cinco campos, de los cuales se centrará la atención en dos. Es importante aclarar que estos campos son comunes, aplican para las distintas especialidades que ofertan las Escuelas Normales, por lo que no hay uno específico para el profesor de matemáticas, pero por las características que describen dichos campos se han tomado como referentes para realizar el análisis de los conocimientos y habilidades que el profesor debe tener al finalizar la carrera.

Habilidades intelectuales específicas: el profesor posee alta capacidad de comprensión del material escrito y tiene el hábito de lectura. Expresa sus ideas con claridad, sencillez y corrección en forma escrita y oral, en especial ha desarrollado capacidades de describir, narrar, explicar y argumentar. Plantea, analiza y resuelve problemas. Tiene disposición y capacidades propicias para la investigación científica. Localiza, selecciona y utiliza información de diversos tipos.

Dominio de los propósitos y los contenidos de la educación secundaria: conoce con profundidad los propósitos, los contenidos y el enfoque de enseñanza de la asignatura que imparte. Tiene dominio del campo disciplinario de su especialidad para manejar con seguridad y fluidez los temas incluidos en los programas de estudio de secundaria. Reconoce la articulación entre los propósitos de la educación primaria y la educación secundaria. Sabe establecer una correspondencia adecuada entre la naturaleza y grado de complejidad de los contenidos educativos con los procesos cognitivos y nivel de desarrollo de los alumnos.

Para el caso de los alumnos de secundaria se espera que durante la educación básica desarrollen para el campo formativo de matemáticas: la formulación y validación de conjeturas, el planteamiento de nuevas preguntas, comunicar, analizar e interpretar procedimientos de resolución, buscar argumentos para validar procedimientos y resultados, encontrar diferentes formas de resolver problemas y manejar técnicas de manera eficiente (SEP, 2011).

Este trabajo tiene como objetivo hacer una reflexión sobre las habilidades que, según lo dicta el perfil de egreso, debe poseer un profesor de educación secundaria, específicamente del área de matemáticas. Se contrastan dichas habilidades establecidas en el perfil de egreso, con las que han de desarrollar en alumnos de secundaria, particularmente en matemáticas. El contraste se hace a partir de la clasificación de los argumentos manifestados por los alumnos normalistas (futuros profesores) en actividades diseñadas para alumnos de tercer grado de secundaria, también se evidencian algunos de los procesos cognitivos identificados en los argumentos.

2. MARCO TEÓRICO

Algunos investigadores en Educación Matemática, Font, Planas y Godino, 2010; Godino, Batanero y Font, 2007; Pochulu y Font, 2011 (citado en Larios & Díaz-Barriga, 2013) se han inclinado en estudiar desde presupuestos semióticos, el proceso de enseñanza-aprendizaje de los objetos matemáticos. El Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción Matemática (EOS)ofrece un conjunto de "herramientas para una didáctica descriptiva y explicativa que servirá para responder ¿qué ha ocurrido y por qué?" (Pochulu & Font, 2011). Se proponen cinco niveles para el análisis didáctico de procesos de estudio:

1. Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas.
2. Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos.
3. Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas.
4. Identificación del sistema de normas y metanormas.
5. Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio.

Este estudio sólo tomará en cuenta dos de los cinco niveles de análisis didáctico propuesto en el EOS, los cuales poseen características específicas para ayudar a esta investigación. Se describen brevemente los dos niveles a emplear.

Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas: Se analizan las prácticas matemáticas y los problemas de las que derivan éstas. Este nivel necesita tomar en cuenta los sujetos involucrados y el contexto, ya que son aspectos que condicionan el resultado que se obtiene. Además se incluyen los fines, las intenciones, los valores, los objetos y los procesos matemáticos.

Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos: se centra en los objetos y procesos que intervienen en la realización de las prácticas, así como los que emergen de ellas. La finalidad de este nivel de análisis es describir la complejidad ontosemiótica de las prácticas matemáticas tomando en consideración la diversidad de objetos y procesos, así como las tipologías de unos y otros (Pochulu & Font, 2011). Para analizar los objetos matemáticos, el EOS considera el uso de la configuración epistémica como herramienta para el análisis e incluye los componentes del conocimiento que son necesarios para resolver una determinada situación problema, como el lenguaje y los procesos matemáticos.

Para la descripción de los procesos matemáticos manifestados en los argumentos de los alumnos, el EOS menciona seis procesos duales, de los cuales sólo se tomaron en cuenta dos parejas, *Particularización- Generalización y Descomposición- Reificación,* esto debido a las respuestas dadas por los alumnos. Se detallan brevemente las características de los procesos:

- Particularización, objeto matemático individualizado.
- Generalización, abstracción que permite obtener una clase o conjunto de objetos.
- Descomposición, separar en diversas partes el objeto matemático para su análisis o comprensión.
- Reificación, convertir un objeto matemático abstracto en uno “concreto”, con un ejemplo para ilustrar dicha abstracción.

Respecto a la clasificación de los argumentos dados por los alumnos normalistas se tomará en cuenta la categorización realizada por Flores (2007) quien define el *esquema de argumentación* como la manera en que un individuo utiliza sus razonamientos cuando justifica o explica un resultado o bien cuando valida una conjetura. Se proponen los siguientes tipos de esquemas:

- Autoritarios, donde sus argumentaciones se apoyan de las afirmaciones hechas por una autoridad (profesor, libro de texto).
- Simbólicos, donde se utiliza un lenguaje matemático y símbolos de manera superflua y poco consistente sin llegar realmente a las conclusiones deseadas, el sujeto puede mencionar conceptos poco claros o inventados.
- Fácticos, en los que se hace un recuento de lo que se hizo o se repiten hechos evidentes de una situación, a manera de explicación o justificación de algún resultado, como una serie de pasos que parecen un algoritmo.

ISSN: 2594-1046

- Empíricos, en los cuales el apoyo está en hechos particulares (inductivos) o en un dibujo (perceptuales), donde éste constituye un argumento por sí mismo y no un apoyo para visualizar el argumento.
- Analíticos, donde se sigue una cadena deductiva, sin que por ello se llegue forzosamente a una conclusión válida.

3. METODOLOGÍA

El experimento se realizó en una Escuela Normal pública del estado de Querétaro, con alumnos de sexto semestre de la Licenciatura en educación secundaria con especialidad en matemáticas. En una sala de cómputo con acceso a internet donde trabajaron individualmente. Dichos alumnos están en su penúltimo año de formación, ya que en el séptimo semestre inician con la práctica docente intensiva. El grupo oficialmente está conformado por 24 alumnos. Sin embargo, a lo largo de las sesiones que duraron dos semanas, el número de alumnos que contestaron las hojas de trabajo fue variando, la Tabla 1 indica el total de participantes por actividad y que enviaron sus archivos, pues se les solicitó que guardaran en una carpeta cada construcción que hicieran y la enviaran al correo electrónico del investigador, ya que en el centro de cómputo está prohibido introducir algún dispositivo como USB o CD.

Actividad	Total de alumnos participantes
Diagnóstico	16
La circunferencia como lugar geométrico	11
Construcciones	12
Ángulos entre paralelas	13
Congruencia	5
Teorema 1	14
Semejanza	13
Homotecia Directa e Inversa	17

Tabla 1. Total de alumnos participantes por actividad.

Los datos se recabaron en hojas de trabajo y en archivos de Geogebra. Es preciso mencionar que en la primera sesión se les preguntó a los alumnos si conocían el funcionamiento de Geogebra, respondieron afirmativamente, pero al momento de iniciar el trabajo, declararon que sí lo conocían, pero no para hacer otro tipo de tareas que graficar. Se inició con la aplicación de un diagnóstico con

12 preguntas que aludían al trabajo posterior. Se les instruyó en las construcciones solicitadas en las hojas de trabajo.

El total de actividades del experimento de enseñanza fueron siete y su organización se rigió por la articulación de temas del eje Forma, espacio y medida que propone el programa de estudios de matemáticas de secundaria, concretamente del tercer grado de secundaria.

4. RESULTADOS

Se pretende dar a conocer los resultados de determinadas preguntas del diagnóstico, dada la importancia de éstas para responder las actividades de las hojas de trabajo. Para la pregunta ¿Qué significa que dos figuras sean congruentes? el 75 % de los alumnos normalistas confunden las características de las figuras congruentes con las de las figuras semejantes o bien hacen una combinación, sin establecer claramente cuál pertenece a la congruencia y cuál a la semejanza, el resto de los alumnos no respondió. La pregunta ¿Qué es una razón en matemáticas? El 50% de los alumnos no tiene idea sobre el significado de dicho concepto, un 37.5% responde con deficiencias en el lenguaje matemático, pero con una idea parcial del significado del concepto, el resto de los alumnos no respondió. Ante la pregunta ¿Qué significa que dos figuras sean semejantes? El 68.75% introduce características de las figuras congruentes y el 18.75 % define con lenguaje matemático superfluo la semejanza de figuras, el resto de los alumnos no respondió. ¿Qué es homotecia? Fue otra pregunta que arrojó resultados interesantes, donde el 81.25 % de los alumnos tiene parcialmente claro qué significa la homotecia, el resto no respondió. La última pregunta considerada fue: cuando se usa la expresión condición suficiente ¿a qué se refiere?, donde el total de los alumnos no respondió.

Se tomaron características de los dos campos que maneja el perfil de egreso de la Normal para hacer el análisis. El profesor tiene dominio del campo disciplinario de su especialidad para manejar con seguridad y fluidez los temas incluidos en los programas de estudio de secundaria, pero los resultados indican que se tienen dificultades en establecer las diferencias entre semejanza y congruencia de figuras, que se hace uso del lenguaje matemático y símbolos de manera superflua, además de que mencionan conceptos inventados o bien que no le han quedado claros, este tipo de respuestas estarían dentro de los esquemas de argumentación simbólica.

Se realizó un análisis por pregunta y por hoja de trabajo para determinar los esquemas de argumentación, las Tablas 2 y 3 muestra los resultados por actividad.

ISSN: 2594-1046

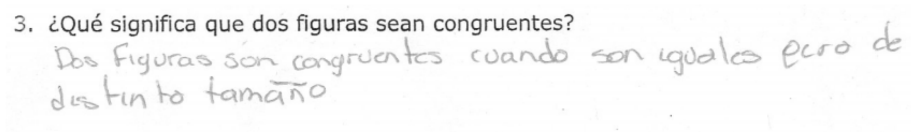

3. ¿Qué significa que dos figuras sean congruentes?
Dos Figuras son congruentes cuando son iguales pero de distinto tamaño

Figura 1. Ejemplo de respuesta para la Congruencia de figuras en Diagnóstico.

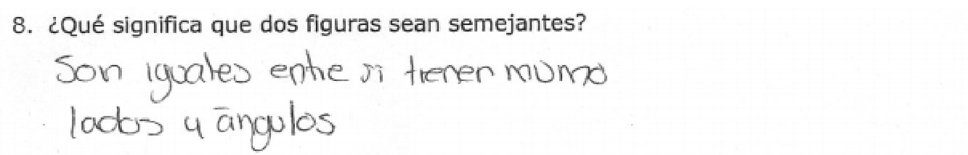

8. ¿Qué significa que dos figuras sean semejantes?
Son iguales entre si tienen mismo lados y ángulos

Figura 2. Ejemplo de respuesta para la Semejanza de figuras en Diagnóstico.

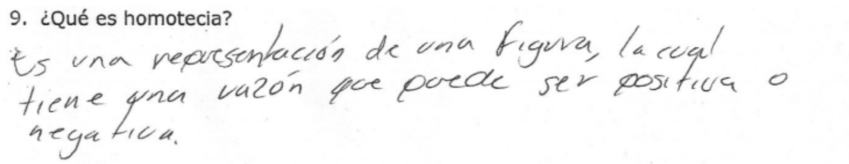

9. ¿Qué es homotecia?
Es una representación de una figura, la cual tiene una razón que puede ser positiva o negativa.

Figura 3. Ejemplo de respuesta para Homotecia de figuras en Diagnóstico.

Actividad	Número de preguntas analizadas	Esquema de argumentación predominante
La circunferencia como lugar geométrico	3	Simbólico: 42.42% Empírico Perceptual:36.36% Analítico: 21.21%
Construcciones	8	Empírico Perceptual:63.54% Simbólico:14.57% Empírico inductivo:9.38% Fáctico: 5.22% Autoritario:4.16% Analítico: 1.04% Sin esquema:2.08%
Ángulos entre paralelas	4	Empírico Perceptual:53.85% Simbólico:28.84% Autoritario:5.76% Analítico:3.84% Empírico inductivo: 3.84% Fáctico: 3.84%
Congruencia	28	Simbólico: 67.16% Analítico: 15.7% Sin esquema:12.14% Empírico Perceptual:5%

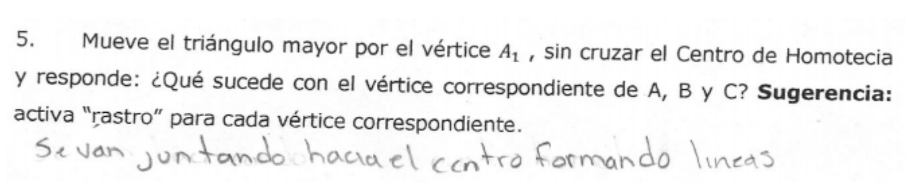
Tabla 2: Frecuencia de esquemas de argumentación por actividad.

ISSN: 2594-1046

El tipo de esquemas en los que mayormente se encuentran los argumentos de los alumnos son del tipo simbólico y empírico perceptual, ya que presentan dificultades para expresarse con el lenguaje matemático adecuado, inventan términos matemáticos o no determinan diferencias entre los conceptos centrales de las preguntas como establecer la diferencia entre círculo y circunferencia, la diferencia entre figuras semejantes y congruentes, las características de las figuras homotéticas cuando la razón de homotecia está entre el centro de homotecia y la figura original y cuando es una figura ampliada. En cuanto al esquema empírico perceptual el argumento fue la construcción en sí, junto con las características que ellos "veían" en la pantalla, generalmente anotaron las medidas de los segmentos, de los ángulos, el nombre de las rectas, sin llegar a un argumento de tipo analítico.

Actividad	Número de preguntas analizadas	Esquema de argumentación predominante
Teorema 1	2	Simbólico: 39.29% Empírico Perceptual: 35.71% Analítico: 17.85% Fáctico: 3.57% Sin esquema: 3.57%
Semejanza	14	Simbólico:64.85% Empírico perceptual:15.9% Analítico:10.50% Sin esquema:3.84% Empírico inductivo:3.84% Autoritario: 1.08%
Homotecia Directa e Inversa	15	Simbólico:59.13% Empírico perceptual: 20.35% Analítico:17.6% Sin esquema:1.5% Fáctico: 1.17% Empírico inductivo: 0.39%

Tabla 3: Frecuencia de esquemas de argumentación por actividad.


5. Mueve el triángulo mayor por el vértice A_1 , sin cruzar el Centro de Homotecia y responde: ¿Qué sucede con el vértice correspondiente de A, B y C? **Sugerencia:** activa "rastro" para cada vértice correspondiente.

Se van juntando hacia el centro formando lineas

Figura 4. Ejemplo de esquema de argumentación empírico-perceptual de la actividad de Homotecia Directa.

ISSN: 2594-1046

Para el caso de la identificación de los procesos cognitivos, se procedió también a determinarlos por pregunta y por hoja de trabajo, las Tablas 4 y 5 muestra los resultados. Es preciso aclarar que hay algunos procesos, como el de significación y representación, que no se priorizaron en esta investigación, la razón obedeció a la frecuencia con que aparecieron en las respuestas de los alumnos.

Actividad	Número de preguntas analizadas	Proceso cognitivo predominante
La circunferencia como lugar geométrico	3	Significación: 54.54% Particularización:27.27% Generalización: 12.12% Representación:3.03% Descomposición:3.03%
Construcciones	8	Particularización: 57.28% Significación: 15.64% Reificación: 7.30% Generalización: 9.37% Descomposición: 8.32% Sin proceso: 2.08%
Ángulos entre paralelas	4	Particularización: 40.38% Descomposición: 26.90% Generalización: 11.58% Reificación: 9.60% Significación: 7.71% Representación: 3.84%
Congruencia	28	Descomposición: 42.09% Generalización:29.20% Sin proceso: 12.80% Reificación:7.6% Particularización:7.6% Significación:0.71%

Tabla 4: Frecuencia de procesos cognitivos por actividad.

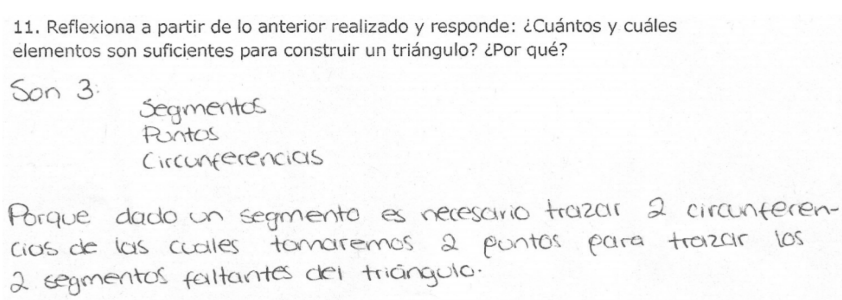
De acuerdo con los resultados, los alumnos hicieron descomposiciones para intentar entender las preguntas, sin embargo se estancan en ese proceso, muy pocos llegan a la reificación. Recurren a los objetos matemáticos individualizados, es decir a la particularización de casos, donde mayormente el sustento para establecer el argumento fue la construcción realizada en Geogebra, sin que ésta haya constituido un apoyo para establecer el argumento, pues detallan (particularizan) el

ISSN: 2594-1046

caso que vieron en su construcción, generalmente anotando las medidas de los elementos usados en ésta. La generalización se presenta, pero con algunas deficiencias en el lenguaje matemático para construir su argumento.

Actividad	Número de preguntas analizadas	Proceso cognitivo predominante
Teorema 1	2	Significación:10.73% Reificación:21.43% Descomposición:28.56% Particularización: 17.85% Generalización: 17.85% Sin proceso: 3.57%
Semejanza	14	Descomposición: 38% Particularización: 23% Generalización: 17% Significación: 9.96% Reificación: 5.99% Representación: 1.08%% Sin proceso: 4.96%
Homotecia Directa e Inversa	15	Descomposición: 23.09% Representación:20.70% Generalización: 19.96% Particularización: 11.70% Significación:10.51% Reificación: 12.10% Sin proceso: 1.94%

Tabla 5: Frecuencia de procesos cognitivos por actividad.


11. Reflexiona a partir de lo anterior realizado y responde: ¿Cuántos y cuáles elementos son suficientes para construir un triángulo? ¿Por qué?

Son 3: Segmentos
Puntos
Circunferencias

Porque dado un segmento es necesario trazar 2 circunferencias de las cuales tomaremos 2 puntos para trazar los 2 segmentos faltantes del triángulo.

Figura 5. Ejemplo de proceso cognitivo de particularización de la actividad de Desigualdad Triangular

5. CONCLUSIONES

Si se considera que en el siguiente semestre (séptimo) la práctica docente es intensiva, es decir que los alumnos normalistas permanecerán en una escuela secundaria con máximo dos grupos a su cargo, donde deberán fomentar en sus alumnos competencias que los lleven a la formulación y validación de conjeturas, a comunicar, analizar e interpretar procedimientos de resolución, a la búsqueda de argumentos para validar procedimientos y resultados, quizá la pregunta que vale hacer es ¿En qué momento los alumnos normalistas van a desarrollar esas habilidades que se plantean en el perfil de egreso, para así insertarlas en su práctica y llevarlas a cabo con sus alumnos, si están a un año de graduarse e incorporarse de lleno a las secundarias?

Los resultados muestran que los alumnos normalistas presentan debilidades en la comunicación de ideas, en la argumentación de las mismas y que por lo menos en los temas aplicados en el experimento de enseñanza no se evidencia su dominio. Esta primera exploración deja ver que se debe trabajar en el reforzamiento de habilidades del futuro profesor de secundaria. Quedan muchas interrogantes a responder, pero paulatinamente serán abordadas en futuras investigaciones.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Flores, Á. (2007). Esquemas de Argumentación en Profesores de Matemáticas de Bachillerato. *Educación Matemática*, 19(1), 63-98.

IEESA. (2012). *¿De dónde vienen y a dónde van los Maestros mexicanos? La formación docente en México* 1822-2012. Obtenido de Sindicato Nacional de Trabajadores de la Educación: http://www.snte.org.mx

Larios, V., y Díaz-Barriga, A. (2013). *Las prácticas docentes en Matemáticas en el estado de Querétaro*. Facultad de Ingeniería, UAQ. México.

Pochulu, M., y Font, V. (2011). Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. *Revista Lationoamericana de Investigación en Matemática Educativ*a, 14(3), 361-394.

SEP. (1999). *Planes de Estudio. Recuperado* el 18 de mayo de 2016, de Dirección General de Educación Superior para Profesionales de la Educación: http://www.dgespe.sep.gob.mx/planes/les

SEP. (2011). *Planes de Estudios 2011*. México D.F.

ISSN: 2594-1046

COMPONENTES DE LAS CREENCIAS DE ESTUDIANTES SOBRE LA MATEMÁTICA, COMO UN MARCO EXPLICATIVO DE SU MOTIVACIÓN DE APRENDIZAJE

Claudia Estela Santana Aldaba
UAM, UAZ. México. cesantana_@hotmail.com

Lorena Jiménez Sandoval
UAM, UAZ. México.lorejim79@hotmail.com

Ofelia Montelongo Aguilar
UAM, UAZ. México.omaguilar_m@hotmail.com

Resumen

La falta de motivación de los estudiantes de secundaria hacia el aprendizaje de las matemáticas se puede considerar un problema "común" pero no irremediable. Se presenta el avance de una investigación en la que se busca conocer y describir las componentes de las creencias sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje en estudiantes del segundo de secundaria del Instituto Tecnológico de Monterrey campus Zacatecas, específicamente: la componente de valor, la componente de expectativa y la componente emocional. El objetivo es entender la falta de motivación de dichos estudiantes y elaborar pautas que conduzcan la gestión de condiciones de contexto en el aula que favorezcan la motivación de aprendizaje de la matemática en este nivel educativo. Se espera acceder a la motivación de los estudiantes para mejorar las condiciones en el aula en favor de la motivación hacia el aprendizaje de la matemática.

Palabras clave: motivación, creencias, valor, expectativa, emocional.

1. INTRODUCCION

Martínez (2005) plantea la problemática referente a la impopularidad de la matemática y la aversión sentida por muchos de los que deben aprenderla, así como las dificultades que presentan algunos docentes que tienen la responsabilidad de enseñarla y explica que algunos autores atribuyen este hecho a la creencia de que la matemática es "difícil, fría, ultraracional y fuertemente masculina" (Godino, 1993, Citado por Martínez 2005, p. 6), que otros apuntan a que uno de los factores que provoca el rechazo de los estudiantes hacia las matemáticas "está en los métodos de enseñanza desarrollados cotidianamente en las instituciones escolares en correspondencia con la visión que se tiene sobre la matemática escolar" (Mora, 2000, citado por Martínez, 2005, p. 12) y que otros agregan que "el fracaso de los estudiantes no siempre se corresponde con su desarrollo cognitivo, indicando que las emociones juegan un papel facilitador, o debilitador, del aprendizaje de la Matemática" (Gómez, 2000, citado en Martínez, 2005, p. 26). Cada una de estas vertientes han sido abordadas desde diferentes perspectivas teóricas y metodológicas, abonando a la delimitación de cómo algunas componentes del dominio afectivo pueden aportar al esclarecimiento de, entre otras cosas, la falta de motivación de aprendizaje de la matemática de los estudiantes.

En el contexto escolar, Blanco, Caballero, Piedehierro y Gómez (2010) mencionan que evaluaciones sobre rendimiento en las matemáticas como INECSE (2001), OCDE (2005) y MEC (2007) muestran que un gran número de estudiantes de la Escuela Secundaria Obligatoria (ESO) fracasan y tienen dificultades con la matemática. Según Gil, Guerrero y Blanco (2006) la generación de actitudes negativas en los estudiantes hacia las matemáticas, a pesar de la importancia de éstas para desenvolverse en distintos ámbitos de la sociedad actual, influye en este fracaso de los estudiantes, particularmente de la ESO. Marchesi y Hernández (2003, citados por Blanco *et al.*, 2010, p. 14) señalan que "los factores que mejor explican el fracaso académico son, por un lado, la falta de conocimientos y habilidades cognitivas y, por otro, la falta de motivación, interés y afectos positivos".

El trabajo de Guerrero, Blanco y Castro (2001) profundiza en la relación entre las creencias, las emociones y las actitudes con el comportamiento y la autoeficacia de los aprendices de matemáticas, en la idea de que entender esta relación puede ayudar a mejorar la motivación de aprendizaje de la matemática.

Coincidiendo con Hannula (2004), se considera que las creencias de los estudiantes sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje determinan su motivación en el aula de matemáticas, de forma tal que se propone identificar y describir las componentes de las creencias en cuanto al valor que asignan los estudiantes a la matemática, a su enseñanza y aprendizaje, la autoeficacia y el concepto que tienen de sí mismos cuando aprenden matemáticas así como la componente emocional que se manifiesta en estas creencias.

En este escrito se describe particularmente el marco referencial que se empleará para describir las citadas componentes de las creencias de los alumnos de segundo de secundaria del Instituto Tecnológico de Monterrey, Campus Zacatecas.

2. ANTECEDENTES

Gil, Guerrero y Blanco (2006) consideran que la promoción de actitudes y creencias positivas en el salón de clase mejoran el aprendizaje de la matemática. Con base en los resultados del análisis de las respuestas de 346 alumnos, a un cuestionario de 52 ítems sobre creencias y actitudes como aprendices de matemáticas, concluyen que la confianza en sí mismos, el sentimiento de capacidad y la habilidad matemática influye en el rendimiento, y que éste y el autoconcepto se determinan mutuamente (Gómez-Chacón, 1997, 2000; McLeod, 1992, citados en Gil, Guerrero y Blanco, 2006). Estos autores también explican que la obtención de buenas calificaciones mejora la motivación y el autoconcepto de los alumnos, así como que los alumnos en general, creen que la actitud del profesor y la suerte no influyen en su rendimiento académico, esto en contraposición con el nivel de esfuerzo y la dedicación. Según esos autores este resultado concuerda con el obtenido por Pintrinch, Anderman y Klobucar (1994) y por Navas, Sampascual y Castejón (1994), en el que "se pone de relieve la relación entre la atribución del éxito a causas internas y controlables y a los aspectos motivacionales y cognitivos" (citados en Gil, Guerrero y Blanco, 2006, p. 16). Es decir, los estudiantes suelen atribuir el éxito a aquello que ellos controlan o pueden controlar como el esfuerzo, y no a las demás personas, como a los maestros o compañeros, ni a azares del destino que no están bajo su control.

El trabajo de Martínez (2005) aborda una serie de aspectos relacionados con el dominio afectivo como las creencias, las emociones y las actitudes, en la educación matemática a través de "situaciones sociales donde los docentes, junto con su grupo de estudiantes, se comprometen en un proceso de adquisición de conocimientos y producción de saberes en relación con la matemática" (González, 2000, citado en Martínez, 2005, p. 117) que denomina Encuentros Edumáticos. Según este autor "factores del dominio afectivo tales como concepciones, creencias, motivaciones, convicciones, opiniones, sentimientos, emociones y actitudes que tienen los estudiantes y los docentes hacia dicha ciencia" (p. 9), están ligados a lo que se piensa sobre la naturaleza de la Matemática, su empleo, su enseñanza y su aprendizaje, así como para qué se aprende, cómo se evalúa y que tan útil es para la sociedad.

Guerrero, Blanco y Castro (2001), luego de identificar y explicar la relación entre las creencias, las emociones y las actitudes con los comportamientos y la autoeficacia de los aprendices de matemáticas, proponen un programa de intervención y una estrategia, ambas basadas en la resolución de problemas, en la que el alumno se responsabiliza de sus propios procesos cognitivos, emocionales y afectivos, de forma tal que él mismo pueda superar las dificultades que enfrenta. De acuerdo a estos autores, las emociones son la manifestación de los pensamientos, las creencias y las actitudes y explican que "cuando una persona está ansiosa está interpretando los sucesos como amenazantes y peligrosos, creándose un circuito de retroalimentación negativa entre sus pensamientos y la actitud psicofisiológica" (Guerrero *et al*., 2001. p. 2) y que dependiendo de la interpretación de cada sujeto, la activación del organismo puede ser beneficiosa o perjudicial, de esto desprende que la ansiedad puede ser un detonante o bloqueador del rendimiento y puede además facilitar ciertos tipos de aprendizaje e inhibir algunos otros.

Estos autores adoptan el concepto de actitud de Newcomb (1976, citado en Guerrero *et al*., 2001) que la define como "un modo de estar respecto de algo o alguien, un compuesto relativo respecto a lo que el individuo piensa, siente y hace" (p. 5) y que, Callejo (1994, citado en Guerrero *et al.*, 2001) clasifica en actitudes matemáticas y actitudes hacia las matemáticas. En cuanto a las creencias, explican que los alumnos van generando creencias respecto a la matemática, la enseñanza-aprendizaje de la matemática y acerca de ellos mismos (autoconfianza, autoconcepto y autoeficacia) a través de su paso por la escuela y que éstas se estabilizan conforme avanzan en los niveles escolares (Gairín, 1990, citado en Guerrero *et al*., 2001).

Según Guerrero *et al.* (2001) "los estudiantes adquieren una concepción sobre los problemas matemáticos, la forma de resolverlos y el papel de la enseñanza que va a provocar en ellos actitudes concretas para abordarlos" (p. 6) y es con base en esto y las ideas de los párrafos anteriores, que estos autores explican la relación entre las emociones negativas, las actitudes y las creencias con el comportamiento y autoeficacia de los alumnos en la actividad matemática, además de proporcionar pautas de actuación que pueden ser una guía para un proceso de intervención psicopedagógica que ayude tanto a los estudiantes como a los profesores en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Otro acercamiento para entender y explicar la relación entre las creencias, actitudes, emociones y las variables de la enseñanza/aprendizaje de los profesores y alumnos de la Escuela Secundaria Obligatoria y el rendimiento académico, lo proporciona el estudio de Nieto, Carrasco, Piedehierro, Barona y Gómez (2010). Estos autores luego de observar cómo los profesores en formación generaban sentimientos negativos en sus prácticas de enseñanza y en su aprendizaje de la matemática, realizaron un análisis de las investigaciones del Grupo GRESPE (Estrés Salud, Psicopatología y Bienestar Emocional) y el grupo DEPROFE (Desarrollo Profesional de los Profesores de Ciencias y Matemáticas) sobre dominio afectivo y su influencia en la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas en el nivel secundaria así como en la formación inicial de maestros. De esta forma, pudieron tener un marco de interpretación para determinar las relaciones existentes entre las creencias, actitudes, emociones y las variables de la enseñanza/aprendizaje de los alumnos de la ESO con su rendimiento académico, entender y valorar la relación entre las creencias del estudiante y su logro de aprendizaje, además de analizar los factores afectivos y emocionales en los estudiantes para profesores.

Los citados autores, después de hacer el análisis de los antecedentes en cuanto al dominio afectivo en la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas, proporcionan diversas conceptualizaciones, según una gran variedad de autores, sobre creencias, actitudes y emociones. Teniendo en cuenta los descriptores dados, se dispusieron a investigar la influencia de los factores afectivos en el éxito o fracaso del aprendizaje matemático con alumnos de secundaria a través del análisis de dos investigaciones previas con objetivos similares pero dos poblaciones diferentes de alumnos de la ESO. El primer trabajo fue el de Gil (2003, citado en Nieto *et al*., 2010) que realizó con alumnos de 3º y 4º en Badajoz en el curso 2002-03, a partir de una muestra de 346 alumnos de seis diferentes centros de enseñanza en el que se aplicó un cuestionario sobre las creencias, actitudes y emociones acerca de las matemáticas compuesto de 52 ítems a los que se agregó algunos sobre el papel del profesorado. El análisis de los datos obtenidos se hizo empleando el paquete SPSS 10.0 para hacer un estudio descriptivo e inferencial. El segundo trabajo analizado fue el de Báez (2007, citado por Nieto *et al*., 2010) que se realizó con alumnos de 1º, 2º, 3º y 4º de la ESO en Oviedo en el curso 2005-06 y en el que se utilizó de manera complementaria un cuestionario similar al del estudio de Gil (2003) además de entrevistas con alumnos y profesores. Este segundo cuestionario se aplicó, en 2006, a una muestra de 360 alumnos organizados en seis distritos escolares con un tratamiento estadístico similar al anterior. Por último, realizaron una investigación con estudiantes para maestros en la que se seleccionó una muestra de 488 estudiantes para maestro de la Facultad de Educación de la Universidad de Extremadura, en Badajoz, mediante un muestreo no probabilístico de conveniencia. El instrumento de recogida de datos fue tambien un cuestionario de 48 ítems cuyas respuestas se analizaron a través del paquete estadístico SPSS 13.0.

De acuerdo con los resultados obtenidos por Nieto *et al.* (2010), los estudiantes para maestro consideran que las matemáticas son útiles tanto en la sociedad como en otras asignaturas relacionadas con ellas. Hay discrepancias en cuanto a la percepción de la materia como memorística y mecánica. Prefieren el trabajo en grupo y expresan carecer de autoconfianza y experimentar inseguridad, desesperación y nerviosismo al resolver problemas matemáticos, sólo la mitad de los estudiantes sienten calma y tranquilidad. Estos autores atribuyen el éxito en las matemáticas a la actitud del profesorado hacia los estudiantes, a una mayor dedicación al estudio de dicha materia y al esfuerzo. Adicionalmente, afirman que sus conclusiones son similares a las obtenidas por Gil y Báez en sus estudios con alumnos de secundaria.

Según los estudios realizados:

> Ponen de manifiesto que los procesos cognitivos implicados en la resolución de problemas son susceptibles al influjo del ámbito afectivo, en relación a sus principales elementos: emociones, creencias y actitudes. Además los estados emocionales experimentados por los alumnos durante el proceso de resolución de problemas pueden ejercer una influencia no deseada, acompañando negativamente a la actividad matemática y condicionando su posterior participación en un futuro y/o en actividades similares (Nieto *et al*., 2010 p., 27).

En el trabajo de Gómez (2005) se presentan algunas teorías que respaldan la idea de que "la motivación está influida por nuestros pensamientos" (p. 4) con la finalidad de encontrar cómo motivar a los estudiantes al aprendizaje de la matemática. Esta autora, al igual que Guerrero *et al.* (2001), propone estrategias que pueden "ayudar a los estudiantes a internalizar metas de aprendizaje, como estímulo y camino para desarrollar su motivación para hacer matemáticas" (Gómez, 2005, p. 7).

> Al analizar las respuestas de los estudiantes, el Informe PISA 2003 (OCDE, 2005) obtiene tres datos importantes sobre las actitudes de los alumnos de Secundaria hacia el estudio. "El primero es que los estudiantes tienen diversas características auto-identificadas que pueden ayudarlos a aprender. El segundo, el grado en que las diferentes características se asocian con el rendimiento. En tercer lugar, muestran cómo influyen la motivación, las creencias sobre uno mismo y los factores emocionales sobre la adopción de estrategias de aprendizaje eficaces y, de este modo, ayudan a los alumnos a convertirse en estudiantes de por vida (Gómez, 2005 p. 1).

Según Gómez (2005), en el estudio PISA 2003 (OCDE, 2005) se preguntó a los estudiantes sobre cuatro aspectos de su actitud hacia el estudio: su motivación, sus creencias sobre sí mismos, factores emocionales y estrategias de aprendizaje, con la finalidad de identificar las características de un estudiante eficaz. Considerando que los resultados de los estudiantes españoles en dicha prueba fueron bajos, esta autora hace un análisis de los conceptos y teorías sobre motivación que estudian su influencia en el aprendizaje, tales como: La motivación de logro, Teoría de la atribución, Teoría de evaluación cognitiva y Teorías socio-culturales para dar respuesta a la pregunta ¿cómo motivar al alumno/a?

Gómez (2005), a partir de considerar la clasificación de la motivación en intrínseca y extrínseca que entiende "como el hecho de realizar una actividad por el placer y la satisfacción que uno experimenta mientras aprende" la primera y como aquella que ocurre "cuando el alumno sólo trata de aprender no tanto porque le gusta la asignatura o carrera sino por las ventajas que ésta ofrece" (p. 5) en el caso de la segunda, clasifica a su vez la motivación extrínseca en tres tipos:

"regulación externa, en la que se regula la conducta a través de medios externos, regulación introyectada que está limitada a la internalización de pasadas contingencias externas y de Identificación en donde la internalización de motivos extrínsecos se regula a través de identificación" (Gómez, 2005, p. 5).

En este orden de ideas, la autora considera que para desarrollar la motivación intrínseca de los estudiantes se pueden seguir las siguientes estrategias:

a. Ayudar a los estudiantes a vivir experiencias de éxito en el aprendizaje matemático.

b. Ayudar a los estudiantes a internalizar metas de aprendizaje.

c. Ayudar a los alumnos y alumnas en la experiencia de autonomía y responsabilidad.

Y proporciona un ejemplo de módulo de aprendizaje llamado *modelando el empaquetado de latas de refrescos* que "según el marco teórico del Informe PISA sobre competencias, estaría integrado en el tercer nivel de competencia: razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales, trabajando aspectos de modelización horizontal y vertical" (Gómez, p. 16).

Los estudios hasta aquí reportados permiten considerar que, luego de conocer y entender algunos factores del dominio afectivo de los estudiantes presentes en el aula de matemáticas, es posible la generación de pautas de actuación para los profesores, que si bien no resolverán del todo el problema de la falta de motivación para el aprendizaje de la matemática en los estudiantes, sí pueden ayudar a que ésta disminuya.

Los estudios que se describen a continuación aportan elementos que permiten entender en qué factores del dominio afectivo hay que enfocar la atención, cuáles características hay que considerar de cada uno de ellos para entender cuál y cómo es su influencia en la motivación.

Hannula con su escrito del 2004, Regulating Motivation in Mathematics, hace un análisis de los procesos de la autorregulación de la motivación, tomando como base teórica los conceptos de autorregulación y motivación elaborados en otras investigaciones. De inicio, conceptualiza la motivación como una estructura de necesidades y metas y la relaciona con la teoría del aprendizaje autorregulado (Hannula, 2002, citado en Hannula, 2004).

A partir de la combinación de las conceptualizaciones o puntos de vista sobre la motivación de varios autores como Dweck (2002), Nuttin (1984) y Buck (1999), Hannula (2004) reformula su concepto de motivación como:

> Un potencial para dirigir el comportamiento a través de los mecanismos que controlan las emociones, que es observable solo cuando se manifiesta en afecto y la cognición, como por ejemplo, las creencias, los valores y las reacciones emocionales, y que este potencial se estructura a través de necesidades y metas.

Pero considera que esta definición sólo es útil en la medida en la que es posible hacer explícito cómo hacer realidad ese potencial, para lo cual considera necesario definir y entender las necesidades y metas.

Según Nuttin (1984, citado en Hannula, 2004) las necesidades de la conducta pueden ser conceptualizadas como categorías de relaciones del individuo con el medio ambiente que son necesarias para una óptima actividad biológica y/o funcionamiento psicológico. En psicología las necesidades más comunes que se presentan en el ámbito escolar son la autonomía, la competencia y la pertenencia social (Boekaerts, 1999, p. 452; Covington y Dray, 2002, citados en Hannula, 2004).

Por otro lado, Nuttin describe la diferencia entre las necesidades y metas en sus diferentes niveles de especificidad considerando que una necesidad se dirige hacia una, relativamente grande categoría de objetos, mientras que una meta está dirigida hacia un objeto específico (Hannula, 2004).

En cuanto a la autorregulación, Zimmerman y Campillo (2003, citados en Hannula, 2004) caracterizan la autorregulación como auto-pensamientos generados, sentimientos y acciones que son planificadas y adaptadas cíclicamente para la consecución de los objetivos personales, tales como la solución de un problema.

Hannula (2004) ilustra este rasgo cíclico de la planeación y adaptación de las acciones y sentimientos, a través de un diagrama en el que se hacen evidentes tres niveles de la autorregulación. Un primer nivel es el que ocurre en la elección de metas y recursos, un segundo nivel en el que se regulan los procesos de aprendizaje y se hace uso del conocimiento y las habilidades cognitivas y un tercero, y último nivel, en el que ocurre la regulación de los modos de procesamiento y la elección de estrategias cognitivas.

El fondo empírico de las reflexiones de Hannula (2004) se sustenta, según explica él mismo, en un estudio etnográfico de tres años en el que, entre otras cosas, se analizaron las entrevistas hechas a 68 estudiantes en dos temas principales: sus puntos de vista acerca de la utilidad de las matemáticas en sus estudios futuros, el trabajo y la vida, y sus emociones relacionadas con las matemáticas.

De acuerdo a lo reportado por Hannula (2004), son tres los aspectos relevantes en torno a la elección de metas de los estudiantes. Primero, las metas se originan por las necesidades (autonomía, pertenencia y competencia). Segundo, las creencias de los estudiantes acerca de qué tan accesibles son las metas que se plantean. Y tercero, las reacciones emocionales automáticas afectan la elección y regulación de las metas. Considera importante que en futuras investigaciones se estudie la práctica docente para que en lugar de tratar solamente de controlar las necesidades de los estudiantes en las clases de matemáticas, aprendamos a utilizar estas necesidades a través del diseño de actividades que proporcionen a los estudiantes oportunidades para que todo tipo de necesidades puedan ser satisfechas.

En su trabajo del 2006, Hannula se propone entender el comportamiento de los estudiantes en las aulas de matemáticas a partir de la comprensión de la motivación y la forma en que ésta se regula, y retoma la idea de enfocarse en describir tres aspectos regulan la motivación:

1. Las metas que se derivan de las necesidades (de competencia, autonomía y pertenencia social),
2. Las creencias de los estudiantes sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje y
3. La influencia de las reacciones emocionales automáticas en la regulación de las metas.

Para esta investigación Hannula (2006) emplea el marco desarrollado en Hannula (2004) para realizar un estudio de caso considerando el caso de Frank derivado del estudio cualitativo longitudinal de tres años, reportado parcialmente en Hannula (2004), sobre un grupo de estudiantes en el que el investigador fungió como maestro titular y en el que el levantamiento de la información se hizo a través de 68 entrevistas realizadas a los estudiantes (individuales y grupales), otras tantas a papás y maestros, así como observaciones de clase, todo con la finalidad de entender la autorregulación de los estudiantes en la vida real.

En el caso de Frank, Hannula destaca cómo los estudiantes pueden tener múltiples y simultáneas metas y cómo es la toma de decisiones para alcanzar cada una de ellas. Mientras que algunos estudiantes pueden navegar entre el alcance de unas y otras metas, casi de manera aleatoria o aprovechando las oportunidades que se les presentan, otros estudiantes lo hacen en serie, es decir consiguiendo una tras de la otra. Explica también que en un estudio comparativo reportado en Hannula (1998 y 2003, citados por Hannula, 2006) sobre el caso de Eva y el caso de Anna se dio cuenta de cómo las necesidades sociales definían las metas de Eva, mientras que las de Anna eran definidas por necesidades de competencia.

En ese estudio, Hannula (2006) destaca el papel que las creencias de los estudiantes, acerca de la accesibilidad a las diferentes metas, tienen en la regulación de la motivación. Explica que este papel se ha discutido fundamentalmente con las llamadas creencias de eficacia o autoeficacia y que la teoría de autorregulación sugiere que para que un cambio en motivación tenga lugar debe haber cierta correspondencia entre una meta deseada y las creencias que se tienen (incluyendo las creencias de eficacia) sobre la accesibilidad a la meta. En el caso de Frank comparan sus creencias acerca de la matemática de que son interesantes con el hecho de que le gustan las matemáticas, además explican que para Frank tener un alto rendimiento en matemáticas era una meta importante porque él creía que el dominio de las matemáticas son muestra de la excelencia. Esta idea se vio reforzada con la superioridad, respecto de sus compañeros, que mostró Frank en su rendimiento y el esfuerzo que ponía en trabajar en una tarea matemática y terminarla en el menor tiempo posible, ya que Frank además creía que "los buenos en matemáticas pueden resolver cualquier problema en pocos minutos".

Entre las conclusiones de Hannula (2006) se destaca la idea de que las necesidades de competencia, autonomía y pertenencia de los estudiantes pueden ser atendidas, simultáneamente, en un salón de clase, si se pone atención en las creencias que tienen los estudiantes sobre la matemática, su enseñanza y su aprendizaje.

El trabajo de Jäder, Sidenvall y Sumpter (2017) tiene como objetivo explorar las relaciones existentes entre las creencias y el razonamiento de estudiantes suecos de primer año de secundaria superior (preparatoria, en el sistema escolar Mexicano) al resolver problemas "no rutinarios", para responder a la pregunta: ¿qué creencias están presentes en el razonamiento de los estudiantes al resolver tareas no rutinarias? De acuerdo a estos autores las creencias de los estudiantes pueden limitar la resolución de una tarea, debido a que algunos creen que las tareas deben resolverse algorítmicamente, en pocos minutos y no es necesaria la comprensión sino más bien la memorización (Schoenfeld, 1992, citado en Jäder *et al.*, 2016). Además, de que según la Inspección de Escuelas de Suecia (2010), la educación sueca se basa en un aprendizaje memorístico y procedimental. Por otro lado, Liu (2010, citado en Jäder *et al.*, 2017) destaca que aspectos como el currículum y el carácter de las tareas matemáticas (rutinarias o no rutinarias) puede a su vez, influir en las creencias.

Para el análisis de la información, Jäder *et al.* (2017) toman como base los tres temas de creencias reportadas en Sumpter (2013, citado en Jäder *et al.*, 2017): expectativa, motivacional y de seguridad. Éstas a su vez se pueden dividir en subcategorías más finas, por ejemplo, las creencias de expectativa pueden ser personales, globales o una combinación de ambas, las creencias motivacionales pueden ser intrínsecas o extrínsecas (Ryan y Deci, 2000, citados en Jäder *et al.*, 2017) y las creencias de seguridad puede ser vistas como una creencia emocional que habla sobre qué tan seguros se sienten los estudiantes al resolver problemas por ejemplo; sobre los métodos que eligen o de los resultados que obtienen.

Para explicar el razonamiento matemático, Jäder *et al.* (2017) consideran las ideas de Lithner (2008, citado en Jäder *et al.,* 2017) en las que se explica que el razonamiento no necesariamente está basado en la lógica formal y puede ser influido por las creencias, ya que el razonamiento que emplean los estudiantes depende, de algún modo, del tipo de tareas al que se enfrentan y de sus creencias de autoeficacia respecto de cada tipo de tarea.

Para la recogida de datos los investigadores utilizaron videograbaciones de sesiones de resolución de tareas, entrevistas individuales (de estimulación de recuerdos) y las resoluciones escritas de los estudiantes. Las sesiones se hicieron en parejas en un laboratorio de solución de problemas, en el que los estudiantes podían habar con sus compañeros y usar su libro y calculadora; sin límite de tiempo. La muestra constó de ocho estudiantes de primero de preparatoria que se seleccionaron de dos clases de matemáticas con distintos niveles de aprovechamiento. Fueron cuatro sesiones para resolver tareas con una duración total de 1.4 hrs. y ocho entrevistas con una duración total de total 3.2 hrs.

Los resultados del estudio de Jäder *et al.* (2017) indican que los estudiantes hacen explícitas creencias de seguridad, motivación y expectativa cuando resuelven problemas matemáticos. Se observó que estos estudiantes suecos esperan que las tareas no rutinarias puedan ser resueltas mediante algoritmos, creen que tienen un carácter imitativo en donde no es necesario el razonamiento matemático creativo y que es más importante el razonamiento memorístico, es decir creen que memorizar métodos es más efectivo que razonarlos o construirlos.

En estas tres últimas investigaciones presentadas se destaca el papel que juegan las creencias de los estudiantes en la motivación y autorregulación de aprendizaje, en el comportamiento y rendimiento matemático y en el tipo de razonamiento que emplean en la solución de tareas matemáticas. Por estas razones es que se considera importante profundizar en la comprensión de las creencias, considerando además que particularmente en nuestro país existen pocos estudios que aborden las creencias de los estudiantes de secundaria desde esta visión multifacética en cuanto a los tipos y componentes que las integran.

3. MARCO REFERENCIAL

Según la teoría cognitiva social, las creencias acerca de la motivación académica de los estudiantes incluyen tres componentes: valor, expectativa y emocional (Bandura, 1989, citado en Chiu y Xihua, 2008). Estas componentes han sido descritas en los párrafos anteriores desde la perspectiva de diferentes autores.

Chui y Xihua (2008), en un estudio en el que analizan los efectos de la familia y la motivación en el nivel de aprendizaje de estudiantes de 41 países, hacen alusión a las componentes de las creencias de valor, expectativa y emocionales y explican que la componente de valor se refiere al valor que los estudiantes atribuyen a las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje y que sirven como una justificación del porqué los alumnos se motivan a estudiarlas. Afirman que éste puede ser un valor intrínseco (las matemáticas son intereantes) o un valor extrínseco (saber las matemáticas me ayudará en mi estudios profesionales), mientras que la componente de expectativa de las creencias incluye la autoeficacia matemática, es decir la creencia en la propia capacidad para llevar a cabo una tarea, y el auto-concepto matemático que se refiere a la creencia sobre la propia capacidad de competencia respecto de una actividad específica. Estos autores también mencionan que las creencias de expectativa pueden verse afectadas por los éxitos o fracasos que los estudiantes han tenido o llegarán a tener a lo largo de su experiencia con las matemáticas, lo que mantendrá, aumentará o disminuirá sus expectativas.

La componente emocional la entenderemos tal como se detalla en Jäder *et al* (2017), quienes analizan las creencias de seguridad, expectativa y motivacionales y describen la creencia de seguridad como una creencia emocional, es decir, una creencia que involucra una componente emocional. Por ejemplo, la creencia: mi propio razonamiento no es una estrategia segura, lleva implícita una componente emocional de inseguridad que se diferencia de la emoción de inseguridad, que es propiamente un sentimiento.

De esta forma, es bajo el modelo propuesto por Hannula (2004) en el que son tres los aspectos relevantes para entender la motivación de los estudiantes: necesidades, metas y creencias, en el que basaremos el acercamiento a la motivación de aprendizaje de la matemática de los estudiantes de segundo grado de secundaria del Instituto Tecnológico de Monterrey, campus Zacatecas. Especificamente centraremos la atención en las creencias y las tres componentes ya descritas: componente de valor, componente de expectativa y componente emocional.

4. CONCLUSIONES

Algunas conclusiones de las que se puede dar cuenta en este punto de la investigación es que, en los trabajos analizados hasta el momento, se hace evidente la importancia del dominio afectivo en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Esta relevancia ha derivado en un aumento tanto en la cantidad de investigaciones en este ámbito como en la diversidad de aproximaciones teóricas y factores del dominio afectivo que se estudian.

A pesar de lo dicho en el párrafo anterior, hemos encontrado pocas investigaciones cualitativas hechas en nuestro país en torno al aspecto multifacético de las creencias de los estudiantes, particularmente en el nivel secundaria.

El rol que juegan las creencias sobre la matemática, su enseñanza y su aprendizaje en la motivación de los estudiantes, parece ser determinante en el rendimiento académico.

En varias de las investigaciones consultadas, los autores consideran que el hecho de conocer las especificidades sobre los factores del dominio afectivo de los estudiantes puede ayudar a generar pautas de referencia para la mejora de las condiciones en el salón de matemáticas y coadyuvar con éstas a que la práctica de los profesores use a su favor las necesidades, metas y creencias de los estudiantes para mejorar el aprendizaje de la matemática.

Es necesario que los estudios de corte cognitivo sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática se complementen con estudios sobre el dominio afectivo, para que juntos ofrezcan alternativas de solución a los problemas, que sean más cercanas a la realidad del aula.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Chiu, M., & Xihua, Z. (2008). Family and motivation effects on mathematics achievement: Analyses of students in 41 countries. *Learning and Instruction* 18(4), 321-336.

Gil, N., Guerrero, E., & Blanco, L. (2006). El dominio afectivo en el aprendizaje de las Matemáticas. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology* 4(8), 47-72.

Gómez, I. (2005). *Motivar a los alumnos de secundaria para hacer matemáticas. Matemáticas: Pisa en la práctica*. Curso de formación de Profesores. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Guerrero, E., Blanco, L. y Castro, F. (2001). Trastornos emocionales ante la educación matemática. En J. N. García (Coord.): *Aplicaciones de Intervención Psicopedagógica*. Madrid: Pirámide, 229-237.

Hannula, M. (2004). *Regulating motivation in mathematics.* A paper presented at the Topic Study Group 24 of ICME-10 conference. Disponible en: http://www.icme-organisers.dk/tsg24/Documents/Hannula.doc

Hannula, M. (2006). Motivation in mathematics: Goals reflected in emotions. *Educational Studies in Mathematics* 63(2), 165-178.

Jäder, J., Sidenvall, J., & Sumpter, L. (2017). Students' mathematical reasoning and beliefs in non-routine task solving. *International Journal of Science and Mathematics Education* 15(4), 759-776.

Nieto, L., Carrasco, A., Piedehierro A., Barona E., & Gómez, R. (2010). El Dominio afectivo en la Enseñanza/Aprendizaje de las Matemáticas. Una revisión de investigaciones locales. Campo Abierto. *Revista de Educación* 29(1), 13-31.

Martínez, O. (2005). Dominio afectivo en educación matemática. *Paradigma* XXIV(2), 7-34.

Ryan, R., & Deci, E. (2000). Self-determination theory and the facilitation of intrinsic motivation, social development, and well-being. *American psychologist* 55(1), 68.

Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

ALGUNAS INVESTIGACIONES SOBRE ARGUMENTACIÓN MATEMÁTICA

Melby Cetina-Vázquez
Universidad Autónoma de Guerrero.melby_gcv@hotmail.com

Guadalupe Cabañas-Sánchez
Universidad Autónoma de Guerrero.gcabanas.sanchez@gmail.com

Resumen

Este documento presenta los avances de una investigación cuyo objetivo es caracterizar los argumentos formales e informales suscitados en el salón de clases de matemáticas de sexto y noveno grado de la educación básica. La discusión se concentra en algunos estudios realizados en los últimos once años en matemática educativa sobre la argumentación matemática. La revisión de literatura reflejó que en los primeros años del nivel básico poco se ha analizado sobre la argumentación matemática, y aún menos los que discuten sobre la argumentación informal e informal en dicho nivel educativo. Es ahí donde la pertinencia del desarrollo de la investigación objetivo se sustenta.

Palabras clave: Argumentación matemática, argumentación colectiva, dualidad de la argumentación matemática.

1. INTRODUCCIÓN

Gran cantidad de currículos escolares plantean la idea de que la educación matemática debe contribuir a la formación de ciudadanos reflexivos, críticos y con capacidad de análisis y argumentación (Goizueta y Planas, 2013). La argumentación matemática debe fomentarse como núcleo de las actividades matemáticas de los estudiantes en el aula de clase (Yeckel, 2002). En esa dirección, y al interés tanto de investigadores como de profesores, se han realizado varios estudios con el fin de brindar elementos de cómo los estudiantes pueden aprender a hacerlo; así como de otros aspectos que conlleva su análisis.

En ese sentido, este documento tiene como objetivo presentar algunos trabajos realizados en los últimos once años en matemática educativa sobre la argumentación matemática. Con el fin de ser sustento de una investigación que se plantea caracterizar los argumentos formales e informales suscitados en el salón de clases de matemáticas de sexto y noveno grado de la educación básica.

2. TRABAJOS SOBRE ARGUMENTACIÓN MATEMÁTICA

En la investigación en Educación Matemática uno de los modelos usados para examinar la argumentación que se produce dentro de las clases de matemáticas es el propuesto por Toulmin (1958, 2003), que está constituido por datos, garantía, conclusión, cualificador modal, refutación y soporte. En la Figura 1 se muestra el modelo argumentativo de Toulmin, donde se pueden observar las conexiones entre sus componentes.

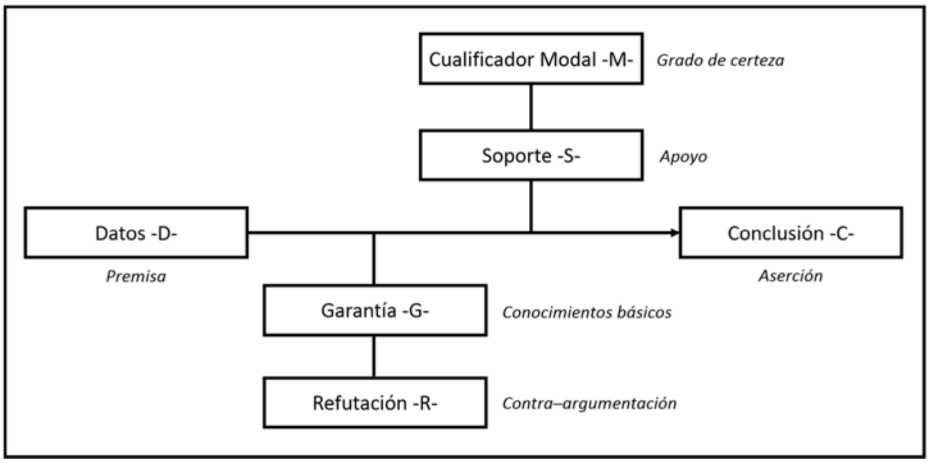


Figura1. Modelo del argumento de Toulmin.

La argumentación, desde la perspectiva de Toulmin (1958), queda entendida como un proceso secuencial que permite inferir conclusiones a partir de ciertas premisas, implicando un movimiento comunicativo interactivo entre personas. El argumento, por su parte, se concibe como una secuencia de afirmaciones y razones vinculadas entre sí que, entre ellas, establecen el contenido y la fuerza de la posición de un interlocutor en particular, que está discutiendo.

3. ESTUDIOS SOBRE LA ESTRUCTURA Y EL CONTENIDO DE LOS ARGUMENTOS

Bajo este panorama, de análisis con el modelo de Toulmin (1958/2003), algunas investigaciones se han centrado en estudiar la estructura de los argumentos. Un ejemplo es Inglis, Mejía-Ramos y Simpson (2007) que demostraron el valor de examinar una parte fundamental de este modelo (el cualificador modal) y categorizaron algunas de las diferentes formas de argumentación utilizadas por estudiantes de gran talento de investigación matemáticas, en su resolución de tareas con contextos realistas. Entre los resultados se destacó que los cualificadores modales juegan un papel importante y no reconocido previamente en la argumentación matemática.

También, resalta que uno de los objetivos de la instrucción debe ser el desarrollo de habilidades en los estudiantes para que coincidan adecuadamente los tipos de garantías con los cualificadores modales. Debido a que este emparejamiento conlleva a asegurar que los estudiantes cualifiquen este tipo de garantías (razonamiento inductivo/intuitivo o deductivo/axiomático) de forma apropiada.

Por otra parte, en Reid, Knipping y Crosby (2011) se reportaron las formas de refutar *argumentos* por estudiantes de primaria superior y de secundaria al resolver problemas geométricos. Se evidenciaron cuatro maneras de refutar: 1) refutación de una conclusión implícita por una pregunta; 2) refutación de la suficiencia de una orden, mientras que hay la aceptación de los datos y de la conclusión; 3) refutación de la pertinencia de los datos ofrecidos en apoyo a una conclusión, y; 4) una refutación compleja. Estos tipos de refutaciones dieron pauta de algunos consejos sobre la lógica aceptada del maestro. Los consejos representan ser de valor para los estudiantes que están aprendiendo a cambiar de argumentos cotidianos a argumentos matemáticos, así como para investigadores interesados en este proceso. También admitieron una visión de la enseñanza de la práctica de refutaciones, pues en algunos casos se confrontaron las conclusiones hechas con contrajemplos; y en otros casos se reveló a un maestro confiar en su autoridad como un medio de impugnación. Este tipo de investigaciones permite dar un panorama de la práctica real de la enseñanza de la prueba.

4. ESTUDIOS CON UNA MIRADA COGNITIVA

Otro tipo de estudios sobre argumentación matemática se centra en reconocer la relación entre el contenido y la estructura de argumentos desde un punto de vista cognitivo. Un ejemplo es Pedemonte (2007), quien puso de relieve la importancia del análisis estructural entre la argumentación y la prueba. Metodológicamente usó el modelo de Toulmin combinado con el modelo cK¢ de Balacheff y Margolinas (2005). Este último modelo lo utilizó para detectar y analizar la estructura de una argumentación que soporta una conjetura (abducción, inducción, etc.) y la estructura de su prueba. El experimento lo llevó a cabo en la enseñanza de algunas clases tradicionales, grados 12 y 13, en Francia e Italia; el instrumento consistió en problemas geométricos. Como evidencia obtuvo que aunque hay casos claros de continuidad entre la argumentación que soporta una conjetura y su prueba, a menudo hay una distancia estructural entre los dos (de una argumentación abductiva a una prueba deductiva, de una argumentación inductiva a una prueba matemática inductiva).

En cambio, Martínez y Pedemonte (2014) analizaron cognitivamente la *relación entre* el proceso de la argumentación que conduce a la construcción de una conjetura y su demostración algebraica al resolver problemas de Álgebra. La investigación se desarrolló con nueve estudiantes de noveno/décimo grado. Se observó: 1) una distancia tanto en el sistema de referencia y en la estructura entre argumentación y prueba; 2) que al mirar a través de los problemas, las argumentaciones correspondientes se construyeron de forma inductiva con una fuerte presencia del campo de la aritmética, es decir, la conjetura se construye en la aritmética con ejemplos numéricos; 3) que todos los estudiantes comenzaron el argumento puramente en aritmética, pasando por los pasos que integran tanto la aritmética y el álgebra, salvando a los últimos pasos cuando utilizaron sólo el álgebra; y, 4) que el elemento de puente entre la argumentación inductiva en aritmética y prueba deductiva en álgebra es la coexistencia de la aritmética y el álgebra en el respaldo de los argumentos dentro de la argumentación.

4.1. Estudios sobre la dualidad de los argumentos matemáticos

De manera general, en matemática educativa hay investigaciones centradas en abordar la dualidad de las matemáticas, etiquetado por ejemplo como lo informal y formal. El estudio de esta dualidad se ha hecho presente desde diferentes líneas, por ejemplo en el lenguaje hablado (Barwell, 2015), en el conocimiento matemático (Zandieha & Rasmussen, 2010) y en el razonamiento matemático (Viholainen, 2005).

En dirección al estudio de argumentos, esa dualidad se ha hecho presente como: argumento inductivo y prueba deductiva (Martínez y Pedemonte, 2014); argumento intuitivo y axiomático (Inglis, Mejía-Ramos y Simpson, 2007); argumento cotidiano y matemático (Reid, Knipping y Crosby, 2011); argumento informal y formal (Viholainen, 2005), por mencionar algunos. Los primeros tres trabajos ya han sido presentados en el cuerpo de este documento, por lo que únicamente se muestra en esta sección el de Viholainen (2005), quien indagó sobre la *relación entre el* razonamiento informal y formal de las matemáticas, para el caso de la derivada. Estableció lo que concibió como argumento informal y formal, pues fue la base para diferenciar y relacionar los tipos de razonamiento estudiados. Entrevistó a dos estudiantes universitarios que se especializaban en matemáticas, mientras resolvían tareas sobre la derivada y la diferenciabiliad de funciones reales de una variable. Los resultados revelaron que estos estudiantes entendían las interpretaciones informales de la derivada y el cociente de diferencias, pero tenían dificultades para comprender el significado visual del proceso de límite del cociente de diferencias. En lo que respecta al uso del razonamiento informal y formal, uno tendió a usar más el razonamiento informal y lo utilizó simultáneamente con el razonamiento formal. El otro, por su parte, usó con más frecuencia el razonamiento formal pero lo hizo a menudo por separado del razonamiento informal.

4.2. Estudios basados en la argumentación colectiva

Los trabajos anteriores (Inglis, Mejía-Ramos y Simpson, 2007; Reid, Knipping y Crosby, 2011; Pedemonte 2007; Martínez y Pedemonte; 2014; Viholainen, 2005) se pueden categorizar como investigaciones donde el interés se centra en el argumento que hace la población objetivo de forma individual. Hay otras investigaciones cuyo fin es examinar los aspectos matemáticos (sobre todo de las conversaciones en el aula), desde una mirada en colectivo. Para ello, se hace uso de un constructo denominado argumentación colectiva, que en el sentido de Yackel (2002) es una construcción para el análisis de la naturaleza de actividad dentro de las clases de matemáticas que se caracterizan por la resolución de problemas y la colaboración de discusiones de toda la clase. Este constructo fue usado por Krummheuer (1955) por primera vez para referirse a cuando dos o más individuos interactúan para establecer (o intentar establecer) una aseveración.

Investigaciones que se ubican en esta última categoría han caracterizado los *diferentes tipos* de razonamiento en la argumentación colectiva en estudiantes de noveno grado (e. g. Conner, Singletary, Smith, Wagner & Francisco, 2014), con el objetivo de informar cómo los estudiantes se involucran en la generación y el examen de hipótesis usando razonamientos inductivo y abductivo y avanzar hacia el razonamiento deductivo requerido para la prueba. Para su análisis combinaron regla, caso y resultado de Peirce (1956) y el modelo argumentativo de Toulmin (1958). Su intención fue que los profesores de matemáticas puedan basarse en la comprensión de estos tipos de razonamientos para apoyar a los estudiantes en el razonamiento de manera productiva.

Otra, como Krummheuer (2007), adoptó la hipótesis de que el aprendizaje de las matemáticas depende de la participación de los estudiantes en el proceso de argumentación colectiva. Con base en ello, combinó la teoría de la argumentación de Toulmin (1958) y la idea de Goffman (1981) de la descomposición de la función del hablante, a fin de reconstruir los diferentes grados de autonomía de estudiantes de primer grado en los procesos de participación y argumentación colectiva. Evidenció que la argumentación se hace presente como una cadena de argumentos, donde la conclusión de uno representa los datos del siguiente estudiante, así sucesivamente. También, presentó observaciones sobre las consecuencias para la mejora de la enseñanza de las matemáticas y de la formación del profesorado en el ámbito universitario.

4.3. Estudios sobre el profesor

En la investigación sobre la argumentación matemática, poco se ha observado o estudiado al profesor. En esta sección son dos los trabajos referenciados, cabe resaltar que los análisis metodológicos de estos estudios no se basaron en el modelo argumentativo de Toulmin, ello debido a que sus objetivos en sí se enfocaron en la práctica argumentativa.

En De Gamboa, Planas y Edo (2010) se presenta un estudio exploratorio realizado a un grupo de futuros maestros de Educación Primaria en el segundo curso de su formación universitaria. El objetivo fue *identificar prácticas de argumentos* en la resolución escrita de actividades matemáticas y *explorar la diversidad de interpretaciones sobre la noción de argumentación matemática*. El estudio permitió: identificar carencias importantes en contenidos conceptuales y procedimientos básicos; y dificultades prácticas y de interpretación en torno a la argumentación matemática. Las carencias reflejadas en los profesores en formación inicial fueron de tres tipos: 1) confusión práctica entre distintos tipos de razonamiento, concretamente entre argumentación y explicación; 2) dificultad para plantear preguntas que requieren argumentación; y 3) confusión teórica entre distintos tipos de razonamientos, concretamente entre explicaciones, argumentación y demostración.

Otro estudio (Homero, 2007) se centró en las prácticas argumentativas de dos profesores de bachillerato en activo. Utilizó actividades geométricas de construcción y validación en un ambiente de geometría dinámica. Se hizo a través de un experimento de enseñanza, el cual permitió mostrar el desarrollo de los participantes en cuanto a sus *esquemas de argumentación y sus prácticas argumentativas*. Para el análisis se retomó y adecuó la clasificación de las prácticas argumentativas de Harel y Sowder (1998). Se evidenció que los esquemas de argumentación que utilizaron los profesores son fundamentalmente fácticos y empíricos y que tendieron, con la práctica, a la discusión y la reflexión que ésta provoca, a volverse analíticos. La actividad que se desarrolló alrededor de la demostración, apoyada por la reflexión grupal e individual, permitió que los profesores reconsideren aquellos argumentos que les permiten construir exitosamente la justificación.

5. CONCLUSIONES

En Matemática Educativa, el estudio de la argumentación se ha analizado desde diferentes vertientes. Por ejemplo, en los últimos once años se han registrado trabajos sobre el análisis: de su

ISSN: 2594-1046

estructura y contenido; de su relación estructural entre la argumentación y la prueba; de su dualidad; de las prácticas argumentativas, etc. Sin embargo, la revisión hecha a la literatura especializada evidenció que:

- hay pocos estudios enfocados en indagar procesos de argumentación matemática con estudiantes de los primeros años de la escuela básica, y aún menos de analizar la dualidad de los argumentos en dicho nivel educativo.
- hay poca investigación centrada en el profesor de matemáticas. Y es que De Gamboa, Planas y Edo (2010) evidencian una carencia de los profesores en formación sobre la interpretación y el uso de la argumentación matemática. Por lo que alientan a realizar trabajos sobre el conocimiento matemático de los futuros profesores con estudios empíricos en aulas de matemáticas de distintos niveles.
- son necesarios estudios que analicen (en conjunto) el uso que maestros y alumnos están haciendo de la argumentación matemática en el aula de clase, pues hasta el momento son pocas las investigaciones centradas en observar los papeles que estos dos agentes tienen en la práctica de argumentación.

Es en la conjunción de estos tres aspectos, que la pertinencia del desarrollo de la investigación objetivo se sustenta.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barwell, R. (2015). Formal and informal mathematical discourses: Bakhtin and Vygotsky, dialogue and dialectic. *Educational Studies in Mathematics*, doi: 10.1007/s10649-015-9641-z

Conner, A., Singletary, L., Smith, R., Wagner, P., & Francisco, R. (2014). Identifying Kinds of Reasoning in Collective Argumentation. *Mathematical Thinking and Learning,* 16 (3), 181–200. doi: 10.1080/10986065.2014.921131

De Gamboa, G., Planas, N., y Edo, M. (2010). Argumentación matemática: prácticas escritas e interpretaciones. Revista *SUMA* 64, 35-44. Recuperado de http://pagines.uab.cat/nuria_planas/sites/pagines.uab.cat.nuria_planas/files/SUMA_ArgumentacionMatematica_PROTEGIDO.pdf

Goizueta, M., y Planas, N. (2013). Temas emergentes del análisis de interpretaciones del profesorado sobre la argumentación en clase de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias* 31(1), 61-78.

Homero, A. (2007). Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato. *Educación Matemática* 19(1), 63-98. SNN: 1665-5826

Inglis, M., Mejía-Ramos, J., & Simpson, A. (2007). Modelling Mathematical Argumentation: The Importance of Qualification. *Educational Studies in Mathematics* 66(1), 3-21. doi:10.1007/s10649-006-9059-8

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), T*he emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229–269). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom. Two episodes and related theoretical abductions. *Journal of Mathematical Behavior* 26 (1), 60–82. doi:10.1016/j.jmathb.2007.02.001

Martínez, M., & Pedemonte, B. (2014). Relationship between inductive arithmetic argumentation and deductive algebraic proof. *Educational Studies in Mathematics* 86(1), 125-149. doi:10.1007/s10649-013-9530-2

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics* 66(1), 23–41. doi:10.1007/s10649-006-9057-x

Reid, D., Knipping, C., & Crosby, M. (2011). Refutations and the logic of practice. *PNA* 6(1), 1-10. Recuperado de http://hdl.handle.net/10481/16011

Toulmin, S. (1958). *The uses of argument*. Cambridge, England: Cambridge University Press.

Toulmin, S. E. (2003). *The uses of argument* (Updat; 2; 2nd; ed.). Cambridge, U. K: Cambridge University Press.

Viholainen, A. (2005). Relationship*s between informal and formal reasoning in the subject of derivative. In M. Bosch (Ed.), Proceedings of the 4 Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 1811–1820). Sant Feliu de Guixols, Spain.

Yackel, E. (2002). What we can learn from analyzing the teacher's role in collective argumentation? *Journal of Mathematical Behavior* 21(4), 423-440. doi:10.1016/S0732-3123(02)00143-8

Zandieha, M., & Rasmussen, C. (2010). Defining as a mathematical activity: A framework for characterizing progress from informal to more formal ways of reasoning. *Journal of Mathematical Behavior* 29, 57–75. doi:10.1016/j.jmathb.2010.01.001

Investigación e Innovación en Matemática Educativa
ISSN: 2594-1046

MARCO BIBLIOGRÁFICO PARA UN ESTUDIO SOBRE EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA

María Antonieta Rodríguez Ibarra
CINVESTAV-IPN. México. maria.rodriguez@cinvestav.mx
Gisela Montiel Espinosa
CINVESTAV-IPN. México. gmontiele@cinvestav.mx

Resumen

Como parte inicial de la investigación doctoral para estudiar el desarrollo del pensamiento geométrico de profesores de secundaria, se realiza una revisión bibliográfica de aquellos autores que hayan abordado estudios con profesores de matemáticas o que hayan investigado acerca de la problemática sobre el aprendizaje y/o enseñanza de la geometría escolar. En el siguiente documento se muestra el avance de las revisiones alrededor del desarrollo del pensamiento geométrico. El objetivo de esta revisión es contar con un marco bibliográfico alrededor de nuestro tema de interés.

Palabras clave: Revisión bibliográfica, Desarrollo profesional docente, pensamiento geométrico, escuela secundaria.

1. INTRODUCCIÓN

Qué enseñar, para qué enseñar y cómo enseñar han sido cuestionamientos y preocupaciones constantes de la institución llamada escuela. Estas preguntas también toman sentido cuando son expresadas para el caso del conocimiento matemático y de la misma manera continúan siendo válidas si son reformuladas para el caso del conocimiento geométrico: ¿Cuáles deben ser las prácticas de los profesores y qué es lo que deben enseñar para lograr el desarrollo del pensamiento geométrico en los estudiantes?

Las respuestas que se dan a estas preguntas dependen de muchos factores: en ocasiones de la necesidad de acoplarse a los enfoques de alguna reforma, en otras, el diseño de los currículos escolares se ve influenciado por factores sociales, por el conocimiento que los diseñadores tengan de la disciplina, por los materiales de apoyo con los que se cuenten, con la propia preparación de los profesores, etc.

En este contexto de incesantes y profundos cambios, es natural cuestionarse, ¿Cómo incorporar dichos elementos de forma tal que resulten efectivos y eficaces para el aprendizaje de los estudiantes?, ¿Cuál es la mejor manera de enseñar?, ¿Cuál es el rol que se le debe asignar al profesor y cuál a los estudiantes? A la luz de esos cambios, ¿Se ha modificado lo que significa aprender geometría?

Dentro del currículo escolar mexicano, el estudio de la geometría se presenta desde edades tempranas. Principia en el primer tramo de la educación básica, que abarca desde preescolar a secundaria, iniciando sus estudios a los 4 años y culminándolos a los 15 años, aproximadamente. Al ser una parte de las Matemáticas presente en gran parte del currículo escolar, se esperaría que estudiantes que han cursado el nivel básico y medio superior, hayan desarrollado un pensamiento geométrico apropiado para resolver problemas acordes a su nivel.

Identificamos que, dada la diversidad de factores que afectan su práctica profesional, el docente no ha logrado modificar el enfoque de enseñanza basado en el dominio de contenidos, principalmente referido a definiciones y algoritmos. Nuestra hipótesis apunta hacia la falta de experiencias que le permitan a él mismo contrastar este enfoque con uno que promueva el desarrollo del pensamiento geométrico, empezando por comprender a qué se refiere la investigación por desarrollar el pensamiento matemático, en general, y geométrico en particular; y cómo éste resulta fundamental en la formación matemática del estudiante.

A diferencia de lo que sucede con perspectivas como *pensamiento algebraico*, *pensamiento variacional* o *pensamiento trigonométrico*, para los cuales es posible encontrar algunas caracterizaciones y/o acercamientos en la literatura de la especialidad, para el pensamiento geométrico aparecen una serie de nociones en las que concurren acercamientos realizados desde la investigación sobre el aprendizaje, la enseñanza, los procesos cognitivos, aquellos que intentan generar modelos teóricos, etc., sin que sea posible encontrar (al menos en la revisión bibliográfica efectuada) una caracterización de lo que es el pensamiento geométrico.

A pesar de la abundante investigación que existe en la disciplina, identificamos que todavía no se ha llegado a caracterizar con precisión cómo se desarrolla el pensamiento geométrico. En este sentido, nos interesa iniciar la búsqueda de elementos para configurar una postura argumentada que lo caracterice y nos permita diseñar escenarios de interacción con profesores.

Nos hemos planteado dos preguntas orientadoras de la revisión bibliográfica:

Considerando los resultados de investigación, clásicos y relacionados con el uso de la tecnología, ¿Cómo se caracteriza hoy al pensamiento geométrico?

ISSN: 2594-1046

¿Qué se estudia y qué resultados se tienen sobre el desarrollo profesional docente, en particular el relacionado con los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la Geometría?

2. ESTRATEGIA DE BÚSQUEDA Y REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

Actualmente se realiza la revisión bibliográfica que servirá para refinar nuestro planteamiento de investigación, enmarcarlo en alguna tendencia y situar su aportación a la disciplina. Se recabaron distintas investigaciones que abordan estudios con profesores e investigaciones sobre el pensamiento geométrico. Se tomaron éstas dos como las categorías principales para la búsqueda; cada una tiene a su vez subcategorías, las cuales se muestran en la Figura 1.

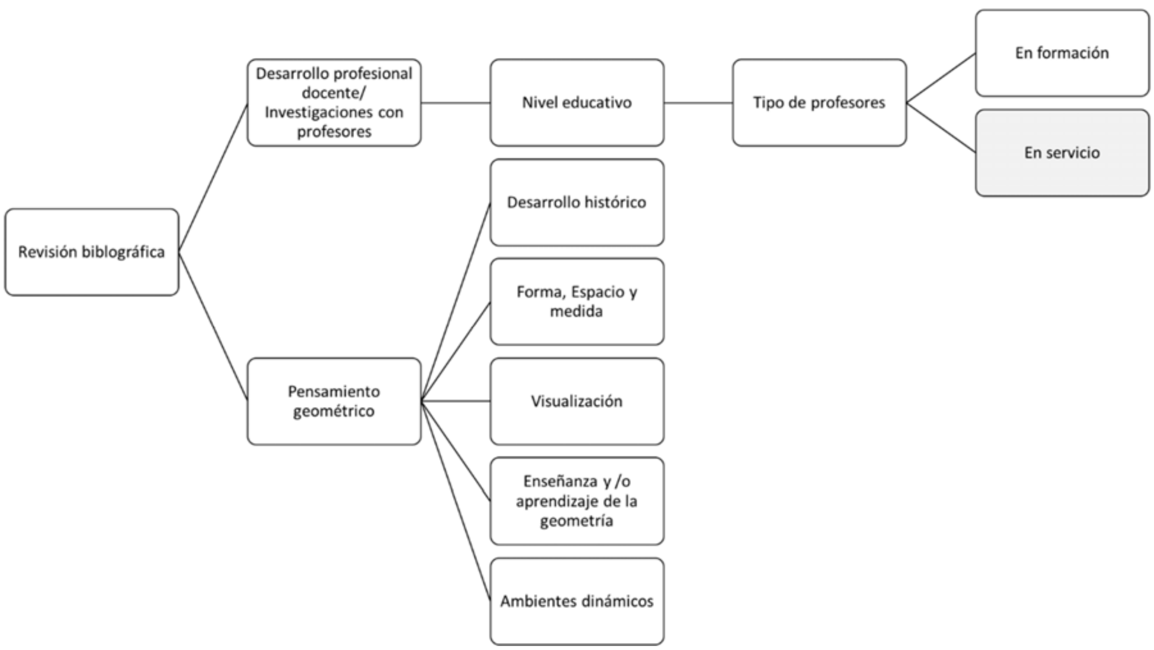


Figura 1: Esquema de las categorías de clasificación de la revisión bibliográfica

Las categorías mostradas a continuación no son excluyentes, es decir, dada nuestra segunda pregunta orientadora en la revisión, es de principal interés aquellas investigaciones que contemplen intersecciones entre las categorías.

Dentro de las investigaciones o estudios del pensamiento geométrico nos interesan particularmente aquellos relacionados con los contenidos matemáticos presentes en el currículo de la escuela secundaria mexicana, sobre todo los que tengan que ver con geometría, es por eso que se incluyó la subcategoría de *Forma, Espacio y Medida*, que es uno de los tres ejes temáticos en los que está organizado dicho currículo. La intención de dividir la matemática de la educación básica en ejes temáticos es trabajar de manera integradora y no segmentada en donde se asigne el mayor peso a los contenidos matemáticos. En particular en esta categoría clasificaremos aquellos estudios que estén relacionados con habilidad e imaginación espacial, razonamiento deductivo.

3. AVANCES EN LA REVISIÓN

A continuación, mostramos los avances de la revisión bibliográfica atendiendo por el momento únicamente a la categoría del pensamiento geométrico haciendo explícitas las subcategorías que se consideraron.

3.1. Investigaciones acerca del Pensamiento Geométrico.

Un referente clásico en nuestra disciplina, tanto para hacer investigación como para el diseño didáctico, es la teoría que desarrollaron los profesores holandeses Dina Van Hiele-Geldof y Pierre Van Hiele sobre el *razonamiento geométrico*. En ella se incluye un apartado instructivo, el cual sugiere al profesor una manera en que los alumnos pueden desarrollar su razonamiento geométrico a partir de un método descriptivo que se conoce como *los niveles de Van Hiele*.

En esta teoría se establece un primer nivel donde los alumnos perciben a las figuras geométricas por su forma y no por sus propiedades. En el segundo, los alumnos son conscientes de que las figuras geométricas están formadas por partes y que poseen propiedades matemáticas. En el tercer nivel, los alumnos empiezan a desarrollar su capacidad de razonar matemáticamente, por ejemplo, hacen razonamientos deductivos y comprenden el significado de una definición. En el cuarto nivel, los alumnos pueden realizar razonamientos lógicos formales; las demostraciones de varios pasos ya tienen sentido para ellos y aceptan su necesidad como único medio para verificar la veracidad de una afirmación. En el quinto y último nivel, los alumnos son capaces de trabajar en distintos sistemas axiomáticos prescindiendo de cualquier soporte concreto para desarrollar su actividad matemática.

Afonso (2003) reporta en su tesis doctoral el tipo de estudios que se han realizado alrededor de los niveles de razonamiento de Van Hiele y las agrupa de la siguiente manera: investigaciones dirigidas a confirmar si los niveles de Van Hiele describen exactamente el pensamiento geométrico de los alumnos; aquellas que estudian la continuidad o discretitud del modelo; investigaciones acerca de la globalidad de todos los niveles en todos los conceptos geométricos: otras que tratan de la jerarquía y secuencialidad de los niveles; estudios dedicados a determinar en qué niveles se ha venido realizando habitualmente la enseñanza-aprendizaje de la geometría, así como la presentación de la misma en diferentes libros de texto y, por último, investigaciones sobre la existencia única de los cinco niveles.

La mayoría de las investigaciones que reporta Afonso (2003) se realizaron en la década de los ochenta. La autora comenta que el modelo se publicó a mitad de la década de los 50 y fue tal su impacto que a partir de los años 60 la unión soviética lo tomó como base para el diseño del nuevo currículo de matemáticas, pero fue hasta los 70`s que comenzó su difusión y uso en el mundo occidental.

La geometría ha formado parte siempre de la matemática escolar, sin embargo, al igual que otros contenidos curriculares, ha sufrido modificaciones a lo largo del tiempo. En este sentido se señala que se ha priorizado la enseñanza de la geometría analítica, haciendo uso de herramientas algebraicas y dejando de lado la visualización de objetos geométricos y sus propiedades y es este aporte visual lo que añade a la geometría un factor que no se debe descuidar sobre todo en la resolución de problemas (Mammana y Villani, 1998).

Estos autores también mencionan que la enseñanza de la geometría de hoy oscila entre el aspecto visual, computacional, algebraico y sus aplicaciones, son estas maneras de ver a la geometría las que debieran tener un impacto en el aula en los distintos niveles escolares. Han existido momentos de gran aprecio por la enseñanza de la geometría, pero en contraparte también han existido momentos de gran rechazo. En aquellos países donde el currículo escolar mantiene contenidos geométricos formales, este hecho parece obedecer más al deseo de conservar una tradición que al reconocimiento de la importancia de su estudio como fuente del desarrollo cognitivo de los estudiantes.

Otro enfoque de investigación son los Paradigmas geométricos y los Espacios de Trabajo Geométrico (ETG), acercamientos encabezados principalmente por Houdement y Kuzniak (2004). Los autores plantean de tres tipos de geometrías o paradigmas geométricos:

- La Geometría natural (GI) en donde los objetos son materiales, se recurre a la intuición como argumento y la validación es empírica por confrontación de la realidad, por ejemplo, el ángulo ABC es recto porque lo veo o porque usé el transportador para medirlo;
- La Geometría axiomática natural (GII) donde se trabaja con objetos ideales y es aquí donde surge la necesidad de contar con definiciones, teoremas, etc. Se apoya fuertemente en la GI y considera como base la geometría euclidiana, en GII la manera

de producir conocimiento es por medio de un sistema deductivo que se basa esencialmente en la demostración; y

- La Geometría axiomática formalista (GIII), al igual que en la GII sus objetos son ideales, este paradigma emerge con el nacimiento de las geometrías no euclidianas.

A diferencia de los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele, estos paradigmas no son jerarquizables, es decir, dependiendo del tipo de actividad que la persona realice puede pasar de GI a GII o de GII a GI, por ejemplo.

Los ETG se definen como el ambiente en el cual se concibe la reflexión, fruto de la interacción entre un individuo y los problemas geométricos, es un ambiente organizado por y para el geómetra (persona que se enfrenta a una tarea de geometría). En esta postura se consideran diferentes espacios de trabajo geométrico: de referencia, idóneo y personal. El de referencia está definido de manera ideal en función de criterios matemáticos. El idóneo son los espacios definidos en términos didácticos, de ahí que el usuario de este espacio es el profesor. Y el personal está definido por un geómetra, producto de la reflexión de los conocimientos aprendidos y los puestos en práctica, de acuerdo a sus conocimientos matemáticos.

De la Torre (2008) se plantea analizar cuatro libros de texto de la Escuela Obligatoria Secundaria en España (12 a 16 años) utilizando los paradigmas geométricos y los ETG. El objetivo de su análisis era ver el peso que se le asigna a geometría dentro del currículo para averiguar qué tipo de tratamiento le asignan; ver cómo se organizan los contenidos y ver si están articulados para ser comprendidos por los estudiantes. En los resultados de la investigación, el autor reporta que en los libros analizados se promueve utilizar los instrumentos de dibujo como una manera de hacer geometría, pero enseguida pide que se utilicen los teoremas para conseguir otros resultados (GII). El espacio de trabajo geométrico que se utiliza primero es casi siempre el ETG personal, con el dibujo correspondiente a los instrumentos de dibujo y el referente dado en GI. El referente teórico casi siempre es la GII, aunque parece que para iniciar el estudio de la geometría se hace utilizando la GI pero en ningún momento se trabaja con GIII.

Lundsgaard (1998) reporta la evolución que ha tenido la enseñanza de la Geometría, menciona, por ejemplo, que hace 75 años no se tenían los problemas que se tienen actualmente. Identifica que conforme las sociedades del conocimiento han ido progresando se cuenta con más contenidos que se pueden incorporar a las aulas, diferentes enfoques didácticos, nuevas maneras de enseñar, se advierte sobre los distintos tipos de aprendizajes, la incursión de las tecnologías tales como los softwares de geometría dinámica y diferentes aspectos que antes no se consideraban en una enseñanza tradicional.

En este sentido, en las primeras etapas escolares, Lundsgard (1998) sugiere enfrentar a los niños a problemas que involucren figuras geométricas básicas y sus propiedades. Al inicio, el estudio de la geometría euclidiana debería de ser informal y exploratoria, dejando la parte formal para grados más avanzados.

4. AMBIENTES DINÁMICOS

Un autor que ha desarrollado investigación acerca del aprendizaje, sobre todo en geometría, es Abraham Arcavi, quien menciona que hay ciertas características al trabajar en ambientes dinámicos que los profesores deben promover (Arcavi y Hadas, 2000), a continuación, las enunciamos.

La visualización: generalmente se refiere a la habilidad de representar, transformar, generar, comunicar, documentar, y reflejar una información visual (Hershkowitz, 1989, p. 75). Tal es así que es un componente crucial en el aprendizaje de los conceptos geométricos. Por otra parte, una imagen visual, en virtud de su concreción, es un factor esencial para crear la sensación de auto evidencia e inmediatez (Fischbein, 1987, p. 101).

La experimentación: además de la visualización, el desempeño con los ambientes dinámicos permite a los estudiantes aprender a experimentar, y “a apreciar la facilidad de obtener muchos ejemplos..., para buscar casos extremos, ejemplos adversos y de carácter no estereotipados” (Yerushalmy, 1993, p. 82).

El efecto sorpresa: es poco probable que los estudiantes encaucen fructíferamente su experimentación. Las actividades curriculares, tales como las situaciones problema, deben ser diseñadas de tal manera que los tipos de preguntas formuladas a los alumnos puedan jugar papeles significativos al plantearse en la profundidad e intensidad de un aprendizaje experimental. Un requerimiento significativo a los estudiantes, que puede acompañar a la experimentación, podría ser exigirles que hagan predicciones explícitas e inteligentes sobre un resultado de un cierto fenómeno o acción que estén a punto de abordar. Al realizar tales predicciones, haciéndolas explícitas, se alerta a los estudiantes para que sean más claros acerca de cómo prevén la situación en la que van a trabajar; orienta a los estudiantes a la posición de crear sus “propias predicciones” y así es probable que tengan más cuidado en lo que piensan sobre esto, y como consecuencia, se comprometan más

ISSN: 2594-1046

con la situación, y crea expectativas y motivaciones para la experimentación real. El reto es encontrar situaciones en las cuales el resultado de la actividad sea inesperado o contraintuitivo, de tal forma que la sorpresa (o el desconcierto) generada cree una clara diferencia con las predicciones explícitamente enunciadas. Éste puede ser el detonador para nutrir la propia necesidad de los estudiantes para reanalizar su conocimiento y predicciones, estableciendo oportunidades para lograr un aprendizaje significativo.

La retroalimentación: las sorpresas descritas anteriormente originan diferencias entre una expectativa explícita de una cierta acción y del resultado de esa acción.

Necesidad de pruebas y demostraciones**:** Dreyfus y Hadas (1996) discuten y ejemplifican cómo es posible usar en beneficio propio una acción en cada sorpresa del estudiante, a fin de que infunda y alimente la necesidad para la justificación y la prueba. Siguiendo una sorpresa, muchos estudiantes pueden requerir una prueba, o quizás no explícitamente, pero exige de otros o de ellos una respuesta a su "por qué"" (o el "por qué no").

5. VISUALIZACIÓN

En este apartado nos centraremos en la subcategoría de visualización mencionada por diversos autores, por considerar que ésta es fundamental para el desarrollo del pensamiento geométrico.

Duval (1998) menciona que "Enseñar geometría es más complejo y comúnmente menos exitoso que enseñar operaciones numéricas o álgebra elemental; entonces, ¿por qué enseñar geometría a todos los estudiantes? O más aún, ¿por qué enseñar geometría?" (p. 37).

Para dar respuesta a este tipo de cuestionamientos, Duval explica que se debe considerar la complejidad cognitiva de la actividad geométrica y que ésta considera tres procesos cognitivos que cumplen funciones epistemológicas específicas:

- Visualización: proceso de considerar las representaciones espaciales, las exploraciones heurísticas de una situación compleja y para ilustrar una proposición o enunciado.
- Construcción mediante herramientas: la construcción de configuraciones puede servir como modelo en el que la acción sobre los representantes y los resultados observados están relacionados con los objetos matemáticos que los representan

- *Razonamiento*: en su relación con los procesos discursivos para la extensión del conocimiento, para la demostración y explicación.

Los tres procesos se pueden trabajar de manera separada. De tal forma que la visualización no dependa de una construcción: hay acceso a las figuras, de cualquier manera que hayan sido construidas. Y aún si la construcción guía a la visualización, los procesos de construcción dependen sólo de las conexiones entre propiedades matemáticas y las restricciones técnicas de las herramientas usadas.

"La visualización generalmente se refiere a la habilidad de representar, transformar, generar, comunicar, documentar, y reflejar una información visual" (Hershkowitz, 1989, p. 75). Tal es así que es un componente crucial en el aprendizaje de los conceptos geométricos. Por otra parte, una imagen visual, en virtud de su concreción, es un factor esencial para crear la sensación de auto evidencia e inmediatez" (Fischbein, 1987, p. 101).

Zazkis, Dubinsky y Dautermann (1996) describen a la visualización como "el acto por el cual un individuo establece una fuerte conexión entre una construcción interna y algo cuyo acceso es adquirido a través de los sentidos" (p. 441). Mientras que Cantoral y Montiel (2002) mencionan que "la visualización no es una visión inmediata de las relaciones, sino una interpretación de lo que se presenta a nuestra contemplación que solamente podemos realizar eficazmente si hemos aprendido a leer adecuadamente el tipo de comunicación que la sustenta" (p. 2).

Durante los últimos años, en el campo de la Didáctica de las Matemáticas han aparecido teorías cognitivas cuyos conceptos básicos no tienen el mismo significado, a pesar de que utilizan terminología parecida; esto sucede con nociones como visualización, capacidad espacial, razonamiento geométrico, pensamiento espacial o visión espacial. Torregrosa (2007).

6. CONCLUSIONES

La revisión bibliográfica realizada nos permitió dar cuenta de que, si bien existe la necesidad de profundizar más, hay evidencia acerca de una problemática relacionada con la enseñanza y aprendizaje de la geometría en distintos niveles. Y aunque socialmente se acepta que es difícil aprender y enseñar matemáticas, asumimos que solamente la investigación en el campo de la Matemática Educativa podrá darnos los elementos para poder tomar acciones y decisiones con sustento en ese terreno.

Otro aspecto por señalar de la revisión es que se ha podido detectar cómo los diferentes enfoques teóricos se han planteado el problema de estudiar el razonamiento geométrico, estableciendo ya sea niveles, procesos o etapas que den indicios del razonamiento geométrico de las personas. Además, podemos detectar que a pesar de que los enfoques que se incluyeron en esta revisión centran su atención en el razonamiento o pensamiento geométrico, cada uno lo hace analizando diferentes aspectos; sin embargo, identificamos en común el importante papel que se le asigna a la interacción con la representación de los objetos geométricos.

Cabe señalar que el proceso de concreción de un marco bibliográfico sigue en proceso y se continuará con una revisión más especializada que contemple todas las categorías que nos proporcionen elementos necesarios que nos ayuden a dar respuesta las preguntas orientadoras de esta investigación.

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Afonso, M. (2003). *Los niveles de pensamiento geométrico de Van Hiele. Un estudio con profesores en ejercicio*. [Tesis Doctoral no publicada]. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de la Laguna. España.

Arcavi, A., & Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: An example of an approach. *International Journal of computers for Mathematical learning*, 5(1), 25-45.

Cantoral, R., y Montiel, G. (2002). Visualización y pensamiento matemático. Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point a view. In C. Mammana y V. Villani (Eds.). *Perspectives on the Teaching Geometry for the 21th Century.* Dordrecht/ Boston: Kluwer Academic Publishers. Pp. 37-52.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach*. New York / Boston / Dordrecht / London / Moscow: Kluwer Academic Publisher.

Houdement, C, & Kuzniak, A. (2000). Formation des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20(1). 89-116. Grenoble: Ed. La Pensée Sauvage.

Kuzniak, A. (2004). *Paradigmes et espaces de travail géométriques*. (Note pour l'habilitation à diriger des recherches). Paris, France: Institute de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques Paris VII.

Mammana, C., & Villani, V. (1998). Geometry and Geometry-Teaching through the ages. In C. Mammana y V. Villani (Eds.). *Perspectives on the Teaching Geometry for the 21th Century*. Dordrecht/ Boston: Kluwer Academic Publishers. Pp. 1-4.

Torregrosa, G. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en Geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 10(2), 275-300.

Yerushalmy, M. (1993). Generalization in geometry. In J. Schwartz, M. Yerushalmy & B. Wilson (Eds.), *The geometric supposer: What is it a case of?* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates. Pp. 57-84.

Zazkis, R., Dubinsky, E., & Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: A study of students' understanding of the group D4. *Journal for Research in Mathematics* Education, 27(4). 435-457.

Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

UN ACERCAMIENTO A LA MODELACIÓN PARA LA FORMACIÓN DE INGENIEROS Y EL USO DE CONOCIMIENTO TRIGONOMÉTRICO

Diana del Carmen Torres Corrales
CINVESTAV-IPN. México.diana.torres@cinvestav.mx

Gisela Montiel Espinosa
CINVESTAV-IPN. México.gmontiele@cinvestav.mx

Resumen

El presente escrito es un avance de investigación doctoral que se sitúa en el trabajo de laboratorio que realizan en la asignatura de Robótica los Ingenieros en Mecatrónica cuando hacen uso de la modelación y el conocimiento trigonométrico. En esta fase inicial se ha realizado un análisis documental sobre modelación (llamada también modelización) porque actualmente se cuenta con diversas perspectivas de ésta para estudiar fenómenos didácticos relativos a la enseñanza y al aprendizaje de la Matemática; algunas de las cuales, por su cercanía a la modelación matemática, son muy utilizadas para estudiar la matemática al servicio de la Ingeniería. El análisis documental, se ha considerado bajo ciertas categorías con el fin de perfilar una ruta para estudiar la modelación del Ingeniero en Mecatrónica: primero entender el estatus desde distintos enfoques de modelación, modelo y modelado; segundo identificar y analizar los esquemas o ciclos de modelación que se tienen, tercero conocer los tipos de escenarios que se generan en torno a la modelación y cuarto reconocer aquellos estudios situados en la Ingeniería.

Palabras clave: Modelación, Ingeniería, conocimiento trigonométrico.

1. INTRODUCCIÓN

La experiencia nos ha mostrado algunas dificultades que presentan los estudiantes para transitar de la Matemática a la Ingeniería, aplicando conocimientos de la primera a la segunda, lo cual ha permitido identificar distintas necesidades. Una de estas necesidades es la demanda de la propia Ingeniería: poner el conocimiento en uso, lo que requiere de contextos *reales* que permitan al estudiante dotarse de habilidades para la toma de decisiones en su futuro campo profesional.

Para Gravemeijer (2007) las dificultades que presentan los estudiantes pueden ser de distinta índole, por ejemplo, en términos de modelización matemática el estudiante requiere de cierto conocimiento de la situación de la realidad para poder modelarla y se podría pensar que cuando esto no se tiene, la modelización sería algo contraproducente para su aprendizaje. Sin embargo, el autor menciona que se cuenta con evidencia de que la modelización (vista desde la Teoría de la Instrucción de Dominio Específico para la Educación Matemática Realista, RME por sus siglas en inglés) intenta reducir este problema, propiciando en el estudiante que desde su propia actividad matemática informal (conocimiento previo) realice la modelización matemática.Lo anterior, permitirá desarrollarse gradualmente en un modelo para el razonamiento matemático más formal, esto es: el conocimiento en la experiencia del propio estudiante. De esta forma, la modelización matemática pasa de ser una estrategia informal a una entidad propia, ya que adquiere significado y ésta se formaliza.

En la perspectiva de Ulloa (2013), no existe modelación sin experimentación, de modo que el punto de partida de la modelación es la experimentación. La experimentación implica interacción con algún fenómeno para obtener datos (numéricos, gráficos, icónicos o físicos), es decir, la modelación concibe matemáticas en relación con algún fenómeno. La experimentación permite generar una experiencia para dar paso a la evolución de la práctica, esto es, prácticas del uso de las matemáticas a prácticas escolares (o viceversa) que devienen en prácticas científicas. La deconstrucción de las prácticas permite tener una experiencia de modelación que da habilidades para resolver problemas de su profesión; por tanto, la modelación es una práctica que al ejercerse involucra otras prácticas para la construcción de herramientas matemáticas, es una red de prácticas y herramientas matemáticas para analizar y predecir el comportamiento de un fenómeno.

Bajo las perspectivas descritas anteriormente, se considera pertinente la modelación matemática en la formación de estudiantes de Ingeniería, porque ésta puede propiciar experiencias que les permitan generar habilidades y competencias con acercamiento a la realidad de su futuro campo profesional, y de esta forma tener la capacidad de poner el conocimiento en uso para resolver problemas de su profesión.

2. PLANTEAMIENTO INICIAL DE INVESTIGACIÓN

La modelación en Ingeniería es una práctica imprescindible que permite a los estudiantes formarse en competencias propias de su disciplina y de manera relevante contribuye a evitar los costos de probar un diseño, una solución a una situación problema, o una intervención de mejora, sin la necesidad de implementarlo en la realidad; sino primero crear un modelo, probarlo/simularlo y asegurarse que no incurra en desperdicios, costos y peligro para el usuario o el sistema. La modelación que se ha descrito está en términos de Ingeniería, que llamaremos *trabajo de laboratorio* para no confundirla con la modelación desde la perspectiva teórica de la Matemática Educativa.

La literatura en Matemática Educativa reporta investigaciones de diseño experimental sobre Trigonometría escolar, principalmente en nivel medio superior (Jácome, 2011; Beltrán, 2012; Scholz, 2014), donde su mayor uso está en la Matemática. El estudiante que ingresa a un programa de Ingeniería estudia Trigonometría en asignaturas de Matemática, como reporta Torres (2014), en un diseño experimental. Pero en Ingeniería aplicada ¿Cuáles son los contextos donde se modela conocimiento trigonométrico?, ¿Logra tener un estatus de práctica, la modelación, en el trabajo de laboratorio de ingenieros cuando hacen uso de conocimiento trigonométrico?

De las distintas poblaciones de ingenieros que utilizan conocimiento trigonométrico se ha elegido a la comunidad de Ingenieros en Mecatrónica por la presencia del uso de dicho conocimiento de manera recurrente en diversas asignaturas de su formación profesional, con el fin de observar sus procesos de significación de la Matemática a través del trabajo en laboratorio que realizan en la escuela, de forma que se reconozcan argumentaciones (qué significa, cuándo emerge y para qué se utiliza) y usos (prácticas) que dan de la Trigonometría. En particular, se sitúa el estudio en el trabajo de laboratorio que se realiza en la asignatura de Robótica, misma que constituye una integración de conocimientos de Matemáticas, Física y asignaturas propias de la Mecatrónica que, desde nuestra perspectiva, podría ser un escenario ideal para estudiar dichos conocimientos en uso.

En esta fase inicial de investigación se ha formulado como hipótesis que, desde *lo geométrico*, visto como una forma de pensamiento, se provoca el *uso de conocimiento trigonométrico* en la modelación que realiza el Ingeniero en Mecatrónica al resolver problemas propios de la Robótica.

3. MARCO TEÓRICO

En estos momentos de la investigación, se ha considerado a la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) como el marco teórico propicio, ya que aporta conceptos y relaciones para proporcionar explicaciones sobre la construcción social del conocimiento matemático a estudiar. La distinción entre actividad humana y actividad matemática desplaza la centración en los conceptos como la parte central de la construcción de conocimiento matemático hacia las prácticas que implican hacer de las matemáticas una herramienta para modelar.

ISSN: 2594-1046

4. MÉTODO

Al configurar el anteproyecto de investigación doctoral, se dio a la tarea de realizar una búsqueda bibliográfica sobre modelación. En la búsqueda se identificaron estudios sobre qué es, puesta en la educación matemática y en la profesión de la Ingeniería; la modelación como herramienta y práctica del ingeniero, también como actividad humana y construcción social; las ventajas y beneficios de la modelación;las investigaciones donde se ha aplicado a la Ingeniería ,y finalmente, dificultades que se presentan al incorporarla al currículo del ingeniero.

Bajo esta indagación bibliográfica de inicio, se identificó que existen distintas formas de concebir a la modelación, la cual depende de la perspectiva teórica. También que ésta se encuentra definida de manera general como una forma de llevar a la escuela los contextos del mundo real. Y de manera más puntual, los estudios realizados sobre modelación, específicamente en Ingeniería, con el uso de conocimiento trigonométrico son escasos.

Como primera necesidad de este estudio, se vislumbra realizar un análisis documental sobre modelación, Mecatrónica, Robótica y currículo que se propone para situar y contextualizar el quehacer del ingeniero y su proceso formativo. Con base en ello, se propone un análisis de tipo etnográfico para el estudio del proceso formativo en dos momentos: el aula teórica y el laboratorio práctico; de forma que se reconozcan argumentaciones y usos (prácticas) de la Trigonometría. El presente avance atiende la búsqueda bibliográfica en la categoría de modelación (llamada también modelización) porque actualmente se cuenta con diversas perspectivas de ésta para estudiar fenómenos didácticos relativos a la enseñanza y al aprendizaje de la Matemática; algunas de las cuales por su cercanía a la modelación matemática, son muy utilizadas para estudiar la matemática al servicio de la Ingeniería.

Se realizó la búsqueda bibliográfica sobre modelación matemática, dando prioridad a documentos tales como: artículos científicos, libros especializados, capítulos de libro, extensos en memorias y tesis de posgrado. Para cada documento analizado, se enfatizó en identificar los siguientes elementos: objeto de estudio (problemática, interés), fundamento teórico (desde dónde lo estudia), método de recolección de datos y análisis de datos y finalmente su conclusión (revisando un recorrido por el estudio, aporte a la disciplina y nuevas preguntas). A continuación, se presenta una síntesis de la literatura asociada a modelación matemática que se ha considerado relevante hasta el momento.

5. STATUS DE MODELACIÓN, MODELO Y MODELADO

Un precursor de la modelización matemática es Henry Pollak, quien publica un estudio en 1969 sobre aplicaciones y modelos en educación matemática. Más tarde, en 1976, en la ICME-3 (International Congress on Mathematical Education), imparte una conferencia plenaria donde expone su postura, bajo la interrogante: ¿Cómo es una educación matemática completa?, es decir, ¿Qué es lo que deberían aprender los niños de las matemáticas?

Hay muchas disciplinas en las que se ha recurrido a la modelización, tales como la Física y la Química, además existen ramas de la Ingeniería y, más recientemente, algunas ramas de las ciencias sociales. Es un gran reto tomar las situaciones en su campo y tratar de entenderlas de forma cuantitativa y cualitativa, paso a paso, con el objetivo de explicar, predecir y pronosticar el futuro. La pregunta no es cuándo aparecieron o se comenzaron a construir los modelos, sino cuándo los educadores en matemáticas comenzaron a interesarse y a considerarlos importantes en la enseñanza de las matemáticas mismas. En el uso de las matemáticas se tiene que formular problemas de la realidad y dar solución a dichos problemas. De esta manera se da una ida y vuelta entre ambos escenarios, para entender la situación y las matemáticas mismas, a este proceso se le denomina modelización matemática (Pollak, 2007).

El uso de las matemáticas para resolver problemas del mundo real a menudo es llamado aplicación matemática, pero durante las últimas décadas se ha incorporado el tema de *aplicaciones y modelos*. La *modelización matemática* (ver Figura 1) significa llevar un problema del mundo real a un modelo matemático, y no sólo implica tomar un ejemplo de la realidad y presentarlo como un modelo, sino que representa un esquema donde intervienen dominios y actores (Blum, 2002).

El esquema anterior está constituido por dos partes. En primer lugar, una parte de antecedentes que perfilan un reto, es decir, un dilema o un problema que puede ser de una política, naturaleza práctica o intelectual, por sus siglas se llamará a esa parte *reto*. La segunda parte consiste en preguntas particulares que sirven con el fin de establecer claramente algunos aspectos cruciales del reto que merece que ser tratado en el *estudio*.

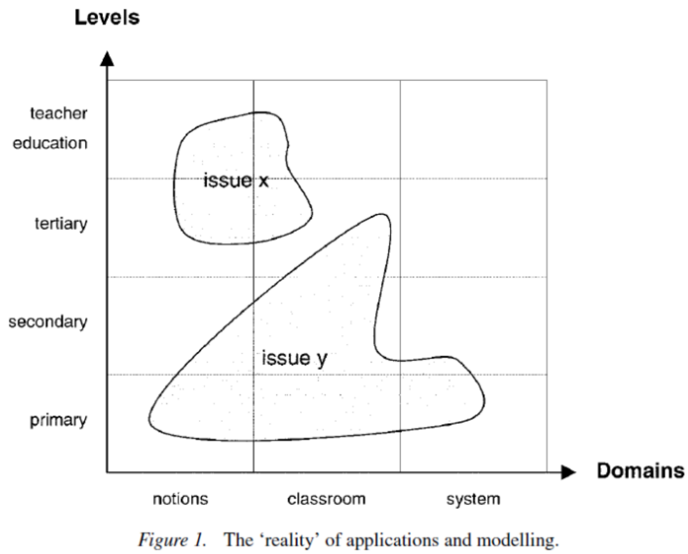


Figura 1. La realidad de aplicaciones y modelización, p. 156

Para Niss, Blum y Galbraith (2007), un modelo es una aplicación matemática implícita o explícita, el cual consiste en un dominio extramatemático (D) donde intervienen objetos, relaciones, fenómenos, suposiciones, preguntas, etc., los cuales se trasladan a un dominio matemático (M) donde se manipulan, interpretan y concluyen (ver Figura 2).

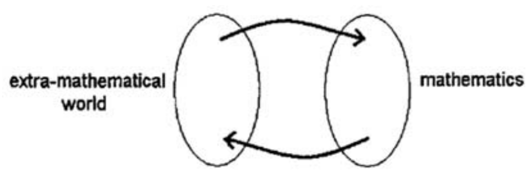


Figura 2. Matemáticas y el resto del mundo, p. 4.

Para los autores, la modelización matemática es un subproceso que conduce de una situación problema del mundo real a un modelo matemático, es decir, todo el proceso que consiste en estructuración, generación de hechos del mundo real y matematización de datos. También trabajar e interpretar matemáticamente y la validación (tal vez varias veces se repite el ciclo de modelización), por lo tanto, va en la dirección de *realidad- matemáticas*.

Arrieta (2003), Ulloa (2013) y Arrieta y Díaz (2015) caracterizan a la *modelación* como una práctica de articulación de dos entes, para actuar sobre uno de ellos, llamado lo *modelado*, a partir del otro, llamado *modelo*. Esta característica de diferentes prácticas de comunidades es lo que han llamado el acto de modelar. El acto de modelar es el acto de articular dos entidades con la intención de intervenir en una de ellas a partir de la otra, dando lugar a una nueva entidad. Con la finalidad de

ISSN: 2594-1046

caracterizar a las prácticas de modelación que se inscribe en diferentes comunidades, es que elaboramos el ente teórico llamado el acto de modelar. Es así que las prácticas de modelación son discriminadas por el acto de modelar (ver Figura 3).}

El interés de estos autores, por el estudio de las prácticas de modelación de diversas comunidades, responde a su intención por construir diseños de aprendizaje basados en estas prácticas y con posibilidades de incorporarlas al aula de matemáticas. Sin embargo, reconocen que la transferencia de las prácticas de comunidades a la escuela no consiste en tomar lo que hacen los profesionistas y reproducirlo en el aula, en tanto no es posible reproducir las intencionalidades de las comunidades en el aula, ni ejercer la modelación con las mismas herramientas, ni justificar su actuar con los mismos argumentos. Parte incluso de reconocer que las entidades sobre las que intervienen los profesionistas en el ejercicio de sus prácticas son diferentes a las entidades sobre las que se interviene en la escuela. Lo que sí se *trasporta* al aula es el acto de modelar, el cómo se han logrado construir los dipolos modélicos (Arrieta y Díaz, 2015).

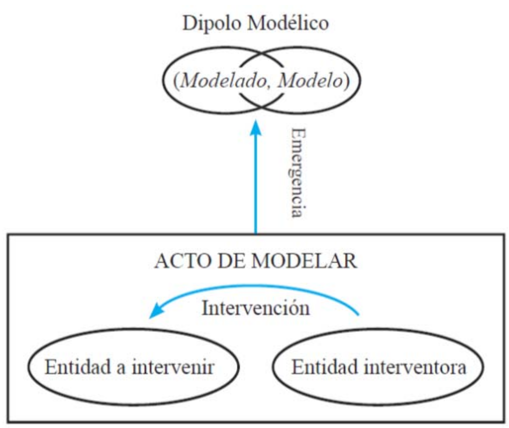


Figura 3. La modelación: El acto de modelar, el modelo, lo modelado y el dipolo modélico, p. 36.

6. ESQUEMAS O CICLOS DE MODELIZACIÒN/MODELACIÓN

Desde los inicios sobre sus estudios sobre modelización matemática, Pollak mencionaba el proceso que se realiza clasificándolo en tres etapas: primero se identifica algo en el mundo real que se desea entender, a lo cual lo enmarcamos en una pregunta. Segundo, se seleccionan los objetos particulares dentro de esa pregunta y se identifican las relaciones entre ellos, es decir, aquellos conceptos clave de la verdadera situación real. Tercero, se decide lo que conviene conservar e ignorar de los objetos y sus relaciones, porque no se puede tener todo en cuenta. El resultado de esto es una versión ideal de la pregunta original, para con esto traducir a términos matemáticos y obtener un modelo.

Con el paso del tiempo diversas investigaciones, desde distintas posturas teóricas en educación matemática, han descrito esquemas o ciclos para la modelación o modelización (así llamada en la comunidad europea). Hasta el momento se han identificado 16 esquemas o ciclos (Alsina; Niss y Jensen; Blomhøj y Jensen; Confrey y Maloney; Doerr; Lesh y Yoon; Penrose; Blum, et. al (14 investigadores en total); Wake; Arrieta; Gómez; Rodríguez; Romo; Blum y Borromeo-Ferri; Ulloa; Arrieta y Díaz), que de manera general coinciden con la explicación de Pollak, agregando u omitendo ciertas etapas, pero conservando la misma esencia.

El ciclo de modelización en el que estamos profundizando en esta etapa de revisión bibliográfica es el de Blum y Borromeo-Ferri (2009), el cual cuenta con experiencia de su utilidad en proyectos realizados en 2007 por el grupo de Blum y Leiß. Este ciclo es caracterizado por los autores como un proceso que se sigue para validar y evaluar el modelo en relación con el dominio D (descrito en la Figura 1), hasta que se logren conclusiones de manera satisfactoria, repitiéndose cuantas veces sea necesario. La validación y evaluación es crucial para la práctica en la Ingeniería, pues sus mismas áreas marcan normativas (nacionales e internacionales) a cumplir en el diseño de artefactos y maquinas. Esta cercanía a la práctica del estudiante de Ingeniería en el trabajo de laboratorio es lo que ha sido decisivo para analizar este ciclo de modelización (ver Figura 4) y los resultados de investigación asociadas a él.

Blum y Borromeo-Ferri (2009) mencionan que primero el problema tiene que ser comprendido por quien lo resolverá, esto es, debe construirse una *situación de modelización*. Entonces la situación debe ser simplificada, estructurada y precisada para hacer un modelo real de la situación. La matematización es *transformar* el modelo real en un modelo matemático (obtener un conjunto de ecuaciones). El trabajo matemático es calcular y resolver ecuaciones que proporcionen resultados matemáticos que deben interpretarse en el mundo real como resultados reales. La validación de estos resultados puede mostrar que es necesario repetir el ciclo una segunda vez para tomar en cuenta más factores que no hayan sido tomados en cuenta (tiempos, tráfico, contaminación, etc.) Finalmente, otro aspecto en la ruta de modelización es el camino que la persona que modela sigue acerca del ciclo.

ISSN: 2594-1046

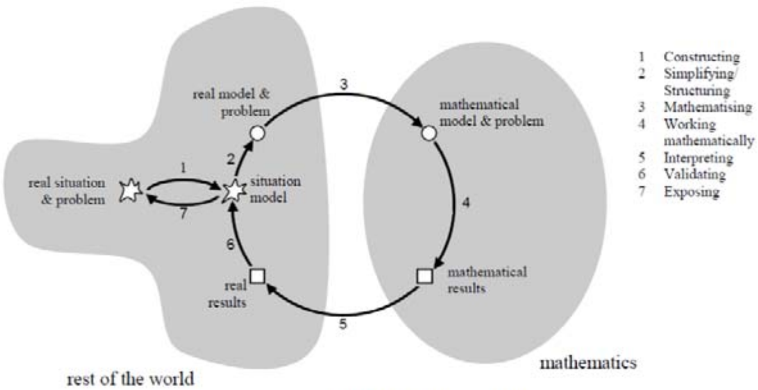


Figure 1 – Modelling cycle

Figura 4. Ciclo de modelización, p. 46.

7. DISTINCIÓN DE ESCENARIOS EN LA MODELACIÓN

De los estudios analizados sobre modelación se ha identificado que prevalecen dos escenarios, uno inclinado a lo artificial y otro más a la realidad (en el sentido de Pollak). Por artificial se asume aquellos estudios de modelación donde se da un problema en papel, se pone en contexto a través de leer el enunciado e imaginarlo y se resuelve, sin construir o elaborar un modelo físico o digital. En cambio, la modelación apegada a la realidad, da el problema a modelar y éste se lleva a un modelo físico o digital (por ejemplo, simulación en computadora) donde se tiene contacto con la realidad modelada. Los escenarios en la modelación van de acuerdo al nivel educativo y a la intención que se pretende cubrir. Por ejemplo, en niveles básicos Pollak (2007) menciona que la modelización matemática pretende motivar a los estudiantes para que se interesen por la utilidad de las matemáticas para resolver problemas. En la Ingeniería, la experiencia nos ha marcado que la modelación se dan ambos escenarios, artificiales en asignaturas de teoría y apegados a la realidad cuando la asignatura tiene laboratorio (parte práctica).

Un ejemplo de escenarios artificiales es la investigación de Blum y Borromeo-Ferri (2009), donde los autores presentan cuatro ejemplos de modelización matemática: (1) zapatos gigantes, (2) llenado de combustible, (3) el faro y (4) camión de bomberos. En todos los ejemplos se da un contexto y se pide contestar una pregunta, dando lugar a una modelización apegada a la imaginación y plasmada en papel, para estudiantes de 15 años de edad. También otro ejemplo es el estudio realizado por Pochulu, Abrate y Alcoba (2014), quienes elaboraron un estudio con 186 estudiantes de los programas educativos de Ingeniería (Agronómica y en Alimentos) para un curso de ingreso, en el cual trabajaron con resolución de problemas y actividades de modelación, centrados en tres ambientes de aprendizaje: Matemática pura, semirrealidad y situaciones de la vida real, todo centrado en argumentaciones por parte de los equipos de trabajo que fueron plasmados en papel.

Un ejemplo de escenario apegado a la realidad fue el estudio de Romo (2009), la autora lleva a cabo un análisis de la modelación desarrollada por estudiantes de Ingeniería que trabajaron en equipos durante dos años para diseñar un dispositivo innovador relacionado con la asignatura de Control Automático. Córdoba (2011) desarrolla un estudio en estudiantes de Ingeniería (ambiental, civil, financiera, de telecomunicaciones y electromecánica), que consistió en una actividad experimental en el laboratorio mediante sensores de temperatura y termómetros para estudiar la modelación en el fenómeno de enfriamiento con el uso de la ecuación diferencial de primer orden.

8. LA MODELACIÓN EN INGENIERÍA

Para ver la modelación en la Ingeniería es importante identificar desde cuándo se inicia su acción en ésta. Dillon (2012) menciona que en la segunda guerra mundial diversos ingenieros desarrollaron y utilizaron modelos para representar de manera conveniente ciertos comportamientos (comunicación, control y sistemas conmutados). Tales representaciones se convirtieron en una forma de hablar y pensar, propia de la comunidad de Ingeniería. Este proceso no fue de un paso, sino que se adaptó y compartió con el tiempo en una práctica. En contraste con la ciencia, la práctica de la Ingeniería se centra explícitamente en el diseño (el proceso de construcción de dispositivos, que puede ser cualquier cosa a partir de componentes simples a sistemas complejos y plantas, es decir, aquello que se controlará), que se comporta de manera específica.

> La idea de prácticas en comunidad fue introducida por Etienne Wenger y Jean Lave en el contexto de las teorías sociales del aprendizaje y, posteriormente desarrollada por Wenger en 1998, ha ganado aceptación en el estudio de cómo aprenden los grupos de profesionales y cómo crear significado por sí mismos. Para Wenger las características clave de prácticas en comunidad es el dominio de conocimientos, una comunidad de profesionales que comparten y aprenden unos de otros, y una práctica que tiene "experiencias, historias y herramientas" en común. Esta noción de una comunidad que comparte la práctica y evoluciona es una manera de hablar de que la práctica se ajusta bien la Ingeniería (Dillon, 2012, p. 48).

Otros autores que nos hablan al respecto son: Layton (1976), "desde el punto de vista de la ciencia moderna, el diseño no es nada, pero desde la ingeniería, el diseño es todo. Representa la adaptación intencional de los medios para alcanzar un fin preconcebido, la esencia misma de la ingeniería". Para Ferguson (1992) "el pensamiento visual es necesario en la ingeniería. Una parte importante de esta información se registra y transmite en un lenguaje visual que es, en efecto, la lengua franca de los ingenieros en el mundo moderno".

Dillon (2012) menciona que para los ingenieros la práctica compartida incluye una variedad de maneras de entender, visualizar y comunicar el comportamiento de los sistemas que están diseñando y construyendo, incluyendo tablas, diagramas, dibujos, gráficos, dibujos de ingeniería, modelos matemáticos y modelos a escala. Diferentes representaciones se utilizan para dar una idea de cómo funciona un sistema; para explicar el comportamiento y el rendimiento; para diseñar y predecir el comportamiento de los sistemas que aún no se han construido; en definitiva, para ayudar a contar una buena historia acerca de lo que está pasando. De esta forma los ingenieros acumulan conocimientos compartidos del sistema que están trabajando, a tal grado que los modelos y los sistemas del mundo real se confunden, porque el idioma de la Ingeniería evoluciona tanto de la teoría como de la experiencia, al grado que las características de los modelos se convierten en características de los sistemas reales que representan.

De lo anterior, es posible argumentar que la modelación matemática es necesaria en la formación de estudiantes de Ingeniería, porque puede potenciar habilidades y competencias muy cercanas a su realidad en el campo profesional. También ha permitido observar cómo los ingenieros a través del tiempo han adoptado la modelación como algo que les facilita y traduce los problemas complejos, haciendo las matemáticas más sencillas de verse y utilizarse.

9. CONCLUSIONES

La búsqueda bibliográfica analizada nos ha permitido identificar distintas posturas de modelización/modelación, modelo y modelado, y comprender qué se entiende bajo esas perspectivas. En particular para la investigación se vislumbra pertinente considerar las posturas del grupo de Blum (inspirado en los estudios de Pollak) y del grupo de Arrieta, porque ambas explican conceptos asociados a la modelación próxima a la Ingeniería, la primera en aspectos didácticos-cognitivos y la segunda en aspectos sociales, que pueden convenir a nuestra mirada sistémica sobre la construcción social de conocimiento matemático.

Aunado a lo anterior, se ha reconocido que el escenario a modelar es uno cercano a la realidad, porque los estudiantes de Ingeniería Mecatrónica realizarán prácticas de laboratorio en Robótica, de manera que tendrán la oportunidad de analizar y diseñar elementos de máquina y robots. También se ha elegido el ciclo de modelación de Blum y Borromeo-Ferri como el apropiado para observar y entender la modelación en la población de ingenieros, en especial por la fase de validación presente en el ciclo y por permitir la repetición de éste cuantas veces sea necesario.

Por tanto, el análisis de la literatura sobre modelización/modelación ha permitido ver de manera explícita la necesidad de la modelación en la formación de ingenieros (Gravemeijer y Ulloa), en particular los estudios realizados en torno a la Ingeniería (del grupo de Dillon) y a partir de ello tomar una ruta para la modelación del presente estudio.

10. REEFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arrieta, J. (2003). *La modelación como proceso de matematización en el aula.* (Tesis doctoral no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Distrito Federal, México.

Arrieta, J., & Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (18)*1, 19-48.

Beltrán, P. (2012). *El papel de la modelación en el desarrollo del pensamiento funcional trigonométrico en estudiantes del nivel medio superior.* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Blum, W. (2002). ICMI Study 14: Applications and Modeling in Mathematics Education- Discussion Document, *Educational Studies in Mathematics, 51*(1-2), 149-171.

Blum, W., & Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: can it betaught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(1), 45-58.

Córdoba, F. (2011). *La modelación en Matemática Educativa: una práctica para el trabajo de aula en ingeniería* (Tesis de maestría no publicada). Instituto Politécnico Nacional, México.

Dillon, C. (2012). Models: What Do Engineers See in Them? In Bissell, C. y Dillon, C. (Eds.) Mathematical and Other Modelling in Engineering and Technology Ways of Thinking, Ways of Seeing, 47-69. Berlín: Springer.

Ferguson, E. (1992). *Engineering and the Mind's Eye*. Estados Unidos: MIT Press, Cambridge.

Gravemeijer, K. (2007). Emergent modelling as a precursor to mathematical modelling. In W. Blum, P. Galbraith, H. Henn, y M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study,* 137-144. Estados Unidos: Springer.

Jácome, G. (2011). Estudio Socioepistemológico a las relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo. Un acercamiento a los significados construidos por el profesor. (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Layton, E. (1976). American ideologies of science and engineering. *Technology and Culture, 17*, 688–701.

Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. (2007). Introduction. In W. Blum, P. Galbraith, H. Henn, y M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study,* 1-32. Estados Unidos: Springer.

Pochulu, M., Abrate, R., & Alcoba, M. (2014). Una experiencia con escenarios de investigación para la alfabetización matemática en carreras de ingeniería. *Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación.* ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1297.

Pollak, H. (2007). Mathematical modelling a conversation with Henry Pollak. In W. Blum, P. Galbraith, H. Henn, y M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study,* 109-120. Estados Unidos: Springer.

Romo, A. (2009). *La formation mathematique des futurs ingenieurs*. (Tesis doctoral no publicada). Université Paris-Diderot - Paris VII, French.

Scholz, O. (2014). *Construcción de significados para lo trigonométrico en el contexto geométrico del círculo.* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Torres, D. (2014). Un entorno geométrico para la resignificación de las razones trigonométricas en estudiantes de Ingeniería. (Tesis de maestría no publicada). Instituto Tecnológico de Sonora, México.

Ulloa, J. (2013). Las prácticas de modelación y la construcción de lo exponencial en comunidades de profesionales: un estudio socioepistemológico. (Tesis doctoral no publicada). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, Distrito Federal, México.

Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

PRÁCTICAS DE EVALUACIÓN QUE SIGUEN PROFESORES DE ÁLGEBRA EN EL BACHILLERATO

Raúl Alonso Ramírez Escobar
Universidad de Sonora, México. r.ramirez@prepanogales.mx

Silvia Elena Ibarra Olmos
Universidad de Sonora, México. sibarra@mat.uson.mx

Resumen

El objetivo de esta ponencia es describir la estructura de una investigación cuyo propósito es caracterizar las prácticas de evaluación del aprendizaje que desarrollan profesores de matemáticas en el bachillerato al enseñar álgebra, en el caso específico de la enseñanza de las ecuaciones lineales. Esta investigación se está realizando bajo los constructos teóricos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) propuesto por Godino y colaborares. Presentaremos también los avances que se tienen hasta el momento, los cuales básicamente consisten en un estado del arte sobre el tema mencionado.

Palabras clave: Evaluación, Aprendizaje, Matemáticas, Bachillerato.

1. INTRODUCCIÓN

En el ámbito escolar la evaluación del aprendizaje se concibe como uno de los procesos fundamentales en la formación, la cual enriquece el quehacer de sus actores debido a la colección y análisis de información que permite tomar decisiones para la mejora continua. Por tal motivo, dicha información ejerce una influencia importante sobre la planeación y la didáctica, lo que conlleva a realizar una serie de revisiones y ajustes conforme a las características del alumnado, del contexto, de la naturaleza del contenido, así como de las características del proceso didáctico (De Vincenzi y De Angelis, 2008).

La importancia de la evaluación del aprendizaje ha ido aumentando en los últimos tiempos a nivel mundial, sobre todo en países en vías de desarrollo. Podría considerarse el año 1989 como un año de relevancia en el desarrollo educativo de México, con la instauración de la Comisión Nacional para la Evaluación de la Educación Superior, y al 2002 se le debe considerar también como un año importante en materia educativa, por la conformación del Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE). Así, en la segunda década del nuevo milenio, se cumplirán los primeros 30 años de trayectoria en materia de evaluación del aprendizaje en el país.

En respuesta a la necesidad de conocer qué está sucediendo en el sistema educativo, México ha permitido la inserción de una serie de mecanismos de evaluación diagnóstica. Por ejemplo, se han diseñado pruebas censales que permiten conocer el desempeño de cada alumno en los niveles de educación básica y media superior.

Ésa es la intención que persiguen las pruebas de Evaluación Nacional de Logros Académicos en Centros Escolares (ENLACE), Exámenes de la Calidad y el Logro Educativos (EXCALE) y ahora el Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA).

Existen otras pruebas que buscan estimar qué pueden esperar las naciones en términos de crecimiento económico y social a partir de las habilidades que los ciudadanos están desarrollando en la escuela. Ese es el caso de la prueba del Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes (PISA), elaborada por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). Esta prueba está siendo aplicada en México desde el 2000; en todas las ocasiones los resultados han sido poco alentadores.

En el caso particular de la educación matemática, investigadores de esta temática coinciden en que es importante conocer qué tipo de evaluación del aprendizaje se lleva a cabo y cuál es el sistema de ideas sobre el que se sostiene.

Así también, señalan que esto implica entender a la evaluación de las matemáticas como parte integral del currículo y no como un proceso aislado, de tal manera que la evaluación garantice a cada alumno un avance productivo en la dirección apropiada.

Ante la implementación de distintas propuestas de educación, como es el caso del modelo de Educación Basada en Competencias (EBC), Ahumada (2005) expresa que se ha observado que aún existe fuerte predominio de prácticas de evaluación del aprendizaje matemático por enfoques tradicionales, lo cual repercute en los alumnos puesto que estos también identifican el término evaluación con examen, promoción y control.

> Uno de los problemas que parece persistir es que, en buena medida, la teoría no ha logrado permear la práctica cotidiana del quehacer docente, nuestras creencias y actitudes parecen seguir prevaleciendo y han instaurado una práctica evaluativa centrada, fundamentalmente, a través de exámenes escritos de formatos cerrados que sancionan y certifican lo que, supuestamente, el estudiante debe haber aprendido en matemática, que muchas veces se identifica con un conocimiento matemático signado por definiciones, conceptos y algoritmos. (Becerra y Moya ,2008. p. 52).

Por su parte, Hernández (2013) menciona que respecto a la evaluación del aprendizaje de las matemáticas, las prácticas que predominan están centradas en la tendencia a evaluar el aprendizaje principalmente bajo tres instrumentos: examen, ejercicios de tarea y asistencias, cada uno con una ponderación que depende del criterio del profesor o por un reglamentado escolar. Mientras que en evaluación del aprendizaje en términos formativos, se espera que los docentes empleen distintos instrumentos, a los cuales se les debe de dar una orientación hacia un aprendizaje significativo.

Todo plan curricular admite diversos niveles de reflexión y en el nivel que está más ligado a la práctica del profesor se concreta en cuatro dimensiones: objetivos, contenidos, metodología y evaluación.

Es en esta última dimensión en la que es necesario hacer énfasis en el área de Matemáticas, puesto que, según Webb (1992), la evaluación en Matemáticas involucra aprendizajes, enseñanza, acción docente, currículo y aspectos institucionales, entre otros.

Se requiere estudiar mejor el pensamiento o concepto que ciertos profesores poseen sobre evaluación en Matemáticas, ya que con la evaluación se logra una reflexión sobre la práctica docente y al mismo tiempo se adquieren a través de ella, conocimientos no sólo respecto al alumno y su proceso de aprendizaje, sino también sobre las características de la asignatura y de la tarea de los docentes como facilitadores del aprendizaje (Gil, 1999).

Asimismo, la evaluación enfatiza la información que mejora la práctica docente, incidiendo directamente sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje, las tareas, los materiales, la organización, planificación, etc. (Giménez, 1997).

2. ESTADO DEL ARTE

En los últimos años la evaluación del aprendizaje en matemáticas ha adquirido importancia como parte fundamental de las áreas de estudio de la Matemática Educativa, por tal motivo se ha realizado una búsqueda minuciosa sobre bibliografía relacionada a esta temática. Cabe mencionar que existe aún poca información sobre el tema; sin embargo, los hallazgos obtenidos nos permiten crear un estado del arte un tanto limitado pero sumamente significativo para efectos de esta investigación.

Cabe destacar que la estructura de nuestro estado del arte se basa fundamentalmente en tres ejes relacionados con la temática:

ISSN: 2594-1046

- Importancia de la evaluación del aprendizaje en matemáticas.
- Concepciones de profesores sobre evaluación del aprendizaje.
- Instrumentos y técnicas empleadas para evaluar los aprendizajes matemáticos.

La información que a continuación se presenta fue obtenida a través de la revisión y análisis de artículos, investigaciones, ponencias, tesis, publicaciones e informes de proyectos, entre otros.

En 1989 el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM) impulsó el movimiento educacional basado en estándares en Norteamérica con la publicación de Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemáticas, una iniciativa sin precedente destinada a promover el mejoramiento sistemático de la educación matemática.

Una evaluación que surja a raíz de crear programas de matemáticas de excelencia, en los cuales se asegure de que ésta sea parte integral de la enseñanza, donde se provea de evidencias de la competencia que hay en contenidos y prácticas de matemáticas que son importantes, incluyendo una variedad de estrategias y fuentes de datos, entregando retroalimentación para los estudiantes, para las decisiones instruccionales y para el mejoramiento del mismo programa. "La evaluación debería apoyar el aprendizaje de unas matemáticas importantes y proporcionar información útil a los profesores y a los estudiantes, para con ello tomar acciones de mejora en los sistemas de enseñanza" (NCTM, 2000, Principio de Evaluación).

A través del establecimiento y publicación de dichos estándares por parte del NCTM, algunos investigadores y especialistas de distintas partes del mundo, así como políticos involucrados en materia de educación, se han dado a la tarea de indagar sobre el tema; con el afán de informarse e intentar dar solución a los diversos problemas presentados en ésta temática.

Una de las investigaciones más destacadas fue realizada por Becerra y Moya (2008) al trabajar con profesores de matemáticas del nivel superior. En ella se analizó la perspectiva que se tiene sobre la evaluación del aprendizaje en ese nivel educativo en particular.

En esta investigación se encontró que la práctica de evaluación del aprendizaje de las matemáticas, es una actividad donde persiste la subjetividad del profesor de matemáticas, que depende en gran parte de la formación y experiencia que tenga el docente. Debido a que muchos profesores carecen de formación pedagógica o en la que su formación no es propiamente en el área de las matemáticas, sino son egresados de alguna ingeniería, e incluso sus prácticas de evaluación muchas veces es una reproducción de cómo fueron evaluados cuando eran estudiantes, sin haber

ISSN: 2594-1046

una verdadera reflexión del por qué y para qué está evaluando, es decir, es su entorno social y su formación profesional los que controlan esta práctica.

Becerra y Moya (2008), señalan que el reconocimiento a condicionamientos institucionales conduce a aceptar que la evaluación es un proceso que tienen características subjetivas, que se lleva a cabo de acuerdo con las normas creadas por una comunidad y responde a hábitos exigidos por la institución escolar. (p.42).

El problema es tan evidente que por su parte Moreno y Ortíz mencionan que, "…los profesores tienen concepciones diferenciadas sobre evaluación del aprendizaje en matemáticas; además dichas concepciones no siempre son congruentes con lo establecido en las normas legales vigentes de evaluación…" (Moreno y Ortiz, 2008, p.142)

Esta información nos revela la importancia de analizar el perfil del profesor, así como sus prácticas y concepciones sobre la evaluación, donde probablemente los requerimientos y normas institucionales puedan llegar a influir de manera trascendental. De esta manera, se han presentado esfuerzos intentando identificar la importancia que se le da a la evaluación dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas por parte de los profesores.

En ese sentido, Hernández (2013) presentó un estudio de las Representaciones Sociales (RS) que sobre evaluación del aprendizaje de las matemáticas poseen profesores y alumnos de la Universidad Politécnica de Pachuca, derivado de esto, también se presenta un análisis comparativo de estas RS y lo que se plantea en términos de evaluación en el modelo de (EBC).

Los resultados obtenidos en esta investigación permitieron conocer el significado y la importancia que le dan a la evaluación del aprendizaje de la matemáticas, desde las concepciones, percepciones, opiniones e imágenes, de los profesores y alumnos y comprenderlas, para entender las causas por las cuales no se puede dar una adopción total a una evaluación del aprendizaje de las matemáticas desde el modelo de EBC. Hernández citó a Villardón (2006), donde señala al respecto lo siguiente:

Se evalúa estereotipadamente, con instrumentos inadecuados y sin informar al alumnado de las condiciones de evaluación de su propio aprendizaje. Quizás, por ello, es el aspecto de la educación superior que más ansiedad produce entre los estudiantes y más inseguridad entre el profesorado (p.58).

ISSN: 2594-1046

Algo de los que podemos estar seguros, es que cada profesor tendrá una concepción sobre lo que para él significa evaluar el aprendizaje matemático.

Dicha concepción se verá reflejada en su sistema de prácticas empleadas, situación en la cual se ha detectado una fuerte tendencia a concebir a la evaluación como un requerimiento de carácter administrativo e informativo, por lo que los instrumentos utilizados para realizar esta acción son muy limitados.

Cada instrumento de evaluación tiene características particulares que le dan ventajas y desventajas con respecto a los otros instrumentos, por lo que una evaluación limitada sólo a algún instrumento no tendrá suficiente información para la toma de decisiones requerida.

Es por ello que Azcárate, (2006) realizó una investigación en la cual encontró que ningún profesor puede dar por terminada su labor en el aula sin atender aspectos escolares tales como los "resultados conseguidos", las "notas" o "calificaciones" obtenidas por sus alumnos, y opinar sobre "lo bueno o lo malo que ha sido tal o cual alumno o grupo", valorando así, en cierta manera, el resultado de su labor". Esta investigación le permitió confirmar su hipótesis sobre el gran impacto e influencia que tiene la evaluación en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el aula.

A su vez, hace énfasis en el procedimiento de evaluación, ya que detectó después de una serie de entrevistas semiestructuras con 50 profesores de matemáticas de sexto grado de primaria, que el método que predomina en las aulas es el examen o prueba objetiva, el cual puede ser útil, pero no debería ser el único instrumento.

Este tipo de prueba no puede dar información sobre cosas tan significativas para el adecuado aprendizaje de las matemáticas. Así, en general, no informa sobre el proceso en sí, sino sólo sobre su resultado final, y ni siquiera da información sobre la calidad de ese resultado.

En esta misma investigación se plantearon algunas interrogantes, una de ellas fue: ¿Para qué sirve evaluar el aprendizaje en las matemáticas?, obteniendo como respuesta que desde la perspectiva del aprendizaje, la evaluación tradicional se limita a valorar y sancionar el resultado del proceso de aprendizaje sin posibilidad de retroalimentación. Concebir la evaluación como algo diferente a la simple comprobación de los resultados finales nos aproxima a la idea de la evaluación como regulación (Jorba y Sanmartí, 1997).

Desde esta perspectiva, la evaluación es el medio para provocar y ayudar a los estudiantes a elaborar y desarrollar sus ideas y competencias básicas, pues les permite seguir su propio progreso y valorar su propio aprendizaje. Una evaluación auténtica exige que exista un proceso de comunicación, transparencia, negociación y colaboración entre todos los participantes en el proceso (Bélair, 2000).

De igual manera, Flores (2009) en su artículo señaló su interés por caracterizar la evaluación de los procesos de enseñanza y aprendizaje desde la perspectiva de un modelo de enseñanza centrado en el estudiante, *Aprender Matemática, Haciendo Matemática*, modelo que ha venido construyendo desde hace varios años.

En este artículo se hace énfasis en que la evaluación necesita tener en cuenta todos los aspectos que se consideran en el modelo de enseñanza, tanto los que corresponden a las competencias como a las cualidades personales.

Sus resultados confirman que las herramientas tradicionales de evaluación, tales como exámenes y tareas principalmente, resultan insuficientes para la recopilación de la información necesaria y para su análisis, e incluso para lograr una retroalimentación efectiva y oportuna con los estudiantes.

En ese sentido, la investigación de Flores (2009) también manifiesta la necesidad de evaluar múltiples aspectos al hablar de herramientas de evaluación recientes, basado en lo siguiente:

…ahora es posible caracterizar el logro de los estudiantes en términosde múltiples aspectos de competencia y no en términos de un solo puntaje: hacer el seguimiento del proceso de los estudiantes a lo largo del tiempo, en lugar de simplemente medir el desempeño en algún momento particular; ocuparse de múltiples caminoso métodos alternos del desempeño valorado; modelar, vigilar y mejorar los juicios sobre labase de evaluaciones bien informadas; y modelar el desempeño no sólo en el nivel de los estudiantes, sino también en grupos, clases, escuelas y estados (Pellegrino, Chudowsky y Glaser; 2001/2004, p. 8).

Además, la idea de la evaluación educativa aún se sigue considerando sinónimo de examen, donde por examen ha de entenderse un instrumento de medición de aprendizajes hacia el final de los procesos de enseñanza y aprendizaje, donde se hace énfasis en el tipo de tareas trabajadas en clases. Esto transgrede su carácter dinámico-continuo y complejo para hacerlo algo estático, simple y hasta subjetivo.

ISSN: 2594-1046

Asimismo, Calderón y Deiros (2003), señalan que algunas de las insuficiencias que pueden presentar los exámenes elaborados por los profesores de Matemáticas son:

> "…se exige poco, en evaluaciones escritas que los estudiantes expresen sus ideas utilizando el lenguaje matemático. La evaluación generalmente se limita a la reproducción de los procedimientos desarrollados por el profesor..." (p.332).

La evaluación debería ser más que un test al final de la instrucción para ver cómo se comportan los estudiantes bajo condiciones especiales; en su lugar, debería ser una parte integral de la instrucción que informa y guía a los profesores en la toma de decisiones.

Uno de los hallazgos más significativos para nuestro trabajo ha sido la investigación realizada por Jarero, Landa y Moguel (2013), en la cual se hace referencia al problema de la evaluación educativa en el nivel superior, particularmente el problema de la evaluación de aprendizajes matemáticos. En esta investigación se manifiesta la falta de unificación de significados y la diversidad de formas con las que se lleva a cabo este proceso por parte de los profesores.

Según estos autores, la concepción de enseñanza aprendizaje ha ido cambiando en los últimos años y con ello (al menos en el discurso) también un entendimiento de la evaluación del proceso educativo, lo cierto es que en la educación matemática superior aún prevalecen los exámenes escritos como el principal y en ocasiones único método de evaluación de aprendizajes, lo que induce a pensar que los profesores conciben la evaluación en su carácter administrativo (como práctica institucionalizada) orientada a la rendición de cuentas. De ahí que de las dos distinciones clásicas de la evaluación, la formativa y la sumativa, los profesores dan mayor importancia a la función sumativa que a la formativa (Yorke, 2003).

Siguiendo este orden de ideas, se planteó como tema central del estudio la evaluación de aprendizajes matemáticos en la educación superior desde una perspectiva del análisis cualitativo de los diseños y uso de las pruebas escritas.

Partiendo de reconocer la prueba escrita como el principal medio por el cual los profesores universitarios en matemáticas evalúan (califican) los logros de aprendizaje de sus estudiantes, se plantearon las siguientes interrogantes de estudio:

¿Qué tipo de criterios valorativos se emplean al evaluar el logro de los aprendizajes de los estudiantes en función de lo que ellos expresan en una prueba escrita y qué se puede decir acerca de la imparcialidad de tales criterios?, ¿qué tipo de lineamientos se siguen en la elaboración de pruebas escritas?, ¿constituye la prueba escrita en matemáticas un instrumento equitativo para obtener información y emitir juicios imparciales sobre los aprendizajes obtenidos en el proceso educativo?

El estudio se desarrolló con profesores y estudiantes universitarios de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán durante el curso Álgebra Superior I impartido en el primer año de estudios, y en sus resultados se pudo verificar que la prueba escrita constituye la principal estrategia empleada por profesores universitarios para valorar y calificar los logros de aprendizaje matemático de sus estudiantes.

Esta estrategia es empleada en forma casi exclusiva a cualquier otro medio o recurso para generar juicios más completos y objetivos respecto de las fortalezas y debilidades de un proceso educativo y en especial, de los "verdaderos" logros de aprendizaje de los estudiantes y sus posibles fundamentos.

En este estudio se identificó que la prueba escrita y la práctica de evaluación se efectúan con fines administrativos, no académicos. Ubíquese el caso de los profesores observados que no retroalimentaron sus prácticas ni los aprendizajes de los estudiantes a partir de los resultados obtenidos, por el contrario, asignan calificaciones con mero apego al carácter administrativo de la evaluación. Dicho así, para profesores y estudiantes la evaluación es un mecanismo estático e indicador de acreditación de un curso.

Otras de las acciones llevadas a cabo sobre esta temática fue la siguiente:

En 2015 el Programa de Educación Continua para el Magisterio, PEC de la Universidad de Chile organizó un curso dirigido a profesores de matemáticas de todos los niveles.

El objetivo general del curso estaba enfocado en:

- Identificar problemas relativos a la evaluación de alumnos y alumnas, haciendo una reflexión crítica de parte de los profesores acerca de sus propias prácticas evaluativas en matemáticas.
- Identificar principios claves de la evaluación para el aprendizaje en matemáticas, las dimensiones de aprendizaje centrales y criterios de evaluación preestablecidos.
- Los objetivos específicos de dicho curso fueron los siguientes:
- Identificar problemas inherentes a la evaluación de matemáticas en su propia práctica docente considerando las dimensiones de aprendizaje centrales.

- Aplicar conceptos clave y principios de la evaluación para el aprendizaje de las matemáticas.
- Diseñar instrumentos de evaluación a partir de los principios claves, las dimensiones de aprendizaje centrales y criterios de evaluación preestablecidos.

Este curso es una gran referencia, ya que nos permite ubicar cómo en otras comunidades existe un gran interés por identificar los problemas presentes en las prácticas de evaluación del aprendizaje matemático, así como proponer instrumentos de evaluación pertinentes.

García y Montejo (2011) expresaron que: Uno de los aspectos más importantes en las prácticas de evaluación es establecer los criterios por medio de los cuales los estudiantes son evaluados, puesto que los juicios del profesor sobre cada uno de los estudiantes plantean una diferenciación y configuran los participantes que son reconocidos como legítimos en el aula (Planas y Raig, 2003).

Es muy evidente la preocupación que existe en el sentido de que la evaluación en Matemáticas debería ser efectuada tomando en cuenta tanto el aspecto cualitativo como el cuantitativo, buscando así que se valore y comprendan las consideraciones, interpretaciones, interés y aspiraciones de quienes actúan en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, a fin de ofrecer información pertinente y oportuna a cada uno de estos, la cual permita a los profesores: observar y orientar el proceso, reconocer y analizar la eficacia y planificar mejor.

Finalmente se dice que es importante que el docente, apoyado por su respectiva institución encuentre una forma práctica y factible de evaluación del aprendizaje, que sea congruente con los enfoques actuales de la educación basada en competencias y que a su vez, la información obtenida le sea útil para restructurar su práctica docente.

La bibliografía encontrada expresa que la evaluación del aprendizaje en matemáticas se debería convertir en un gran apoyo para orientar la práctica de profesores y a nivel institucional contribuir en la mejora continua de los aprendizajes matemáticos, ya que una evaluación objetiva del aprendizaje se convierte en una fuente de información importante para diagnosticar la eficacia e impacto no solo de la intervención didáctica del docente, sino de la eficacia y funcionalidad de los planes y programas de estudio, así como de la institución y el sistema educativo en general.

Dicha revisión bibliográfica, también nos ha permitido identificar una fuerte tendencia a utilizar ciertos mecanismos al momento de evaluar, ya que en este sentido, generalmente se suele identificar a la evaluación con examen, prueba terminal y calificación, lo cual repercute en los alumnos puesto que éstos también identifican el término evaluación con examen, promoción y control. Todo esto realizado, con expectativas de cumplir con la obligación administrativa e institucional de rendir cuentas al acreditar o sancionar obligatoriamente al estudiante para el nivel educativo en el que se encuentre, según un resultado subjetivo y muy poco confiable.

La construcción del estado del arte nos ha otorgado la capacidad de contar con un panorama sobre las principales aportaciones por parte de especialistas e interesados en esta temática, así como conocer una serie de acciones realizadas ligadas al problema que nos interesa.

Esto a su vez, nos ha aportado evidencias de investigación que muestran que tal problemática está vigente y que muy pocos han abordado. Es por ello que lo anteriormente mencionado, nos ha permitido delimitar con mayor claridad el problema y preguntas de investigación, así como algunos elementos de justificación.

3. PROBLEMÁTICA, OBJETIVOS Y PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Es muy evidente la preocupación que existe en el sentido de que la evaluación en Matemáticas debería ser efectuada tomando en cuenta tanto el aspecto cualitativo como el cuantitativo, buscando así que se valoren y comprendan las consideraciones, interpretaciones, interés y aspiraciones de quienes actúan en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, a fin de ofrecer información pertinente y oportuna a cada uno de éstos, la cual permita a los profesores: observar y orientar el proceso, reconocer y analizar la eficacia y planificar mejor.

Dada la amplitud y los aspectos que abarca el proceso de evaluación, en este estudio se hará referencia a la evaluación dentro de los procesos de enseñanza de las Matemáticas, específicamente en el área de álgebra; identificando el siguiente problema de investigación:

¿Cuáles son las prácticas de evaluación que desarrollan profesores de matemáticas en el bachillerato al enseñar álgebra?

En este contexto, nos interesamos en conocer cómo es que los profesores de álgebra de bachillerato en su práctica cotidiana, conceptualizan y concretizan el proceso de evaluación del aprendizaje de sus alumnos, en el caso particular de las ecuaciones lineales.

El enfoque por competencias planteado actualmente en la Reforma Integral para la Educación Media Superior (RIEMS) en nuestro país, describe a la evaluación desde un punto de vista eminentemente cualitativo, donde el profesor debe fundamentar las decisiones respecto al estudiante y, a los diferentes elementos y factores que intervienen en la práctica docente, así como el considerar a cada sujeto en lo individual, poniéndolo en el centro de su propio aprendizaje.

Es por ello que dicha investigación estará orientada a las prácticas de evaluación desarrolladas por profesores de matemáticas en el bachillerato bajo el actual modelo de EBC.

Así pues, se han considerado pertinentes las siguientes preguntas de investigación:

¿Qué prácticas discursivas realizan profesores de álgebra en el bachillerato al evaluar el aprendizaje de las ecuaciones lineales?

¿Qué prácticas operativas realizan profesores de álgebra en el bachillerato al evaluar el aprendizaje de las ecuaciones lineales?

La noción de práctica es un concepto amplio. La realización de una práctica es un proceso complejo en el que intervienen elementos de distinta naturaleza, entre los que se incluyen fines, intenciones, valores, creencias, concepciones.

Por ejemplo, algo que permea fuertemente en las prácticas de enseñanza de las matemáticas, es la concepción que tienen los profesores sobre la propia matemática.

En este trabajo se estudiará el proceso de enseñanza de las ecuaciones lineales, asumiendo que una parte integrante del mismo son las prácticas de evaluación seguidas por los profesores.

Enunciamos entonces como **Objetivo General** de nuestro trabajo, el siguiente:

Caracterizar las prácticas operativas y discursivas que, sobre evaluación del aprendizaje de las ecuaciones lineales, realizan profesores de álgebra en el bachillerato.

De donde desprendemos los siguientes **Objetivos específicos:**

O1. Identificar las prácticas operativas y discursivas sobre evaluación del aprendizaje,

presentes en profesores de álgebra en el bachillerato al enseñar ecuaciones lineales.

O2. Analizar la relación que existe entre las prácticas operativas y discursivas que, sobre evaluación del aprendizaje, tienen profesores de álgebra en el bachillerato al enseñar ecuaciones lineales.

Se seleccionó el tema ecuaciones lineales, como el caso objeto de estudio; ya que según los especialistas es un tema representativo del álgebra en el bachillerato, además de sus antecedentes en la matemática escolar, así como el alto impacto que tiene en la formación de los estudiantes para niveles superiores y su implementación en la vida cotidiana.

4. MARCO TEÓRICO

Nuestro objetivo central es caracterizar las prácticas de evaluación que siguen profesores de matemáticas en el bachillerato implementadas en el curso de álgebra en el Bloque VI: "Resuelves Ecuaciones Lineales I" de acuerdo con el plan de estudios propuesto por la Dirección General de Bachillerato (DGB) en México. Para ello adoptamos el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS).

En esta sección declaramos los aspectos teóricos que retomamos de este enfoque para la obtención del objetivo central de esta investigación.

Este enfoque toma en consideración el triple aspecto de la matemática como actividad de resolución de problemas (socialmente compartida), lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado. Al ser un enfoque ontológico y semiótico, asigna un papel central a los tipos de objetos matemáticos y su naturaleza, al lenguaje y a los procesos de comunicación e interpretación.

4.1. Elementos teóricos considerados

Un objeto matemático es todo lo que es indicado, señalado o nombrado cuando se construye, comunica o aprende matemáticas. No son sólo los conceptos, sino cualquier entidad o cosa a la cual nos referimos o de la cual hablamos –sea real, imaginaria o de cualquier otro tipo- que interviene de alguna manera en la actividad matemática (Ibarra, 2008, p. 62). Otro elemento básico del EOS es la noción de práctica, pues es de los sistemas de prácticas de donde emergen los objetos matemáticos.

La práctica matemática se refiere a "toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas". (Godino, Batanero y Font, 2009, p. 4).

El sistema de prácticas operativas y discursivas que realiza una persona para resolver un determinado campo de problemas (del cual emerge el objeto matemático en cuestión), constituye su significado personal de dicho objeto matemático. Si el sistema de prácticas es realizado por una institución (conjunto de personas involucradas en una misma clase de situaciones-problemas), este constituirá el significado institucional del objeto en cuestión.

El aprendizaje de matemáticas supone el acoplamiento progresivo entre los significados personales e institucionales. La enseñanza implica la participación del estudiante en la comunidad de prácticas que da soporte a los significados institucionales; y el aprendizaje, en última instancia, supone la apropiación por el estudiante de dichos significados (Godino et al, 2009, p. 6).

Para la realización de una práctica matemática y para la interpretación de sus resultados como satisfactorios, se necesita poner en funcionamiento determinados conocimientos. Dentro de éstos, se observa el uso de lenguajes, verbales y simbólicos. Estos lenguajes son la parte ostensiva (perceptible por alguno de los sentidos) de una serie de conceptos, proposiciones y procedimientos que intervienen en la elaboración de argumentos para decidir si las acciones simples que componen la práctica, y ella, en tanto que acción compuesta, son satisfactorias.

La relatividad socioepistémica y cognitiva de los significados, entendidos como sistemas de prácticas, y su utilización en el análisis didáctico lleva a introducir la tipología básica de significados.

Con relación a los significados institucionales se propone tener en cuenta los siguientes tipos:

- Implementado: en un proceso de estudio específico es el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente.
- Evaluado: el subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.
- Pretendido: sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.
- Referencial: sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido.

Respecto de los significados personales se proponen los siguientes tipos:

- Global: corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el sujeto relativas a un objeto matemático.
- Declarado: da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional.

- Logrado: corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. En el análisis del cambio de los significados personales que tiene lugar en un proceso de estudio interesará tener en cuenta los significados iniciales o previos de los estudiantes y los que finalmente alcancen.

Cabe mencionar que para efectos de la presente investigación sólo utilizaremos los significados institucionales (Referencial, Pretendido, Implementado y Evaluado).

Analizar los significados institucionales presentes en profesores de álgebra en el bachillerato durante el proceso de enseñanza de las ecuaciones lineales, nos permitirá identificar las prácticas tanto operativas como discursivas que realizan al momento de evaluar los aprendizajes, así como analizar la relación entre dichas prácticas; todo ello partiendo de la premisa de que la evaluación del aprendizaje es una etapa que permea y se entrelaza con el proceso de enseñanza.

5. MÉTODO

5.1. Características de la investigación

Esta investigación se realizará bajo el paradigma de investigación cualitativo, el cual se seleccionó porque el foco de atención de una investigación cualitativa está puesto en la realización de: "descripciones detalladas de situaciones, eventos, personas, interacciones y comportamientos que son observables, incorporando la voz de los participantes, sus experiencias, actitudes, creencias, pensamientos y reflexiones tal y como son expresados por ellos mismos". (Sandín, 2003, p. 121).

Nuestro estudio tiene como propósito central conocer y describir las prácticas de evaluación del aprendizaje empleadas por profesores de matemáticas en el bachillerato, para poder, a su vez, conocer y entender la influencia y resultados que tales prácticas tienen en el currículo de álgebra al enseñar las ecuaciones lineales a los estudiantes.

5.2. El método de investigación

Dadas las características del estudio que se está abordando, requerimos seleccionar un método de investigación que se ajuste a las expectativas que se han enunciado, por lo que se optó por el estudio de casos, entre razones porque se trata de: "Un método de investigación para el análisis de la realidad social de gran importancia en el desarrollo de las ciencias sociales y humanas y representa la forma más pertinente y natural de las investigaciones orientadas desde una perspectiva cualitativa. (Sandín, 2003, p. 57).

ISSN: 2594-1046

Además, el estudio de casos enfatiza su adecuación y pertinencia al estudio de la realidad socioeducativa, implica un proceso de indagación que se caracteriza por el examen detallado, comprehensivo, sistemático y en profundidad del caso objeto de estudio que para efectos de la presente investigación; serán las prácticas de evaluación del aprendizaje implementadas por algunos profesores de matemáticas en el bachillerato en el caso específico de las ecuaciones lineales. En este sentido cabe señalar que los casos que son de interés en la educación y en los servicios sociales son en su mayoría personas y programas.

Los rasgos esenciales del estudio de casos que abonan en nuestra elección son: particularista, descriptivo, heurístico e inductivo, tal como lo expresa Stake (1998), citado por Sandín (2003).

La identificación, selección, contextualización y justificación del caso o casos a abordar constituye, por tanto, una de las cuestiones fundamentales en el diseño de un estudio de casos. En cuanto a la modalidad será un estudio instrumental de casos, esto con base en los propósitos planteados en la presente investigación.

Los sujetos de investigación

Para garantizar la vialidad del presente proyecto de investigación, debemos resaltar la selección de profesores de álgebra en el bachillerato, quienes se constituirán en nuestros sujetos de investigación.

- Los criterios preliminares de selección de los mismos serán:
- Experiencia docente: de 5 a 10 años impartiendo el curso de Matemáticas.
- Formación profesional afín a las matemáticas.
- Con disposición a colaborar en el proyecto.

Es importante hacer mención a que se tiene contemplado un periodo de observación tentativamente de seis meses, con la finalidad de poder apreciar a detalle las prácticas desarrolladas en el trayecto del curso de álgebra, lograr una adaptación a las condiciones del grupo, así como generar un ambiente de confianza, hasta llegar al tema de nuestro interés.

Las técnicas e instrumentos para recopilación de información

La técnica para generar información será la observación no participante de la actividad docente de los profesores. Se requerirá además de la elaboración de algunos instrumentos para el registro de lo observado: cuadros sinópticos, guiones de entrevista, y formatos para registro de observación.

6. CONCLUSIONES

La construcción del estado del arte sobre esta temática nos ha dado muestra sobre algunos aspectos que consideramos importantes, de los cuales destaca que la evaluación debe llevarse de manera cohesionada dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje, esta a su vez debe involucrar a la mayoría de los sujetos interesados profesor-alumnos con el fin de fungir como guía para la toma de decisiones, es decir, no hacer evaluación sólo a los alumnos, sino también para los alumnos, de manera que se pueda guiar y mejorar su aprendizaje, en este caso hablamos de un aprendizaje matemático.

Los hallazgos obtenidos a través de la revisión bibliográfica de ésta temática nos permite mantener una postura en la cual se ha detectado que la evaluación del aprendizaje matemático como práctica educativa no ha permanecido estática. A lo largo del tiempo se han presentado diversas concepciones de evaluación y en cada una de ellas una forma de pensamiento, una forma de interpretar la realidad acorde a un momento histórico donde se pone especial interés en determinados objetos de evaluación.

Las reflexiones surgidas a partir de la construcción del presente estado del arte, nos han llevado al planteamiento de diversas interrogantes, las cuales sirvieron de base para el establecimiento de un proyecto de investigación sobre el tema, con miras a desarrollarse en el entorno local.

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ahumada, P. (2005). La evaluación autentica: Un sistema para la obtención de evidencias y evidencias de los aprendizajes en matemáticas. *Perspectiva educacional*, 45, 11-24.

Azcárate, M. (2006). La evaluación en el aula de primaria. Factor clave para el aprendizaje de las ciencias y las matemáticas. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, 8(2), 212-220.

Becerra, R., y Moya, A. (2008). Una perspectiva crítica de la evaluación en matemática en la Educación Media Superior. Sapiens. *Revista Universitaria de Investigación*, 9(1), 35-69.

Calderón, R. M., y Deiros, B. (2003). Evaluación del Aprendizaje de las Matemáticas. En J. Delgado (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

ISSN: 2594-1046

Flores, P. (2009). Aprendizaje y Evaluación. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* (Capítulo 2). Madrid: Síntesis.

García, G., y Montejo, J. (2011). Las relaciones entre evaluación y el orden social en la clase de matemáticas. Un estudio en una clase de álgebra. Voces y silencios. *Revista Latinoamericana de Educación*, 2(2), 128-138.

Gil, F. (1999). *Marco conceptual y creencias de los profesores sobre evaluación en matemáticas*. (Tesis doctoral). Universidad de Granada. España.

Giménez, J. (1997). *Evaluación en Matemática. Una integración de Perspectiva*s. Madrid: Síntesis.

Godino, J.D., Batanero, C., y Font, V. (2009). *Un Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática*. Versión ampliada y revisada al 8/Marzo/2009 del artículo, V. (2007), 127-135.

Hernández, K. (2013). *Representaciones sociales sobre la evaluación en matemáticas en el nivel superior*. (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. México.

Ibarra, S. (2008). *La transposición didáctica del álgebra en las ingenierías. El caso de los sistemas de ecuaciones lineales*. (Tesis doctoral no publicada). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. México.

Jarero, M. Landa, E., & Moguel, L. (2013). Pruebas escritas como estrategia de evaluación de aprendizajes matemáticos. Un estudio de caso a nivel superior. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16 (2), 213-243.

Moreno, I., y Ortiz, J. (2008). Docentes de Educación Básica y sus Concepciones acerca de la Evaluación en Matemática. *Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa*, 1 (1), 140-154.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1989). *Estándares Curriculares y de evaluación para la Educación Matemática*. Traducido por J. Álvarez y J. Casado. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Programa de Educación Continua para el Magisterio (PEC) (2015). *Curso Evaluación para el Aprendizaje en Matemátic*a. Universidad de Chile: Autor.

Sandín, M. P. (2003). *Investigación Cualitativa en Educación. Fundamentos y Tradiciones*. Madrid: Mc Graw and Hill Interamericana.

SEP (2008). *La Creación de un Sistema Nacional de Bachillerato en un marco de diversidad*. Reforma Integral de la Educación Media Superior en México. pp. 42-69.

Webb, N. (1992). Assessment of Students Knowledge of Mathematics: Steps Toward a Theory. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.

Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

FACTORES QUE INFLUYEN EN LA SELECCIÓN DE TAREAS EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA

Teresa Salazar Valdivieso
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.teresiny_n5@hotmail.com
Mónica Monroy Kuhn
Universidad Popular Autónoma del Estado de Puebla. monica.monroy@upaep.mx

Resumen

Los mayores logros en el aprendizaje de las matemáticas, así como la calidad y profundidad del conocimiento matemático que los estudiantes desarrollan, están relacionados con las tareas que los profesores presentan e implementan en sus aulas. Se ha documentado que la selección y organización de tareas que lleva a cabo un profesor de matemáticas es un determinante principal tanto en la naturaleza y calidad del aprendizaje de un estudiante en el aula de matemáticas, como en su motivación con respecto a esta disciplina. A pesar de su importancia, son pocas las investigaciones que analizan a profundidad las razones que sustentan esta elección. En este trabajo se presenta el planteamiento de una investigación con enfoque cualitativo que busca analizar los factores que influyen en la selección de tareas por parte de profesores de matemáticas de secundaria.

Palabras clave: Tareas Matemáticas, selección de tareas, decisiones del profesor.

1. INTRODUCCIÓN

En las cuatro evaluaciones PISA (2003-2012) que se han implementado en México, se destacan las dificultades que tienen la mayor parte de los estudiantes mexicanos al desempeñarse en tareas con alto grado de complejidad matemática (Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación [INEE], 2004, 2007, 2010 y 2013). El que México permanezca año con año en el nivel de competencia más bajo en matemáticas, sugiere que sigue prevaleciendo una enseñanza que privilegia el enfoque memorístico y la promoción de habilidades de rutina en los procesos de aprendizaje en las escuelas mexicanas.

En vista de los alarmantes resultados, la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) ha recomendado a los profesores en México que, para mejorar la calidad educativa, es importante lograr que las horas efectivas en clase se traduzcan de manera eficaz en un mejor aprendizaje para los estudiantes (OCDE, 2014). Según García y Benítez (2011), para mejorar las competencias de los alumnos se requiere que los profesores proporcionen a sus estudiantes oportunidades de aprendizaje mediante el uso de tareas que pongan en juego sus habilidades.

Las tareas matemáticas que el docente utiliza en el aula son determinantes para el tipo de aprendizaje que los estudiantes construirán. Además, éstas tienen el potencial de influir y estructurar la manera en que los estudiantes piensan, desarrollan, utilizan y dan sentido a las matemáticas (Sullivan y Davidson 2014; Goñi, 2011; Stein, Grover y Henningsen, 1996).

Algunos investigadores se han interesado en averiguar el proceso de selección y justificación de tareas en el ámbito de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, pero éste es un campo de investigación que comienza a explorarse (Sullivan, Clarke y Clarke, 2013; Clarke, Grevholm, y Millman, 2009; Remillard, Herbel-Eisenmann, y Lloyd, 2009. La mayor parte de este tipo de investigaciones han analizado el rol que desempeña el conocimiento disciplinar del profesor en la selección y ejecución de tareas matemáticas, y a pesar de que han reportado que es un factor sumamente importante, también dejan claro que la evidencia empírica que apoya esta afirmación es insuficiente (Charalambous, 2010; González, Gómez, Polo y Restrepo, 2015).

Otros estudios han examinado cómo los profesores trabajan con la implementación de tareas matemáticas previamente diseñadas por investigadores, con la finalidad de mostrar a los profesores que trabajar con tareas bien estructuradas puede facilitarles a los alumnos el aprendizaje de las matemáticas. (Geiger, Goos, Dole, Forgasz y Bennison, 2014; Sullivan, Clarke y Clarke, 2013; Godino, 2013; Mike y Lisa, 2003).

Con respecto a la formación inicial de profesores de matemáticas, se han publicado investigaciones cuyo objetivo principal consistió en analizar cómo diseñan tareas; una vez que fueron preparados para utilizar determinados criterios tanto para guiar la construcción de tareas, como para valorar la idoneidad de su implementación, lo cual les permitió tener elementos para diseñar tareas matemáticas de mejor calidad (Pochulu, Font, y Rodríguez, 2015; Giménez, Font y Vanegas, 2013; Gemad, 2013).

Como vemos, en cierto sentido, la enseñanza de las matemáticas se concreta en la construcción que realizan los profesores al seleccionar las tareas que implementarán en el aula. Según Sullivan (2011) “la decisión clave que debe tomar un profesor para una enseñanza eficaz de las matemáticas, es por lo tanto, la de seleccionar las tareas” (p. 31).

A pesar de la importancia que tiene la selección de las tareas matemáticas, encontramos que a nivel internacional, son pocas las investigaciones en el campo de la Educación Matemática que analizan a profundidad las razones y los factores en que se basa la elección de dichas tareas en profesores en servicio (Sierpinska, 2003). Asimismo, en el contexto mexicano, no se encontraron

ISSN: 2594-1046

investigaciones relacionadas con la elección de tareas matemáticas por parte de docentes en los estados del conocimiento del COMIE en las décadas 1993-2001 (López y Mota, 2003) y 2002-2011 (Ávila, 2013).

Con base en las ideas presentadas hasta el momento, se plantea la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué factores influyen en la selección de tareas de docentes de matemáticas de secundaria en servicio?

2. OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

Con este estudio se pretende analizar los factores que influyen en la selección de tareas que llevan a cabo docentes de matemáticas de secundaria en servicio.

3. MARCO TEÓRICO

3.1. Relación entre tareas y aprendizaje

De acuerdo con Smith y Stein (1998), los mayores logros en el aprendizaje por parte de los estudiantes en matemáticas están relacionados con el grado en que las tareas son presentadas e implementadas en el aula. Por su parte, Christiansen, Howson y Otte (1986) mencionan que las oportunidades de aprendizaje que los alumnos adquieren se configuran alrededor de tareas que pretenden ser estímulos para que los alumnos actúen y, con motivo de esa actuación, construyan su conocimiento matemático. A este respecto, Anthony & Walshaw (2009) mencionan que el proponer tareas que inviten al estudiante a pensar por sí mismo acerca de las matemáticas resultará ser el principal estímulo para el aprendizaje del estudiante. Dada la relación que las tareas tienen con aprendizaje, nuestra investigación tiene como uno de sus supuestos que la elección de las tareas y las pedagogías asociadas a las mismas son aspectos clave para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Por otro lado, Clarke, Grevholm y Millman (2009) exponen que una tarea matemática con fines de aprendizaje se define como una actividad compleja realizada en clase, donde el profesor previamente en su planeación ha definido claramente los objetivos de aprendizaje matemático que los estudiantes construirán. Por lo tanto, la calidad y profundidad del conocimiento matemático que los alumnos desarrollan en el aula depende de las tareas que el profesor diseña o selecciona en su planeación para cada sesión de clase (Wood, 2002). En esta investigación, asumiremos que el profesor es quien realiza y selecciona previamente las tareas que utiliza en el aula y, por lo tanto, la decisión que los profesores realizan a la hora de elegir tareas juega un papel muy importante en el aprendizaje de sus estudiantes.

3.2. Tipos de tareas matemáticas

Debido a que las tareas son centrales para la enseñanza, varios autores han resumido ejemplos de tipos de tareas matemáticas. Anthony & Walshaw (2009) identificaron tareas, incluyendo aquellas que proponen la resolución de problemas, la modelación matemática, la interpretación de datos, entre otros. Por su parte, Stein y Smith (1998) utilizan el nivel de demanda cognitiva de las tareas para diferenciarlas según el potencial que puedan tener para desarrollar diferentes aspectos del aprendizaje, estos autores explican que existen una serie de diferentes tipos de tareas matemáticas, por un lado se encuentran las tareas que implican reproducir fórmulas, reglas, hechos y definiciones previamente aprendidos, y por otro las que requieren un pensamiento complejo y no algorítmico, entre otros.

3.3. Paradigma del pensamiento del profesor

Las investigaciones sobre el pensamiento del profesor desempeñaron un papel significativo en la enseñanza, ya que proponen la imagen del docente como un profesional reflexivo que tiene sistemas de teorías y creencias susceptibles de influir en sus percepciones, planes y acciones. Diversos estudios, desde diferentes perspectivas, han intentado analizar e interpretar los procesos de pensamiento de los docentes y su relación con la práctica de la enseñanza, surgiendo así "el paradigma del pensamiento del profesor" (Shavelson y Stern, 1981; Jackson, 1968; Dahllof y Lundgren, 1970).

La principal preocupación de este paradigma es conocer los procesos de razonamiento que ocurren en la mente del profesor durante su actividad profesional. Y debido a que nos guiaremos por este paradigma, en nuestro trabajo asumimos como premisa fundamental que el profesor es un sujeto reflexivo, racional, que toma decisiones, emite juicios, tiene creencias y genera rutinas propias de su desarrollo profesional y son los pensamientos del profesor los que guían y orientan su conducta (Clark y Yinguer, 1979; Shavelson y Stern, 1983).

Ubicados en las ideas fundamentales de este paradigma, mencionamos las contribuciones de Clark y Peterson (1986), los cuales establecen una relación entre la investigación de las conductas del profesor y sus efectos en los alumnos. Ellos muestran que existen dos dominios que tienen una importante participación en el proceso de la enseñanza: los procesos de pensamiento del profesor, y sus acciones. Situados en los procesos de pensamiento de los profesores, estos autores consideran que uno de los momentos más importantes de este proceso ocurre cuando éste realiza la planeación, ya que ésta puede caracterizarse como la adopción de decisiones sobre la selección.

Nosotros nos enfocaremos justamente en este momento del pensamiento del profesor porque consideramos que es al realizar la planeación cuando el profesor determina los objetivos de aprendizaje que espera que sus alumnos logren y los tipos de tareas en las cuales sus alumnos participarán; por lo tanto, es en ese instante donde se enfrentan ante un gran reto, el de seleccionar las tareas que utilizarán en el aula.

3.4. Factores que influyen en la selección de las tareas

Dentro de nuestra investigación seleccionamos como una fuente significativa a Sullivan, Clarke y Clarke (2013), quienes tomando como referencia lo propuesto por Clark y Peterson (1986) lograron identificar los factores que influyen en los docentes al seleccionar tareas matemáticas dentro de un marco más general y lo agruparon en cuatro categorías: el conocimiento del profesor, las concepciones del profesor, las restricciones y las intenciones del profesor. Estos autores argumentan que a toda acción del profesor la antecede una intención, es decir lo que esperan lograr, cómo lo pueden lograr, qué podría impedirlo, y cómo pueden traspasar estos obstáculos, y que a su vez, esa intención está influenciada por factores, como sus conocimientos, sus concepciones, y posibles restricciones, los cuales interactúan entre sí.

Con respecto al conocimiento del profesor, hay dos categorías del conocimiento que necesitan los profesores para convertir tareas en lecciones, y para la enseñanza de las matemáticas en general: el conocimiento sobre el tema en la materia y el conocimiento del contenido pedagógico (Hill, Ball y Schilling, 2008). Por otro lado, las concepciones del profesor, entre las cuales se encuentran sus creencias y actitudes hacia las matemáticas y hacia la enseñanza en general, se manifiestan en los tipos de tareas que seleccionan y en la forma de cómo las usan (Hannula, 2004). Finalmente, en cuanto a las restricciones, estos autores se refieren a un conjunto de variables adicionales como las restricciones que los maestros pueden experimentar en la implementación de dichas tareas, como en la diversidad de los estudiantes y sus habilidades para el lenguaje matemático (Delpit, 1998).

ISSN: 2594-1046

4. MÉTODO

En este trabajo nos centramos en uno de los protagonistas de la actividad del aula, el profesor, y buscamos analizar los factores que influyen en la selección de tareas matemáticas en docentes de secundaria. De acuerdo a las características de nuestro problema de investigación y a los objetivos que nos hemos planteado, consideramos que el mejor enfoque que nos permitirá abordar el problema de investigación es el interpretativo.

En este apartado se describirá el contexto en el que se pretende llevar a cabo el estudio, así como los instrumentos con los que se recolectará la información y los procedimientos que se seguirán para la codificación de esta.

4.1. Contexto de la investigación

Se pretende realizar la investigación con seis profesores de matemáticas en servicio que se encuentren impartiendo clases en primero, segundo y tercer grado en escuelas secundarias en la Ciudad de Puebla.

4.2. Instrumentos de recolección de información

Durante el proceso de recolección de información, se utilizarán dos instrumentos: la planeación didáctica del docente y una entrevista a profundidad.

En primer lugar, se solicitará a cada docente algunas de sus planeaciones didácticas, ya sea la que entregan a la dirección de la escuela, una planeación argumentada o alguna que utilicen en su día a día. A partir de esas planeaciones, se pretende identificar y caracterizar el tipo de tareas que los docentes eligieron en ellas. En caso de que dichas planeaciones no tengan suficiente grado de detalle como para identificar tareas matemáticas utilizadas en el aula, se les solicitará que muestren alguna libreta de sus estudiantes. Después se llevarán a cabo entrevistas a profundidad, las cuales serán grabadas en audio.

Para llevar a cabo el análisis de la investigación, las entrevistas se transcribirán y codificarán, donde se pretenderá identificar las intenciones que el profesor tiene para seleccionar dichas tareas y finalmente profundizaremos sobre cuáles son los factores que influyeron en el profesor para elegir esas tareas en relación con sus intenciones.

5. CONCLUSIONES

La selección de las tareas para el aula es uno de los aspectos principales dentro de las labores diarias que realiza un profesor, por ello es esencial tener presentes los elementos más notables que permitan analizar qué lo orienta a seleccionar dichas tareas.

Nosotros pretendemos realizar una investigación que no esté muy lejos de las actividades cotidianas de los profesores. Al analizar cuáles son los factores que influyen en los profesores en la selección de tareas matemáticas, queremos descubrir si existe algún factor en común que los limite al uso de ciertas tareas en particular.

Finalmente, los resultados que esta investigación arroje pueden ser de utilidad, en primer lugar, para que los propios profesores reflexionen y profundicen en la caracterización de las tareas para el aula que utilizan, así como en los factores de fondo que en ellos influyen para elegirlas. Y en segundo lugar, consideramos que descubrir los factores relativamente específicos que influyen en la selección de tareas para el aula propuestas por los propios profesores, puede ayudar a que los programas de formación inicial y continua de docentes de matemáticas, específicamente de nivel secundaria, se enfoquen en las necesidades evidentes de los profesores respecto a la selección de tareas matemáticas.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Anthony, G., & Walshaw, M. (2009). *Effective pedagogy in mathematics.* Educational series 19. Brussels: International Academy of Education; Geneva: International Bureau of Education.

Ávila, A. (2013). *Una década de investigación educativa en conocimientos disciplinares en México 2002-2011: Matemáticas, ciencias naturales, lenguaje y lenguas extranjeras*. México: ANUIES-COMIE.

Clark, C. M., & Yinger, R. J. (1979). Teacher's thinking. In P. L. Peterson y H. J. Walberg (Eds.), *Research on teaching*. Berkeley, CA: McCutchan.

Clark, C. M., & Peterson, P. (1986). Teachers´ Thought Processes. In M. C. Wittrock (Ed.): *Handbook of Research on Teaching* (3rd. ed.). New York: Macmillan.

Clarke, D., & Roche, A. (2010). Teachers' Extent of the Use of Particular Task Types in Mathematics and Choices behind That Use. *Mathematics Education Research Group of Australasia*.

Clarke, B., Grevholm, B., & Millman, R. (2009). *Tasks in Primary Mathematics Teacher Education*. USA: Springer.

Charalambous, C. (2010). Mathematical knowledge for teaching and task unfolding: An exploratory study. *The Elementary School Journal*, *110*(3), 247-278.

Christiansen, B., Howson, G., & Otte, M. (Eds.) (1986). *Perspectives on Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer.

Dahllof, U., & Lundgren, U. (1970). *Macro and micro approaches combined for curriculum process analysis: A Swedish educational field proyect*. Gutemburgo, Suecia: Universidad de Gutemburgo.

Delpit, L. (1988). The silenced dialogue: Power and pedagogy in educating other people's children. *Harvard Educational Review, 58*(3), 280–298.

García, M., & Benítez, A. (2011). Competencias Matemáticas Desarrolladas en Ambientes Virtuales de Aprendizaje: el Caso de MOODLE. *Rev. Formación Universitaria*, *4*(3), ISSN: 0718-5006.

Geiger, V., Goos, M., Dole, S., Forgasz, H., & Bennison, A. (2014). Devising principles of design for numeracy tasks. In Curriculum in focus: Research-guided practice: *Proceedings of the 37th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 239-246).

Gemad, Grupo (2013). An experience of teacher education on task design in Colombia. Comunicación presentada en *ICMI Study 22*. Task Design in Mathematics Education. Oxford.

Giménez, J., Font, V., & Vanegas, Y. (2013). Designing Professional Tasks for Didactical Analysis as a research process. En C. Margolinas (Ed.), *Task Design in Mathematics Education* (pp. 581-590). Oxford, England: Proceedings of ICMI Study 22.

Godino, J. D. (2013). Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Goñi, J.M. (2011). *Didáctica de las matemáticas. 1ª ed*. España: GRAÓ.

González, M. J., Gómez, P., Polo, I., & Restrepo, Á. (2015). Conocimientos puestos en juego por futuros profesores de matemáticas cuando justifican la selección de tareas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 1815-0640.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (2004). *Resultados de las pruebas PISA 2000 y 2003 en México*. Recuperado de: http://www.inee.edu.mx/images/stories/Publicaciones/Estudios_internacionales/PISA2000_2003/Completo/informepisa2003.pdf

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (2007). *PISA 2006 en México Conclusiones*. Recuperado de: http://www.inee.edu.mx/images/stories/Publicaciones/Estudios_internacionales/PISA2006_ejecutivo/Completo/pisaresumen.pdf

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (2010). *México en PISA 2009*. Recuperado de: http://www.inee.edu.mx/images/stories/Publicaciones/Estudios_internacionales/PISA_2009/Completo/pisa2009.pdf

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (2013). *México en PISA 2012 principales resultados*. Recuperado de: http://www.slideshare.net/vmtaguil/resultados-pisa-2012

Jackson, P. W. (1968). *La vida en las aulas*. Madrid: Morata.

La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (2014). *Panorama de la Educación 2014, México*. Recuperado de: https://www.oecd.org/edu/Mexico-EAG2014-Country-Note-spanish.pdf

López y Mota, A. D. (2003). *Saberes Científicos, Humanísticos y Tecnológicos. 1ª ed*. México: Grupo Ideograma Editores.

Mike, A., & Lisa, C. (2003). Teachers and researchers collaborating to develop teaching through problem solving in primary mathematic. Comunicación presentada en *ICMI Study 22*. Task Design in Mathematics Education. Oxford.

O'Shea, H., & Peled, I. (2009). The task types and mathematics learning research project. In *Annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Roberta Hunter, Brenda Bicknell, Tim Burgess), Vol. 2, pp. 714-717.

Pochulu, M., Font, V., & Rodríguez, M. (2015). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.*

Remillard, T., Herbel-Eisenmann, B., & Lloyd, G. (2009). *Mathematics Teachers at Work Connecting Curriculum Materials and Classroom Instruction*. New York: Springer.

Shavelson, R. J., & Stern, P. (1981). Research on Teachers' Pedagogical Thoughts, Judgments, Decisions, and Behavior. *Review of Educational Research*, *51*(4), 455-498.

Shavelson, R., & Stern, P. (1983). Investigación sobre el pensamiento pedagógico del profesor, sus juicios y decisiones y conductas. En J. Gimeno Sacristan y A. I. Pérez Gómez. (Dir.), *La enseñanza: su teoría y su práctica.* Madrid: Akal.

Sullivan, P., Clarke, D., & Clarke, B. (2013). *Teaching with Tasks for Effective Mathematics Learning*. New York: Springer.

Sullivan, P., & Davidson, A. (2014). The role of challenging mathematical tasks in creating opportunities for student reasoning. In J. Anderson, M. Cavanagh & A. Prescott (Eds.). Curriculum in focus: Research guided practice. Proceedings of the *37th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, pp. 605–612. Sydney: MERGA.

Sierpinska, A. (2003). Research in Mathematics Education: Through a Keyhole. In E. Simmt & B. Davis (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of Canadian Mathematics Education Study Group*: Acadia University.

Smith, M. S., & Stein, M. K. (1998). Selecting and Creating Mathematical Task. From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3*(5), 344-350.

Stein, M. K., & Lane, S. (1996). Instructional tasks and the development of student capacity to think and reason and analysis of the relationship between teaching and learning in a reform mathematics project. *Educational Research and Evaluation, 2*(1), 50–80.

Stein, M. K., Grover,B. W., & Henningsen, M. (1996). Building studentcapacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal*, 33, 455-488.

Sullivan, P. (2011). *Teaching mathematics: Using research-informed strategies* (pp. 31-38). Camberwell: Australian Council for Educational Research.

Sullivan, P., Clarke, D., Clarke, B., & O'Shea, H. (2010). Exploring the relationship between task, teacher actions, and student learning. *PNA, 4*(4), 133-142.

Wood, T. (2002). Demand for Complexity and Sophistication: Generating and Sharing Knowledge About Teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *5*(3), 201-203.

Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

VARIABLES QUE FAVORECEN EL APRENDIZAJE DE LA ESTADÍSTICA CON PROYECTOS

Alicia Islas López
Universidad Autónoma de Yucatán. aliciaislasl@hotmail.com

Jesús Enrique Pinto Sosa
Universidad Autónoma de Yucatán. psosa@correo.uady.mx

Resumen

En la asignatura de Matemáticas V, en el primer bloque, se desarrolla Introducción a la Estadística con la estrategia didáctica "Aprendizaje basado en proyectos". El presente estudio tiene como objetivo describir la percepción que tienen los alumnos sobre el aprendizaje de la estadística con proyectos e identificar los factores que favorecen su aprendizaje. El factor central es el uso de la estrategia didáctica y como factores a relacionar el desempeño docente, las actitudes del estudiante hacia la estadística, los conocimientos previos y el uso práctico de la estadística. La población consta de 1450 alumnos matriculados en el quinto semestre de los bachilleratos pertenecientes al subsistema de las Preparatorias Estatales en Mérida. Se seleccionará una muestra estratificada proporcional de 640 alumnos, quienes habrán tomado el curso de introducción a la estadística usando la estrategia estadística con proyectos. De los resultados, los docentes podrán enfatizar en el factor principal, para que los estudiantes mejoren sus aprendizajes.

Palabras clave: aprendizaje basado en proyectos, estadística, percepción, variables

1. INTRODUCCIÓN

A lo largo de la historia de la educación se han hecho diversas investigaciones dedicadas a encontrar alternativas para lograr que el proceso de enseñanza y aprendizaje sea más eficaz y eficiente, y con ello contribuir a que los proyectos educativos de formación puedan perfeccionarse y lograr la calidad y pertinencia dentro de la sociedad.

Las escuelas Preparatorias Estatales en Yucatán se rigen por el Plan de Estudios (PE) 2011, el cual cumple con los lineamientos que establece la Reforma Integral de Educación Media Superior (RIEMS) y propone un cambio del enfoque teórico constructivista por el de competencias, buscando que los estudiantes integren sus habilidades, conocimientos y actitudes en un contexto específico. El PE está conformado por 79 secuencias didácticas, 56 son de tronco común y 23 optativas (de entre las cuales se eligen 4); están divididas en 5 áreas disciplinares: Matemáticas, Experimentales, Comunicación, Sociales y Humanidades.

ISSN: 2594-1046

En el quinto semestre se ubica la asignatura de Matemáticas V, que pertenece al tronco común, particularmente en el bloque 1, el contenido curricular se centra en "Introducción a la estadística". La secuencia de Matemáticas V establece que los estudiantes deben desarrollar la competencia disciplinar No. 8 del área de Matemáticas la cual es "Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos".

Para el alcance de las competencias, una de las alternativas empleadas en la asignatura es el uso de estrategias didácticas, como la estrategia de aprendizaje basado en proyectos. Tobón, García y Pimienta (2010) mencionan que ésta consiste en realizar proyectos con los estudiantes para abordar un problema del contexto establecido previamente, por medio de la sistematización de actividades y tareas concatenadas que se relacionan con la solución del problema. También señalan que tiene tres grandes momentos: planeación, ejecución y socialización del producto alcanzado.

Particularizando dicha estrategia a la estadística, se puede decir que tenemos lo que Batanero llama "estadística con proyectos" y conceptúa como una estrategia que contempla cuatro fases en torno a realizar una investigación estadística: a) planteamiento del problema, b) decisión sobre los datos a recoger, c) recogida y análisis de los datos y d) obtención de conclusiones sobre el problema planteado (Batanero y Díaz, 2005). El aprendizaje de la estadística con proyectos facilitará en los discentes el razonamiento estadístico más que los métodos, en la medida en la que ellos lo apliquen en temáticas interesantes y reales para ellos.

El presente estudio tiene como objetivo describir la percepción que tienen los alumnos sobre el aprendizaje de la estadística con proyectos e identificar las variables que favorecen su aprendizaje.

Debido a la globalización, han surgido redes de conexión entre la gente de diferentes continentes y un flujo masivo de información. La comunidad educativa de estadística tiene la responsabilidad civil de desarrollar en los estudiantes una alfabetización estadística (Gal, 2002). Para Garfield y Ben-Zvi (2007) la educación estadística puede ser vista como una nueva disciplina emergente comparada con otras áreas de estudio. Tiene una base de investigación difícil de localizar y construir. Según estos autores, el alfabetismo estadístico es una habilidad clave que se espera de los ciudadanos sobre información encontrada en la sociedad, es decir, implica conocer el significado de los términos de la estadística básica: comprender, utilizar e interpretar diferentes representaciones de datos.

El proyecto de investigación es una ampliación del estudio de Flores (en prensa) que se focalizó sobre las “Características metodológicas de la enseñanza de la estadística por proyectos en el nivel Medio Superior”. La investigación se desarrolla desde la perspectiva del alumno, para establecer características que permitan ampliar los aspectos que se interrelacionan con cómo se lleva a cabo la estadística con proyectos. El factor central de análisis se encuentra en el uso de la estrategia didáctica “Estadística con proyectos” y como factores a relacionar el desempeño docente, las actitudes del estudiante en estadística, los conocimientos previos y el uso práctico de la estadística.

2. MARCO TEÓRICO

La estadística surgió mediante un proceso de desarrollo y evolución. El uso de la estadística se aprecia desde épocas muy antiguas, los primeros indicios se sitúan en el año 3050 A. C., en el antiguo Egipto. En México se ha encontrado la presencia de información estadística desde tiempos de la época prehispánica hasta nuestros días. Las evidencias se encuentran en códices, crónicas, restos arqueológicos, publicaciones, personajes, datos económicos, políticos, sociales, psicológicos, biológicos o físicos. En 1760, Geofredo Achenwall es quien le da el nombre de estadística, la cual se puede definir como:

> La estadística estudia el comportamiento de los fenómenos llamados de colectivo. Está caracterizada por una información acerca de un colectivo o universo, lo que constituye su objeto material; un modo propio de razonamiento, el método estadístico, lo que constituye su objeto formal y unas previsiones de cara al futuro, lo que implica un ambiente de incertidumbre, que constituyen su objeto o causa final. (Cabriá, 1994).

Ante el flujo masivo de información, la educación estadística en los alumnos de bachillerato no puede quedar limitada a sus definiciones y a la memorización de algoritmos, ni al cálculo y procedimientos técnicos, sino a que tengan experiencias didácticas y construcciones sucesivas que garanticen el éxito ante las situaciones de aprendizaje, hacia una estadística para la vida.

El aprendizaje está determinado por un gran número de inconstantes. La psicología del aprendizaje se ha preocupado por descubrir qué variables independientes deberían manipularse, así como cuáles variables dependientes investigarse. Algunos autores clasifican los factores de aprendizaje de la siguiente manera: Adell (2006) en intelectuales, motivacionales, de personalidad, actitudes, contextos y externos; Riquelme (2008) en actitudes, aptitudes y contenidos.

Investigaciones como las de Cornejo y Redondo (2007) dan cuenta que para hacer la elección de los factores a estudiar debe considerarse el conocimiento de los contextos escolares y la evidencia de estudios sobre teoría de aprendizaje por reestructuración de significados. La literatura sugiere la necesidad de darle un peso a cada uno de los factores asociados al aprendizaje, relacionarlos entre sí y revisar la causalidad lineal entre ellos, con el fin de mejorar la calidad y pertinencia del proceso instruccional a estudiar.

Es por ello que, desde la clasificación de los factores de aprendizaje, las modificaciones que se han hecho en las secuencias didácticas con base en el enfoque por competencias, la experiencia de docentes de matemáticas en el nivel medio superior, la observación en clase del comportamiento de los alumnos, los resultados obtenidos en años anteriores y el interés de saber cómo los jóvenes de bachillerato adquieren mejores aprendizajes, se hizo la selección de cinco factores.

En los últimos años, en Latinoamérica se han hecho investigaciones sobre temas como la estadística, la estadística con proyectos, factores relacionados con el docente, actitudes hacia las matemáticas, conocimientos previos de las matemáticas o el uso de las matemáticas; sin embargo, todos han sido estudiados de manera individual. En el volumen 27 del Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (ALME 27) se encuentran estudios relacionados con la estadística, por ejemplo "¿Para qué enseñamos estadística?, "Una forma divertida de experimentar y jugar con la estadística" y "La resolución de problemas en el aprendizaje estadístico"; estudios relacionados con la estadística con proyectos, por ejemplo "Idoneidad didáctica de un proceso de instrucción en una enseñanza de la estadística con proyectos" y "El ABP en la enseñanza de las matemáticas como estrategia didáctica pata el desarrollo del pensamiento crítico e el nivel medio básico y modalidad telesecundaria" (Lestón, 2014).

El ALME 27 también presenta reportes de investigaciones focalizadas en el docente, por ejemplo "Impacto de las prácticas instruccionales de los formadores de profesores de matemáticas" y "Reflexiones del profesor de matemáticas al analizar los errores de los estudiantes"; en las actitudes de los estudiantes, por ejemplo "Actitudes de estudiantes de secundaria hacia las matemáticas", "Desarrollo de actitudes hacia el estudio de las matemáticas en educación secundaria. Su relevancia en el logro de aprendizajes esperados" y "Actitudes hacia las matemáticas de futuros profesores de E.G.B de Chile. Estudio de cuatro descriptores actitudinales".

De igual manera, con los conocimientos previos, por ejemplo "Diagnóstico en estudiantes de nuevo ingreso a nivel superior: Competencias y dificultades matemáticas" y con el uso de las matemáticas, por ejemplo "Un estudio de la construcción social del conocimiento matemático en el cotidiano".

Hasta el momento no se encontró un estudio que relacione las variables que favorecen el aprendizaje de la estadística con proyectos en el quinto semestre de bachillerato. En este estudio se relacionará la variable "aprendizaje"; después de que se manipule al grupo con la estrategia didáctica "estadística con proyectos"; las variables a relacionar son: metodología de la estadística con proyectos, desempeño docente, actitudes hacia la estadística, conocimientos previos y usos de la estadística.

3. METODOLOGÍA DE LA ESTADÍSTICA CON PROYECTOS

Según Riquelme (2008), corresponde al factor de contenidos, ya que la estadística en una asignatura que corresponde al plan de estudios cuyos núcleos temáticos se desarrollan con proyectos; es decir, este factor se desprende de la oferta curricular, ajustándose a las necesidades colectivas e individuales del grupo.

Para Da Silva, Porciúncula y Pinto (2014) la estrategia de proyectos alienta a los estudiantes a desarrollar la capacidad de hacer preguntas, buscar respuestas, a pensar de forma crítica y construir argumentos coherentes y aprender a aprender a través de su propia investigación. El primer paso en el desarrollo de la estadística con proyectos es seleccionar un tema que provoque en los estudiantes curiosidad y formular una pregunta de investigación. El proyecto promueve una discusión contextualizada de los temas presentados en el curso, permite a los estudiantes adquirir conocimientos específicos en su área temática, así como la experiencia de las relaciones interpersonales y la comunicación social.

Batanero menciona que en un curso de estadística se debe capacitar al alumno para recopilar, organizar, depurar, almacenar, representar y analizar sistemas de datos sencillos. En los resultados de la investigación que realizó Flores (en prensa) se encontraron las características metodológicas con las que se debe llevar a cabo la estadística con proyectos. Éstas se encuentran en la Tabla 1.

3.1. Desempeño docente

Según Adell (2006) corresponde al factor externo. El desempeño docente es un conjunto de acciones que se realizan dentro y fuera del aula, destinadas a favorecer el aprendizaje de los estudiantes con relación a las competencias definidas en un plan de estudios. Supone que la actividad docente involucra la coordinación y gestión de la enseñanza, el desarrollo de métodos de enseñanza, actividades de aprendizaje y de evaluación que implican actividades orientada a planificar, organizar, coordinar, y enseñar a aprender a los estudiantes, así como a evaluar su aprendizaje (Arregui, Chaparro y Díaz, 2015).

Por lo que, la evaluación del desempeño docente representa la valoración sistemática de la actuación del profesor, considerando su práctica docente en la orientación y guía que le da a los alumnos, con la finalidad de relacionar el desempeño docente con los aprendizajes que tienen los alumnos que estudian bajo la estrategia de la estadística con proyectos.

Aspectos	Características
Duración	Mini
	Cortos (medio semestre)
	Largos (un semestre)
Tamaño del grupo (estudiantes)	Individual
	Dos o tres
	De tres a cinco
Integración del equipo	Por afinidad
	Por tema
	Por asignación del docente
Elección del tema	Por los alumnos
	Por el docente
	Por consenso
Recolección de datos	Por los alumnos
	En base de datos
	Brindados por el docente
Presentación de resultados	Reporte escrito
	Presentación oral
	Ambos
Evaluación	Heteroevaluación con rúbricas
	Autoevaluación
	Coevaluación
Estrategia de recolección de datos	Encuesta
	Lista de cotejo

Tabla 1: Características metodológicas de los proyectos en Estadística (tomado de Flores, en prensa)

3.2. Actitudes hacia la estadística

Riquelme (2008) lo considera en el factor actitudes, como parte de las expectativas e intereses de los estudiantes. Éste es seleccionado debido a los cambios en las reformas con respecto al enfoque educativo, las estrategias de aprendizaje y métodos de enseñanza. Se necesitan más investigaciones para entender las actitudes de los estudiantes, por qué los contextos de aprendizaje no tradicionales son más propensos a causar respuestas afectivas que los currículos tradicionales. Castañeda y Álvarez dicen que cuando las actitudes hacia un contenido de aprendizaje en específico son buenas, entonces posiblemente se logre tener aprendizajes significativos del mismo (2004).

Por lo que es necesario indagar en qué medida las actitudes que los discentes tienen hacia la estadística repercuten en su aprendizaje. Las actitudes son valoraciones generales que una persona hace sobre ellos mismos, otras personas, objetos o conductas, que tienen una importante función psicológica para los individuos.

3.3. Conocimientos previos

Riquelme lo considera en el factor aptitudes, específicamente en la capacidad intelectiva. Fagundes, Sato y Laurino (1999) sugieren que los proyectos comienzan con los conocimientos previos que tienen los estudiantes, en un tema de interés para ellos. Por su parte, Batanero menciona que, dependiendo de los conocimientos previos de los alumnos, el professor puede suprimir o añadir actividades en la realización de los proyectos de estadística (2005). Esto con la intención de tomar medidas previas al iniciar el curso o durante el transcurso del bloque; se podría implementar un curso introductorio, impartir clases de regularización durante una semana, o asesorías previas. En caso de que los conocimientos previos resulten satisfactorios, los docentes impartirán el curso con la tranquilidad sabiendo que no es algo que les afecta o que requiera de medidas de acción.

3.4. Usos de la estadística

Adell (2008) lo considera en el factor de contextos. El uso de la estadística en contextos reales desarrolla los intereses de los estudiantes. Da Silva *et al*. (2014) afirman que el aprendizaje mejora cuando se toman en cuenta las experiencias del individuo y sus interacciones con el contexto. Tambien, que aprender estadística usando los proyectos promueve en la persona la conexión de temas entre la discusión, interpretación de resultados y la reflexión de conceptos de estadística. Las interacciones del alumno con situaciones que son de su interés ayudan a comprender el proceso estadístico.

Según Batanero y Díaz (2005), cuando el alumno construye un sistema de datos propio tiene que buscar información que les falte, comprobar y depurar los errores al recopilar los datos, añadir nueva información al proyecto, aprendiendo, comprendiendo y valorando los trabajos realizados con la estadística.

ISSN: 2594-1046

4. MÉTODO

La investigación se fundamenta en la RIEMS, con base en los planes de estudio actuales del subsistema de las Preparatorias Estatales en Yucatán, que se implementan a partir de 2011 con un modelo educativo en competencias con un enfoque Socioformativo. Se trata de una investigación desde el paradigma positivista de corte cuantitativo correlacional.

La estadística con proyectos es implementada como estrategia didáctica en la enseñanza de la asignatura *Introducción a la estadística*; la cual se imparte en 30 sesiones de 45 min, a alumnos que cursan el quinto semestre de las preparatorias que pertenecen al subsistema de las Preparatorias Estatales en Yucatán. La población de estudio son 1450 alumnos matriculados en el quinto semestre de los bachilleratos pertenecientes al subsistema de las Preparatorias Estatales en Mérida, Yucatán, México. Se seleccionará una muestra estratificada proporcional de 640 alumnos, quienes habrán tomado el curso de introducción a la estadística usando la estrategia didáctica con proyectos.

Se les aplicará un instrumento en agosto de 2016, al inicio del curso, en el que se recopilará información sobre los conocimientos previos que tienen de la estadística y otro instrumento en noviembre al finalizar el curso, para obtener información sobre los otros cuatro factores. Posteriormente se hará el análisis de los datos, primero con el apoyo del SPSS para describir la percepción que tienen los alumnos sobre el aprendizaje de la estadística con proyectos, y después con la técnica de análisis regresión lineal múltiple se obtendrá la ecuación para determinar el factor que favorece más en el aprendizaje de los estudiantes.

El proyecto está en su fase de desarrollo. Se usarán dos instrumentos. El primero es para determinar el aprendizaje de la estadística, por medio del listado de calificaciones al término de la impartición de la asignatura; estás serán proporcionadas por el departamento de control escolar del subsistema.

El segundo instrumento será un cuestionario con base en los objetivos del estudio, el cual se sometió al jueceo de expertos y prueba piloto con los estudiantes. El cuestionario está dividido en dos partes. La primera se aplicará al inicio del curso, consta de 10 ítems de ejecución máxima, con cuatro opciones de respuesta. Los ítems se seleccionaron de pruebas estandarizadas, diseñadas en México, como la prueba PLANEA para el Nivel Medio Superior (2015), y la Prueba ENLACE para segundo y tercero de secundaria (2014).

La segunda parte del cuestionario se aplicará al finalizar el curso, consiste en cuatro apartados:

- Características metodológicas de la estadística con proyectos elaborados con base en la literatura encontrada en Flores (en prensa) y las percepciones con respecto a la elaboración del proyecto estadístico, modificado de Rodríguez-Sandoval y Cortés-Rodríguez (2010);
- El desempeño docente, contempla dimensiones como la planeación, clima del aula e instrucción, modificado de Aguirre (2009);
- Actitudes hacia la estadística, cuyas dimensiones son disposición para aprender estadística, criterios sobre utilidad de los contenidos de estadística, valoración sobre su capacidad para aprender estadística y visión sobre la estadística, modificado de Castañeda y Álvarez (2004); y
- Conocimientos y uso de la estadística cuya dimensión es uso real de estadística en situaciones cotidianas, elaborado con base en la exploración y análisis de las respuestas que los alumnos dieron a la pregunta: Después de tomar el curso de estadística ¿en dónde has usado a la estadística en tu vida diaria?

5. CONCLUSIONES

Cuando se llevan a cabo los proyectos es trascendental que sean los alumnos quienes identifiquen, discriminen y seleccionen la temática a trabajar en el proyecto, de manera que sea relevante para ellos; pues de esa manera los aprendizajes serán más significativos, es decir, podrán aplicar en el futuro lo aprendido sobre la introducción a la estadística.

En los resultados de la prueba piloto se encontró que los conocimientos previos varían entre las escuelas, por lo que no se puede generalizar en los estudiantes el nivel que tienen previamente sobre la estadística. Es importante que los docentes realicen una evaluación diagnóstica para identificar las características de sus estudiantes.

Con respecto al uso de la estadística en la entrevista cualitativa realizada a 10 alumnos fue muy grato encontrar múltiples usos que le dan a la estadística, por ejemplo las temáticas más usadas fueron la interpretación de las frecuencias relativas porcentuales, el análisis de comportamientos para la toma de decisiones y la interpretación de las medidas de centralización en datos ordenados. Se puede decir que si al concluir el curso fueron capaces de usarla en situaciones ordinarias, posteriormente, cuando se encuentren ante situaciones laborales o profesionales podrán interpolarla en situaciones relevantes aplicando las herramientas que adquirieron en su alfabetización estadística.

El proyecto permitirá reconocer aquellas variables que favorecen o no, cuando se lleva a cabo la estrategia "estadística con proyectos" en un curso regular, lo que permitirá reconocer los alcances en los aprendizajes que tiene en los estudiantes.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adell, M. A. (2006). *Estrategias para mejorar el rendimiento académico de los estudiantes (2a edición).* Madrid: Ediciones Pirámide.

Aguirre, F. (2009). *Desempeño Docente y su relación con la motivación del alumno en la Escuela de Capacitación Adventista Salvadoreña.* (Tesis de Maestría). Universidad de Montemorelos, NL, México. Recuperado de http://dspace. biblioteca. um. edu. mx/xmlui/handle/123456789/298.

Arregui, I. G., Chaparro, A. L., & Díaz, C. (2015). Instrumento para evaluar el desempeño docente en educación secundaria desde la percepción de los estudiantes. *Ponencia presentada en el II Congreso Latinoamericano de Medición y Evaluación Educativa (COLMEE).* Disponible en: http://www. colmee. mx/public/conferences/1/presentaciones/ponenciasdia3/48Instrumento. pdf.

Batanero, C., & Díaz, C. (2005). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. *Presentado en el VII Congreso Galego de Estadística e Investigación de Operaciones*, Portugal.

Cabriá, S. (1994). *Filosofía de la estadística*. España: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Valencia.

Castañeda, A., & Álvarez, M. (2004). La reprobación en matemáticas. Dos experiencias. *Tiempo de educar, 5*(9), 141-172.

Cornejo, R., & Redondo, J. (2007). Variables y factores asociados al aprendizaje escolar. Una discusión desde la investigación actual. *Estudios pedagógicos, 33*(2), 155-175.

Da Silva, M., Porciúncula, M., & Pinto, S. (2014). Teaching Statistics Through Learning Projects. *Statistics Education Research Journal, 13*(2), 177-186.

Fagundes, L., Sato, L., & Laurino, D. (1999). Aprendizes do Futuro: As inovações começaram [Learners of the Future: Let the innovations begin]. *Coleção Informática para a Mudança na Educação.*

Flores, A. (en prensa). *Características metodológicas de la enseñanza de la estadística por proyectos en el nivel medio superior*. (Tesis de Maestría no publicada), Universidad Autónoma de Yucatán, México.

Gal, I. (2002). Adults´statistical literacy: Meanings, components, responsabilities. *International Statistical Review, 70*(1), 1-25.

Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2007). How students learn statistics revisited: A current review of research on teaching and learning statistics. *International Statistcal Review, 75*(3), 372-396.

Lestón, P. (Ed.). (2014). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 27.* México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Riquelme, M. (2008). *Lineamientos para la propuesta de un modelo pedagógico desde la perspectiva del aprendizaje significativo*. Recuperado el 12 de junio de 2009, de http://www.vulcano.lasalle.edu.co/~docencia/Aprendizaje_Sig_general.htm

Rodríguez-Sandoval, E., & Cortés-Rodríguez, M. (2010). Evaluación de la estrategia pedagógica "aprendizaje basado en proyectos": percepción de los estudiantes. *Revista da Avaliação da Educação Superior, 1*(15), 31-37.

Tobón, S. T., Prieto, J. H. P., & Fraile, J. A. G. (2010). *Secuencias didácticas: aprendizaje y evaluación de competencias*. México: Pearson educación.

Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

CARACOL NAUTILUS, ESTUDIO DE LA COVARIACIÓN LOGARÍTMICA EN COORDENADAS POLARES

José Antonio Bonilla Solano
Universidad Autónoma de Guerrero. jbonillasolano@gmail.com

Marcela Ferrari Escolá
Universidad Autónoma de Guerrero.mferrari@uagro.mx

Resumen

En este artículo presentamos avances de nuestra investigación en búsqueda de ampliar los estudios de la covariación logarítmica. Las actividades diseñadas inician con la construcción de un caracol nautilus con doblado de papel. Al observar la figura se percibe que la curva se construye a través de triángulos semejantes, donde sus puntos se pueden localizar en el plano polar con un lado del triángulo y su ángulo. Esto nos invita a trabajar en otro sistema de coordenadas y utilizar geometría dinámica. Este ambiente propicia una red de modelos donde al localizar puntos pertenecientes a la curva y tabularlos, se percibe la regularidad que existe entre estos, encontrando así una progresión aritmética en los ángulos y una progresión geométrica en los radios (lado del triángulo) datos necesarios para abordar la covariación logarítmica.

Palabras clave: Espiral logarítmica, coordenadas polares, socioepistemologia.

1. INTRODUCCIÓN

La construcción de un diseño como facilitador para el aprendizaje de un saber matemático nos induce a construir, desde prácticas sociales, un indicio que ayude a comprender el significado del objeto de estudio, una exploración de los fenómenos naturales que ocurren en nuestro entorno de vida. La construcción de cómo se conciben estos fenómenos nos lleva a estudiar las herramientas matemáticas, la articulación entre ellas, la emergencia de modelos que den cuenta del fenómeno en tanto argumentamos.

En nuestro afán de ampliar los estudios realizados sobre covariación logarítmica (Ferrari y Farfán, 2008 y 2010) al sistema de coordenadas polares, encontramos que varios trabajos de investigación sobre el uso escolar del sistema de coordenadas polares (Montiel, Wilhelmi, Vidakovic y Elstak, 2009; Ramírez y Ferrari, 2011; Moore, Paoletti y Musgrave, 2013) reportan que, por lo general, los estudiantes extrapolan argumentos válidos en el sistema de coordenadas cartesianas para interpretar las gráficas en polares. Evidencian también fragilidades en el uso de ángulos expresados en radianes (Martínez-Sierra, 2012), sin dejar de mencionar la problemática que surge al interpretar un par coordenado en este ambiente.

ISSN: 2594-1046

En este artículo, presentamos un avance de nuestra investigación sobre la argumentación de estudiantes de sexto semestre de la Licenciatura de Matemáticas alrededor de la covariación logarítmica en coordenadas polares. Reportamos entonces, el diseño de aprendizaje reflexionando sobre las herramientas y argumentos que emergen al construir, con plegado de papel, un caracol nautilus (Figura 1), así como el uso de geometría dinámica (GeoGebra) como herramienta para graficar su contorno propiciando una red de modelos que sustenta la covariación logarítmica.

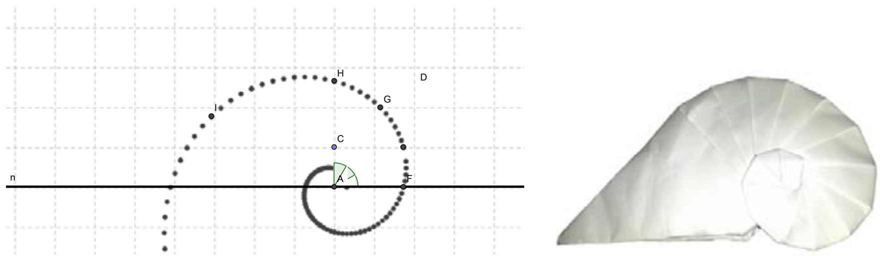


Figura 1: Esquema de un nautilus en coordenadas polares

2. MARCO TEÓRICO

En esta investigación nos identificamos con la socioepistemología al sostener que el saber no se limita a definir la relación que éste guarda con los objetos matemáticos sino a posicionar al ser humano en el acto mismo de significar, conocer, construir significados y en consecuencia estructurar sus sistemas conceptuales en tanto se lo problematiza. Ese saber emerge de prácticas sociales que no se limitan a caracterizar lo que el ser humano hace, sino a problematizar las causas del porqué lo hace, describir las circunstancias de cómo y cuándo lo hace, en dónde y por qué lo hace y cómo se concibe haciéndolo (Cantoral, 2013).

La Socioepistemología propicia la confluencia y relación dialéctica de aspectos que consideramos fundamentales al abordar un fenómeno didáctico. Contemplar y analizar el devenir de una noción a un objeto de saber; caracterizar las concepciones de los alumnos; dar cuenta de cómo vive una noción en las aulas y el discurso matemático escolar que se genera, ser conscientes que la matemática es un bien cultural inmerso en una sociedad y tiempo determinados que condiciona su comunicación y apropiación (Cantoral, 2013) conlleva profundizar en la reorganización de la obra matemática, en la reconstrucción de significados y en la matemática como actividad humana (Cordero, Cen & Suárez, 2010), supuestos básicos de la socioepistemología a la cual adherimos.

Ferrari (2008) reporta, en su indagación socioepistemológica, que se pueden distinguir tres etapas en el desarrollo de los logaritmos si se toma como eje central la relación entre las progresiones aritmética y geométrica; argumento utilizado por Napier para su primera definición y los aportes de Brigss para afinar su funcionamiento con el afán de *facilitar cálculos.* Elementos que también fueron utilizados por Bradardin, Huygens o Newton, entre otros, en la búsqueda de *modelar* el movimiento de un objeto en un elemento viscoso. Prácticas que este investigador consideró como las propulsoras de la construcción de los logaritmos.

Ferrari, Martínez y Méndez (2016) retoman de Confrey y Smith (1995) que "the construction of a counting and a splitting world and their juxtaposition through covariation provide the basis for the construction of an exponential function" (p. 80), idea que extienden a la función logarítmica. Parten entonces de la hipótesis epistemológica de que la incorporación explícita de la relación entre una progresión aritmética y una geométrica, que denominan covariación logarítmica, como la esencia misma de los logaritmos, propiciaría una integración, quizás más efectiva y por tanto más robusta, de esta noción como función (Ferrari, 2008). Función que ahora estudiamos en el ámbito del sistema de coordenadas polares.

En esta investigación nos interesa resaltar el papel que juega la modelación (Arrieta & Díaz, 2015), en tanto emerge como argumento unificador, la covariación logarítmica en un ambiente de coordenadas polares. Nos enfocamos entonces en estudiar los argumentos que emitan los estudiantes universitarios al involucrarlos en un ambiente especial diseñado utilizando el plegado de papel y el uso de geometría dinámica, elementos que propicien la construcción de una espiral logarítmica y su discusión. Compartimos con Krummheruer (2015) la idea de que, por lo general se asume que la argumentación, que parece ser bastante explícita y sofisticada en los participantes, es una condición previa para la posibilidad de aprender y no sólo el resultado deseado del conocimiento matemático puesto en juego. Es decir, el conocimiento matemático es argumentativo y surge en la participación de los estudiantes en "una práctica de explicar" (Garfinkel, 1967, p. 1, citado en Krummheruer, 2007). Práctica que es provechosa y de apoyo, así como la iniciativa para los procesos de aprendizaje matemático de los estudiantes.

3. METODOLOGÍA

Es el experimento de enseñanza la metodología de nuestra investigación. Un experimento de enseñanza consiste en una secuencia de pasos de episodios de enseñanza en los que los participantes son normalmente un investigador-docente, uno o más alumnos y uno o más investigadores-observadores (Steffe y Thompson, 2000, citado en Molina, Castro, Molina y Castro, 2011). Los experimentos de enseñanza se hacen para testar y generar hipótesis, durante el experimento, en general, o durante cada uno de los episodios, siendo en ocasiones necesario abandonar o reformular hipótesis a la luz de los datos. El objetivo último es elaborar un modelo del aprendizaje y/o el desarrollo de los alumnos, en relación con un contenido específico, entendiendo este aprendizaje como resultado de la manera de operar y las situaciones puestas en juego por el investigador-docente (Molina *et al*., 2011).

Además, tomando en cuenta las condiciones de recogida de datos, que es a través de grabaciones de video y voces, así como de evidencia física (instrumento de trabajo), el análisis que resulta hace perseguir el objetivo de nuestra investigación más allá de ver su efectividad sino, es mostrar por qué el diseño instruccional funciona y poder adaptarla a nuevas circunstancias (Confrey 2003).

4. DISEÑO DE LA ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

En búsqueda de actividades recreativas para participar en la Expomatemática de nuestra escuela, evento que desde 2004 se presenta en el Zócalo de Acapulco, donde compartimos nuestra alegría y esfuerzos por acercar las matemáticas al ciudadano y por tanto impulsar la divulgación de las ciencias, hallamos un video de Tomoku Fuse [1] sobre la construcción de un caracol nautilus con plegado de papel. Este video nos desafió a analizar qué herramientas matemáticas se involucran en el plegado y los argumentos que van emergiendo al ir reconociendo ciertas regularidades, con el fin de diseñar una actividad de aprendizaje. Nos interesa entonces propiciar la emergencia de una red de modelos en tanto manipulamos una hoja de papel y le damos una particular forma (Tabla 1)

Observando con cuidado la forma de este caracol o simplemente recorriendo con el dedo su borde se perciben dos elementos importantes, el *giro* por tanto una variación angular y el aumento de la distancia al centro, que al considerarlas simultáneamente, surge una espiral. Podemos entonces describir su forma al visualizar simultáneamente “ángulo-distancia” lo que nos invita a trabajar en el sistema de coordenadas polares y si nos detenemos en cómo varían, percibimos que la covariación logarítmica rige la curva.

Pero ¿Qué elementos permite visualizar esta contrucción? Si analizamos nuevamente el caracol, vemos que una de las figuras geométricas determinante en él son los triángulos (Figura 2), que van rigiendo la curva, esto nos lleva a pensar sobre un modelo articulando el fenómeno

ISSN: 2594-1046

(construir el caracol) con la evolución de triángulos rectángulos semejantes que nos inviten a reflexionar sobre la curva que envuelve nuestro caracol.

				
De un cuadrado obtenemos un romboide, doblamos a la mitad con respecto del eje menor, de lo obtenido doblamos la mitad entre el eje menor y el doblez anterior, repetimos el mismo procedimiento hasta obtener 8 longitudes.	De la mitad que queda se obtienen longitudes con valor uno y medio de las anteriores, iniciando con respecto del eje menor.	Doblamos diagonales.	Enrollamos.	Hacemos dobleces finales para concluir.

Tabla 1: Nautillus plegado de papel

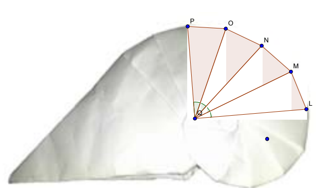
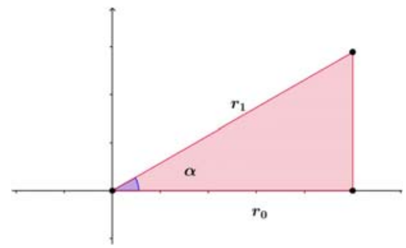


Figura 2: Ángulo constante

ISSN: 2594-1046

Con una simple inspección visual nos percatamos que tenemos una constante en los ángulos de los triángulos; por tanto, nuestra siguiente variante resulta ser la hipotenusa de los triángulos construidos. Para conocer la longitud de cada hipotenusa de estos triángulos rectángulos podemos recurrir a las razones trigonométricas. Si tenemos determinado el ángulo α, constante de nuestra construcción geométrica, y un radio inicial r_0 podemos calcular su hipotenus (r_1) con el coseno de α.

$$\cos \alpha = \frac{r_0}{r_1}$$



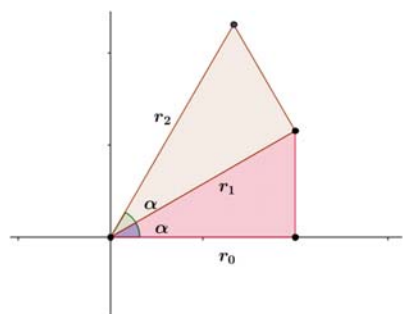
Despejando r_1

$$r_1 = \frac{r_0}{\cos \alpha}$$

Construir el siguiente triángulo, semejante al inicial, implica trazar una recta perpendicular a la hipotenusa del primer triángulo, quien fungirá como cateto del siguiente triángulo rectángulo. Luego, construir el ángulo α desde la hipotenusa y con esa apertura determinar un triángulo semejante al inicial. Así, hemos construído tres puntos de la curva, (1,0); (r_1, α) y $(r_2, 2\alpha)$.

Ahora obtengamos r_2 , usamos el mismo procedimiento que r_1

$$cos\alpha = \frac{r_1}{r_2}$$



Despejando r_2 y sustituyendo el valor de r_1

$$r_2 = \frac{r_0}{(cos\alpha)^2}$$

Así, obtenemos el valor de r_2.

Al construir más triángulos rectángulos semejantes logramos obtener más datos que podemos organizar en la Tabla 2:

Analizando los datos encontramos que en la variación de ángulos hay una progresión artimética, pues al hacer una resta entre dos elementos consecutivos encotramos que lo que va determinando es un α o que es lo mismo por cada triángulo vamos sumando un α, lo cual deriva directamente de la construcción donde se hizo notar que el ángulo de cada triángulo era constante.

N° de triángulos	Ángulo θ	Hipotenusa
1	A	$\frac{r_0}{cos\alpha}$
2	2α	$\frac{r_0}{(cos\alpha)^2}$
3	3α	$\frac{r_0}{(cos\alpha)^3}$
4	4α	$\frac{r_0}{(cos\alpha)^4}$
…	…	…
K	Kα	$\frac{r_0}{(cos\alpha)^k}$

Tabla 2: Tabla de datos

En el caso del radio obtenemos una progresión geométrica, pues al ir dividiendo dos elementos consecutivos obtenemos la razón $\frac{1}{\cos\alpha}$ y al ir multiplicando hacia adelante nos da el siguiente radio. La presencia simultánea de estas dos progresiones nos indican que hay implicada una coraviación logarítmica expresada en coordenadas polares.

Hemos logrado así de manera discreta, articular la construcción geométrica de triángulos semejantes con nuestro caracol mediante la acción de tabular. Nos interesa ahora analizar cómo construir cualquier punto, es decir, movernos del modelo geométrico-tabular, a un modelo algebraico-gráfico.

De la Tabla 2 podemos obtener las siguientes igualdades:

$$\theta = k\alpha \qquad (1)$$

$$r = (\frac{1}{(\cos\alpha)^k})r_0 \qquad (2)$$

De (1) obtenemos k.

$$k = \frac{\alpha}{\theta} \qquad (3)$$

Sustituimos en (2)

$$\frac{r}{r_0} = (\frac{1}{\cos\alpha})^{\frac{\alpha}{\theta}} \qquad (4)$$

Aplicando logaritmo natural en (4)

ISSN: 2594-1046

$$\ln\frac{r}{r_0} = \frac{\theta}{\alpha}\ln\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)$$

Aplicando exponencial de ambos lados de la ecuación

$$\frac{r}{r_0} = e^{\frac{\theta}{\alpha}\ln\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)}$$

Obteniendo como una constante a

$$b = \frac{1}{\alpha}\left(\ln\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)\right)$$

Para finalizar así, con la expresión algebraica de la espiral logarítmica en coordenadas polares:

$$r = r_0\, e^{b\theta}$$

Para lograr la gráfica de la curva, utilizando el software Geogebra, basta crear deslizadores para θ, r_0 y α, así como aplicar correctamente la expresión algebraica en "entrada" y construir un punto en coordenadas polares $(r;\theta)$. Dándole animación al deslizador θ y rastro al punto se puede observar la espiral logarítmica, como en el ejemplo de la imagen donde $\alpha = \frac{\pi}{4}$ y $r_0 = 1$.

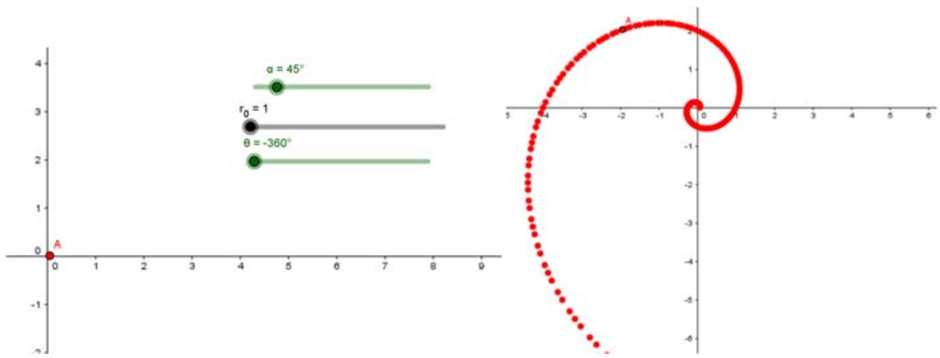


Figura 3: Espiral logarítmica con Geogebra

5. CONCLUSIONES

Al poner en escena esta actividad con alumnos del sexto semestre de la Licenciatura en Matemáticas, logramos percibir que algunas cuestiones del diseño esperan ser mejoradas. La actividad se desarrolló con la encomienda de construir triángulos semejantes dado un ángulo y lado, relativamente fácil para poder mirar datos. El desafío estuvo en encontrar la variación que había en la construcción, algo complicado en un principio, lo cual nos llevó al siguiente paso más desafiante: ¿cómo generalizar dando un ángulo y un lado cualesquiera, teniendo este último paso como tarea?

Las actividades diseñadas y la dinámica gestionada propiciaron discusiones sobre cómo describir la forma del caracol. Resultó interesante la argumentación del por qué sucedía, generándose nuevas preguntas y nuevas indagaciones en el diseño; elemento que estamos analizando.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arrieta, J., & Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 18*(1), 19-48.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. España: Gedisa.

Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(1), 66–86.

Cordero, F., Cen, C., & Suárez, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 13*(2), 187-214.

Ferrari, M, Martínez-Sierra, G., & Méndez, M. (2016). "Multiply by Adding": Development of the Logarithmic-Exponential Covariational Reasoning in High School Students. *Journal of Mathematical Behavior 42*, 92-108

Ferrari, M., & Farfán, R. M. (2010). Una socioepistemología de lo logarítmico. [Número especial]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13*(4), 53-68.

Ferrari, M. (2008). *Un acercamiento socioepistemológico a lo logarítmico: de multiplicar sumando a una primitiva*. (Tesis de Doctorado no publicada). Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Ferrari, M., & Farfán, R. M. (2008). Un estudio socioepistemológico de lo logarítmico: La construcción de una red de modelos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 11*(3), 309-354.

Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom. Two episodes and related theoretical abductions. *Journal of Mathematical Behavior, 26*, 60-82.

Krummheuer, G. (2015). Methods for Reconstructing Processes of Argumentation and Participation in Primary Mathematics Classroom Interaction. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (pp.51-74). Springer.

Martínez-Sierra, G. (2012). Concepciones y matemática escolar: Unidades de medida de las funciones trigonométricas en el nivel medio superior. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 15*(1), 35-62.

Molina, M., Castro, E., Molina, J., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a traves de los experimentos de enseñanza. *Revista de Enseñanza de las Ciencias,* 29(1), 75-88.

Montiel, M., Wilhelmi, M., Vidakovic, D., & Elstak, I. (2009). Using the onto-semiotic approach to identify and analyze mathematical meaning when transiting between different coordinate systems in a multivariate context. *Educational Studies in Mathematics, 72*(2), 139–160.

ISSN: 2594-1046

Moore, K. C., Paoletti, T., & Musgrave, S. (2013). Covariational reasoning and invariance among coordinate systems. *Journal of Mathematical Behavior*, *32*(3), 461–473. doi:10.1016/j.jmathb.2013.05.002.

Ramírez, T., & Ferrari, M. (2011). Las coordenadas polares: Algunos de sus usos en disciplinas de investigación específicas. En L. Sosa, R. Rodríguez, y E. Landa (Eds.) *Memoria de la XIV Escuela de Invierno en Matemática Educativa*. (pp.111-117). CIMATE: Zacatecas. Diciembre, 2011.

Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

REQUERIMIENTOS COGNITIVOS Y CONCEPTUALES PARA EL APRENDIZAJE DE LAS FRACCIONES EN ESTUDIANTES DE SECUNDARIA

Yosselyn Esperanza López Cruz
FCM, BUAP. México.jop_cl@hotmail.com

Adrián Corona Cruz
FCM, BUAP. México.acorona@fcfm.buap.mx

José Antonio Juárez López
FCM, BUAP. México.jajul@fcfm.buap.mx

Resumen

Las investigaciones alrededor del mundo en el tema de las fracciones son bastantes y a través de éstas se ha demostrado que este tema es uno de los contenidos más extensos y complejos, como consecuencia de esto se presentan una serie de dificultades tanto para su enseñanza como para su aprendizaje y México no es la excepción. Teniendo en cuenta que este contenido se introduce formalmente en la escuela primaria y continua a lo largo de varios ciclos escolares posteriores; la gran mayoría de los estudiantes pasan la educación básica (Primaria y Secundaria) sin identificar ni lograr la comprensión total de las propiedades de las fracciones y los diversos significados relacionados con este concepto; incluso en el nivel bachillerato, a los estudiantes se les dificulta trabajar con las fracciones. Por ello, el presente trabajo tiene como propósito identificar las principales dificultades y errores que se presentan en los estudiantes de secundaria fundamentalmente.

Palabras Clave: Fracciones, Dificultades, Errores, Secundaria.

1. INTRODUCCIÓN

Desde hace varios años, a través de estudios y las diferentes evaluaciones tanto nacionales como internacionales, se ha demostrado que la mayoría de los estudiantes encuentran problemas significativos y presentan concepciones erróneas cuando aprenden las fracciones, a pesar de que formalmente se introduce este tema en la escuela primaria y se continúa a lo largo de varios ciclos escolares posteriores.

Por lo tanto, se esperaría que cuando los estudiantes llegaran a primer grado de secundaria tuvieran sólidos esos conocimientos; sin embargo, podemos darnos cuenta que esto no es así y por el contrario, se puede notar una serie de dificultades que han de ser superadas a través de los ciclos escolares, pero como van transcurriendo los grados de escolaridad los estudiantes siguen presentando errores al abordar el tema de fracciones.

ISSN: 2594-1046

Dadas las dificultades al abordar las fracciones Perera & Valdemoros (2009) concluyen que el concepto de fracción es uno de los contenidos de las matemáticas que presentan mayores dificultades tanto para la enseñanza como para su aprendizaje.

Con base en lo anterior se plantearon las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Cuáles son las preconcepciones que tienen los estudiantes de secundaria sobre las fracciones?
- ¿Cómo incide el nivel cognitivo de los estudiantes de secundaria en el aprendizaje de las fracciones?

Este trabajo tiene como objetivo:

Identificar el efecto de las preconcepciones (conocimientos previos), errores conceptuales y nivel cognitivo de los estudiantes de secundaria en el aprendizaje de las fracciones.

2. ANTECEDENTES

El aprendizaje de las matemáticas es considerado como problemático para la mayoría de los estudiantes en los diferentes niveles escolares y en particular cuando se trata de la comprensión de las fracciones. La investigación alrededor del mundo en este tema es amplia debido a las dificultades que presentan los estudiantes a lo largo de su formación y es así que algunos autores han concluido en que las fracciones son uno de los contenidos más extensos y complejos.

En el sistema educativo mexicano el proceso de enseñanza/aprendizaje de las fracciones inicia desde 3er grado de primaria, abordando en su inicio aprendizajes esperados relacionados con problemas de reparto, comparación de fracciones; continuando con la ubicación de números naturales en la recta numérica, representación de fracciones de magnitudes continuas (longitudes, superficies de figuras), fracciones equivalentes, resolución de problemas que impliquen las operaciones con fracciones (SEP, 2011).

Los niños tienen ideas acerca de las fracciones antes de la instrucción y diversas investigaciones han logrado evidenciar el hecho de que es necesario dar siempre sentido a lo que se está haciendo y esto sucede a través del manejo de varias representaciones y la implicación personal del estudiante en la construcción del propio conocimiento.

ISSN: 2594-1046

Sin embargo, a pesar del tiempo que se le dedica al estudio de las fracciones, podemos darnos cuenta que inclusive estudiantes de nivel superior presentan dificultades en el tema y muestran desagrado cuando trabajan con ellas.

Una de las dificultades para el aprendizaje de las fracciones es el no saber operar con ellas. Kieren (1975) citado por Fandiño (2014) evidencia la existencia de por lo menos siete significados del término "fracción" y demuestra que en esta polisemia se oculta precisamente uno de los problemas del aprendizaje de este argumento, ya sea en torno al concepto general como a las operaciones.

Freudenthal (1983) sostiene que enfocar las fracciones desde el subconstructo de "parte-todo" es algo bastante limitado no sólo fenomenológicamente sino también matemáticamente. La didáctica tradicional de la aritmética se limita a este enfoque, mayoritariamente, incluso en el sentido restringido del modelo de la división del pastel. Tras estas divisiones concretas del pastel —únicamente en fracciones propias— se introduce inmediatamente al estudiante en la división de cantidades y valores de magnitudes presentados abstractamente.

Hunting y Pitkenthly (1996) señalan que la investigación ha identificado al menos cuatro mecanismos constructivos básicos para el fomento del conocimiento del número racional: esquemas de números enteros, esquemas de partición, la medición de los regímenes y esquemas equivalencias. Estos mecanismos son parte de la estructura cognitiva del niño que se pueden utilizar para construir su propio conocimiento, relativo a cantidad y número fraccionario. El crecimiento en cada uno de los mecanismos de la acción se mueve en función del contexto de la fracción más formal de saber.

Lamon (2001) indica que en el Plan de Estudios de Estados Unidos lo relativo al tema de fracción consiste en un conjunto específico de procedimientos o algoritmos para fines de cálculo que proporcionan una base para la manipulación de expresiones algebraicas, pero no ayuda a la mayoría de los niños a entender las fracciones.

Brown y Quinn (2006) citados por Mahmoud (2013) llevaron a cabo un estudio para analizar los errores y concepciones erróneas de los estudiantes acerca de las fracciones. El estudio reveló que la mayoría de los estudiantes demostraron errores en la comprensión de los conceptos básicos de la fracción.

Fandiño (2014) señala que las dificultades que los estudiantes presentan se deben a argumentos precedentes, a formalismos o a conceptualizaciones aparentemente banales que tendrían que haber aprendido en la escuela primaria.

Los errores típicos que comenten los estudiantes identificados por la literatura internacional se dan al ordenar y comparar las fracciones y/o los números decimales, realizar operaciones entre fracciones, reconocer las fracciones en diferentes esquemas, la manipulación de la equivalencia entre fracciones, la reducción a los mínimos términos de una fracción, etc.

Para entender los errores que los estudiantes cometen es necesario tener en cuenta: a) las propiedades de las fracciones y los diferentes significados del concepto de fracción; b) los diferentes modelos empleados en la enseñanza, y c) el manejo operativo de la fracción.

Los errores pueden ser consecuencia de un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos, como lo menciona Rico (1995) este tipo de errores tienen como origen la ignorancia de los algoritmos, conocimiento inadecuado de hechos básicos, procedimientos incorrectos en la aplicación de técnicas y dominio insuficiente de símbolos y conceptos necesarios.

Por otra parte, D`Amore (2003; citado por Fandiño, 2014) señala que los errores no necesariamente significan ignorancia o desconocimiento de tal conocimiento; el error puede ser producto de un conocimiento precedente, es decir, un conocimiento que tuvo éxito o que produjo resultados positivos, pero que no lo es cuando se intenta utilizar en situaciones diferentes. Por lo tanto, no se trata de errores de orígenes desconocidos, sino de la puesta en evidencia de obstáculos de naturaleza ontogenética, didáctica y epistemológica.

3. MÉTODO

3.1. Población

La investigación es de tipo exploratorio enmarcado en un enfoque mixto. Los participantes son 359 estudiantes con edades que oscilan entre 11 y 16 años; se consideraron a dos grupos por cada grado escolar de la Secundaria Oficial “Héroes de la Independencia” del municipio de Tehuacán y tres grupos de diferentes grados de la Secundaria No. 6 “Valentín Gómez Farías” ubicada en la colonia San Baltazar Campeche, de la Ciudad de Puebla.

3.2. Instrumentos

En un primer momento, se aplicó un test diagnóstico de Spangler (2011) el cual tiene como objetivo identificar los errores conceptuales en el aprendizaje de las fracciones. Inicialmente el test constaba de 24 reactivos, de los cuales se consideraron 18 con respuestas de opción múltiple; sin embargo, a la prueba se anexaron 4 reactivos relacionados con la operatividad de las fracciones. Se realizó la prueba a 49 estudiantes de primer grado de la Secundaria "Héroes de la Independencia", en un tiempo aproximado de 30 minutos.

Posteriormente, se diseñó un instrumento que permitió explorar los conceptos básicos del tema de fracciones en donde los estudiantes de secundaria tienen mayor dificultad, bajo el enfoque de Ciclo de Aprendizaje propuesto por Lawson (1994), que consiste en tres fases básicas -exploración, introducción de un concepto y aplicación del concepto-. La aplicación del test denominado "de Selección" se realizó a 310 alumnos considerando ambas secundarias.La prueba consiste en 8 ítems que abordan conceptos básicos de la fracción como equivalencias, comparaciones y operaciones entre fracciones, etc. El propósito de cada uno de los ítems es que el estudiante identifique las propiedades que caracterizan a un determinado significado de las fracciones y a través de los mismos se logre identificar el efecto de los errores conceptuales y la falta de conocimientos en los diferentes grados del nivel Secundaria.

4. RESULTADOS

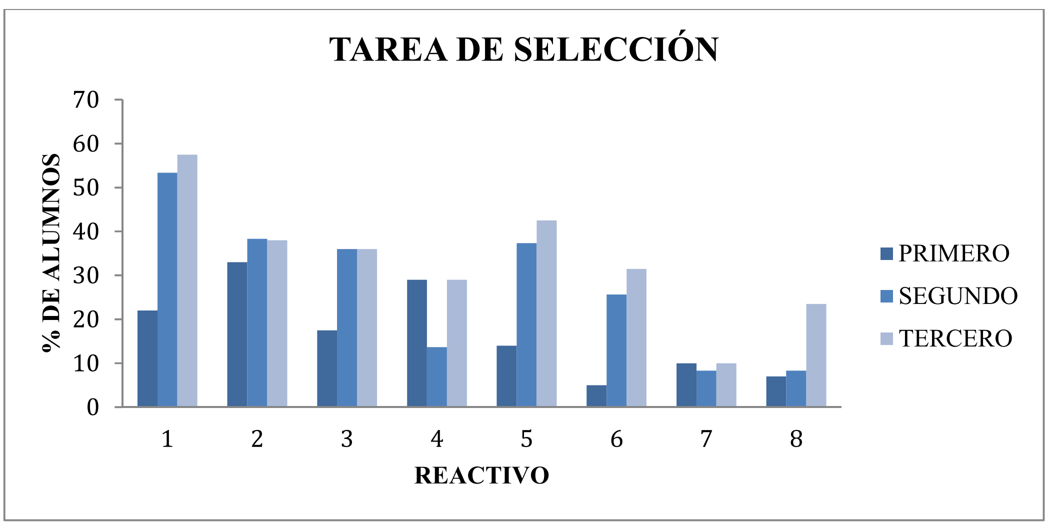
En esta sección se presentan los resultados de la aplicación de las dos pruebas en una primera etapa del trabajo de investigación. De acuerdo a los resultados en el test de diagnóstico, se detectó que:

- Los reactivos relacionados con el significado parte-todo son contestados correctamente con un porcentaje mayor al 75% de los estudiantes debido a que es el significado que se aborda frecuentemente en las aulas. Sin embargo, una minoría de estudiantes comente errores como los que se mencionan a continuación: 1) invierten las partes totales de un todo en el lugar de las partes consideradas, 2) confunden el significado de la fracción como parte-todo con el de razón y 3) consideran de manera contraria a la fracción que se les pide.
- Por otra parte, los reactivos que evalúan la ubicación de un punto en la recta numérica son contestados con menor porcentaje que los anteriores debido a que los estudiantes

siguen considerando las fracciones como números enteros, además de no considerar el punto de referencia.

- Mientras tanto, uno de los procesos donde se insiste de manera constante y reiterada es la simplificación y la obtención de fracciones equivalentes; los estudiantes revelan que saben simplificar, pero no comprenden cuando se les pide encontrar la expresión mínima o fracción irreducible. Esto provoca que los estudiantes contesten incorrectamente.
- Finalmente, en promedio el 15% de los estudiantes lograron contestar correctamente los reactivos que abordan la suma, resta y multiplicación, y el 6% la operación de división de fracciones. Teniendo errores comunes en la suma y resta como sumar numerador con numerador y denominador como denominador, evidenciando que los estudiantes siguen considerando los números fraccionarios como números enteros; de igual manera, se evidencia que hay una mera repetición de algoritmos sin lograr la comprensión, dado que a la hora de operar tienden a confundir los algoritmos.

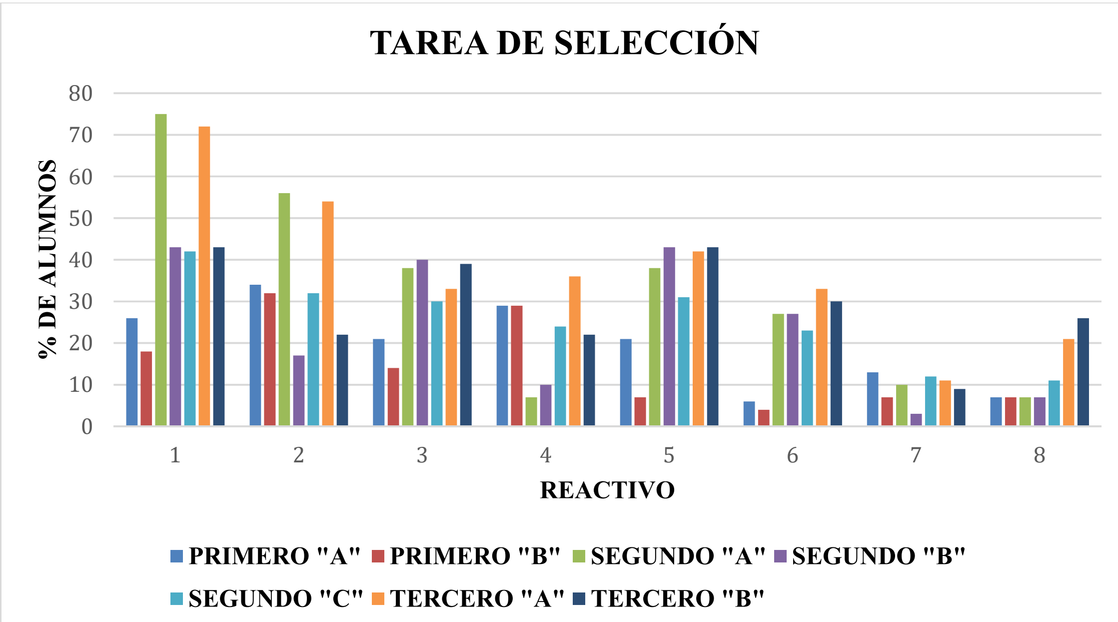
Por otro lado, los resultados del test de Selección: de acuerdo a la Gráfica 1, que representa el porcentaje de alumnos que contestan correctamente los reactivos por grado escolar, los alumnos de segundo y tercer grado de secundaria responden de manera correcta en un porcentaje similar en la mayoría de los reactivos; y los reactivos 7 y 8 (que corresponden a la comparación y operaciones de fracciones) los responden incorrectamente en un alto porcentaje alumnos de los tres grados.



Gráfica 1. Porcentaje de alumnos que responden correctamente los reactivos por grado escolar.

ISSN: 2594-1046

Mientras tanto, en la Gráfica 2 se puede observar que el número de estudiantes de primer grado de ambas escuelas que contestan correctamente en la mayoría de los reactivos es más bajo que el de los grados posteriores, sin importar la escuela, el contexto, estrategias docentes. De la misma manera, se identifica que los reactivos 7 y 8 (que corresponden a la comparación y operatividad de las fracciones respectivamente) se contestan de manera correcta en un bajo porcentaje sin importar el grado escolar.



Gráfica 2. Porcentaje de alumnos que responden correctamente los reactivos por grupo.

5. CONCLUSIONES

A partir del análisis de los resultados, podemos observar que:

- La fracción desde el punto de vista como parte-todo, haciendo uso de la representación en los modelos continuos e incluso en los discretos, más del 80% de los estudiantes de primer grado de secundaria dieron la respuesta correcta, que si bien es sabido es una de las nociones de las fracciones que se manejan y utilizan en Nivel Primaria.
- Los resultados muestran que las mayores dificultades para los tres grados escolares se presentan al comparar y realizar operaciones con las fracciones; resultando complicado ejecutar las operaciones.

- El porcentaje de respuestas correctas de los estudiantes de primer grado de ambas escuelas en la mayoría de los reactivos es más bajo que los segundos y terceros años; del mismo modo estos grados escolares contestan los reactivos de manera correcta en un porcentaje similar.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Fandiño, M.I. (2014). *Las fracciones: Aspectos conceptuales y didácticos*. México: NEISA.

Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. México: CINVESTAV.

Hunting, R. P. & Pitkenthly, A. (1996). A Review of Recent Research in the Area of Initial Fraction Concepts. In *Educational Studies in Mathematics*, 30, 5-38.

Lamon, S.L. (2001). Presenting and Representing: From *Fractions to Rational Numbers. The roles of Representation in School Mathematic*s (p. 146). EUA: Yearbook Editor.

Lawson, A. E. (1994). Uso de los ciclos de aprendizaje para la enseñanza de destrezas de razonamiento científico y de sistemas conceptuales. *Enseñanza de las Ciencias*, 12(2), 165-187.

Mahmoud, Y. (2013). T*he Relationship Between the Learning Styles of Students in Grades Five and Six and Their Held Misconceptions About Dividing Fractions Based on Kolb's Model*. (Tesis doctoral no publicada). The British University, Dubai.

Perera, P., & Valdemoros, M. (2009). Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado de educación primaria. *Investigación en Educación Matemática,* 21(1), 29-61.

Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, L. Rico, y P. Gómez, *Educación Matemátic*a. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

SEP (2011). *Programas de estudio 2011. Guía del Maestro Primaria. Tercero a Sexto grado.* México

Spangler, D.B. (2011). *Strategies for Teaching Fractions: Using Error Analysis for Intervention and Assessment.* Thousand Oaks, CA: Corwin.

Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

UNA PROPUESTA DE INTERVENCIÓN EDUCATIVA DESDE EL ANÁLISIS DIDÁCTICO EN LA ENSEÑANZA DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA

Christian Manuel Acosta Núñez
Universidad Autónoma de Zacatecas. México. cman_kris@hotmail.com
Judith Hernández Sánchez
Universidad Autónoma de Zacatecas. México.judith700@hotmail.com
Carolina Carrillo García
Universidad Autónoma de Zacatecas. México; cgcarolin@hotmail.com

Resumen

La presente investigación tiene como objeto de estudio la actuación docente de un profesor de matemáticas al enseñar el tema de la ecuación cuadrática en tercer grado de secundaria. El objetivo de este proyecto es que sea el profesor en activo quien diseñe, lleve a la práctica y evalúe una propuesta de intervención educativa con el uso de la herramienta teórica-metodológica del análisis didáctico. Se presenta un primer acercamiento a la problemática de la enseñanza de la ecuación cuadrática y el papel de la planeación mediante el análisis didáctico como una competencia deseable de promover en los profesores de matemáticas. En el análisis de antecedentes se encontró que la participación de los profesores en la mayoría de las investigaciones realizadas con el análisis didáctico es supletoria o no determinística. A diferencia de estos resultados, en este proyecto de actuación docente el profesor será quien valore el papel del análisis didáctico en su desarrollo profesional, lo cual se espera determine alcances que enriquecerán los resultados de la investigación relativos a la implementación del análisis didáctico pero ahora en una situación real.

Palabras clave: análisis didáctico, intervención educativa, competencias, ecuación cuadrática, actuación docente.

1. INTRODUCCIÓN

En la educación actual existe una preocupación por "desarrollar habilidades superiores del pensamiento para solucionar problemas, pensar críticamente, comprender y explicar situaciones desde diversas áreas del saber, manejar información, innovar y crear en distintos órdenes de la vida" (SEP, 2011, p. 26) que permita a los estudiantes desenvolverse a lo largo de su existencia.

Desde esta perspectiva, es necesaria la organización de la enseñanza en términos de "las competencias que deberían desarrollar los estudiantes al término de su formación" (Lupiáñez y Rico, 2008, p. 35) aspecto que demanda que los profesores sean capaces de diseñar, organizar y sistematizar su actuación. Por esta razón, una de las competencias básicas que se espera que desarrollen los futuros profesores tiene que ver con la capacidad para planificar su actuación docente (Campillo, 2004; Rico, 2004).

La planificación es un elemento fundamental para orientar la actuación del profesor ya que implica "organizar actividades de aprendizaje a partir de diferentes formas de trabajo, como situaciones, secuencias didácticas y proyectos entre otras" (SEP, 2011, p. 27). Para lograrlo, el profesor debe considerar algunas cuestiones como la distribución grupal, tiempos, recursos didácticos, entre otros aspectos, para su puesta en práctica y la evaluación de los aprendizajes de sus estudiantes. De esta manera la planificación es uno de los aspectos que orienta la actuación de todo profesor, ya que funciona como herramienta para la organización y sistematización de las actividades que se proponen a los estudiantes. Todo esto con el fin de que estos adquieran los objetivos de aprendizaje mencionados en los planes y programas de estudio de la educación básica.

Si bien anteriormente se ha tratado de justificar la importancia de la planificación en el actuar de un profesor, en algunos casos los profesores desconocemos que existen marcos teóricos y metodológicos específicos para la enseñanza de las matemáticas. En particular, estos marcos pueden servir de referencia para el actuar del profesor dado que proponen formas específicas de organizar y articular los elementos que conforman la planeación, ejecución y evaluación de una unidad didáctica. En particular en este proyecto nos centramos en una de estas propuestas teóricas metodológicas, propuesta por Rico (1997), llamada análisis didáctico.

El análisis didáctico (Rico, 1997, p. 55) es una conceptualización a nivel local de la planificación y "es un procedimiento cíclico que describe cómo el profesor debería idealmente diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje" (Gómez y Lupiáñez, 2007, p. 84). En particular se puede constituir en una herramienta para el profesor con la cual puede organizar su enseñanza basándose en cuatro análisis:

- Análisis de contenido. El profesor identifica, organiza y selecciona los significados de un concepto matemático que considera relevantes para efectos de la planificación de la instrucción.
- Análisis cognitivo. El profesor describe sus hipótesis de cómo los estudiantes pueden progresar en la construcción de su conocimiento cuando se enfrenten a las tareas. Siguiendo esta idea, el proceso debe fundamentarse en la identificación, descripción y fundamentación de:
    - Las capacidades que los escolares tienen antes de la instrucción.

- o Las capacidades que se espera que los escolares desarrollen con motivo de la instrucción.
- o Las tareas que conforman la instrucción.
- o Las dificultades que los escolares pueden encontrar al abordar estas tareas, y
- o Las hipótesis sobre los caminos por los que se puede desarrollar el aprendizaje.

- Análisis de instrucción. El profesor diseña, analiza y selecciona las tareas que constituirán las actividades de enseñanza y aprendizaje con objeto de la instrucción.
- Análisis de actuación. El profesor determina las capacidades que los escolares han desarrollado y las dificultades que pueden haber manifestado hasta el momento. (Gómez, 2002, 2007).

Este marco teórico-metodológico permite “establecer, analizar y organizar las capacidades y competencias que los futuros profesores esperan desarrollar en los escolares en torno a ese tema matemático” (Lupiáñez y Rico, 2008, p. 2). Lo anterior, a través de la realización de los cuatro análisis que lo conforman y que se convierten en organizadores del currículo. Algunas características de esta herramienta es que puede ser usado como procedimiento para la planificación local de una unidad didáctica o una hora de clase; pues se caracteriza por ser específico a un contenido matemático concreto. En este sentido, la literatura propone una adaptación del mismo para “recoger y organizar la información para el diseño de unidades didácticas” (Gómez y Lupiáñez, 2007, p. 1).

2. MARCO TEÓRICO

El análisis didáctico es un procedimiento cíclico que describe cómo el profesor debería idealmente diseñar, poner en práctica y evaluar aspectos que de alguna manera se consideran en la planeación, ya que en ella se coordinan las acciones del maestro y se orienta su quehacer con el fin de alcanzar los objetivos de aprendizaje. El análisis didáctico es un marco teórico-metodológico que funge como una herramienta con la cual el profesor puede “establecer, analizar y organizar las capacidades y competencias que se espera desarrollar en los estudiantes” (Lupiáñez y Rico, 2008, p. 2) y desde este punto de vista, es posible promover de una manera más exitosa el desarrollo de competencias de los estudiantes.

ISSN: 2594-1046

Los aportes de los estudios realizados sobre el análisis didáctico (Gómez y Lupiáñez, 2007; Gómez, 2009; Lupiáñez y Rico, 2008; Rico, 2013) presentan criterios de consideración para incluirlos en los programas de formación de profesores. Lo anterior dado que utilizan el análisis didáctico como herramienta para la identificación de objetos y significados matemáticos de una clase en experiencias ya realizadas (Godino, Rivas, Castro y Konic, 2008). Otro alcance es que ha servido como medio para analizar, valorar y mejorar la práctica a partir del análisis de episodios de clase con base en el enfoque ontosemiótico (Font, Planas y Godino, 2010). Sin embargo, estos estudios no presentan el papel y reflexiones del profesor al aplicar el análisis didáctico como herramienta en la planificación, ejecución y evaluación de una clase para un tema matemático escolar específico.

Por esta razón el presente trabajo pretende realizar una propuesta de intervención educativa (Barraza, 2010) desde la actuación docente de un profesor de matemáticas del nivel secundaria ya que esto "permite a los agentes educativos tomar el control de su propia práctica profesional mediante un proceso…" (2010, p. 24).

A continuación se presenta una justificación de por qué se eligió el tema de ecuación cuadrática.

En la secundaria se pone énfasis en la transición del lenguaje aritmético al algebraico, trayecto en el que se presentan obstáculos, errores y dificultades que limitan que se lleve a cabo de manera efectiva el aprendizaje de varios temas del álgebra. La experiencia del profesor le ha permitido detectar que los alumnos presentan dificultades que se manifiestan a través de errores en el aprendizaje de la ecuación cuadrática. Además, justifica su interés por este tema matemático dada su importancia dentro de la educación básica pues uno de los propósitos de estudio de las Matemáticas para la educación secundaria consiste en que los alumnos: "Modelen y resuelvan problemas que impliquen el uso de ecuaciones hasta de segundo grado, de funciones lineales o expresiones lineales que definen patrones" (SEP, 2011, p. 14).

El estudio de este tópico matemático escolar "permite entender los conceptos de la cinemática, o los fenómenos relacionados con el movimiento de los cuerpos como movimientos de aceleración constante, tiros parabólicos y caída libre, los cuales se modelan a través de ecuaciones cuadráticas" (Gustin y Avirama, 2014, p. 20). La importancia del estudio de este contenido no reside sólo en que los estudiantes aprendan a resolver problemas, sino también que su aprendizaje

ISSN: 2594-1046

sea funcional para otras áreas del conocimiento con el fin de otorgarles herramientas que les permitan comprender situaciones de la vida diaria.

Además de las situaciones anteriores, se suma en particular la necesidad del profesor de promover de manera exitosa las competencias planteadas. En la literatura se presentan tipos de limitaciones en torno a la enseñanza y aprendizaje del álgebra (Bachelard, 1938; Brousseau, 1983; Filloy y Kieran, 1989; Socas, 1997; Ruano, 2008; Rojano, 2010). Algunas de estas limitaciones se presentan en particular para el caso de la ecuación cuadrática, lo cual impacta en su aprendizaje en el nivel secundaria como un contenido algebraico escolar.

Para la atención de estas limitaciones existen algunos estudios que favorecen una mejor enseñanza de la ecuación cuadrática por medio de materiales. Sin embargo, en tales investigaciones "aunque hay profesores que participan, ellos no son quienes producen los resultados de las exploraciones" (Gómez y Lupiáñez, 2007, p. 82). Lo cual muestra que en su mayoría, los proyectos son desarollados por investigadores y no por profesores. Luego en estos trabajos, no existe una participación activa de los profesores en situación real, que les permita experimentar y reflexionar sobre posibles acciones de mejora, utilizando en particular el análisis didáctico.

Estos aspectos evidencian que "la literatura presenta propuestas y ejemplos realizados por investigadores que asumen el papel de profesor, pero no dan necesariamente luces sobre cómo un profesor puede utilizarla para su trabajo diario en el aula" (Gómez y Lupiáñez, 2007, p. 95) ya que no se tienen elementos que muestren que existe una interacción/comunicación entre profesores e investigadores.

Estas observaciones justifican la pertinencia de este proyecto pues se espera contar con la reflexión del profesor sobre el proceso de intervención educativa donde la herramienta central usada por el profesor será el análisis didáctico. Conforme a lo anterior, se plantean la pregunta de desarrollo profesional, el objetivo general que guiará el proyecto de actuación docente y la hipótesis, desde la perspectiva del profesor que desarrollará este proyecto de intervención docente:

3. PREGUNTA DE DESARROLLO PROFESIONAL

¿Cómo puedo sistematizar mi práctica docente mediante el análisis didáctico y determinar cuáles son las competencias matemáticas que se promueven con este cambio en mi práctica docente?

4. OBJETIVO DE ACTUACIÓN DOCENTE

Diseñar, ejecutar y evaluar la unidad didáctica relativa a la ecuación cuadrática por medio del análisis didáctico con el fin de promover las competencias establecidas para su aprendizaje en el programa de estudios.

5. HIPÓTESIS

La herramienta del análisis didáctico me permitirá la organización y gestión de mi práctica docente enmarcado con el nuevo enfoque educativo por competencias.

6. MÉTODO

Se propone para la realización de este proyecto de intervención docente el análisis didáctico, esta herramienta teórico-metodológica consiste en "establecer, analizar y organizar las capacidades y competencias que los futuros profesores esperan desarrollar en los escolares en torno a ese tema matemático escolar" (Lupiáñez y Rico, 2008, p. 2). Es un procedimiento cíclico que describe cómo el profesor debería diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje.

Por esta razón se retoma como metodología las fases en las que se subdivide, "a) análisis de contenido, b) análisis cognitivo, c) análisis de instrucción y d) análisis de actuación" (Gómez, 2002, pp. 262-285) descritas anteriormente, asimismo teniendo como guía el ciclo del análisis didáctico presentado por Gómez (2009).

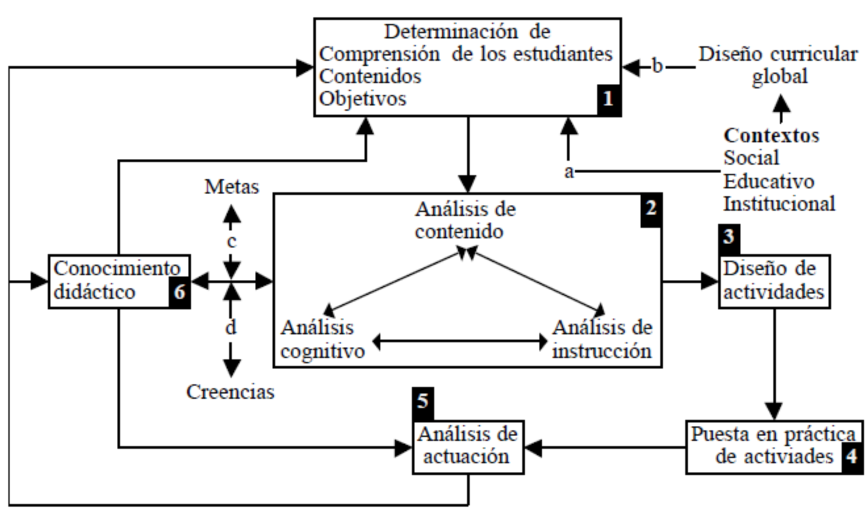


Figura 1. Ciclo del análisis didáctico (Gómez, 2009, p. 6)

ISSN: 2594-1046

7. CONCLUSIONES

Hasta el momento, el análisis de la bibliografía encontrada en torno al tema y la problemática ha permitido:

Determinar que la planificación es una competencia que tanto los futuros profesores como los profesores en activo deben desarrollar. Ésta permite realizar la organización, puesta en práctica y evaluación de unidades didácticas por medio de los análisis de contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación. Por esta razón, con la herramienta del análisis didáctico se pretende contar con una investigación que permita la experimentación del análisis didáctico desde la mirada del profesor en activo en una situación real de una clase.

En mi experiencia como docente me he enfrentado con algunas dificultades de los estudiantes, que de alguna manera limitan que se lleve a cabo de una manera efectiva el aprendizaje del contenido matemático escolar de la ecuación cuadrática. Por esta razón, mi interés reside en la utilización del análisis didáctico como herramienta metodológica que permita organizar y gestionar mi práctica docente para tomar en cuenta estas limitaciones y contribuir a erradicarlas por medio de una planificación, puesta en práctica y evaluación de una propuesta didáctica.

Asimismo, se espera diseñar un instrumento que permita medir los avances de los aprendizajes de los estudiantes en términos de capacidades y competencias en torno al contenido de la ecuación cuadrática. También se ha considerado que este instrumento no sólo funcionará para mí, sino también funcionará para otros profesores para que evalúen a sus estudiantes en torno a este tema matemático.

8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bachelard, G. (1938). *La formación del espíritu científico. Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo*. (Trad. José Babini) México: Siglo Veintiuno editores (Original en francés, 1938).

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4*(2), 165-198.

Campillo, A. (2004). Título de grado en matemáticas. Madrid: Agencia Nacional de Evaluación de la Calidad y Acreditación.

Filloy, E., & Kieran, C. (1989). *El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica*. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México, 229-240.

Font, V., Planas, N., & Godino, J. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje, 33*(2), 89-105.

Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W., & Konic, P. (2008). Elementos para el análisis didáctico de situaciones problema en la formación matemática de maestros. En J. L. Blanco y J. Murillo (Eds.), *Boletín SEIEM 25*. Disponible en: http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/comunicacionesgrupos/GruposXII /DidMatDisCientifica/GodinoRivasCastroYKonic.pdf

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA, 7*(3), 251-293

Gómez, P., &. Lupiáñez, L. (2007). Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje en la Formación Inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *PNA*, 79-98.

Gustin, J., & Avirama, L. (2014). *Una propuesta para la enseñanza de la ecuación cuadrática en la escuela a través de la integración del material manipulativo*. (Tesis de licenciatura no publicada). Universidad del Valle. Santiago de Cali, Colombia.

Lupiáñez, J., & Rico, L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. *PNA*, 35-48.

Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Ed.) *La educación matemática de la enseñanza secundaria*. Barcelona: Ice-Horsori. Pp.39-59.

Rico, L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria. Profesorado. *Revista de Currículum y Formación del Profesorado, 8*(1), 1-15.

Rico, L. (2013). El método del análisis didáctico. *UNIÓN, 33*, 11-27.

Rojano, M.T. (2010). Modelación concreta en álgebra: balanza virtual, ecuaciones y sistemas matemáticos de signos. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 75*, 5-20.

Ruano, R. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA*, 61-74.

SEP. (2011). *Plan de estudios 2011*. México: Secretaría de Educación Pública.

SEP. (2011). *Programa Matemáticas Secundaria*. México: Libros de Texto Gratuitos.

Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Horsori.

Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

La Integración de la Tecnología en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas: Usos y Funcionalidades en el Currículum Oficial del Nivel Secundaria

Anahi Castro Delgado
Universidad Autónoma de Zacatecas. anahy1589@gmail.com

Judith Alejandra Hernández Sánchez
Universidad Autónoma de Zacatecas. judith700@hotmail.com

José Iván López Flores
Universidad Autónoma de Zacatecas. ivan.lopez.flores@gmail.com

Resumen

Se presenta el avance de un proyecto de investigación que tiene como finalidad identificar los usos y las funcionalidades de la tecnología presentes en el Programa de Estudios de Matemáticas 2011, nivel secundaria, con el objetivo de describir su integración en la educación matemática. Se realiza una revisión de antecedentes que se enfocan tanto en la importancia de su uso, como en las problemáticas que aparecen cuando se integra a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Además, se presenta un primer acercamiento a la categorización de las formas en las que se utiliza la tecnología en la educación. Esta categorización es importante porque permite observar la congruencia que existe entre los aprendizajes esperados de cada tema matemático con el uso y función de la tecnología que se sugiere en el plan de estudios.

Palabras clave: tecnología, aula de matemáticas, currículum oficial, secundaria.

1. INTRODUCCIÓN

Actualmente la tecnología ha evolucionado de forma considerable, en particular como una herramienta de gran cobertura en el entorno social y científico. En la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, su utilización va cobrando un mayor interés; ejemplo de esto es que en los principios pedagógicos y objetivos de los planes de estudio vigentes se marca la importancia que tiene el uso de la tecnología, ya que se espera que México sea un país con mayor competitividad referente a este tema (SEP, 2011). Se presenta como una tendencia global en los diferentes niveles educativos donde varía el grado de aplicación, incentivados todos por una presión cultural y social (Zenteno y Mortera, 2012). Alrededor de este tema actual se formulan e implementan diferentes programas que tienen como fin equipar a las escuelas con materiales tecnológicos, al igual que los libros de texto agrupan en sus actividades sugerencias para trabajar contenidos con herramientas tecnológicas.

Sin embargo, una serie de investigaciones han evidenciado la pobre legitimidad de la tecnología que hay en la educación matemática. Y esto se refiere a que su integración en el aula es mucho más complicada de lo que parece y está muy lejos de ser eficaz. Uno de los factores que provocan este suceso es la oposición dominante entre los aspectos técnicos y conceptuales de la actividad matemática (Artigue, 2000), lo cual depende en gran parte del uso que se le dé a las herramientas tecnológicas que están al alcance del profesor y que se quieran utilizar para abordar contenidos matemáticos. Se considera que la legitimidad científica y social que tiene no es suficiente para asegurar la legitimidad didáctica (Artigue, 2007), pues sin tomar en cuenta cuestiones de infraestructura, sociales y económicas, la problemática existente radica en *la aplicación de la tecnología* en el aula para el aprendizaje de las matemáticas. Esto se basa principalmente en que la evolución y el éxito que ha tenido en términos sociales y científicos no son capaces de asegurar un éxito para el cumplimiento de los propósitos en la educación.

Otra evidencia de esta problemática se presenta cuando el uso de la tecnología termina siendo un juego sin el enriquecimiento didáctico para el que fue planeado (Sutherland, Robertson y John, 2009, p. 32). Entonces se presenta una discrepancia entre la intencionalidad y su utilización por los usuarios reales (Rojano, 2014).

Tomando en cuenta que el programa de matemáticas es una de las principales herramientas para guiar al profesor en el proceso de enseñanza y aprendizaje, se afirma que estamos lejos de un plan de estudios de alto impacto que afecte al profesor en las clases regulares, en cuestiones tecnológicas (Artigue, 2013). El problema recae directamente en el uso y la intencionalidad que se evidencia en los planes y programas de estudio, en este caso la pregunta que surge es ¿Cuáles son los usos y funcionalidades de la tecnología que propone el programa de Matemáticas en la educación secundaria y de qué forma se determina la integración de ésta? Ante este panorama el objeto de estudio de nuestra investigación es la pobre legitimidad didáctica de la tecnología en las aulas de matemáticas en México del Nivel Secundaria.

La hipótesis que se plantea es que los usos y funciones de la tecnología presentes en el currículo oficial de matemáticas potencian las dimensiones informáticas y técnicas y limitan las dimensiones didácticas-tecnológicas. Por lo tanto la integración se presenta más de forma técnica.

Actualmente hay un gran interés por la integración de la tecnología en la educación, esto se debe a las grandes posibilidades que ofrece para el aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, esta integración debe tener fines didácticos no sólo técnicos, pues los resultados obtenidos durante varios años han sido poco satisfactorios (Rojano, 2003 y 2014; Artigue, 2007; Sutherland, Robertson y John, 2009; Assude, Buteau y Forgasz, 2010). Existe una subestimación de la complejidad de utilizar herramientas tecnológicas y las necesidades en general de los recursos propuestos por los profesores (Artigue, 2012) En este tema, Pérez (2016) menciona que la integración de las tecnologías de la información y comunicación en el currículo escolar requiere de un modelo pedagógico que otorgue sentido a su uso con perspectivas innovadoras. Por tales razones, es necesario realizar un análisis exhaustivo en uno de los principales medios que dictan las autoridades para guiar la educación básica en el país, determinar la forma en la que se sugiere a los profesores integrar eficazmente la tecnología en su práctica educativa y si ésta es acorde a los propósitos que se pretenden lograr.

El objetivo propuesto es caracterizar los usos y funcionalidades de la tecnología presentes en los Planes y Programas de Estudio de matemáticas del Nivel Secundaria, para determinar la funcionalidad a la que se pretende llegar según los aprendizajes esperados de cada tema y así determinar la integración que se da. Para lograr el objetivo de esta investigación se propone la construcción de un marco conceptual que nos permita delimitar los usos y funcionalidades establecidos en la literatura especializada. Se constituye en la primera fase del análisis de contenido, establecido por Bernette (2013), finalmente se proponen las otras dos fases de la metodología que consisten en la extracción de datos y la explotación de los mismos, proceso que nos ayudará a describir la integración de la tecnología propuesta en los programas de matemáticas vigentes en la educación secundaria.

Se plantean una serie de preguntas que nos sirven de guía en la búsqueda de antecedentes relacionados con la implementación de la tecnología en las aulas de matemáticas: ¿Por qué es útil implementar tecnología en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas? ¿Qué variables inciden en su implementación? y ¿Cómo identificar si se hace un uso razonado de la tecnología?

A continuación se presentan los primeros avances de este proyecto, los cuales consisten en la revisión de antecedentes en torno a la problemática central de la cual se deriva el problema que será el centro de nuestro estudio y que ha permitido justificar la pertinencia del proyecto que aquí se presenta. Se estructura hasta este momento respondiendo de forma parcial las preguntas anteriores.

2. ANTECEDENTES

2.1. ¿Por qué es útil implementar tecnología en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas?

La importancia en la integración de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se basa en que permite abordar un panorama más amplio en cuanto a la representación y manipulación de un objeto matemático. Los usos que se les den a las herramientas tecnológicas intervendrán en gran medida en el proceso de aprendizaje de los alumnos, como lo caracteriza Ursini (2004) al describir un modelo pedagógico basado en tecnología denominado EMAT (Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología). Menciona que la utilización de las herramientas de este modelo permite:

- Dar un tratamiento fenomenológico a los conceptos matemáticos, ofreciendo así a los alumnos la posibilidad de considerar a los conceptos matemáticos como un medio para describir y analizar fenómenos.
- Expresar las ideas matemáticas, manipularlas y ejecutarlas. Esto involucra al alumno en un proceso de formulación, prueba y reformulación de hipótesis expresadas matemáticamente.
- Acercarse a áreas específicas de las matemáticas que se trabajan en la escuela secundaria, que se relacionan con el pensamiento numérico, el pensamiento algebraico, las figuras geométricas y sus propiedades, la presentación, interpretación y tratamiento de la información, y la modelación matemática (p. 26).

En la misma idea de caracterizar los aspectos benéficos que puede generar el uso de tecnología, Gamboa (2007) describió varias situaciones:

> Los estudiantes desarrollan conductas como: búsqueda de relaciones entre los elementos de las representaciones, con el propósito de identificar la solución de los problemas; elaboración de conjeturas a partir de los datos observados en las distintas representaciones realizadas en cada una de las herramientas tecnológicas; generalización de los resultados a casos generales, a partir de las soluciones obtenidas al trabajar con las herramientas tecnológicas; elaboración de conexiones entre los resultados obtenidos y otros contenidos matemáticos; y comprobación de los resultados obtenidos en un proceso de resolución, mediante la elaboración de otro diferente.
>
> De igual forma, el proceso de resolución de problemas con el uso de la tecnología se ve enriquecido pues permite a los estudiantes:

ISSN: 2594-1046

> a) realizar el análisis de casos particulares de los problemas a trabajar.
>
> Basados en estos casos particulares, los alumnos pueden conjeturar sobre la solución para el caso general;
>
> b) facilitar la observación de los fenómenos presentes en cada uno de los problemas, lo que requiere de todo un análisis donde el uso de la tecnología juega un importante papel;
>
> c) generar una serie de valores y representaciones, en los cuales se basa el análisis para hallar la solución del problema (p. 37).

Tales características se relacionan precisamente con el aprendizaje del alumno, enfatizando en lo que permite la utilización de herramientas tecnológicas cuando el alumno se enfrenta a la resolución de un problema. Cabe mencionar que no se plantea como una sustitución definitiva de las técnicas utilizadas comúnmente sino más bien como una innovación que abona a la mejora en la educación.

Por su parte, Gómez (2007) describe el modelo de sistema didáctico propuesto por Balacheff (1996) para caracterizar la tecnología como agente didáctico. Él menciona que su función es la de "organizar a través del diseño e implantación de una situación un encuentro entre el sujeto y el medio para que surja el conocimiento" (p. 2). La acción del agente didáctico (profesor, tecnología, en representación de la institución encargada de la enseñanza) se encuentra mediada por la estructura social de la clase, los saberes iniciales de los estudiantes, el tiempo didáctico, el objeto de enseñanza y los saberes de referencia. Además menciona los programas de computador y las herramientas tecnológicas para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que se han producido hasta el momento como las siguientes: micromundos, sistemas de simulación, sistemas tutoriales, programas de inteligencia artificial, aplicaciones de telemática y calculadoras.

A partir de esta caracterización podemos describir la tecnología como un agente didáctico y además podemos iniciar tomando en cuenta una caracterización de los tipos de tecnología utilizados en la educación. Esto con el fin de que nos sirva como referencia para analizar los usos y las funcionalidades que se presentan en el plan de estudios vigente.

Otro foco acerca de la importancia de las tecnologías en la educación matemática se centra en el análisis de la influencia del cumplimiento del currículo que ha tenido para el desarrollo de diferentes tecnologías, así como la influencia de las nuevas tecnologías a composición de la estructura del currículo. En Rojano (2014) se distinguen dos tendencias de la tecnología en la educación: la del uso de la tecnología ajustada al currículo y la del uso de la tecnología como un medio de cambio.

En la primera tendencia se utilizan los programas de geometría dinámica para ejemplificar, pues es donde el usuario tiene un acceso *exploratorio y experimental* al mundo de la geometría, pueden descubrirse o comprobarse mediante exploraciones por construcción y arrastre. Las tecnologías digitales son creadas para servir a propósitos de un currículo clásico. Aquí la innovación no es del contenido matemático, sino es una forma de acercar a los estudiantes a contenidos establecidos de forma oficial. Lo que nos representa de manera clara un uso que se le da a la tecnología en el ámbito educativo.

La segunda tendencia se ejemplifica con el programa Logo pues se piensa la incorporación de éste no sólo puede cambiar la forma de enseñar y aprender matemáticas, sino que puede trastocar los contenidos del currículo mismo. Como un medio para transformar la matemática escolar.

En esta parte, Rojano (2014) menciona algunos países que han cambiado la estructura del currículum tomando en cuenta estas cuestiones: "En algunos de esos países, la incorporación se ha hecho de manera obligatoria" (como en Hong Kong, Francia y Rusia), mientras que en otros se ha hecho de manera opcional (como en Sudáfrica, México, Brasil y países centroamericanos) (Julie *et ál*., 2010, p. 26). Es muy interesante este hecho, pues aquí nos damos cuenta del panorama que tiene la integración de la tecnología en diferentes países. En México se declara que su utilización es de manera opcional, es decir que la tecnología aún se encuentra ubicada en la primera tendencia, anteriormente descrita.

Otras investigaciones analizan los diferentes proyectos que se han implementado a escalas nacionales. Su interés principal es determinar los propósitos planteados así como caracterizar el impacto que tienen en el currículum oficial. Por ejemplo, en el capítulo 5 del libro *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain, The 17th ICMI study* se usa un modelo para caracterizar y comparar distintos proyectos de implementación tecnológica a gran escala, uno de ellos es Enciclomedia, el cual busca complementar las actividades de temas que representan una dificultad para los alumnos utilizando una herramienta tecnológica adecuada. Además uno de sus ejes de análisis del contenido curricular, donde se dice que este proyecto presenta variaciones, en el contenido propuesto por los programas oficiales ya que sugiere actividades que sirven de andamiaje, permitiéndole al alumno aproximarse de diferentes formas a la solución de alguna problemática de un contenido matemático. (Sinclair, Arzarello, Trigueros, Lozano, Dagiene, Bhrooz y Jackiw, 2010).

La importancia del uso de las tecnologías de información en los contextos educativos debe permitir a los alumnos dar significado de la información donde se pueda generar conocimiento, las competencias básicas deberán proveer al alumno las habilidades necesarias para hacer uso de las TIC. (Pérez, 2016).

2.2. ¿Qué variables inciden en su implementación?

La integración de la tecnología en la educación con fines educativos ha tenido diferentes problemáticas a lo largo del tiempo. Artigue (2000) nos describe 4 fenómenos por los que la tecnología en la educación secundaria sigue siendo intrascendental:

> 1. La pobre legitimidad educativa de las tecnologías informáticas en contraposición a su alta legitimidad social y científica: la resistencia del sistema educativo a las tecnologías informáticas no puede analizarse sin abordar cuestiones más generales, como la legitimidad de los medios de enseñanza. Para obtener una legitimidad educativa, se pide principalmente demostrar que pueden ayudar a los maestros para hacer frente a las dificultades recurrentes conocidas.
>
> 2. La subestimación de los problemas vinculados a la informatización de los conocimientos matemáticos: la informatización de los conocimientos matemáticos en calculadoras y software de computadoras son complicados. La transposición de los conocimientos matemáticos se ven seriamente analizadas y tomadas en cuenta en los diseños de ingeniería.
>
> 3. La oposición dominante entre los aspectos técnicos y conceptuales de la actividad matemática: al liberar a los estudiantes de una gran parte de la carga técnica, que, a priori, dejan tiempo para el trabajo más reflexivo y conceptual y por lo tanto se consideran generalmente como un medio ideal para la renovación de las prácticas de enseñanza que se perciben como demasiado estrecho y técnico.
>
> 4. La subestimación de la complejidad de los procesos de instrumentación, los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas se han utilizado para desarrollar entornos con reducida complejidad tecnológica: esto no hace que sea fácil de integrar el hecho de que por introducir herramientas tecnológicas complejas, se introducen al mismo tiempo nuevas necesidades matemáticas y tecnológicas, que tienen que cumplirse incluso si van más allá de las necesidades matemáticas ordinarias (p. 9).

Otra situación acerca de lo que representa la tecnología en la educación es mencionada por Artigue (2007):

> Las tecnologías informáticas trastornan los equilibrios tradicionales entre el valor epistémico y pragmático de las técnicas. Equilibrios que se han establecido progresivamente al filo de la historia, en una cultura de lápiz y papel, aunque los cálculos han estado durante todo el tiempo instrumentados por diversas herramientas: ábacos, tablas numéricas, herramientas gráficas, etc. (p. 21).

Se toma la tecnología como un factor de desequilibrio entre el conocimiento matemático y las técnicas utilizadas para aprenderlo, criticando que favorece más al valor pragmático de las técnicas. Entonces el uso educativo de las tecnologías tiene un *sobre potencial pragmático* y en detrimento el *potencial epistémico*. Pero lo que da la legitimidad educativa a *una técnica* no es sólo su valor pragmático sino también su valor epistémico. Regularmente se usa la tecnología para aprender matemáticas más rápido y mejor, dejando el valor epistémico de los objetos matemáticos.

Para que la integración de tecnología tenga ese equilibrio entre el valor pragmático y epistémico es necesario:

> Que las tareas propuestas en los planes de estudio no sean simples adaptaciones de lo que se hace con lápiz y papel. Desgraciadamente, tales tareas no son creadas tan fácilmente cuando se entra en el mundo de la tecnología con una cultura de lápiz y papel (Artigue, 2007, p. 22).

A partir de los 4 fenómenos planteados por Artigue (2000), Hitt (2013) plantea las siguientes variables que tienen incidencia directa con la implementación de la tecnología en la educación:

> *Variable de corte cognitivo*: ligadas a procesos de instrumentación e instrumentalización, ligadas a procesos procedurales y construcciones conceptuales.
>
> *Variables de corte económico*: en relación al uso de paquetes comerciales o paquetes de uso libre, o a actividades puntuales utilizando tecnología en Internet.
>
> *Variables de corte social*: por qué la tecnología es aceptada en la sociedad y no en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, aprendizaje individualizado y/o aprendizaje en colaboración.
>
> *Variables de corte institucional*: decisiones de las autoridades educativas, decisiones de los productores de libros de texto y de paquetes de cómputo, decisiones institucionales y decisiones personales sobre el uso de la tecnología (p. 2).

Al reflexionar sobre las variables en conjunto, nos damos cuenta de que la integración de la tecnología no es fácil, razón por la cual no se observa una gran evolución en el ámbito educativo en comparación al social o científico. Sin embargo, como menciona Hitt (2013):

ISSN: 2594-1046

> Nuestra posición es que debemos ser conscientes que la tecnología está presente, y que es necesario proporcionar a los estudiantes actividades *ad hoc* que les permitan, tanto a los estudiantes como al profesor, avanzar hacia una matemática más rica, más interesante y se logre construir esquemas cognitivos más amplios sobre el conocimiento y sobre habilidades matemáticas más estables (p. 16).

En este mismo, sentido López y Hernández (2016) reportan una investigación donde analizan los libros texto de matemáticas pertenecientes al nivel de secundaria, con el objetivo de caracterizar la forma en la que se plantean el uso de la tecnología en ellos. Llegaron a la conclusión de que el uso de ella es opcional para el profesor, no se presenta como una integración plena que obligue su utilización sino como una forma complementaria de las actividades propuestas de cada tema.

¿Cómo identificar si se hace un uso razonado de la tecnología?

Para dar respuesta a esta pregunta es necesario hacer uso de las categorías que se han identificado en torno a las tecnologías presentes en la educación.

El uso de las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC), como se nombran en el Plan de Estudios (2011), es un objetivo primordial en la educación básica y según McFarlane *et al.* (2000, referenciadas en Rojano, 2003) se pueden categorizar de la siguiente forma: las TIC como un conjunto de habilidades o competencias; las TIC como un conjunto de herramientas o de medios de hacer lo mismo de siempre pero de un modo más eficiente; las TIC como un agente de cambio con impacto revolucionario. A partir de éstas, en Rojano (2003) se definen la primera como materia de enseñanza, la segunda consiste en agregar elementos de tecnología informática a las tareas de aprendizaje para un mejor logro de los objetivos planteados por el currículo vigente y la tercera como agentes de cambio y con una gran potencialidad de revolucionar las prácticas en el aula, está hoy muy difundida en los medios académicos.

Con base en estas tres concepciones, en una reciente investigación se dieron a la tarea de crear dimensiones para describir las diversas formas en las que se propone la integración de la tecnología en diferentes currículos de la educación superior. Según Hitt y Cortés, las dimensiones que contienen los usos y las intencionalidades son: informático, técnico y didáctico-tecnológico.

> *Informático*. Aquí se propone a la tecnología como un medio para buscar, reproducir o presentar información.
>
> *Técnico*. Su alcance se limita a cuestiones que tiene que ver con realizar acciones habituales donde la tecnología permite hacerlo de una manera más óptima.

> *Didáctica-tecnológica*. Se refiere más a la construcción de significados de objetos en estudio (Miranda y Sacristán, 2012); en nuestro caso ligados a contenidos matemáticos escolares. Entre sus principales características es que está determinada por un uso reflexivo (Hitt y Cortés, 2009 y Hitt, 2003; citados en Hernández, Borjón y Torres, 2015, p. 2).

Esta categorización nos sirve como referencia inicial para construir el marco conceptual en torno a los usos y funcionalidades de la tecnología presentes en el currículo oficial de secundaria. Además tomamos como respuesta principal que el uso razonado de la tecnología se relaciona con la categoría didáctica-tecnológica, pues en ella se engloba la construcción de significados relacionados directamente con los aprendizajes esperados que se buscan en los temas de matemáticas.

Además, se justifica la necesidad de analizar el Plan de Estudios pues se requiere determinar si la tecnología propuesta satisface al equilibrio entre los valores presentados o sólo son simples adaptaciones pensadas más que nada en las prácticas que te permiten ahorrar tiempo, olvidándose un poco del valor conceptual de un contenido matemático. Nos quedaría la pregunta para desarrollar ¿Qué características tendrán las tecnologías que satisfacen ese equilibrio? Es decir cuáles se preocupan de igual forma del valor epistémico de las matemáticas así como del valor práctico.

Es indispensable tener una visión compartida en cuanto a todos los agentes que intervienen en la integración de la tecnología, pues que si bien ésta llega para poder solventar algunas problemáticas tanto prácticas como conceptuales, también representa un factor de cambio referente a las clases tradicionales. Las investigaciones citadas se basan en los beneficios y las problemáticas que hay en la utilización de tecnologías en el aula de clase. También en algunas se resalta el impacto de éstas en el currículo y algunos usos y funcionalidades. Sin embargo, en ninguna de ellas se ha hecho una plena clasificación de los usos y funcionalidades de la tecnología presente en el programa de matemáticas vigente de la educación secundaria, que se conoce como una de las principales herramienta del profesor para guiar este proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. En este aspecto radica la importancia de describir a través de un análisis, las sugerencias que se dan en el programa de matemáticas conforme al tratamiento de los contenidos matemáticos por medio de recursos tecnológicos. De esta forma, se determina de alguna manera lo que las autoridades educativas proponen para que los profesores de matemáticas integren la tecnología en su práctica y que además sirvan para cumplir los aprendizajes esperados de cada tema, así como el desarrollo de las competencias matemáticas.

3. MARCO CONCEPTUAL

El marco conceptual que se utilizará estará conformado de aquello que permita caracterizar los tipos, los usos y funcionalidades de la tecnología que se proponen en el programa de matemáticas. Todo esto para identificar si realmente se propone un uso razonado de la misma. A continuación se presentan algunas definiciones como aproximaciones iniciales para realizar esta investigación:

- Utilizamos el término tecnología para designar todas aquellas herramientas (computadores, programas de computador, calculadoras) que utilizan los últimos adelantos computacionales para aportar al proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Gómez, 2014).
- Uso: específico y práctico a que se destina algo. (RAE, 2006).
- Funcionalidad: cualidad de intencional. Determinación de la voluntad en orden a un fin. (RAE, 2006).
- Clasificación de los programas de computadora y las herramientas tecnológicas para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: micromundos, sistemas de simulación, sistemas tutoriales, programas de inteligencia artificial, aplicaciones de telemática y calculadoras (Gómez, 2014).
- Dimensiones respecto a los usos e intencionalidades: Informático. Aquí se propone a la tecnología como un medio para buscar, reproducir o presentar información. Técnico. Su alcance se limita a cuestiones que tiene que ver con realizar acciones habituales dónde la tecnología permite hacerlo de una manera óptima. Didáctica-tecnológica. Se refiere más a la construcción de significados de objetos en estudio (Miranda y Sacristán, 2012); en nuestro caso ligados a contenidos matemáticos escolares. Entre sus principales características está que es determinada por un uso reflexivo (Hitt y Cortés, 2009 y Hitt, 2003; citados en Hernández, Borjón y Torres, 2015, p. 2).

4. METODOLOGÍA

Como método se utilizará el análisis de contenido, que consiste en el procesamiento y revisión de las dimensiones cuantitativas y cualitativas de los contenidos de la comunicación. Está destinado a formular, a partir de ciertos datos, inferencias plausibles y válidas que puedan aplicarse a su contexto (Krippendorff, 1990, citado por Gómez, 2013). En el contexto educativo nos ayuda a descubrir patrones en el discurso, contrastar una hipótesis previa e inferir significados interpretativos de un texto. Se utilizarán las tres fases propuestas por Bernete (2013):

El trabajo previo a la obtención de los datos. Para realizar este paso es necesario cumplir con el objetivo particular de la creación del marco conceptual.

La extracción de los datos. Para este paso es necesario tener un instrumento que nos permita categorizar los usos y funcionalidades de la tecnología presente.

La explotación de los datos. Que en nuestra investigación nos permitiría realizar una descripción del tipo de integración de la tecnología que se observa en el programa, ésta puede ser técnica, informática o didáctica-tecnológica.

5. CONCLUSIONES

La pertinencia de la investigación se basa principalmente en la problemática que hay entre lo que se pretende alcanzar de acuerdo a los objetivos de los planes de estudio y lo que se sugiere para alcanzar de acuerdo a la estructura del currículo oficial.

Hablando en términos del uso de la tecnología, se pide a los profesores que los alumnos logren alcanzar ciertos aprendizajes esperados relacionados con los contenidos matemáticos, que logren desarrollar diferentes competencias y, por último, se conforme un perfil de egreso. Pero de acuerdo a la estructura del programa que se propone en el plan de estudios vigente, ¿es posible llegar a tales estándares? En este sentido la responsabilidad no recae directamente en las decisiones que tome el profesor al enfrentarse a un proceso de enseñanza y aprendizaje, sino que también a las sugerencias que se le den de forma institucional.

La investigación que se presenta es de carácter descriptivo y se pretende puntualizar la forma en la que está integrada la tecnología en la educación matemática, pues ésta representa otra problemática más que atender en cuanto al aprendizaje y la enseñanza.

El marco conceptual que se pretende conformar, será de gran ayuda para caracterizar los tipos de tecnología que se ofertan en el aula de matemáticas, pretendiendo que sirva de base para futuras investigaciones en las cuales se utilice para proponer diferentes secuencias didácticas y así conformar una planeación útil para el profesor, donde se tengan las bases suficientes para hacer un uso razonado de la tecnología y así cumplir con los objetivos planteados de los contenidos matemáticos.

ISSN: 2594-1046

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (2000). Instrumentation issues and the integration of computer technologies into secondary mathematics teaching. In *Proceedings of the Annual Meeting,* 7-17. Potsdam, Germany. Recuperado de http://webdoc.sub.gwdg.de/ebook/e/gdm/2000

Artigue, M. (2007) Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental. En E. Mancera y C. Pérez (Eds.), *Historia y Prospectiva de la Educación Matemática, Memorias de la XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, (pp. 9- 21). México: Edebé Ediciones Internacionales.

Artigue, M. (2012). Enseignement et apprentissage de l'algèbre*. EducMath*. Recuperado de http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations/conference-nationale/contributions/conference-nationale-artigue-1

Artigue, M. (2013). L'impact Curriculaire Des Technologies Sur L'Éducation Mathématique. Em Teia | *Revista De Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, 4(1). Recuperado de http://www.gente.eti.br/revistas/index.php/emteia/article/view/159

Bernete, F. (2013). Análisis de contenido. En A. Lucas, y A. Noboa (Eds.), *Conocer lo social: estrategias y técnicas de construcción y análisis de los datos* (pp. 221-261). Madrid.

Gamboa, R. (2007). *Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas*. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, 2(3), 11-44.

Hitt, F. (2013). ¿Qué tecnología utilizar en el aula de matemáticas y por qué? *Revista Electrónica AMIUTEM*, 1(1), 1-18.

López, J., y Hernández, J. (2016). Usos de la tecnología en los libros de secundaria y competencias estandarizadoras. En R. Ibarra, E. d. Bueno, R. Ibarra, & J. L. Hernández (Eds.), *Trascender el neoliberalismo y salvar a la humanidad* (pp. 923-935). Zacatecas.

Ursini, S. (2004). Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología (EMAT). En M. T. Rojano Ceballos, *Enseñanza de la Física y las Matemáticas con Tecnología: Modelos de transformación de las prácticas y la interacción social en el aula (*p. 274). México, D.F.

Pérez Ortega, I. (2016). La competencia mediática en el currículo escolar: ¿espacio para inovaciones educativas con tecnologías de la información y la comunicación? *Innovación Educativa*, 16(70), 61-84.

Rojano, T. (2003). Incorporación de entornos tecnológicos de aprendizaje a la cultura escolar: proyecto de innovación educativa en matemáticas y ciencias en escuelas secundarias públicas de México*. Revista Iberoamericana de Educación*, 33, 135-169.

Rojano, T. (2014). El futuro de las tecnologías digitales en la educación matemática: prospectiva a 30 años de investigación intensiva en el campo. *Educación Matemática*, 11-30.

Sinclair, N., Arzarello, F., Trigueros Gaisman, M., Lozano, M. D., Dagiene, V., Bhrooz, E., y Jackiw, N. (2010). Implementing Digital Technologies at a National Scala. En C. Hoyles, & J.-B. *Lagrange, Mathematics Education and Technology-Rethinking the terrain The 17th ICMI Study*, 13, (pp. 61-80). New York: Springer

Zenteno Ancira, A., y Mortera Gutiérrez, F. (2012). Integración y apropiación de las TIC en los profesores y los alumnos de educación media superior. Apertura, *Revista De Innovación Educativa*, 3(1), 142-155. Recuperado de

http://www.udgvirtual.udg.mx/apertura/index.php/apertura/article/view/193/208

Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

DISEÑO DE ACTIVIDADES PARA UNA MEJORA DE UNA CONCEPCIÓN DE LA TRANSFORMACIÓN LINEAL

Esteban Mendoza Sandoval
Universidad Autónoma de Guerrero. emendoza@uagro.mx

Flor Monserrat Rodríguez Vásquez
Universidad Autónoma de Guerrero.emendoza@uagro.mx

Resumen

Este escrito es parte de una investigación en desarrollo, la cual tiene por objetivo realizar y validar diseños de actividades para el aprendizaje de algunos conceptos específicos del álgebra lineal con base en la teoría APOE (Acciones; Procesos; Objetos; Esquemas). Es decir, para realizar estos diseños de aprendizaje se considerarán descomposiciones genéticas, las cuales serán el sustento de las actividades para implementar el ciclo de enseñanza ACE (Actividades, Aula de debate, Ejercicios). En particular, se expondrán actividades referentes a la transformación lineal, las cuales buscan una mejora en la concepción de dicho concepto.

Palabras clave: Teoría APOE, álgebra lineal, ciclo de enseñanza ACE y transformación lineal.

1. INTRODUCCIÓN

El álgebra lineal es una asignatura que, según los planes y programas de estudio afines a matemáticas o en licenciaturas de matemáticas, aparece en al menos un curso en ese nivel educativo. Algunos de sus conceptos tienen aplicación en diferentes áreas; por ejemplo, en física es muy común utilizar a los vectores para modelar fuerzas; en Química se pueden utilizar sistemas de ecuaciones para resolver una ecuación química balanceada; en Economía los mismos sistemas de ecuaciones lineales se pueden utilizar para la solución de modelos económicos.

Algunas investigaciones reportan que en la mayoría de las universidades, en los cursos de álgebra lineal no se alcanza el nivel de aprendizaje esperado (Harel, 1989a y 1989b; Sierpiska, Dreyfus y Hillel, 1999 y Sierpinska, 2000, citados en Trigueros, Maturana, Parraguez y Rodríguez, 2015). Otras reportan que los profesores y estudiantes consideran los temas de álgebra lineal difíciles (Sierpinska, 2000; Larson, Rasmussen, Zandieh, Smith y Nelipovich, 2007; Possani, Trigueros, Preciado y Lozano, 2010; Salgado y Trigueros, 2015).

En este sentido, dada su naturaleza abstracta, se le puede considerar una asignatura difícil de aprender para la mayoría de estudiantes de nivel superior en el área de matemáticas. Dorier, Robert, Robinet y Rogalski (2000) mencionan que cuando se presentan por primera vez los conceptos de álgebra lineal a los estudiantes, ellos tienen la sensación de que aterrizan en un nuevo planeta en el cual no logran ubicarse. Es bastante claro que muchos estudiantes tienen la sensación de haber aterrizado en un nuevo planeta y no son capaces de encontrar su camino en este nuevo mundo. (Dorier *et al*, 2000, p. 86).

Al respecto de esta problemática, en el año 2012 se creó un grupo de discusión organizado por el Comité de Educación de la Sociedad Internacional de Álgebra Lineal (ILAS) en el evento ICME, con el fin de discutir temas relevantes acerca de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal, incluyendo la motivación, problemas desafiantes, la visualización, la tecnología (Berman y Okubo, 2012). Entre las intervenciones, se menciona la importancia de motivar el aprendizaje del álgebra lineal por cuestiones de la vida real. Entre los ejemplos mencionados están: Page Rank de Google; métodos de detección de bordes; Redes neuronales; Los problemas en Teoría de grafos; Propiedades de la sucesión de Fibonacci (Berman y Okubo, 2012). Expertos en álgebra lineal están sugiriendo atender una parte del problema de aprendizaje a través de la motivación, por medio de las aplicaciones del álgebra lineal en la vida cotidiana de los estudiantes.

Así pues, buscamos hacer diseños de actividades que sean sutiles, atendiendo a las estrategias de enseñanza sugeridas por el ILAS. Esto con el fin de una mejora de aprendizaje por parte de los estudiantes en esta asignatura y en particular en conceptos específicos. En este escrito nos centraremos en el concepto de transformación lineal, con base en una descomposición genética haremos diseños para mejorar la concepción respecto a dicho concepto. Tomando como justificación lo expuesto por Roa-Fuentes respecto a la transformación lineal:

> Sin embargo, consideramos que para obtener datos más significativos sobre las construcciones que los estudiantes realizan alrededor del concepto transformación lineal resultaría muy interesante diseñar un modelo de enseñanza que con base en nuestra descomposición genética refinada busque seguir el camino descrito para la construcción del concepto, teniendo en cuenta las consideraciones didácticas que hemos planteado. (Roa-Fuentes, 2008, p. 117).

Así, con diseños guiados por la descomposición genética que propone y considerando las sugerencias didácticas, pretendemos una mejora del aprendizaje de dicho concepto.

Una vez expuesta, a grandes rasgos, la problemática planteamos la siguiente pregunta de investigación.

2. PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

¿Cómo estudiantes de nivel superior pueden mejorar su aprendizaje en algunos conceptos de álgebra lineal?

3. OBJETIVO GENERAL

Realizar y validar diseños de actividades para el aprendizaje de conceptos del álgebra lineal con base en la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos, Esquemas) y el ciclo de enseñanza ACE (Actividades, Discusión en clase, Ejercicios).

3.1. Objetivos particulares

- Hacer diseños de actividades con base en descomposiciones genéticas e implementarlos mediante el ciclo de enseñanza ACE.
- Realizar descomposiciones genéticas empíricas de conceptos necesarios para lograr el objetivo de enseñanza, muy particular en el álgebra lineal.

Hasta este momento nos conformaremos con realizar diseños de actividades con base en la descomposición genética de transformación lineal y de ser posible aplicar completo el ciclo de enseñanza ACE el cual explicamos en la siguiente sección.

4. MARCO TEÓRICO

La investigación se sustentará sobre la base de la teoría APOE, la cual tiene fundamentos en la abstracción reflexiva (Piaget, 1985, pp. 149-150), y es entendida, en el sentido de Dubinsky (1991), como el mecanismo para construir objetos mentales a partir de las acciones mentales sobre estos objetos, lo cual permite mediante la interiorización y coordinación de dichas acciones en nuevas acciones y finalmente nuevos objetos (Dubinsky, 1991, citado en Roa-Fuentes, 2008). En otras palabras, la teoría cognitiva APOE se basa en el supuesto del conocimiento matemático y su desarrollo en un individuo por medio de la abstracción reflexiva:

> El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo o reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizando esquemas con el fin de manejar las situaciones y resolver los problemas. (Dubinsky, 1996, pp. 32-33).

Según dicha postura teórica sobre el conocimiento matemático enfatiza en la habilidad para reorganizar conocimiento y con ello construir o reconstruir concepciones, mediante las construcciones: acciones, procesos, objetos, esquemas que se restructuran y se adaptan para dar solución a problemas matemáticos. Cuando se presenta una situación en la que está en juego el uso de conocimiento matemático, un individuo debe recurrir a los conceptos que están involucrados en dicha situación y, de ser posible, establecer las relaciones con otros conceptos que la situación requiera. Ante esta necesidad de organizar, construir o reconstruir y establecer conexiones entre lo aprendido y por aprender, Roa-Fuentes (2008) menciona que, a medida que los problemas motivan al establecimiento de conexiones entre los esquemas, estos evolucionan y en consecuencia el conocimiento del individuo es enriquecido.

Para Piaget (1983) y García (1989), citados en Arnon, Cottill, Dubinsky, Oktaç, Roa-Fuentes, Trigueros y Weller (2014, p. 25), los conceptos matemáticos no se aprenden directamente y es necesario construir estructuras mentales para darles sentido. Es decir, ante un nuevo concepto que se le presente al individuo, la capacidad de adquirir y apropiarse del conocimiento matemático depende de las estructuras mentales previas apropiadas para comprenderlo (Dubinsky, 1991). Respecto a una estructura mental y un mecanismo mental diremos que:

> Una estructura mental es cualquier estructura (es decir, alguna cosa construida en la mente) relativamente estable (aunque capaz de desarrollarse) que un individuo usa para dar sentido a una situación matemática. La fuente de una estructura mental es la descripción de la cual ella se origina. Un mecanismo mental es el medio por el cual una estructura puede desarrollarse en la mente de un individuo o un grupo de individuos. (Stenger, Weller, Arnon, Dubinsky y Vidalovic, 2008, p. 98).

Dicho modelo teórico establece las conexiones entre los mecanismos mentales (clases de abstracción reflexiva: Interiorización, Coordinación, Encapsulación, Generalización y Reversión) y las construcciones mentales (Acción, Proceso, Objeto y Esquemas) o estructuras mentales, bajo el supuesto de que el conocimiento no se genera de la nada, el individuo tiene ciertas estructuras muy cercanas o no al concepto, las cuales deben llevarse a las estructuras apropiadas para comprender el concepto, y los mecanismos mentales le permitirán lograr dichas estructuras, así como establecer conexiones entre ellas (Mendoza-Sandoval, Roa-Fuentes y Rodríguez-Vasquez, 2015).

4.1. Clases de abstracción reflexiva

Dubinsky considera cinco tipos de mecanismos mentales, tomando cuatro de las ideas de Piaget y anexando uno a la teoría: Interiorización, Coordinación, Encapsulación, Generalización y

ISSN: 2594-1046

Reversión Dubinsky (1991). Para más información sobre estos mecanismos mentales sugerimos al lector consultar Arnon *et al*. (2014).

Estos mecanismos mentales tienen la principal función de relacionar en el momento preciso las estructuras y transitar de una a otra estructura o revertirla si un sujeto lo considera necesario. La importancia de estos mecanismos es fundamental, relaciona las estructuras, proporciona las pautas para que un individuo construya su propio conocimiento. Advertimos aquí, que cada individuo es responsable de que estos mecanismos tengan éxito o no, puesto que una forma de describir y establecer conexiones con las estructuras depende de su conocimiento matemático (Mendoza-Sandoval, Roa-Fuentes y Rodríguez-Vasquez , 2015).

4.2. Construcciones mentales

Las construcciones mentales que propone la Teoría APOE son: Acción, Proceso, Objeto y Esquema. Podrían ser entendidas como todas las transformaciones que realizan los individuos para resolver determinadas tareas y que puedan adquirir significado de ellas. Podrían darse como reconstrucciones exactas (correspondiente a la memoria y a la repetición de métodos, algoritmos previamente conocidos) o adaptaciones de algo previamente aprendido, está ultima es de vital importancia puesto que intervienen directamente con el desarrollo del conocimiento matemático. Para más información sobre estas estructuras sugerimos al lector consultar Arnon *et al*. (2014).

En la Figura 1 se muestran las conexiones entre las construcciones mentales que están dadas por los mecanismos mentales; y se ejemplifica cómo un individuo construye estructuras matemáticas.

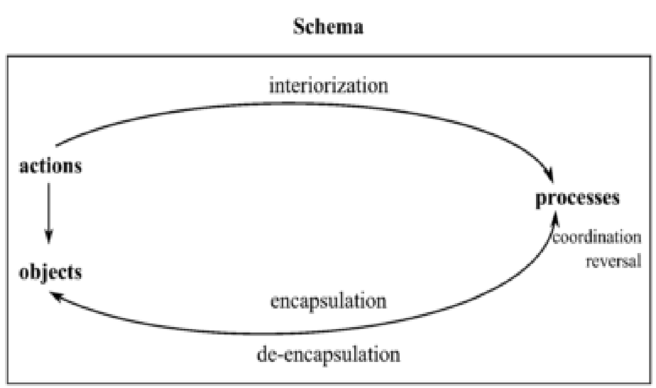


Figura 1. Estructuras mentales y mecanismos para la construcción del conocimiento matemático, Arnon et al., (2014, p. 18)

Según Mendoza-Sandoval, Roa-Fuentes y Rodríguez-Vasquez (2015), en una situación problema donde está en juego el conocimiento matemático de un concepto, lo primordial es que el individuo a partir de su concepción forme las estructuras adecuadas (previas) del concepto de interés y a partir de ahí conciba al concepto como una estructura más sofisticada.

4.3. La enseñanza de las matemáticas desde la perspectiva teórica APOE

Desde este enfoque teórico, la enseñanza de un concepto específico comienza con la descripción de las estructuras mentales que un individuo podría hacer a la hora de entender un concepto y posterior a ello la implementación se lleva a cabo usando el Ciclo de Enseñanza ACE, instrucciones que apoyen el desarrollo de las construcciones mentales descritas en la descomposición genética (Arnon *et al*., 2014).

4.4. ¿En qué consiste el ciclo ACE?

Arnon *et al*. (2014) mencionan que dicho ciclo suele incluir actividades donde los estudiantes trabajen en forma cooperativa, y con el uso de un lenguaje de programación matemática tal como ISETL.

La expresión de lenguaje de programación matemática se refiere a un programa que satisface tres propiedades:

> 1. La sintaxis está cerca de la notación matemática estándar.
>
> 2. Algunas funciones matemáticas son compatibles, con sus propiedades matemáticas habituales.
>
> 3. Tipos de datos importantes, tales como procedimientos y funciones, pueden ser operados o llamados y devueltos por procedimientos y funciones. (Arnon *et al*., 2014, p. 57).

El ciclo de enseñanza ACE es una estrategia pedagógica que consiste en tres componentes: Actividades (A); Aula de debate (C); Ejercicios (E). Las Actividades son la primera parte del ciclo, los estudiantes trabajan cooperativamente en equipos con tareas diseñadas que ayudarán a las construcciones propuestas en la descomposición genética (Arnon *et al*., 2014). Básicamente, estas tareas están enfocadas en promover una abstracción reflexiva en lugar de respuestas correctas. Usualmente, la teoría propone un lenguaje de programación, por ejemplo ISETL.

La Discusión en el Aula, la segunda parte de este ciclo, consiste en la organización de grupos pequeños en la cual la discusión es dirigida por el instructor de la clase. Dichas discusiones

ISSN: 2594-1046

en clase y trabajos en clase deben de dar a los estudiantes la oportunidad de reflexionar sobre el trabajo realizado y particularmente lo realizado en el laboratorio. En esta fase como el instructor es quien guía la discusión, él o ella pueden proporcionar definiciones, explicaciones o presentar una conexión entre lo que los estudiantes están pensando y trabajando (Arnon *et al*., 2014).

Los Ejercicios de Tarea, esta tercera parte del ciclo consiste en problemas diseñados para reforzar las actividades de la computadora y la discusión en el aula. Los ejercicios ayudan al desarrollo continuo de las construcciones mentales sugeridas en la descomposición genética. También ayuda a los estudiantes a aplicar lo que han aprendido y tener en cuenta ideas matemáticas relacionadas (Arnon *et al*., 2014). En la Figura 2, se puede ver la relación entre la descomposición genética y el ciclo ACE.

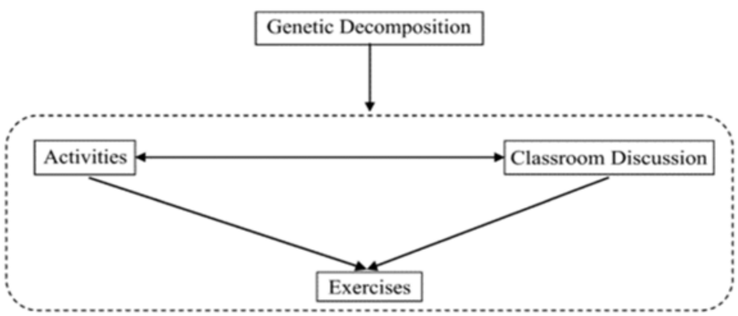


Figura 2. Relación entre el ciclo de enseñanza ACE y una descomposición genética (Arnon et al., 2014)

La Figura 2 ilustra que la descomposición afecta a cada componente del ciclo de enseñanza ACE. La flecha de la bicondicional entre las actividades y la discusión en el aula, por una parte sugiere que las actividades son lo principal en la discusión en clase y, por otra que la discusión en clase es un medio de reflexión por lo realizado por los estudiantes en el aula de clases. Las flechas que van de las actividades y la discusión de clase, a los ejercicios reflejan el objetivo principal de los ejercicios, el cual consiste en reforzar las construcciones mentales que los estudiantes han evidenciado o empiezan a evidenciar (Arnon *et al*., 2014).

5. MÉTODO

Para llevar a cabo la siguiente propuesta de investigación recurriremos en gran parte a la metodología que propone la teoría APOE y su ciclo de enseñanza (ACE), explicado en el apartado anterior. La investigación que proponemos está pensada en estudiantes de Nivel Superior de una Licenciatura en Matemáticas o una carrera a fin de la Universidad Autónoma de Guerrero. Los instrumentos de investigación serán diseños de actividades con sustento en la descomposición genética de transformación lineal (Roa-Fuentes, 2008). Considerando que la investigación la haremos en tres momentos.

5.1. Primera fase

Se realizarán diseños de actividades sobre la base de la teoría APOE (actividades, ejercicios), a partir de descomposición genética transformación lineal. Estos instrumentos deben apoyar instrucciones que permitan desarrollo de las construcciones mentales descritas en la descomposición. Para la validación de los instrumentos utilizaremos la validación por expertos.

5.2. Segunda Fase

Una vez que tengamos nuestros diseños de enseñanza, implementaremos la segunda componente que propone la teoría APOE, es decir, la implementación de enseñanza del ciclo ACE, en el cual buscaremos promover las concepciones de los estudiantes a una estructura objeto de cada concepto de interés en esta investigación. En esta fase se implementarán las actividades y la discusión de clase y se le dará seguimiento a los ejercicios dados en clase.

5.3. Tercera Fase

Se recolectarán y analizarán los datos para rediseñar las actividades en función del éxito o no alcanzado por los estudiantes respecto al aprendizaje de los conceptos de interés en contraste con el desempeño de estudiantes de un curso tradicional de álgebra lineal en la misma institución educativa.

En este avance de investigación se mostrarán algunos diseños de actividades respecto a transformación lineal así como su análisis a priori de cómo creemos se lograría una concepción al menos de objeto de dicho concepto.

6. CONCLUSIONES

Una vez aplicados los diseños de actividades con base en la teoría APOE, se espera favorecer el aprendizaje de los estudiantes, referente a los conceptos clave que se han elegido en álgebra lineal. Se espera que los estudiantes adquieran a partir de dichos diseños al menos una concepción objeto de Transformación lineal.

ISSN: 2594-1046

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arnon, L., Cottill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory a framework for research and curriculum education.* New York: Springer Netherlands.

Berman, A., & Okubo, K. (2012). The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education. In S. Je Cho (Ed.), *Issues Surrongding Teaching Linear Algebra (p*p. 593–596). Seul, Korea: Springer Open.

Dorier, J.-L. (2000). Epistemological analysis of the genesis of the theory of vector spaces. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* 23, pp. 1–81. Grenoble, Francia: Kluwer Acedemic Publishers.

Dorier, J.-L., Robert, A., Robinet, J., & Rogalski, M. (2000). The obstacle of formalism. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (Volumen 23, pp. 85–124). Grenoble, Francia: Kluwer Acedemic Publishers.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in avanced mathematical thinking. In T. David (Ed.), *Advanced mathematical thinkin*g (pp. 95–123). Dordrecht: Springer Netherlands.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva píagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, 8 (3), 24–41.

Mendoza-Sandoval, E., Roa-Fuentes, S., & Rodríguez-Vasquez, F. M. (2015). Construcción de la matriz cambio de base: un análisis cognitivo en términos de la Teoría APOE. In *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática.*

Roa-Fuentes, S. (2008). *Construcciónes y Mecanismos Mentales Asociados al concepto Transformación Lineal.* Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Salgado, H., & Trigueros, M. (2015). Teaching eigenvalues and eingevectors using models Apos Theory. *The Journal of Mathematical Behavior*, 39, 100–120.

Stenger, C., Weller, K., Arnon, I., Dubinsky, E., & Vidalovic, D. (2008). A search for a constructivist approach for understanding the uncountable set P(n). *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, 11(1), 93–125.

Trigueros, M., Maturana, I., Parraguez, M., y Rodríguez, M. (2015). Construcciones y mecanismos mentales para el aprendizaje del teorema matriz asociada a una tranformación lineal. *Educación Matemática,* 27(2), 95–124.

Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

DESARROLLO DOCENTE EN MATEMÁTICAS DESDE LO INDUCTIVO Y DEDUCTIVO DEL CONOCIMIENTO

Landy Sosa Moguel
Universidad Autónoma de Guerrero. landy.sosa@gmail.com

Ma. Guadalupe Cabañas Sánchez
Universidad Autónoma de Guerrero.landy.sosa@gmail.com

Resumen

En este artículo se reportan los hallazgos que se han obtenido del estado del arte de una investigación en proceso inicial, la cual tiene como propósito establecer el tipo de variables que pudiera tener un programa de desarrollo profesional docente en matemáticas de secundaria basado en el carácter inductivo y deductivo del conocimiento. Por medio de una investigación documental, el estado del arte se orienta en dos vertientes: las tendencias conceptuales de investigación sobre el tema del desarrollo profesional de la docencia y el papel de lo inductivo-deductivo en la construcción de conocimiento matemático. En dicho estudio se reconoce la importancia de incorporar y analizar lo inductivo-deductivo como una forma de favorecer procesos de formación y desarrollo profesional docente en matemáticas.

Palabras clave: Inducción, deducción, desarrollo profesional docente, matemáticas.

1. INTRODUCCIÓN

En este escrito se exponen hallazgos obtenidos sobre el estado de arte de una investigación en proceso que tiene como propósito analizar y establecer el tipo de variables a considerar en un programa de desarrollo profesional docente en matemáticas de secundaria, con eje rector en el carácter inductivo y deductivo del conocimiento matemático, de modo que se favorezca un desarrollo profesional más certero y permanente.

El estudio de procesos de formación y desarrollo profesional docente, particularmente en matemáticas, ha ocupado la atención de Matemáticos Educativos nacionales e internacionales. Algunos han analizado y documentado la relación de dependencia entre el tipo de práctica educativa realizada por el profesorado con el tipo de concepciones, creencias y conocimiento que poseen (Pajares, 1992; Ponte, 1994; Agudelo-Valderrama, 2008), reportando que su conocimiento del contenido, las prescripciones institucionales de enseñanza, sus creencias y el modelo de formación que heredaron son factores que afectan sus decisiones pedagógicas e inciden en la práctica. Se muestra así la supremacía de lo que podría caracterizarse como un modelo idiosincrático de desarrollo docente profesional ante uno profesional-institucional.

ISSN: 2594-1046

Algunos otros han colocado como eje central de sus reflexiones y estudio, el tipo de conocimiento pedagógico y disciplinar que un profesor debiera poseer para desempeñar profesionalmente su labor (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Shulman, 2005; Ball, Thames y Phelps, 2008). También hay quienes además del conocimiento del profesor, plantean la importancia de favorecer con programas de formación docente la auto reflexión académica (Ponte y Chapman, 2006) o cuestiones de empoderamiento (Reyes y Cantoral, 2013).

Si bien la cantidad y diversidad de trabajos en el tema es considerable y en aumento, basta ver los trabajos editoriales realizados en el tema por Planchar, Garbin y Gómez (2005); Sánchez (2011) y Dolores, García, Hernández y Sosa (2014), visiblemente en su mayoría aún predomina un posicionamiento conservador respecto a la problemática que representa el analizar y plantear procesos de formación y desarrollo profesional docente en matemáticas que se vean traducidos en mejoras, no sólo del tipo de conocimiento en el profesorado, de su sistema de creencias y concepciones, de su capacidad para empoderarse o para la autorreflexión de su práctica, sino en la constitución y movilización de formas de pensamiento profesional docente que estén más relacionados con los procesos de construcción del conocimiento matemático, tanto en situación escolar como no escolar, tal es el caso del análisis del razonamiento – pensamiento inductivo en dichos procesos.

El planteamiento anterior tiene sentido si se considera que histórica y filosóficamente, la construcción de conocimiento científico matemático ha estado estrechamente ligada a procesos tanto cognoscitivos como socioculturales que en su mayoría iniciaron con razonamientos inductivos, con el estudio de casos particulares, de patrones locales y de la observación de regularidades que se racionalizaron para hacer una generalización o validar algún resultado (Poincaré, 1902; Shapiro, 2007). No obstante, hoy día se reconoce que en conjunto, deducción e inducción constituyen formas de pensar que preceden a la construcción del conocimiento científico, aspecto que ha pasado casi inadvertido en la literatura especializada sobre estudios de procesos de formación y desarrollo profesional docente en general, y de matemáticas en particular.

Respecto a la construcción de conocimiento y aprendizaje matemático en situación escolar, existe evidencia de que el pensamiento inductivo potencializa procesos transformativos asociados a la producción de conocimiento matemático (Jong & Njoo, 1992; citados en Wilhelm & Beishuizen, 2003) y de que el aprendizaje matemático se puede estructurar sobre una componente de procesos inductivos como la generación de hipótesis, el diseño de experimentos sistemáticos, resolución de tareas concretas e interpretación de información para establecer inferencias o conclusiones (Wilhelm & Beishuizen, 2003; Castro, Cañadas & Molina, 2010).

En el lado de la relación entre formación docente y tipos de razonamiento se tienen los trabajos de Arslan, Ilkörücü y Seden (2009), quienes establecen una relación entre las formas de razonamiento deductivo e inductivo movidos por profesores en pre-servicio y los aprendizaje generados, en comparación con estudiantes universitarios en formación matemática. De manera más particular, Soler-Álvarez y Manrique (2014) muestran una caracterización de las formas de razonamiento (abductivo, inductivo y deductivo) usadas por profesores de matemáticas en formación al resolver actividades sobre números racionales e irracionales.

De lado de las prácticas educativas y formas de pensamiento del docente en matemáticas, se ha reportado que las costumbres didácticas, el pensamiento y la práctica del docente, continúan adheridas a una forma de razonamiento deductivo, con énfasis en la exposición de reglas (Gavilán, García y Llinares, 2007; Maschieto, 2008), excluyéndose en alguna medida lo inductivo.

Siguiendo este orden, es factible decir que una de las problemáticas en el sistema escolar es el hecho de que las prácticas docentes permanecen adheridas a una lógica formal de validación de la matemática en tanto ciencia axiomática-deductiva, con discursos y tratamientos que inician con el establecimiento de resultados generales y se verifican con casos puntuales. Asimismo, que las propuestas de desarrollo profesional docente se organizan sobre la base de una matemática netamente deductiva y estructural, haciendo falta investigación que permita entender y explicar el papel de lo inductivo en procesos de formación y desarrollo profesional docente en matemáticas. Así como estudiar si estas dos lógicas, inductiva y deductiva, inherentes a los procesos de construcción de conocimiento y de desarrollo cognitivo en las personas, se complementan o contraponen en las prácticas docentes de matemáticas, sobre todo, en niveles de educación básica como la secundaria.

Por lo antes expuesto, la investigación en curso se dirige a aportar respuestas a los cuestionamientos siguientes: ¿En qué medida se relaciona lo inductivo con lo deductivo en el quehacer cotidiano del profesor de matemáticas, particularmente en el tema de ecuaciones? ¿Qué elementos inductivos y deductivos favorecen el desarrollo de experiencias de aprendizaje profesional docente más funcionales y duraderas al interior del aula?

Para el estado del arte de la investigación se indagó ¿Cuáles son las perspectivas de estudio y resultados de investigación en torno al desarrollo profesional docente en matemáticas, en las últimas cuatro décadas? ¿Qué se reporta en la literatura acerca del papel de la inducción y deducción en relación con la construcción de conocimiento y docencia en matemáticas?

Metodológicamente, las categorías de análisis en la investigación documental para este estado del arte se encausan en dos vertientes: i) la tendencia conceptual sobre investigaciones en el tema de profesionalización y desarrollo profesional docente en matemáticas; y ii) en la lógica inducción – deducción como medio para construir conocimiento matemático.

2. TENDENCIAS INVESTIGATIVAS SOBRE LA PROFESIONALIZACIÓN DOCENTE

Los estudios sobre procesos de formación, desarrollo y profesionalización docente en matemáticas han transitado por diversas aproximaciones teóricas. En un primer momento figuran las que sitúan el tema en relación con todo un sistema de creencias y concepciones de los profesores sobre la enseñanza y aprendizaje de las ciencias y matemáticas (Ponte, 1992; Thompson, 1992; Contreras, 1998).

Siguieron a las anteriores aquellas que asumían como cuestión fundamental, reconocer el tipo de conocimiento profesional necesario para que los docentes ejecutaran prácticas de enseñanza más efectivas; esto bajo la hipótesis de que existe un conocimiento “base” para la enseñanza, tal como el conocimiento sobre el contenido, sobre el currículo, de la didáctica general, entre otros y que de algún modo cualifican la actividad del docente (Shulman, 1986; Leinhardt y Greeno, 1986), pero sin que necesariamente se especificara el carácter de ese conocimiento y cómo conceptualizarlo, por lo que los programas de profesionalización fueron orientados al dominio matemático y habilidades pedagógicas (Santibañez, 2007; Barton & Sheryn, 2009).

Hoy día este tipo de aproximaciones sigue vigente en la propuesta conocida como Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT, por sus siglas en inglés), impulsada por Ball, Thames y Phelps (2008), en la que se establecen dominios de ese conocimiento agrupados en dos dimensiones: el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido, como se muestra en la Imagen 1. En este modelo se sustentan investigaciones que buscan caracterizar estos dominios de conocimiento por medio del análisis de las prácticas docentes y que, para la determinación de descriptores relativos al conocimiento del contenido, toman como referente formas deductivas-estructurales de la matemática curricular, como puede verse en Sosa y Carrillo (2010) en la comprensión del MKT sobre el tema de matrices.

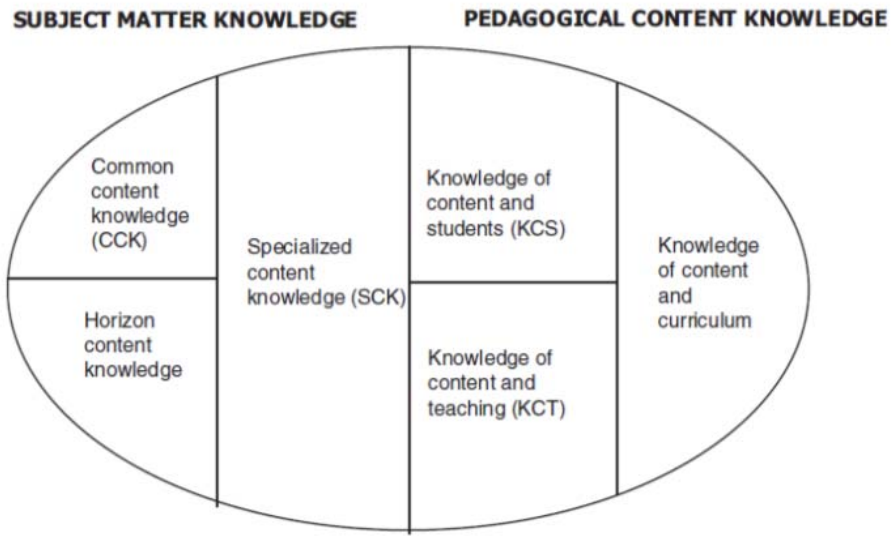


Imagen 1: Dominios del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (Ball, *et al*, 2008, p. 403)

Posteriormente aparecieron aproximaciones que consideraban una relación dialéctica entre teoría y práctica, en la que aprender a enseñar viene como resultado de una "práctica reflexiva" (Barlett, 1990; Gore y Zeichner, 1991). Sin embargo, y hasta ese entonces la cuestión no podría ser atendida sólo desde las relaciones entre un sujeto cognoscente (profesor) y un objeto (conocimiento), ignorándose aspectos socioculturales asociados al profesorado y al conocimiento, tanto igual que al papel de los colectivos en los procesos de desarrollo personal y profesional.

De modo que algunas propuestas investigativas empezaron a considerar al docente y su actividad como un sistema complejo en el que su conocimiento de la matemática se ve afectado en lo global e individual por la interpretación colaborativa y la actividad de co-adaptación en el aprendizaje, tal es el caso del modelo Mathematics for Teaching (Davis & Simmt, 2003). Así se incorpora lo social a lo cognitivo para estudiar no cómo enseñan sino cómo aprenden matemáticas los profesores, dando mayor importancia al desarrollo de experiencias docentes en entornos colectivos y transformativos sobre la visión, estructura y uso de la matemática (Davis & Simmt, 2006). Sin embargo, el contexto sociocultural del docente y de sus saberes poco es considerado, incluso en propuestas con enfoque antropológico y sociocultural, en las que asume la idea de situar las experiencias de profesionalización docente en el contexto de comunidades de práctica (Núñez, Arévalo y Ávalos, 2012) o los estudios de clase (Lewis, Perry y Murata, 2006; Saito, Harun, Kuboki y Tachibana, 2006; Lee, 2008) que buscan conformar colectivos y culturas de aprendizaje entre pares para la teorización de la práctica y la construcción de conocimiento a través de acciones reflexivas permanentes y situadas.

ISSN: 2594-1046

Más recientemente, en México un grupo de investigadores han abordado el tema desde una mirada socioepistemológica en la que la noción de problematización del saber por parte del docente es una forma en la que éste pueda empoderarse de su actividad (Reyes y Cantoral, 2013) y otros que asumen al problema más allá de una problematización del saber y del papel de los contextos institucionales o sociales, situándolo en cuestiones relacionadas con procesos de re-conceptualización del saber y el desarrollo de un pensamiento didáctico profesional en matemáticas (Aparicio, Sosa y Jarero, 2012; Sosa, Aparicio, Jarero, Tuyub, 2014).

Así, la problemática fundamental de la profesionalización docente en matemáticas exige ir más allá del estudio de las interrelaciones entre lo cognitivo y sociocultural, trastocándose apenas la naturaleza del saber matemático. Se requiere de conformar epistemologías de desarrollo profesional docente mucho más sistémicas con lo social, lo cognitivo y con los procesos de pensamiento inherentes a la construcción y reconstrucción de significados, que trascienda lo normativo institucional.

3. LO INDUCTIVO-DEDUCTIVO EN LA CONSTRUCCIÓN DE CONOCIMIENTO

Bajo la perspectiva de la filosofía experimental, de la cognición (Heit y Rotello, 2010) y de la epistemología de la matemática, puede concluirse que inducción y deducción son procesos socio-cognitivos propios de la construcción de conocimiento matemático y científico, que las personas desarrollan para interpretar y establecer relaciones que les permitan describir, explicar o transformar su realidad con un sustento racional. En la filosofía experimental y de la ciencia empírica de Newton esto puede interpretarse en el desarrollo de la teoría de la gravitación y en su trabajo sobre óptica, donde “las proposiciones se *deducen* de los fenómenos y se hacen generales por *inducción*” (Shapiro, 2007, p. 113).

La historia de la matemática y las ciencias da cuenta de cómo la construcción de conocimiento matemático está socioculturalmente situada no sólo en prácticas deductivas, sino en inductivas empíricas, como medio para pasar de la observación de realidades concretas o individuales a lo general y abstracto. Por mencionar un ejemplo, la construcción y significación del concepto ecuación se halla en la conjugación de lo inductivo y deductivo para transitar conceptualmente de la ecuación como una relación de igualdad entre cantidades fijas (con incógnitas) a la ecuación como relación entre cantidades (variables) en situaciones de variación continua; o bien, para pasar de la resolución de ecuaciones específicas con sustento en argumentos concretos y numéricos a su abstracción y generalización con ecuaciones más generales.

Por otra parte, el promover y desarrollar el razonamiento inductivo en los aprendices de matemáticas de nivel básico ha sido una demanda constante (NCTM, 1989). Por ejemplo, que los jóvenes reconozcan al razonamiento y la prueba como aspectos esenciales de las matemáticas, que hagan e investiguen conjeturas, desarrollen y evalúen argumentos y pruebas matemáticas, que seleccionen y usen varios tipos de razonamiento y métodos de pruebas (NCTM, 2000). Así, uno de los tres dominios matemáticos que se espera logren los estudiantes en dicho nivel educativo es el razonamiento, en tanto un pensamiento sistemático. En efecto, como parte constitutiva de ese pensamiento se considera que ellos desarrollen un razonamiento *inductivo* basado en el reconocimiento de patrones y regularidades para obtener la solución de problemas no rutinarios, la observación y establecimiento de conjeturas, y un razonamiento *deductivo* que se sustente en supuestos o reglas específicas para justificar resultados (TIMSS, 2011).

Curricularmente, se demandan escenarios escolares en los que el razonamiento inductivo esté relacionado con la exploración y la generalización de diferentes tipos de patrones y que sirva de base al conocimiento estructural en el aprendizaje matemático. Por su parte, lo deductivo ha de promoverse como un proceso de razonamiento que parta de un conjunto de premisas generales para llegar a una conclusión lógicamente válida, de modo que permita a los estudiantes obtener conclusiones que están implícitas en información dada (Christou & Papageorgiou, 2007).

Sin embargo, tales demandas han representado una doble problemática para la educación matemática, pues por una parte los estudiantes ven a la actividad de probar como algo difícil (Balacheff, 1991; Healy y Hoyles, 2000) y por otra, la formación del profesorado en matemáticas y los programas de desarrollo profesional suelen no tener profesores suficientemente preparados para satisfacer tal tipo de demandas (Ross, 1998).

El trabajo de Knuth (2002) muestra cómo los docentes de matemáticas en secundaria tienen problemas de concepción y de entendimiento sobre el papel que la prueba tiene en los aprendizajes de los estudiantes, pues no la miran como una herramienta para comunicar y estudiar matemáticas, mostrando así que los profesores mismos carecen de una lógica inductiva – deductiva de la actividad matemática. Otros trabajos, como los de Harman (1999) y Rips (2001), también se han ocupado del tema al analizar el tipo de mecanismos que usan las personas para resolver tareas inductivas y deductivas y sus posibles relaciones, así como los de Heit y Rotello (2010), quienes

ISSN: 2594-1046

estudiaron la relación entre ambos tipos de razonamiento en la validación de argumentos por distintas personas.

Harel & Sowder (1998) comentan que los programas de formación del profesorado sufren de una falta de atención a los tres componentes cruciales de conocimiento de los profesores: el contenido matemático, la epistemología y la pedagogía. Es factible decir que en cierta forma se soslaya el desarrollo de experiencias de aprendizaje matemático por parte del docente como parte de su desarrollo profesional, consecuentemente, los docentes carecerán de una adecuada articulación de aspectos deductivos e inductivos propios de la actividad matemática, por ejemplo, la dimensión estructural, conceptual y operativa de los conceptos matemáticos, pues como menciona Goizueta y Planas (2013), un problema en la enseñanza de las matemáticas es el ligado a la difícil distinción entre lo estructural, lo epistémico y lo comunicativo en la gestión y la evaluación de las prácticas argumentativas del alumnado por parte de los docentes.

4. CONCLUSIONES

En resumen, las investigaciones sobre la profesionalización de la docencia en matemáticas han girado en torno a la dimensión disciplinar, pedagógica y curricular de los docentes, al tiempo que se ha discutido sobre la importancia de cuestionar la naturaleza de los saberes matemáticos y su dimensión institucional. De allí que en este trabajo de investigación se coincide con la postura de Sosa, Aparicio, Jarero y Tuyub (2014) respecto a que el desarrollo profesional docente es un proceso contextualizado y continuo ligado al desarrollo de experiencias de aprendizaje colectivas en donde lo matemático, en tanto de forma de pensamiento, se articula con la especificidad didáctica y los aspectos socioculturales que le subyacen.

Por otra parte, y como puede concluirse de los apartados anteriores, poco se ha estudiado sobre cómo tratar e incorporar la naturaleza inductiva – deductiva de los razonamientos asociados a la construcción de conocimiento matemático como una forma de favorecer procesos de formación y desarrollo profesional en los docentes de matemáticas en secundaria.

Por ende, asumimos que la problemática de formación y desarrollo profesional docente en matemáticas debe ser ampliada de modo que se considere como parte de las reflexiones, el papel que los procesos inductivos – deductivos tendrían como elementos epistémicos esenciales en el entendimiento y explicación de dicha problemática.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Agudelo-Valderrama, C. (2008). The power of Colombian mathematics teacher's conceptions of social/institutional factors of teaching. *Educational Studies in Mathematics, 68,* 37-54.

Aparicio, E., Sosa, L., & Jarero, M. (2012). Prácticas docentes en matemáticas de bachillerato. Un análisis desde la noción de acto deliberado. En L. Sosa, E. Aparicio y F. Rodríguez (Eds.), *Memoria de la XV Escuela de invierno en Matemática Educativ*a (pp. 60-65). México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A.C.

Balacheff, N. (1991). The benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof. In A. Bishop, S. Mellin-Olsen, & J. van Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 175−194). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Ball, D. L., Lubienski, S., & Mewborn, D. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 433-456). Washington, D.C.: American Educational Research Association.

Ball, D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of teacher education*, *59*(5), 389-407.

Barton, B., & Sheryn, L. (2009). The Mathematical needs of secondary teachers: Data from three countries. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 40*(1), 101-108.

Contreras, L. (1998). Resolución de problemas: Un análisis exploratorio de las concepciones de los profesores acerca de su papel en el aula. (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Huelva, España.

Christou, C., & Papageorgiou, E. (2007). A framework of mathematics inductive reasoning. *Learning and Instruction, 17*(1), 55-66.

Davis, B., & Simmt, E. (2003). Understanding learning systems: Mathematics education and complexity science. *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(2), 137–167.

Davis, B., & Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: an ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 293-319.

Dolores, C., García, M., Hernández, J., & Sosa, L. (2014, eds.) *Matemática Educativa: la formación de profesores.* México: Díaz de Santos. ISBN: 978.84.9969.664.5.

Gavilán, J., García, M., & Llinares, S. (2007). La modelación de la descomposición genética de una noción matemática. Explicando la práctica del profesor desde el punto de vista del aprendizaje potencial en los estudiantes. *Educación Matemática*, *19*(2), 5-39.

Goizueta, M., & Planas, N. (2013). El papel del contexto en la identificación de argumentaciones matemáticas por un grupo de profesores. PNA, 7(4), 155-170.

Gore, J., & Zeichner, K. (1991). Action research and reflective teaching in pre-service teacher education: a case study from the usa. *Teaching and Teacher Education*, *7*(2), 119-136.

Harel G., & Sowder L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. Schoenfeld, J. Kaput, E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III*, (pp. 234-283). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Harman, G. (1999). *Reasoning, meaning and mind*. Oxford: Oxford University Press.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 396-428

Heit, E., & Rotello, C. (2010). Relations Between Inductive Reasoning and Deductive Reasoning. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 36(3), 805-812. DOI: 10.1037/a0018784

Knuth, E. (2002). Secondary School Mathematics Teachers' Conceptions of Proof. J*ournal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 379-405

Lee, J. (2008). A Hong Kong case of lesson study—Benefits and concerns. *Teaching and Teacher Education, 24*, 1115–1124. DOI:10.1016/j.tate.2007.10.007.

Leinhardt, G., & Greeno, J. (1986). The cognitive skill of teaching. *Journal of Educational Psychology, 78*(2), 75-95.

Lewis, C., Perry, R., & Murata, A. (2006). How should research contribute to instructional improvement? The case of Lesson Study. *Educational Researcher, 35*(3), 3- 14.

Maschietto, M. (2008). Graphic Calculators and Micro-Straightness: Analysis of a Didactic Engineering. *Internacional journal of computers for mathematical learning*, *13*, 207-230.

National Council of Teachers of Mathematics. Commission on Standards for School Mathematics. (Ed.). (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*.

National Council of Teachers of Mathematics. Commission on Standards for School Mathematics. (Ed.). (2000). *Principles and standards for school mathematics*.

Núñez, M., Arévalo, A., & Ávalos, B. (2012). Profesionalización docente: ¿Es posible un camino de convergencia para expertos y novatos? *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 14*(2), 10-24. Consultado en http://redie.uabc.mx/vol14no2/contenido-nunezetal.html

Pajares, M. F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research, 62*(3), 307-332.

Planchar, E., Garbin, S., & Gómez, I. (2005). La formación del profesorado en educación matemática: cooperación entre Europa y América Latina. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 38,* 45-69.

Poincaré, H. (1902/1963). *Science and Hipótesis*. New York: Dover. (Traducción al castellano: A. B. Besio, y J. Banti, J.), La ciencia y la hipótesis. Madrid: Espasa-Calpe.

Ponte, J. P. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge (plenary conference). In J. P. Ponte & J. F. Matos (Orgs.), *Proceedings of the XVIII International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (PME) (Vol. I, pp. 195-210), Lisbon, Portugal.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of reaserch on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Roterdham: Sense.

Reyes, D., & Cantoral, R. (2013). Socioepistemología y empoderamiento docente: acciones para un cambio educativo. *Boletim de Educação Matemática, 28*(48), 360-382.

Rips, L. J. (2001). Two kinds of reasoning. *Psychological Science, 12*, 129–134.

Ross, K. (1998). Doing and proving: The place of algorithms and proof in school mathematics. *American Mathematical Monthly*, *3*, 252-255.

Saito, E., Harun, I., Kuboki, I., & Tachibana, H. (2006). Indonesian lesson study in practice: case study of Indonesian mathematics and science teacher education project. *Journal of In-service Education, 32*(2), 171-184.

Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. *PNA, 5*(4), 129-145.

Santibañez, L. (2007). Entre dicho y hecho. Formación y actualización de maestros de secundaria en México. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 12*(32), 305-335.

Shulman, L. S. (2005). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado*, *9*(2), 1-30.

Sosa, L., Aparicio, E., Jarero, M., & Tuyub, I. (2014). Matemática Educativa y Profesionalización Docente en Matemáticas. El caso de Yucatán. En C. Dolores, M. García, J. Hernández y L. Sosa (Eds.). *Matemática Educativa: La formación de profesores* (pp. 31 – 47), México: Díaz de Santos.

Sosa, L., & Carrillo, J. (2010). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) de matrices en bachillerato. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo & T.A. Sierra, (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIV (pp. 569-580). Lleida: SEIEM.

Thompson, A. (1992). Teacher's beliefs and conceptions: A synthesis of the research. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 127 – 146). New York: Macmillan.

ISSN: 2594-1046

DESARROLLO DEL SENTIDO NUMÉRICO A TRAVÉS DE UNA PRÁCTICA DE REUTILIZACIÓN

María del Pilar Beltrán Soria
IEMS-DF, CICATA. pilysoria@gmail.com
Gisela Montiel Espinosa
CINVESTAV. gmontiele@cinvestav.mx

Resumen

En este documento se presenta la propuesta de una investigación cuyo objeto de estudio es el desarrollo de un tipo particular de pensamiento matemático: el sentido numérico. Se trata de una investigación basada en el diseño, fundamentada en la Socioepistemología, que se plantea como objetivo didáctico la resignificación del número, provocando diferentes usos en el contexto de una práctica de reutilización. El presente avance reporta la fundamentación y propuesta didáctica, como instrumento de intervención para el estudio.

Palabras clave: Sentido numérico, resignificación, uso del número, investigación basada en el diseño.

1. INTRODUCCIÓN

Esta investigación se está llevando a cabo en el Instituto de Educación Media Superior del Distrito Federal, cuyo programa de Matemáticas busca que:"…el estudiante perciba la matemática como una ciencia construida a través de los siglos, como algo más que conocimientos acumulados o aplicaciones prácticas, es decir, que el estudiante construya la matemática, que la descubra que invente y que discuta, que construya un método de análisis y razonamiento, que desarrolle su creatividad y explique sus resultados; además de presentar a la matemática no como una serie de reglas, fórmulas y algoritmos que el estudiante deba aprender de memoria para luego aplicarlas en la resolución de problemas." (IEMS, 2006, p. 3).

La experiencia didáctica y su análisis, reportados en Beltrán (2013), y posteriores intervenciones con otra secuencia didáctica bajo esta misma orientación didáctica (Beltrán y Montiel, 2015), mostraron la viabilidad de este enfoque, a partir del diseño y la organización de secuencias didácticas basadas en una anidación de prácticas. Ahora, con la intención de desarrollar el sentido numérico de los estudiantes, se propone diseñar y validar una nueva secuencia didáctica, estudiando el desarrollo de este tipo de pensamiento matemático en estudiantes de recién ingreso al nivel medio superior.

En este documento presentamos el avance de una investigación basada en el diseño, definida como una metodología diseñada por y para educadores que buscan incrementar el impacto, la transferencia y la traducción de la investigación educativa en la mejora de la práctica, pero también se propone la construcción de teoría y de principios de diseño que guíen, informen y mejoren, tanto la práctica como la investigación en contextos educativos (Anderson y Shattuck, 2012). De ahí que nos permita elaborar un diseño didáctico fundamentado en la investigación, a la vez que investigar sobre desarrollo del pensamiento matemático en el aula.

2. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

Se llevó a cabo una revisión bibliográfica con el objetivo de situar nuestra investigación e identificar, en otros resultados de investigación, posibles usos (en el sentido "social" que propone la Socioepistemología) del número en sus dimensiones cognitiva e histórico-epistemológica, que apoyen en la configuración de nuestra trayectoria hipotética de aprendizaje (THA).

2.1. Sentido Numérico

A decir de Verschaffel, Greer y Torbeyns (2006, citados en Lerman, 2014), no hay una única caracterización del sentido numérico. García (2014) lo reconoce, pero identifica que muy a menudo el término abarca el uso de diferentes representaciones de números.

Para Mcintosh, Reys y Reys (1997), el sentido numérico es la habilidad y tendencia a hacer uso de los números y sus operaciones en formas flexibles; para hacer juicios cualitativos y para desarrollar estrategias eficientes con los números y métodos cuantitativos; también es considerado como la identificación de magnitudes relativas y absolutas de los números o como sistema de utilización de puntos de referencia, así como la composición y descomposición de números. En cambio para Sowder (1988) es la comprensión conceptual de las operaciones, en este sentido es la comprensión de los números y de sus múltiples relaciones, comprensión del conocimiento relativo de las magnitudes y de los efectos de las operaciones, así como del desarrollo referente a cantidades y medidas. También el sentido numérico es considerado como estimación, cálculos mentales y el juicio acerca de la razonabilidad de los resultados (Trarton y Hartman, 1997); en cambio, Friel y Carboni (2000) afirman que tener sentido numérico es razonar con cantidades con la finalidad de poder captar la magnitud de los números y comprender los números en diferentes contextos; o para Gurganus (2004), quien dice que el sentido numérico puede verse como la intuición acerca de los números que se extrae de los diversos significados de éste.

Del posicionamiento de estas investigaciones y las evidencias empíricas que reportan, podemos considerar al sentido numérico como la habilidad, el razonamiento, la intuición, la capacidad o la comprensión acerca los números, que se identifica a partir de la funcionalidad del número en distintos escenarios y contextos; en donde es posible identificar usos del número como cantidad, medida, operación y estimación en estos escenarios.

2.2. Usos del número

Para la identificación de los usos del número, en el sentido social que propone la Socioepistemología, y con ello problematizar el saber en juego, atendimos a la historicidad del concepto de número (Boyer, 1968 y Waldegg, 1996), del signo matemático (Moreno y Kaput, 2005) y de los sistemas de numeración (Barriga, 2005; BBC, 2008). El objetivo principal fue identificar las prácticas asociadas a la emergencia y uso del número; esto fue posible gracias a que la revisión incluyó trabajos de muy diversos tipos, desde historia de la matemática, donde fue posible conocer los orígenes primitivos del número; así como de la contribución de este concepto en la matemática educativa; otros que nos mostraron aspectos semióticos de su evolución histórica y por último que nos presentaron desde la psicología evolutiva las primeras funciones de las notaciones numéricas.

No profundizaremos en esta revisión, pero sintetizaremos los usos encontrados y las prácticas asociadas, que identificamos:

Uso como cantidad, en el conteo (por ejemplo, de los animales cazados)

Uso para la comparación, en el comercio (por ejemplo, para identificar el número de productos, o el peso de un producto respecto de otro)

Uso para la medición, en el pago (por ejemplo, por el trabajo realizado, de la cantidad que se compra y vende en el comercio, en los impuestos en la agricultura, en la construcción y reparación de edificaciones como las pirámides)

Uso para predecir en la astronomía y en la agricultura

3. FUNDAMENTACIÓN

El programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa propone democratizar el aprendizaje en Matemáticas; para alcanzar este fin, es necesario transitar de las perspectivas idealistas en la enseñanza de las matemáticas a otras de naturaleza realista. Es decir,

ISSN: 2594-1046

pasar de una visión centrada en objetos abstractos ajenos a la realidad, hacia una visión socioepistemológica que asume a las prácticas sociales como base en la construcción del conocimiento matemático de todo individuo. Se requiere de un rediseño del discurso Matemático Escolar, pero no basta con el rediseño de sus estructuras como libros de texto, currículos, programas de estudio, evaluaciones nacionales, entre otros, sino que es necesario un cambio de concepción profundo sobre la acción de la educación en matemáticas, se requiere del tránsito del programa clásico a un programa alternativo (Cantoral, 2013).

Esta teoría plantea que el saber matemático es construido socialmente en ámbitos no escolares e introducido al sistema didáctico con una serie de modificaciones que afectan tanto su estructura y su funcionamiento como las relaciones entre estudiantes y profesor. Al ser introducido al aula se producen discursos que facilitan la comunicación de concepto y procedimientos matemáticos, en consecuencia se despersonaliza y descontextualiza; reduciéndolo a temas aislados cuidadosamente secuenciados conocidos como Contenidos o Unidades Temáticas. Estos discursos que validan la introducción del saber matemático al sistema educativo y que legitiman un nuevo sistema de razón reciben el nombre de discurso Matemático Escolar. En Cantoral (2013) se propone el rediseño del discurso matemático escolar como una forma de atender a los problemas sociales y culturales que acompañan a la actividad educativa en el campo de las matemáticas.

3.1. Discurso Matemático Escolar (dME)

La problemática fundamental que reconoce la socioepistemología es la confrontación entre la obra matemática y la matemática escolar (Cordero 2001); por lo que aparece de manera natural la preocupación por el dME.

El dME podría pensarse como la función declarativa en el aula (el discurso escolar) o como la organización esquemática de los contenidos; pero este constructo teórico va más allá del estudio de textos, discurso escolar o currículo; son los fundamentos con los cuales el conocimiento se manifiesta de una forma y no de otra. (Soto 2010).

Como propone Cantoral (2013), el conocimiento matemático adquiere su estatus de saber sólo hasta que se socializa en ámbitos no escolares; su difusión desde y hacia el sistema de enseñanza lo obliga a una transformación que afecta su estructura y funcionamiento, al mismo tiempo afecta las relaciones que se establecen entre estudiantes y profesores.

3.2. Rediseño del discurso Matemático Escolar

ISSN: 2594-1046

El rediseño del discurso Matemático Escolar (rdME) se ha propuesto como una forma de atender los problemas sociales y culturales que acompañan a la actividad educativa en el campo de las matemáticas. Para lo cual la teoría socioepistemológica postula atender la complejidad de la naturaleza del saber y su funcionamiento a niveles cognitivo, didáctico, epistemológico y social en la vida de los seres humanos; en otras palabras, problematizarlo en el sentido más amplio del término, situándolo en la vida del aprendiz, lo cual exige del rediseño compartido, orientado y estructurado, al *dME*.

Reyes-Gasperini (2011) sintetiza la caracterización teórica que logra Soto (2010) del dME y, con base en los principios de la teoría Socioepistemológica, propone la caracterización del discurso resultado de un rediseño.

Discurso Matemático Escolar actual (Soto, 2010)	Principios de la Socioepistemología (Cantoral, 2013)	Propuesta de dME
Carácter utilitario	*Normativa de la práctica social*	*Carácter funcional*
La organización de la matemática escolar ha antepuesto la utilidad del conocimiento a cualquiera de sus restantes cualidades.	La significación de la matemática mediante el uso: anidación de prácticas.	La matemática escolar se organiza con base en el saber y el funcionamiento cognitivo, didáctico, epistemológico y social en la vida de los seres humanos, reconociendo a las prácticas sociales en la base de la creación del conocimiento: contexto de significación.
Atomización en los conceptos	*Racionalidad contextualizada*	*Racionalidades conceptuales diversas*
No considera los aspectos sociales, contextuales y culturales que permiten la constitución del conocimiento.	La relación con el saber es una función contextual.	Se reconocen, privilegian y potencian diversos tipos de racionalidad relativos a la realidad en la que el individuo se encuentre en un momento y lugar; desde el cual se construirá conocimiento: aula extendida (contexto situado)
Carácter hegemónico	*Relativismo epistemológico*	*Validación de saberes (conocimientos construidos)*
Supremacía de argumentaciones y significados frente a otros.	La validez del saber es relativa al individuo y al grupo cultural.	La matemática escolar tiene diversas maneras de verse, trabajarse, construirse y desarrollarse, concibiendo que la validez del saber es relativa al individuo y al grupo cultural en el cual éste ha emergido y respecto a la racionalidad contextualizada que éste posea.
Conocimiento acabado y continuo		
La enseñanza de la matemática se reduce a la mecanización de procesos o memorización de los conceptos.		
Falta marcos de referencia para la resignificación	*Resignificación progresiva*	*Pluralidad de prácticas de referencia para la resignificación*
Se ha soslayado el hecho de que la matemática responde a otras prácticas de referencia, donde se encuentran las bases de significados naturales.	La significación no es estática, es funcional, relativa y contextual.	La pluralidad de prácticas de referencia, su interacción con diversos contextos y la propia evolución de la vida del individuo o grupo, resignificarán los saberes hasta el momento construidos, enriqueciéndolos con nuevos significados.

Tabla 1: Propuesta de Rediseño Reyes-Gasperini (2011)

ISSN: 2594-1046

La Socioepistemología descansa en cuatro principios fundamentales (Cantoral, 2011): el principio normativo de la práctica social, el principio de la racionalidad contextualizada, el principio del relativismo epistemológico y el principio de resignificación progresiva o apropiación. A contitnuación señalamos cómo Cantoral (2013) detalla estos principios.

3.3. El principio normativo de la práctica social

Las prácticas sociales son aquellas que norman la forma de construir conocimiento de los individuos, es decir, nos hacen hacer lo que hacemos y por tanto están en la base de toda construcción del conocimiento, todos los individuos construimos las nociones matemáticas basándonos en lo que en sus orígenes motivó su construcción. Esta premisa, nos indica que si se tiene la intención de que cualquier individuo o grupo aprenda, considerando que aprender es construir conocimiento y ponerlo en ***uso***, es decir, pasar del conocimiento al saber, inevitablemente, serán las ***prácticas sociales*** las que sustentarán la construcción. Estas prácticas sociales son normativas de la actividad humana en tanto su función que dota de identidad cultural al individuo o al grupo, su función reflexiva discursiva que construye argumentaciones de acción y su función pragmática que organiza la acción, regulan los comportamientos de los individuos. Las actividades ya instituidas se organizan para dar lugar a las prácticas socialmente compartidas, que pasan generacionalmente, con lo que se denota el ***uso*** social del conocimiento, se transfiere socialmente el valor de uso, que es un supuesto de naturaleza social pues proviene de la reiteración intencional y compartida de prácticas, lo que origina la experiencia compartida. Esta práctica es regulada por las prácticas de referencia en escenarios socioculturales, que son normadas por prácticas sociales.

Esta cadena de articulaciones entre prácticas parte de la coordinación entre acción y actividad. Ella moviliza diferentes tipos de mediadores culturales, tanto prácticos como instrumentales y sobre todo conforma una noción de práctica.

La articulación entre actividad y práctica es la que se muestra en el modelo de anidación de prácticas. Para que este proceso de articulación constructiva de prácticas construya efectivamente un conocimiento, se precisa de una reflexión sobre dichas prácticas o se requiere de una práctica social, lo cual puede hacerse al seno de las prácticas de referencia.

3.4. El principio de la racionalidad contextualizada

Este principio declara que la racionalidad con la que se actúa depende del contexto en el que el sujeto se encuentre en un momento y lugar determinado; en otras palabras, la validez del saber es relativa a la epistemología de partida, tanto del individuo como del grupo cultural y su contexto. El sentido de racionalidad contextualizada lo brinda fundamentalmente la práctica de referencia.

Figura 1. Modelo de anidación de prácticas Cantoral (2013)

3.5. El principio del relativismo epistemológico

Este principio sostiene que los puntos de vista no tienen verdad ni validez universal, sino que poseen una validez subjetiva y relativa a los diferentes marcos de referencia, la teoría socioepistemológica concibe que la matemática escolar no debe tener una sola manera de verse, trabajarse, construirse y desarrollarse, sino que la validez del saber es relativa al individuo y al grupo cultural en el cual éste ha emergido y respecto a la racionalidad contextualizada que éste posea. En el caso escolar, las situaciones de aprendizaje propuestas por la socioepistemología, privilegian la diversidad de argumentaciones y considera a la matemática como la herramienta que ayuda a la toma de decisiones, donde la respuesta depende de la interpretación y argumentación del estudiante, considerándose que todas son válidas si sus argumentaciones son coherentes con su racionalidad.

Por tanto, la validez de un saber es relativa al individuo y grupo. La socioepistemología acepta que dentro de aquellas argumentaciones que sean erradas existe un pensamiento matemático que debe ser estudiado y considerado para de allí desarrollar pensamiento matemático y construir conocimiento (Cantoral, 2013).

ISSN: 2594-1046

3.6. El principio de la resignificación progresiva

Una vez que el individuo se ha relacionado con el objeto y construido significado del mismo, el significado dependerá en gran medida del escenario contextual donde se produce la acción, el empleo de símbolos, donde se personaliza y se despersonaliza la apropiación, es decir se significa al objeto; produciendo conocimientos que al momento de ponerlos en uso se pueden denominar saber, este saber puede considerarse como el nuevo punto de partida para comenzar una nueva etapa de significación, en donde, este saber se enriquecerá con la resignificación, en la cual se construirán más argumentaciones, espacios de uso, procedimientos y todo aquello que rodea a un saber.

En síntesis, la teoría socioepistemológica sostiene que las prácticas sociales son los cimientos de la construcción del conocimiento (normatividad de las prácticas sociales), y que el contexto determinará el tipo de racionalidad con la cual un individuo o grupo como miembro de una cultura construye conocimiento en tanto lo signifique y ponga en uso (racionalidad contextualizada). Cuando este conocimiento es puesto en uso, y se consolida como un saber, su validez será relativa al individuo o al grupo, ya que de ellos emergió su construcción y sus respectivas argumentaciones, lo cual dota a ese saber de un relativismo epistemológico.

3.7. La reutilización como práctica de referencia

En el presente año, algunos estudiantes del IEMS-DF participaron en el Plastianguis-2016, recolectando botellas de plástico, obteniendo los llamados “PLASTIpesos” que sirven como moneda de cambio para adquirir productos de la canasta básica.

En la actividad de la reutilización de las botellas de plástico se identificó que los estudiantes se enfrentaron a situaciones en donde diferentes usos del número emergían, como contar, medir, predecir, entre otros; por lo que se decidió incorporar la práctica de la reutilización en el diseño didáctico que busca el desarrollo del sentido numérico.

La sociedad actual es una sociedad de desechos y no se hace responsable de estos (Ponte de Chacín y Caballero, 2012), los desechos son acumulados en las calles, alcantarillas y en el menor de los casos son recolectados por el servicio de limpia de las ciudades para enviarlos a rellenos sanitarios.

En particular existe un gran impacto ambiental nocivo en el medio ambiente producido por los plásticos (Colomer y Gallardo, 2007), además su fabricación requiere menos recursos que otros

ISSN: 2594-1046

materiales, su ligereza y resistencia ambiental aportan claras ventajas a su transporte y embalaje, aunado a esto, los plásticos se pueden reciclar. En la Ciudad de México se producen cerca de 12 mil toneladas de residuos sólidos de los cuales apenas el 12% son reciclados (Secretaría del Medio Ambiente, 2016).

Para generar mayor conciencia sobre la importancia del reciclaje y valorización de los residuos sólidos, la Secretaría del Medio Ambiente del Gobierno del Distrito Federal ha puesto en marcha programas como el Mercado de Trueque de la Ciudad de México, donde es posible el intercambio de residuos reciclables (papel, botellas de vidrio, cartón, latas de aluminio, PET, tetrapack y electrónicos) por productos agrícolas producidos en el Distrito Federal.

Además existen otros programas como el Plastianguis que se realiza cada año y en donde es posible el intercambio de residuos plásticos por productos de la canasta básica; el Trueque ambiental llevado a cabo por la Universidad Autónoma Metropolitana (UAM) Xochimilco, dónde es posible cambiar hojas de papel o 10 botellas de PET por un libro editado por la UAM Xochimilco y el Reciclatrón que se llevó a cabo en la Rectoría de la UAM, donde recibían los residuos eléctricos y electrónicos.

4. MÉTODO

Una vez identificados los usos del número y las prácticas asociadas a la emergencia del número y en la práctica de la reutilización, tomando en cuenta el modelo de anidación de prácticas (Cantoral, 2013), se planean una serie de actividades en las que los estudiantes requieran llevar a cabo varias acciones como contar, comparar, medir, identificar y predecir para hacer emerger el sentido numérico.

Para efectos de esta propuesta se presenta parte de la planeación para el primer semestre, en la cual se identifican las acciones y actividades que buscamos que logren hacer emerger el sentido numérico, como parte de esta planeación se retoma la metodología del problema de la determinación del número de canicas que hay en un saco, en donde se desconoce el número de canicas y la masa individual de cada una de ellas (Beltrán y Rodríguez, 2009 y 2010).

Se proponen 12 etapas a desarrollar durante el semestre, una por semana, aquí se presentan algunas de ellas.

Etapa “1”. Después de abordar el tema de los desechos sólidos urbanos en la Ciudad de México, y el problema que ocasionan en una delegación como Iztapalapa, se solicita a los

ISSN: 2594-1046

estudiantes comenzar a recolectar y clasificar en casa los envases de plástico que desocupan diariamente durante una semana. Se les pide llenar una tabla con tres columnas, donde colocarán la información referente al tipo de botella (de agua, de refresco, de jabón de trastes, de detergente líquido, etc.…), su capacidad (contenido neto del producto) y finalmente el número de botellas de ese tipo recolectadas en la semana. El objetivo de esta etapa es que emerja el uso de cantidad, mediante la actividad de contar botellas durante dos semanas y ordenar los datos en la tabla solicitada. Durante las clases de esta semana se les preguntará sobre los datos obtenidos, si se continúa con esa cantidad de botellas recolectadas ¿Cuántas se recolectarían en un mes? Y se analizarán las posibles respuestas y el cómo las obtienen.

Etapa "2". Después de abordar el tipo de residuos plásticos en que se dividen estas botellas, se pide hacer una separación y se discute sobre el tipo de plástico que conviene juntar para obtener la mayor ganancia en el Plastianguis. Se les presenta la clasificación contenida en la Tabla 2:

1PET	**2PEAD** **4PEBD**	**3PVC**	**5PP**	**6PS**
Botellas y envases para conservas alimenticias	Envases para detergentes, líquidos, cosméticos y alimenticios.	Tuberías y conexiones de PVC	Empaques para alimentos y botanas transparente	Empaques para alimentos (charolas, platos y vasos desechables) de unicel y PS cristal (Ej. Charola para pastel
Botellas para artículos de limpieza y cosméticos	Tarimas plásticas	Mangueras de jardín de colores	Envases y botellas (Ej. Envases para mantequilla)	Embalaje
Garrafones de agua	Bolsas de supermercado	Canaleta		Placas para la construcción
	Cubetas de plástico	Hule cristal		
	Tapa rosca de bebidas	Manteles de mesa individuales (espumados)		
		Cortinas de baño		
		Tarjetas de teléfono, crédito,etc		
		Pelotas (no balones)		
1Kg de PET = 5 PLASTIpesos	500 g de PEAD o PEBD = 2 PLASTIpesos	200 g de PVC = 2 PLASTIpesos	200 g de PP = 2 PLASTIpesos	50 gr de PS = 5 PLASTIpesos

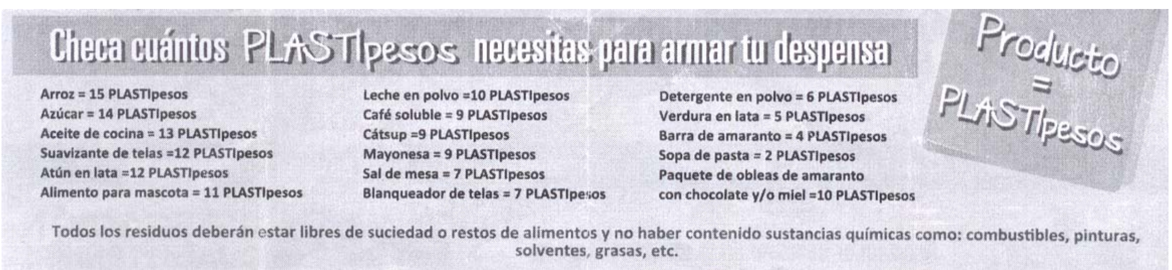
Tabla 2: Residuos plásticos recibidos en el Plastianguis

En esta actividad se dividirán en dos equipos, en un primer momento el primer equipo pesará el total de gramos o kilogramos de cada tipo de residuo plástico que recolectó el equipo dos y expedirá un cheque como el que se obtendría en el Plastianguis para que pueda ser canjeado por un total de PLASTIpesos; en un segundo momento se invertirán los roles. El objetivo de esta etapa es que emerja el uso de comparación, mediante la acción de identificar los productos a canjear por un número determinado de PLASTIpesos e identificar el número de tapa roscas necesarias para lograr un PLASTIpeso.

ISSN: 2594-1046

Etapa “3”. Por su tamaño y facilidad de manejo, en esta parte se trabajará sólo con las tapa roscas, se les plantea el siguiente problema: “Si se tienen varias bolsas, cada una con un número determinado de tapa roscas del mismo tipo de envase. Los pesos de las bolsas son de 2.82, 6.58, 10.34, 14.1, 17.86 y 23.5 gramos respectivamente, ¿cuál es el peso de una tapa rosca?, ¿cuántas tapa roscas hay en cada bolsa? y, finalmente, ¿cuántas tapa roscas necesitaría juntar para 500 g? El objetivo de esta etapa es que emerja el uso de comparación, mediante la acción de comparar los diferentes pesos de las bolsas y, al mismo tiempo, que surja la necesidad de identificar la magnitud unidad y la magnitud Máximo Común Divisor (MCD), el cual variará dependiendo de las cantidades comparadas (Waldegg, 2006).

Etapa “4”. En el Plastianguis la forma de pago es en una moneda llamada PLASTIpesos. Si quisieras “armar tu despensa” ¿cuántos PLASTIpesos necesitarías?, siguiendo con el problema de las tapa roscas, ¿cuántos kilos de tapa roscas necesitarías?, ¿cuántas tapa roscas serían?



Fotografía 1. Volante informativo del Plastianguis 2016

El objetivo de esta etapa es que emerja el uso de operación, mediante la acción de comparar lo que se quiere obtener y lo que sería necesario recolectar para lograrlo.

5. POBLACIÓN Y ESCENARIO ESCOLAR

La implementación de la secuencia se llevará a cabo en tres grupos de primer semestre que ingresarán del ciclo escolar 2016-2017. Aproximadamente, serán 90 estudiantes en total. Los rangos de edades son muy variados, pueden ingresar desde los 14 años y hemos llegado a tener estudiantes adultos, mayores de 50 años ingresando al bachillerato.

6. CONCLUSIONES

Actualmente varias instituciones educativas, asociaciones y empresas están participando en programas que buscan fomentar el reciclaje de PET, pues además de ayudar al medio ambiente es una práctica que es redituable económicamente.

De acuerdo a la experiencia que se tuvo con los estudiantes que asistieron al Plastianguis de este año, se espera que esta actividad sea de interés para los estudiantes de nuevo ingreso, con los cuales se realizará la actividad del reciclaje de PET en vías de asistir al Plastianguis 2017.

Las actividades que realizarán los estudiantes se diseñaron con la intencionalidad de hacer emerger los usos del número, como *cantidad*, mediante la acción de contar el número de botellas y tapa roscas; *comparación*, mediante la acción de identificar los productos a canjear por un número determinado de PLASTIpesos e identificar el número de tapa roscas necesarias para lograr un PLASTIpeso; *medida*, en la identificación de cuántos PLASTIpesos serán necesarios pagar por una despensa; *operación*, para medir la cantidad de tapa roscas y botellas que canjearán y predicción del tiempo que les llevará juntar un determinado número de tapa roscas, en la práctica del reciclaje, en busca de lograr el desarrollo del sentido numérico.

7. PROSPECTIVAS

Nos proponemos poner estas etapas al inicio del bachillerato, para provocar una transición en los estudiantes que vienen de un sistema escolar centrado en los objetos matemáticos. Es decir, aprovechar el ingreso a un nuevo sistema y nivel educativo para modificar en el estudiante la concepción del aprendizaje de las matemáticas como el dominio de técnicas a una concepción de participación en actividades matemáticas. A partir del estudio del proceso de planeación, implementación y validación de los diseños con la finalidad de identificar las condiciones y elementos que permiten el rediseño del discurso Matemático Escolar y la constitución del aula extendida, así como los efectos que tiene en el sistema didáctico.

Utilizar la metodología basada en el diseño; que consiste en:

- Preparación del diseño: esta etapa contiene la definición del diseño y la formulación, de manera explícita y detallada, de los criterios que lo sustentan; en este caso la fundamentación se dará a partir de los principios socioepistemológicos.

- El diseño: se realizará tomando en cuenta los principios teóricos del rdme y retomando el modelo de anidación de prácticas como la trayectoria hipotética de aprendizaje.
- La implementación del diseño: se lleva a cabo la implementación de la secuencia instructiva diseñada. Se van realizando ajustes continuos del diseño: el diseño inicial va adecuándose en función de la dinámica y el contexto.
- La confrontación; análisis retrospectivo: concluida la intervención se inicia esta etapa que incluirá dos niveles:
- Analizar que realmente se logren los objetivos de aprendizaje.
- Analizar que se cumplan en relación al diseño.

8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Anderson, T., & Shattuck, J. (2012). Design-Based Research: A Decade of Progress in Education Research? *Educational Researche*r, 41(1), 16-25.

Barriga, F. (2005). La historia natural de los sistemas de numeración. En M. Alvarado & B. Brizuela (Comps.), *Haciendo números. Las notaciones numéricas vistas desde la psicología, la didáctica y la historia* (pp. 13-29). D.F, México: Paidós Educador.

BBC. [Matemáticas TV](2008). *La historia de las Matemáticas. El lenguaje del Universo.* Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=XOAA0fnq-hI

Beltrán, P. (2013). *El papel de la modelación en el desarrollo del pensamiento funcional trigonométrico en estudiantes del nivel medio superior.* (Tesis de maestría no publicada), Instituto Politécnico Nacional, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Unidad Legaria. México.

Beltrán, P., & Montiel, G. (2015) Implementación de una secuencia didáctica en el desarrollo del pensamiento funcional trigonométrico. *Matemática Educativa Investigación e Innovación* (MEII), 1(2).

Beltrán, P., & Rodríguez, R. (2009) ¡A cuenta gotas! Parte I. Contactos. *Revista en Ciencias e Ingeniería*, 74, 43-49.

Beltrán, P., & Rodríguez, R. (2010) ¡A cuenta gotas! Parte II. Contactos. *Revista en Ciencias e Ingeniería*, 75, 53-63.

Boyer, C. (1968/1986). *Historia de la Matemática*. (Traducción de M. Martínez). Madrid, España: Alianza Editorial.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Sociepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa.

Colomer, F., & Gallardo, A. (2007). *Tratamiento y gestión de residuos sólidos*. Valencia, España: Universidad Politécnica de Valencia.

Friel, S. N., & Carboni, L. W. (2000). Using video-based pedagogy in an elementary mathematics methods course. *School Science and Mathematics*, 100(3), 118-127. doi:10.1111/j.1949-8594.2000.tb17247.x

Gurganus, S. (2004). *Promote number sense. Intervention in School and Clinic*, 40(1), 55-58. Recuperado de http://www.bidi.uam.mx:8331/login?url=http://search.proquest.com/docview/211723951?accountid=37347

Instituto de Educación Media Superior (2006). *Programa de estudio de Matemáticas.* (p.29). México, D.F.: IEMS.

Lerman, S. (2014). *Encyclopedia of Mathematics Education* [version digital PDF].DOI: 10.1007/ 978-94-007-4978-8

Mcintosh, A., Reys, R., & Reys, B. (1997). Mental Computation in the Middle Grades: The importance of thinking strategies. *Mathematics teaching in the middle school*, 2(5), 322-327.

Moreno, L. & Kaput, J. (2005). Aspectos semióticos de la evolución histórica de la aritmética y el álgebra. En M. Alvarado & B. Brizuela (Comps.), *Haciendo números. Las notaciones numéricas vistas desde la psicología, la didáctica y la historia* (pp. 31-49). D.F, México: Paidós Educador.

Ponte de Chacín, C., & Caballero, M.C. (2012) Representaciones sociales de la práctica del e reciclaje en el instituto pedagógico de Caracas. En R.C. Flores (Coord.) *En la búsqueda de los sentidos y significados de la educación ambiental*. Universidad Pedagógica Nacional, pp. 149-170.

Secretaría del Medio Ambiente. (2016). *¿Qué es el Mercado del Trueque?* México: Sedema.cdmx.gob.mx, Recuperado de *http://sedema.cdmx.gob.mx/mercadodetrueque/index.php?option=com_content&view=article&id=50&Itemid=29*

Sowder, L. (1988). Children's solutions of story problems. *The Journal of Mathematical Behavior,* 7(3), 227-238.

Verschaffel, L., Greer, B., & Torbeyns, J. (2006). Numerical thinking. In: A. Gutiérrez, y P. Boero (Eds.) *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future*. Sense Publishers, Rotterdam, pp. 51–82

Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

ANIDACIÓN DE PRÁCTICAS PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL

Mario Adrián Caballero-Pérez
Cinvestav-IPN. macaballero@cinvestav.mx

Ricardo Cantoral Uriza
Cinvestav-IPN. rcantor@cinvestav.mx

Resumen

Presentamos una propuesta de anidación de prácticas desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa que articula un desarrollo pragmático del estudio del cambio asociado el Pensamiento y Lenguaje Variacional. El esquema de anidación de prácticas que presentamos permite explicar empírica y teóricamente el proceso de construcción social de conocimiento matemático asociado a la matemática del cambio, en particular en lo referente al Cálculo Diferencial; esto al mostrar un desarrollo asociado a los cuestionamientos ¿Qué cambia y respecto de qué cambia?, ¿Cuánto y cómo cambia? y al uso de estrategias variacionales. Se muestra un ejemplo en donde el modelo sustenta el diseño de situaciones de aprendizaje.

Palabras clave: Anidación, prácticas, cambio, variación, Socioepistemología

1. INTRODUCCIÓN

La investigación que reportamos forma parte de un proyecto de investigación doctoral que tiene por objetivo caracterizar el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLVar) asociado al estudio de los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio (Cantoral, 2000). Presentamos para ello un modelo de evolución pragmática en cuanto al estudio del cambio en fenómenos de variación continua, sustentado en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa.

La enseñanza y el aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral ha sido tema de interés en diversas investigaciones de la Matemática Educativa, ello debido parcialmente a que suelen presentarse dificultades en el entendimiento de sus principales conceptos y nociones, tanto en estudiantes como profesores. Algunas de estas investigaciones han involucrado la variación como una noción fundamental y caracterizado el tipo de concepciones que los estudiantes o profesores se forman de conceptos como función, pendiente, razón de cambio o derivada (Sánchez, García y Linares, 2008; Nagle, Moore-Russo, Viglietti y Martin, 2013). Otro tipo de investigación se ha ocupado del desarrollo de ideas matemáticas enfatizando el carácter dinámico de los conceptos mediante el diseño de actividades, que pueden o no incluir el uso de instrumentos tecnológicos (Doormar, Drijvers, Gravemeijer, Boon, y Reed, 2012; Sokolowski, 2014).

Las investigaciones mencionadas enfatizan la necesidad de trabajar con ideas de variación en lo que concierne al aprendizaje del Cálculo, no obstante identificamos que este tratamiento se caracteriza por lo que denominamos *centración en los objetos matemáticos*, esto es, el énfasis del aprendizaje está en la manipulación y explicitación de los conceptos matemáticos. Nuestra postura, desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, se centra no en el uso del objeto (el concepto de derivada, fórmulas de derivación, definición por límite, etc.), sino en el desarrollo de las prácticas (comparar estados, secuenciar cambios, estimar comportamientos, predecir valores, etc.) que hacen posible la construcción social del conocimiento matemático (Cantoral, 2013).

Por ejemplo, en Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu (2002) se propone un modelo jerárquico del razonamiento covariacional asociado a las acciones mentales puestas en juego ante situaciones que precisan la coordinación de cantidades que varían entre sí. Una de las actividades que se trabajan consiste en una situación de llenado de recipientes donde se pide bosquejar la gráfica de la relación *volumen vs altura* para una botella con forma esférica. Los niveles de razonamiento 4 y 5, considerados los más avanzados, precisan del uso correcto y explícito de los conceptos de pendiente y razón de cambio instantáneo en la gráfica que se proponen, e incluso de una noción de derivada y límite.

Por nuestra parte, nos interesamos en las prácticas que se utilizan en el entendimiento de situaciones de cambio y, en un sentido amplio, dotan de significado a los conceptos matemáticos. Por ejemplo, en el llenado de recipientes nos enfocamos en la forma en cómo se comparan las alturas del líquido para dos valores de volumen, en la seriación de estados intermedios en el crecimiento de la altura o la estimación del comportamiento de la altura según la forma de la botella.

En ese sentido, nuestro objetivo de investigación en este escrito es analizar la forma como se desarrollan las prácticas asociadas al estudio del cambio. Para ello presentamos un modelo de desarrollo basado en la Socioepistemología y el PyLVar, asociado a una tipificación del estudio del cambio y una evolución pragmática de él.

2. MARCO TEÓRICO

Tomamos como referente teórico a la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, la cual modela la construcción social del conocimiento matemático a través del conjunto de *prácticas* que son aceptadas y establecidas socialmente, para lo cual estudia formas del pensamiento matemático fuera y dentro de la escuela (Cantoral, 2013).

La noción de práctica se encuentra ligada a la actividad humana, pero cabe aclarar que no toda actividad humana es una práctica, sino aquellas realizadas de manera consiente e intencional, no los actos instintivos o inconscientes. En ese sentido, el desarrollo de prácticas es normado por prácticas sociales, las cuales se entienden no como la acción efectuada (por ejemplo, medir) sino la orientación estratégica de la práctica (por qué medimos y por qué lo hacemos de esa manera). Asimismo, este desarrollo se articula mediante el esquema de anidación progresiva de prácticas (Figura 1), que muestra una jerarquía de las prácticas que componen la construcción social del conocimiento matemático.

Figura 1: Esquema de la anidación progresiva de prácticas (Cantoral, 2013)

Este esquema nos permite explicar empírica y teóricamente el proceso de construcción social de conocimiento matemático, a la vez de orientar la intervención y transformación de los procesos didácticos mediante la emergencia del saber matemático. Éste puede entenderse de dos formas que estructuran el desarrollo de prácticas: “Digamos que, hacia arriba, la construcción social del conocimiento comienza por la acción del sujeto sobre el medio y hacia abajo, la construcción social del conocimiento comienza por la norma que regula el quehacer de los individuos en colectividad” (Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2014, p. 13).

2.1. Pensamiento y Lenguaje Variacional

El Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLVar) es una línea de investigación que se ocupa de estudiar los fenómenos de enseñanza y de aprendizaje del conocimiento matemático, propios de la matemática del cambio (Cantoral, 2000), en particular del Cálculo y el Análisis. En un sentido amplio consiste en las formas de pensar, argumentar, organizar, tratar y comunicar matemáticamente fenómenos de cambio.

El estudio del cambio se deriva de una necesidad inherente al ser humano, la necesidad de predecir, ya que ante la incapacidad de adelantar el tiempo para observar los resultados venideros se han desarrollado diversas herramientas basadas en el estudio del cambio y orientadas por la práctica social del Prædiciere para anticipar el comportamiento de sistemas complejos (Cantoral, 2013).

Esta práctica social consiste en aquello que norma la actividad matemática con fines predictivos, no es la predicción como tal sino lo que orienta la intención de predecir. El Prædiciere tiene tres niveles de evolución que dan cuenta de un tránsito del conocimiento al saber matemático y clasifican el tipo de predicción que se realiza: "El paso de los datos (Prædiciere como esquema) al patrón o regularidad en el comportamiento (*Prædiciere* como modelo) es un requisito para la emergencia del concepto en el marco de las redes conceptuales correspondientes (*Prædiciere* como teoría)" (Cantoral, 2013, p. 132).

Los primeros dos niveles se refieren a la identificación de las variables involucradas, la descripción y caracterización del comportamiento de las variables y la cuantificación del cambio. El tercer nivel se refiere a la formalización teórica y estructural del saber matemático conformado en los niveles anteriores. Dado lo anterior nos enfocamos en la consideración de los primeros dos niveles, pues en ellos surge y se desarrolla el estudio del cambio.

En ese sentido, hemos identificado cuestionamientos clave asociados a estos niveles que dan cuenta del tipo de estudio que se realiza: ¿qué cambia? y ¿respecto de qué cambia? (*Prædiciere* como esquema), ¿cuánto cambia? y ¿cómo cambia? (*Prædiciere* como modelo).

El primer cuestionamiento, ¿qué cambia?, plantea que estudiar un fenómeno precisa identificar aquello que cambia, lo que resulta importante debido a que pueden existir una multitud de elementos que están cambiando simultáneamente. Por ejemplo, si consideramos una situación de llenado de recipientes encontramos que la altura del cuerpo del líquido, el flujo de entrada o salida, la forma del recipiente, el volumen del líquido, y el tiempo transcurrido están modificándose

ISSN: 2594-1046

continuamente. No obstante, no se centra la atención en todas las variables involucradas, sino que se eligen aquellas que se consideran relevantes para una situación específica.

Identificar aquello que cambia implica de la disposición de algún referente para comparar estados a fin de dar cuenta de ese cambio, es decir atender al cuestionamiento ¿respecto de qué cambia? Por ejemplo, determinamos que una función es creciente porque el valor de una imagen es *más grande respecto a la imagen anterior*, un automóvil está en movimiento si su posición es *diferente respecto a su posición en un instante anterior*, dadas dos rectas el valor de la pendiente de una es mayor si *está por encima de la otra*, etc.

Los primeros dos cuestionamientos se refieren a la identificación y establecimiento de relaciones de dependencia entre variables, en cambio los otros consisten en describir y caracterizar la naturaleza de cambio del fenómeno. La pregunta ¿cuánto cambia? está orientada a asignar un valor a la modificación de estado percibida, mientras que la pregunta ¿cómo cambia? a describir el comportamiento global. Ambos pueden realizarse en términos de valores numéricos o a través de descripciones cualitativas, mediante “relaciones adverbiales (…) que se traducen en relaciones de crecimiento, decrecimiento o estabilidad” (Cantoral, 2013, p. 187). Por ejemplo, más grande que, igual que, menor que, más frío, menos frío, cada vez más rápido, cada vez más lento, etc.

Por ejemplo, consideremos dos funciones, una cuya gráfica se corresponde con una recta (Figura 2) y la otra con una curva cóncava hacia arriba (Figura 3), ambas funciones son crecientes, pero la forma en cómo crecen no es la misma, su variación es diferente. La primera se caracteriza por un crecimiento constante de las alturas que se determina al analizar el cambio en la altura de un punto de la gráfica a otro, en tanto que en la segunda el crecimiento cerca del eje vertical es pequeño pero conforme se aleja es cada vez mayor.

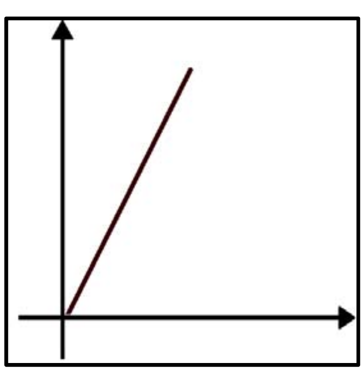


Figura 2

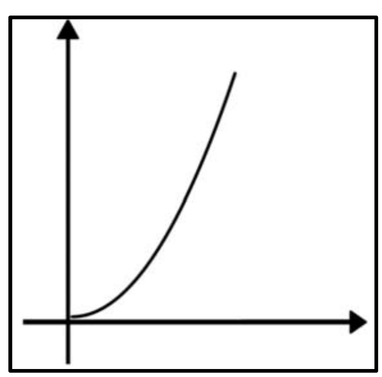


Figura 3

Ambos cuestionamientos caracterizan la naturaleza del cambio, pero lo hacen de diferente manera; ¿cómo cambia? se refiere al comportamiento global de un fenómeno y ¿cuánto cambia? caracteriza el comportamiento local, de un estado a otro del fenómeno. De tal manera que los cuatros cuestionamientos planteados nos permiten identificar tres tipos de estudio del cambio en un fenómeno, los cuales se muestra en la Tabla 1:

Identificación del cambio	¿Qué cambia? ¿Respecto de qué cambia?
Caracterización cualitativa de la naturaleza de cambio	¿Cómo cambia?
Caracterización cuantitativa de la naturaleza de cambio	¿Cuánto cambia?

Tabla 1: Tipificación del estudio del cambio

Con base en lo anterior, afirmamos que el PyLVar precisa atender los cuestionamientos anteriores, y la forma de atenderlos es mediante el uso de las *estrategias variacionales* (Caballero, 2012; Caballero y Cantoral, 2013), ya que se parte de la *comparación* de estados para identificar y cuantificar el cambio. La *seriación*, vista como una colección de comparaciones (López, 2016), permite caracterizar cualitativa y cuantitativamente el patrón de regularidad de la variación en un conjunto de estados sucesivos. Por último, la *estimación* y *predicción* organizan la información obtenida de las estrategias anteriores y la utilizan para anticipar comportamientos globales o estados puntuales respectivamente.

Dado lo anterior postulamos una evolución pragmática en el estudio del cambio, asociado a una jerarquía en las *estrategias variacionales* donde la *comparación* y *seriación* atiende a los cuatro cuestionamientos anteriores, en tanto que la *estimación* y *predicción* concretan la anticipación de estados futuros referida al *Prædiciere*.

Plasmamos esta evolución pragmática asociada a la anidación de prácticas en la Tabla 2. Esta anidación consiste en que se parte de la acción, considerada como la intervención directa del sujeto (individual, colectivo o social) sobre el objeto de estudio, en este caso la variación, de modo que los elementos y variables del fenómeno se ordenan, agrupan, miden, etc. Dichas acciones son organizadas mediante las *e*strategias variacionales de comparación y seriación, vistas como actividades efectuadas de manera consiente e intencional. Estas actividades se organizan deliberadamente para componer una práctica, en este caso las estrategias de predicción y estimación. Dichas prácticas son orientadas y reguladas por una práctica de referencia, las cuales

ISSN: 2594-1046

son variadas y dependen del paradigma en el que se desvuelve el individuo, los ejemplos de la Tabla 2 son retomados de Cantoral (2013). Por último, la práctica de referencia es normada por la búsqueda de la predicción, por el Prædiciere.

3. REFLEXIONES

La anidación de prácticas propuesta nos permite postular una vía para el desarrollo del PyLVar, en el sentido que se tipifica el tipo de estudio del cambio que se requiere en la anticipación de estados futuros y lo relaciona con las prácticas necesarias para llevar esto a cabo. Lo anterior nos ha permitido sustentar el diseño de situaciones de aprendizaje asociado al desarrollo de ideas variacionales de conceptos como función y derivada. Mostramos ahora parte de una situación sobre llenado de recipientes que tiene por objetivo caracterizar los parámetros de una función lineal a partir del estudio del comportamiento lineal en el crecimiento de la altura de un líquido conforme al paso del tiempo.

Práctica social	Prædiciere
Práctica de referencia	Toxicología Agricultura Física etc.
Práctica	Predicción Estimación
Actividad	Comparación Seriación
Acción	Ordenar Agrupar Medir Girar Mover etc.

Tabla 2: Anidación de prácticas del pensamiento y lenguaje variacional.

3.1. Situación 1

Un recipiente vacío de forma cilíndrica es llenado mediante una llave que deja salir agua a flujo constante. En la imagen siguiente se muestra la altura que alcanza el cuerpo del agua al transcurrir un segundo.

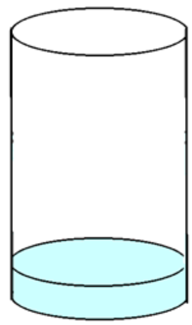


Figura 4: Botella con forma cilíndrica

Marca sobre la imagen la altura que alcanzará el agua a los 3 segundos.

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

- La altura que aumenta el agua cada segundo es cada vez mayor.
- La altura del agua no aumenta conforme pasa el tiempo.
- La altura del agua aumenta siempre la misma cantidad cada segundo.
- La altura que aumenta el agua cada segundo es cada vez más pequeña.

¿Cuántos segundos tardará en llenarse el recipiente? Justifica tu respuesta.

3.2. Situación 2

Los recipientes cilíndricos C y D son llenados a flujo constante. La altura del agua en el recipiente D aumenta el doble respecto al recipiente C. El siguiente plano cartesiano muestra la gráfica del llenado del recipiente C, construye la gráfica del recipiente D.

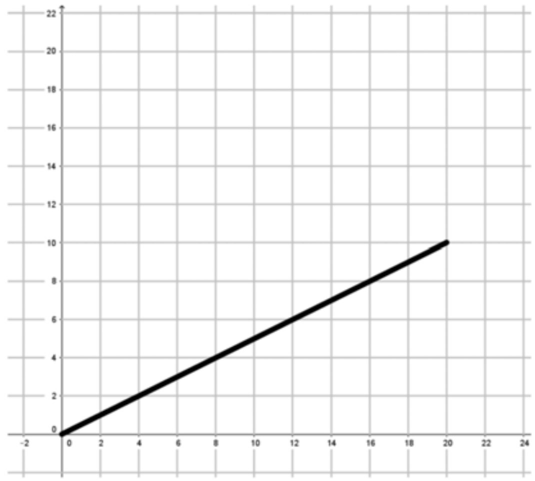


Figura 5: Gráfica de llenado de un recipiente cilíndrico

En cuanto a la primera situación, la primera pregunta tiene el objetivo de establecer la altura del líquido y el tiempo como las variables del fenómeno (¿qué cambia?), para lo cual se señala la parte en azul con el fin que se utilice como medida (¿respecto de qué cambia?) para indicar la altura a los 3 segundos. Para ello se precisa de acciones como medir y dibujar la altura en cada segundo, teniendo cuidado que la longitud de las alturas sea la misma, es decir, se *comparan* las nuevas alturas respecto a la original.

La segunda pregunta busca una descripción del fenómeno (¿cómo cambia?) con base en la forma de crecimiento. Para ello se puede recurrir nuevamente a los dibujos de la pregunta 1 y la *comparación* de los incrementos en cada segundo. La forma en cómo están estructuradas las preguntas conlleva a un análisis del incremento en cada segmento dibujado anteriormente.

La tercera pregunta precisa de una *predicción* del tiempo de llenado, para ello una vez identificado que el crecimiento de las alturas será siempre el mismo (¿cuánto cambia? y *seriación*), entonces se dibujan alturas en la botella hasta que se llene, o bien, se determina la longitud del segmento en cuestión y la altura total de la botella (¿cuánto cambia?) y se realiza una división entre ambas cantidades, en ese sentido se *compara* la altura total con la altura del segmento.

En lo que respecta a la situación *3*, el objetivo es establecer la razón de cambio del llenado de un recipiente *comparándolo* respecto a una gráfica ya dada, de manera que el cuestionamiento ¿qué cambia? alude no sólo a la altura y el tiempo sino al propio valor de la razón de cambio, ¿respecto de qué cambia? consiste ahora en la razón de cambio de la recta ya dada, o incuso de los valores de las alturas de esa recta. Además la actividad precisa considerar que la cantidad de cambio de la gráfica solicitada es el doble de la otra (¿cuánto cambia?), de modo que la descripción de ambas gráficas como crecimiento constante ya no es suficiente, por ello también en esta gráfica se incluye una cuadrícula, con el objetivo de que se utilice para medir los cambios en la altura.

Con estas dos actividades queremos ejemplificar cómo se relaciona el tipo de estudio del cambio que se pretenda fomentar con el esquema de anidación de prácticas propuesto. Esto permite organizar teóricamente las ideas esenciales del PyLVar con el fin de estructurar el diseño de situaciones de aprendizaje mediante un desarrollo pragmático.

Este desarrollo parte de *la identificación del cambio* apoyado en la estrategia de *comparación* que permite identificar modificaciones en los valores de las variables (la forma, la posición y, en general, las cualidades que se estudian). El siguiente momento está conformado por dos partes, la primera es la *caracterización cualitativa de la naturaleza de cambio*, que precisa de la estrategia de *seriación*, pues a través del estudio de varios estados sucesivos se determina, por ejemplo, si el crecimiento es constante, es cada vez mayor, es cada vez menor, etc. La segunda es la *caracterización cuantitativa de la naturaleza de cambio*, que recurre tanto a la *comparación* como a la *seriación*, pues con la primera se determina la cantidad de cambio de un estado a otro, en tanto que la segunda el patrón de crecimiento o decrecimiento del cambio. El último momento consiste en la anticipación de estados futuros, normada por el *Prædiciere* y se realiza con base en la *predicción* para el caso de estados puntuales y la *estimación* en comportamientos globales.

De manera que el modelo propuesto permite explicar teóricamente la manera de proceder de los individuos ante fenómenos de cambio, en particular modela una forma de desarrollo pragmático del PyLVar. No obstante, en este escrito nos hemos limitado en dos aspectos. Por una parte, hemos manejado el esquema de anidación de práctica únicamente en “las relaciones de subida” (acción – actividad –práctica), es necesario analizar también “las relaciones de bajada” (practica social – practica de referencia –práctica). Asimismo, se requiere precisar el rol e influencia de la práctica de referencia en el PyLVar, esto debido a que la anticipación de estados, ya sea *predicción* o *estimación*, puede tomar formas diferentes dependiendo de esta práctica de referencia. Por ejemplo, la forma de predecir en medicina no es igual a la predicción en Cálculo Diferencial (apoyada fuertemente en el teorema de Taylor), pero en ambos escenarios, con prácticas de referencia diferentes, se recurre a las estrategias variacionales.

Otro aspecto a resaltar es que dependiendo de la situación específica puede presentarse una sucesiva anidación de prácticas. Por ejemplo, en la situación 1 la *seriación* se ubica al nivel de actividad, pero en la situación 3 corresponde al nivel de acción. Esto se debe a que la situación precisa *comparar* la cantidad que incrementa la altura en ambos recipientes, siendo una el doble de la otra; pero esto requiere que previamente se determine la cantidad que incrementa la altura de la gráfica dada, lo que implica recurrir a la estrategia de *seriación* para dar cuenta de ese patrón de crecimiento. Estudiar la forma como se presentan y articulan anidaciones de práctica en diversas situaciones es un aspecto relevante que estudiaremos para caracterizar el desarrollo del PyLVar.

Estos aspectos se han considerado y estudiado en el proyecto doctoral del que forman parte los avances de investigación aquí presentados, en particular mediante la relación de la anidación de prácticas del PyLVar con la noción de *sistema de referencia*. Ésta consiste en una forma particular en que la variación se percibe y organiza, y mediante la anidación de prácticas se opera y comunica. Esto resulta importante ya que una característica de los fenómenos de variación es que el cambio puede ser percibido, pero la variación no, se requiere una abstracción de orden superior"…si bien nos percatamos del movimiento de las personas, de su cambio de posición, casi nunca nos cuestionamos por la forma en que se producen dichos cambios, aun cuando podríamos percatarnos de ello: si el movimiento era uniforme, si se presentaban variaciones, es decir, se movían cada vez más rápido o más lento o si alternaban este comportamiento. Menos llegamos a establecer algún sistema de medida para darle valor a esas variaciones del cambio. Es decir, si bien percibimos y comprendemos lo que cambia, el analizar los cambios de ese cambio no es tan natural. Se requiere de un segundo nivel de elaboración teórica, de una abstracción de segundo orden, dando lugar al concepto de *variación "*(Cabrera, 2009, p. 51).

Además, la forma de percibir esta variación no es siempre la misma, de manera que el *sistema de referencia* articula aquellos elementos y consideraciones invariantes en el estudio del cambio que permiten reconocer, estudiar y comunicar la variación. Los elementos que hemos caracterizado son la *selección de variables*, la *unidad de referencia* y *unidad de medida* y la *temporalidad*. Cada uno de ellos está asociado a los cuestionamientos presentados y las *estrategias variacionales*. Reportaremos los detalles y resultados de esta investigación en una ocasión futura.

4. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Caballero, M. (2012). *Un estudio de las dificultades en el desarrollo del lenguaje y pensamiento variacional en profesores de bachillerato.* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. DF: México.

Caballero, M., & Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elementos del Pensamiento y Lenguaje Variacional. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 26, 1007 – 1015.

Cabrera, L. (2009). *El Pensamiento y Lenguaje Variacional y el desarrollo de Competencias. Un estudio en el marco de la Reforma Integral de Bachillerato*. (Tesis de maestría no publicada), Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México.

Cantoral, R. (2000). Situaciones de cambio, pensamiento y lenguaje variacional. En Cantoral et al, *Universidad Virtual. Desarrollo del Pensamiento Matemático* (pp. 185-203). México, D.F., México: Trillas.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento matemático.* México: Gedisa Editorial.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., & Montiel, G. (2014). Socioepistemología, matemáticas y realidad. Revista Latinoamericana de Etnomatemática: Perspectivas Socioculturales de la *Educación Matemática*, 7(3), 91-116.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Appliying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for research in mathematics educations*, 33, 35 -278.

Doorman, M., Drijvers, P., Gravemeijer, K., Boon, P., & Reed, H. (2012). Tool use and the development of the function concept: from repeated calculations to functional thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education,* 10, 1243-1267.

Nagle, C., Moore-Russo, D., Viglietti, J., & Martin, K. (2013). Calculus students and instructors' conceptualizations of slope: a comparison across academic levels. *International Journal of Science and Mathematics Educatio*n, 11, 1–25.

Sánchez, G., García, M., & Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 11(2), 267 – 296.

Sokolowski, A. (2014). Modelling rate for change of speed in calculus proposal of inductive inquirí. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 45 (2), 174 – 189.

Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

AVANCES DE INVESTIGACIÓN SOBRE ALFABETIZACIÓN ESTADÍSTICA

Armando Josué Marín Che
Universidad Autónoma de Yucatán. psosa@correo.uady.mx

Jesús Enrique Pinto Sosa
Universidad Autónoma de Yucatán. josuemarin23@hotmail.com

Resumen

La alfabetización estadística es una habilidad orientada hacia los ciudadanos sin importar el nivel académico o área profesional en el que se encuentren. Se ha definido como un conjunto de habilidades básicas que todas las personas deberían desarrollar para comprender, interpretar y comunicar información estadística que pueda presentarse en los diferentes medios. En este trabajo se realiza un análisis de los principales logros en la materia y el sentido que se le ha dado en la literatura desde sus inicios hasta la actualidad en el ámbito internacional, así como las implicaciones que conlleva este constructo, generando la necesidad de conocer los niveles en que se ha desarrollado esta habilidad en estudiantes universitarios, así como de explorar las necesidades básicas de estadística en la formación académica de cada campo profesional de una universidad.

Palabras clave: Alfabetización estadística, estadística, educación superior.

1. INTRODUCCIÓN

En la actualidad es indudable la gran cantidad de información estadística que se puede encontrar a través de las páginas web, los periódicos, la televisión o en las redes sociales como el *facebook* y el *twitter*, que hablan temas actuales de interés y que representan la información mediante alguna estrategia estadística en los que comúnmente utilizan gráficos, tablas, promedios, porcentajes, frecuencias, puntos de alza o baja de las monedas, por mencionar algunos, para dar a conocer sus conclusiones (Arteaga, Batanero, Cañadas y Contreras, 2011).

Masaútis, Curti, Marangunich, Bello, Rosa y Ponce (2012) consideran que la estadística tiene la propiedad de ser una disciplina transversal a todas las áreas del conocimiento, de estudio o laboral y, por consiguiente, disponible a cualquier ciudadano. Autores como Gal (2002) y Watson (1997), por mencionar algunos, han destacado la importancia de formar ciudadanos estadísticamente alfabetos, es decir, proporcionar a todos los ciudadanos conocimientos básicos de estadística que pueda ayudarles a comprender y criticar mejor la información estadística que llegue a sus manos.

En la última década, el estudio de la estadística y su introducción al currículo escolar ha sido un tema central de diversos proyectos y organizaciones alrededor del mundo. Sin embargo, a pesar de la gran importancia que se le brinda actualmente a este tema, Tauber (2010) asegura que los estudiantes universitarios presentan deficiencias en el uso de elementos básicos de estadística y no existe diferencia significativa entre los alumnos que han cursado estadística en un curso previo, de los estudiantes que no lo han hecho con anterioridad. A su vez, Ziegler (2014) asevera que son muchos los estudiantes que finalizan los cursos de estadística sin comprender correctamente o ser capaces de aplicar los conceptos y procedimientos estadísticos básicos. De igual forma, Arteaga, Batanero, Contreras y Cañadas (2016) afirman que no sólo existen deficiencias en estudiantes de nivel superior sino también en profesores del área.

Aunado a esto, aunque la estadística se enseña hoy día en todos los niveles educativos de algunos países como Australia, Nueva Zelanda, España y Estados Unidos sin importar el campo de formación (Mofokozi, 2011), en México los avances de investigación son poco documentados en cuanto al desarrollo de la alfabetización estadística en el nivel superior. No existe un currículo que regule el desarrollo de una formación básica de estadística en el nivel universitario y al parecer existe la creencia de que determinados campos profesionales no necesitan de estadística. Asimismo, no se ha encontrado un instrumento o prueba que mida la habilidad en alfabetización estadística en este nivel.

Esta investigación pretende realizar un diagnóstico de estudiantes en diversos campos profesionales de una universidad pública, que permita caracterizar e identificar los elementos estadísticos que requieren de la carrera que estudian. Se explorarán las diferencias entre alumnos que cursan estadística en licenciatura y los que no, así como las diferencias existentes en esta área por campo profesional. El alcance será de tipo descriptivo, con un diseño no experimental y transversal.

La finalidad es dar a conocer los avances en alfabetización estadística tanto a nivel internacional como nacional en la actualidad, así como documentar cuáles son los niveles de alfabetización estadística de los estudiantes de nivel superior respecto a los estándares internacionales propuestos para este constructo y en qué medida pueden interpretar y comunicar información estadística que pudiera presentarse en su vida cotidiana y en su quehacer profesional después de la universidad.

2. MARCO TEÓRICO

Antes del año 1990 era muy difícil encontrar temas de estadística en los diferentes programas universitarios. Fue a partir de esa década que se le comenzó a dar más sentido y responsabilidad a la estadística como una parte esencial y necesaria en los ciudadanos (Wade, 2009). Así, la utilización cada vez más frecuente en los medios y la creciente necesidad de contar con los conocimientos básicos de estadística en los ciudadanos han creado la necesidad de introducir la alfabetización estadística en los diversos ámbitos sociales, académicos y profesionales (Branco y Martins, 2002).

2.1. Alfabetización estadística. Significado y características

A lo largo del tiempo, el concepto de alfabetización estadística se ha estado forjando de acuerdo a las necesidades que cada autor identifica. En la Figura 1 se observan las principales adecuaciones, aportaciones y características que han definido este constructo. Desde Walker en 1951 hasta la actualidad, la alfabetización estadística ha sido caracterizada principalmente como la habilidad para leer y comunicar información estadística que pudiera encontrarse en los medios.

En 1993, Wallman se refiere a este término como la “habilidad para entender y evaluar críticamente resultados estadísticos que son permeados en nuestra vida diaria”, así como para apreciar las contribuciones que la estadística en decisiones personales y profesionales (Wallman, 1993, p.1). En la perspectiva de este autor, el concepto adquiere un contexto más específico al referirse a determinada información que puede encontrarse en la vida cotidiana, incluyendo las aportaciones que pudiera tener sobre nuestra propia vida y la toma de decisiones.

Watson (1997) comparte ambas características definitorias utilizadas por Walker (1951) y Wallman (1993), identificando a la vez, tres niveles jerárquicos de alfabetización estadística: el conocimiento de los conceptos básicos de estadística, la comprensión del lenguaje y conceptos estadísticos dentro de un contexto social más amplio y, la actitud crítica hacia los argumentos estadísticos.

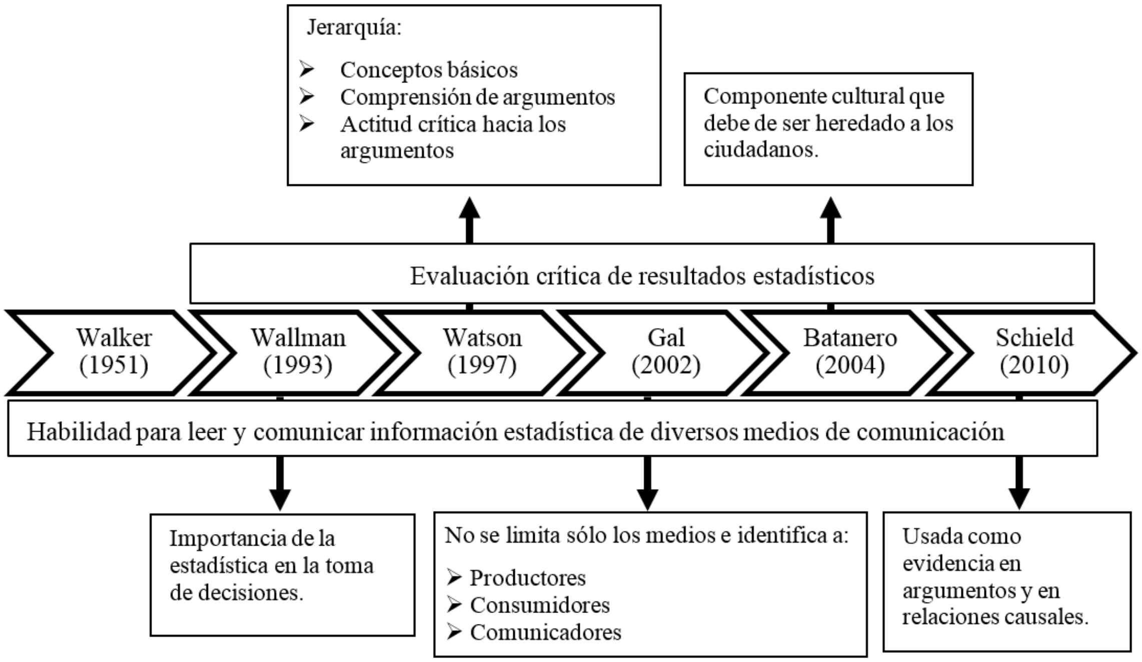


Figura 1: Características principales de la alfabetización estadística

En la perspectiva de Watson (1997), la alfabetización estadística empieza a tener un sentido más crítico no sólo hacia la información que se lee sino también hacia los fundamentos con que se realiza dicha información. De igual forma, en el año 2002, Gal presenta una definición de alfabetización estadística, una propuesta con mayor detalle. La orientación de esta definición se hace con mayor precisión hacia las personas adultas y especifica que se refiere a dos componentes interrelacionados:

> La capacidad para interpretar y evaluar críticamente la información, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos, incluyendo los medios de comunicación, pero no limitándose a ellos, así como capacidad para discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones estadísticas cuando sea relevante (Gal, 2002, p. 2).

En esta misma dirección, y como un complemento adicional, Gal realiza una diferenciación entre los grupos de personas que se pueden encontrar frente a diferente información estadística: los productores de datos, que están orientados a la parte productiva o creadora de los mensajes, el análisis y la interpretación de la información desde un punto de vista más disciplinar de la estadística y, un segundo grupo, los consumidores de la información, que agrupa a la población en general la cual participa de la lectura, la escucha y la interpretación de la información. A este último grupo lo podríamos categorizar como la parte receptora de la información estadística (Gal, 2002).

De igual manera, el autor hace mención de un grupo que funciona de un lado como una parte productora y otra como parte consumidora: los comunicadores. Este subgrupo depende de la postura que adopte al momento de interpretar la información. Se trata, de los psicólogos, sociólogos, periodistas, economistas, entre otros, que muchas veces interpretan la información y luego la transmiten a terceras personas.

Batanero (2004) proporciona también una definición del concepto alfabetización estadística en Iberoamérica llamándolo *Cultura Estadística*. En su definición hace referencia a la estadística como un componente cultural; una habilidad que debe ser heredada a los ciudadanos de generación en generación como algo necesario y cotidiano tal como la habilidad de escribir y leer (Batanero, 2004).

Adicionalmente, en 2010, Schield define el concepto de alfabetización estadística como la habilidad para leer e interpretar resúmenes estadísticos en los medios cotidianos: en gráficas, tablas, afirmaciones y ensayos (p. 133).

2.2. La alfabetización estadística y el currículo

En el contexto internacional, la alfabetización estadística cada día ha adquirido un valor primordial en el currículo académico en diferentes países. En Estados Unidos a partir de los años noventa se encontró una fuerte demanda de investigaciones y estudios relacionados con la estadística de manera formal. En 1994, se empezaron a realizar trabajos e investigaciones con relación a este tema. Desde este año se empieza a descubrir una necesidad de ir incorporando temas de estadística en los currículos escolares así como la medición en que se empieza a desarrollar esta habilidad en los estudiantes.

El Proyecto Internacional de Alfabetización Estadística (ISLP, por sus siglas en inglés) se encarga de difundir y promover este tópico en los ciudadanos y en los currículos escolares de todos los niveles en todo el mundo. A través de su sitio web (http://iase-web.org/islp/) organiza concursos en los que se involucra y motiva a jóvenes y adultos a participar para desarrollar carteles o posters que promuevan la alfabetización estadística de manera transversal en diferentes áreas.

Entre los países latinoamericanos con mayores aportaciones hacia el estudio y el desarrollo de la alfabetización estadística se encuentra Argentina. En 2011, Rodríguez consciente de las dificultades encontradas en la revisión de la literatura respecto a la alfabetización estadística, publica una serie de estrategias y actividades que puedan ayudar a los docentes a tener una mayor visión de las problemáticas acerca del significado y comprensión de conceptos estadísticos elementales. Los temas que toca son: medidas de posición central, lectura e interpretación de los gráficos, medidas de dispersión y distribución de frecuencias.

Acorde a la importancia de introducir la estadística en el currículo, Morales y Ruíz (2013) realizan una comparación de los temas estadísticos contenidos entre los currículos de España y Chile. Los hallazgos más importantes se dan en los dos últimos años de la enseñanza primaria, ya que en ambos currículos se introducen las medidas de tendencia central y se amplía el trabajo con diferentes tipos de gráficas estadísticas. En las diferencias se encontraron que en el currículo español se introduce la técnica de la encuesta para la recogida de los datos y en el currículo chileno, para comparar distribuciones de dos grupos de muestras aleatorias, se propone el diagrama de puntos y el diagrama de tallo y hojas.

Schield (2010) realiza un marco de referencia acerca de las ideas fundamentales que deben tener los productores de datos al momento de transmitir información estadística a través de tablas, gráficos y porcentajes. Afirma que muchas veces los consumidores de datos (estudiantes, maestros, ciudadanos comunes) no comprenden la información que es transmitida por los productores. Asimismo, realiza una serie de recomendaciones hacia estos, entre las que se encuentran; crear normas estandarizadas para la presentación de información de tasas, índices y porcentajes representados en gráficos y tablas para que los consumidores puedan utilizar la información estadística a su favor y tomar las mejores decisiones.

2.3. Investigaciones acerca de alfabetización estadística

La alfabetización estadística es una habilidad que es investigada alrededor del mundo. Entre los principales países que han aportado mayor cantidad de estudios sobre el tema se encuentran Estados Unidos, Australia, España, Argentina y Colombia. La Figura 2 muestra algunos de los principales trabajos que se han realizado hasta el momento. Es importante mencionar que existen otros países e investigadores que han aportado grandes conocimientos en el tema como Israel (Gal, 2002) y Nueva Zelanda (Brown, David, Moltchanova, Seddon y Harlow, 2014) por mencionar algunos.

ISSN: 2594-1046

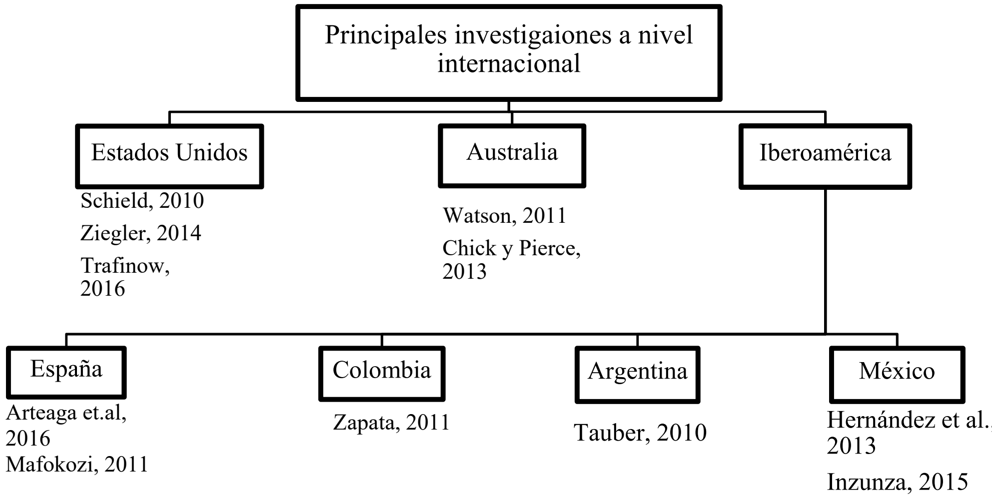


Figura 2. Principales investigaciones sobre alfabetización estadística a nivel internacional

Uno de los trabajos más recientes en el tema es de Trafimow (2016), el cual sustenta la importancia del coeficiente de correlación como parte de alfabetización estadística debido a su presencia en la mayoría de las investigaciones. Recientemente, Ziegler (2014) asegura la necesidad de crear nuevas evaluaciones que realmente midan el nivel de alfabetización estadística de los estudiantes. Indica que existen diversas pruebas pero ninguna se centra en este constructo. Con base en lo anterior, diseña la prueba: Alfabetización Básica en Estadística (BLIS, por sus siglas en inglés), cuyo objetivo es evaluar a estudiantes de nivel superior en un curso de introducción a la estadística. Los resultados de confiabilidad y validez de la prueba de Ziegler confirman que la evaluación aporta verdaderos conocimientos acerca del nivel de conocimientos los estudiantes de educación superior que han llevado un curso introductorio de estadística.

Asimismo, Tauber (2010) asegura que no existen diferencias en los niveles de habilidades y conocimientos conceptuales estadísticos entre alumnos que han cursado la asignatura de estadística y los que no, aunado a que en ambos casos los resultados son deficientes. Asimismo, Tauber, Cravero y Redondo (2013) afirman que también existen errores conceptuales en las actividades de este tópico en profesores de matemática y estudiantes de profesorado, indicando a manera de reflexión la importancia de que un profesor se forme adecuadamente en la problemática asociada con la alfabetización estadística para que logre formar ciudadanos estadísticamente alfabetizados.

En México las investigaciones encontradas respecto a este tema son mínimas. En 2009, Eudave realizó un estudio dirigido hacia los niveles de comprensión de información y gráficas estadísticas en jóvenes y adultos. El estudio permitía reconocer si los encuestados lograban leer los datos, comparación de datos y leer más allá de los datos. Los resultados mostraron que solamente cinco del total lograron realizar una lectura completa y adecuada de la tabla de frecuencias y de la gráfica estadística, siete no pudieron no resolver la tarea y los restantes se encontraron entre ambos extremos.

Otro estudio relacionado a la estadística señala los principales retos para la enseñanza y la formación de profesores de estadística. Los autores, Hernández, Pinto, Huerta y González (2013), aseguran que los profesores cuentan con una diversidad de formaciones profesionales ajenas al área de estadística lo cual puede influir en su desempeño.

En un estudio realizado en nivel superior, Inzunza (2015) describe los niveles de interpretación de gráficas estadísticas de estudiantes de dos grupos de licenciatura y uno de maestría, realizando un estudio de preprueba y posprueba en cada uno de los grupos. Los resultados indican que el nivel más bajo de comprensión gráfica se obtuvo en el grupo de licenciatura que aún no había abordado el tema. Los estudiantes que tomaron el curso de estadística obtuvieron ligeras mejorías respecto a los que no lo cursaron pero no fueron capaces de realizar análisis más complejos de la información.

3. METODOLOGIA

Los bajos niveles de comprensión encontrados en el tema y los pocos estudios orientados hacia la alfabetización estadística en nivel superior generan una gran necesidad de continuar las investigaciones e indagaciones en este nivel. Para dar continuidad, se propone realizar un diagnóstico del nivel de comprensión de información estadística en universitarios. Para ello, la población de estudio será los estudiantes de quinto semestre de las diferentes licenciaturas ofrecidas por una universidad pública. Se elige trabajar con esta población debido a que los alumnos en este semestre ya cursaron la asignatura de estadística, en caso de que ésta se incluya en el plan de estudios de la carrera. Se seleccionará el 25% de los alumnos en cada campo profesional por un muestreo por conglomerados para tener una muestra representativa de la población de estudio.

Para la recolección de datos se administrarán dos tipos de instrumentos:

- Una prueba de desempeño sobre alfabetización estadística diseñada con base en los avances de investigación en educación estadística, las pruebas nacionales con contenidos de estadística y los programas de esta asignatura vigentes en la universidad.

- Un cuestionario sobre necesidades de formación básica para la profesión. La instrumentación está en proceso de construcción.

El proceso de conformación del instrumento de desempeño iniciará con la revisión de literatura referente a los instrumentos validados y aplicados para medir la alfabetización estadística, seleccionando los temas que se evalúan en cada uno. Asimismo, se analizarán los temas de estadística que evalúa el Centro Nacional de Evaluación (CENEVAL) en sus pruebas EXTRA-ES, utilizada para medir conocimientos básicos de estadística después de un curso introductorio y, el EXANI II y III, que son evaluaciones aplicadas para el ingreso a universidad y posgrado, respectivamente. De igual manera se realizará un análisis comparativo de los programas de estudio de las asignaturas relacionadas con la estadística que se ofrecen en la universidad en cada licenciatura para seleccionar los temas comunes entre sí.

Una vez realizado el análisis de los programas de las licenciaturas y los análisis de los instrumentos encontrados se procederá a realizar un esquema de los temas evaluados más comunes referentes a alfabetización estadística. De estos instrumentos se seleccionarán diez ítems que serán puestos a prueba para su aplicación y conformar el instrumento de medición.

Los participantes para la prueba piloto serán escogidos con características similares a la muestra original. Se empleará en las mismas condiciones de aplicación de la que se llevará a cabo con la muestra. El criterio de selección de los estudiantes para la aplicación piloto del instrumento será bajo el criterio de un muestreo no probabilístico intencional pues se realizará en una universidad en la cual se está gestionando el acceso. Se harán las pruebas estadísticas necesarias para determinar la validez y confiabilidad del instrumento. El análisis de los datos también contempla la comparación con variables independientes como son género, campo profesional y entre alumnos que cursaron y los que no, la asignatura de estadística.

4. CONCLUSIÓN

En México existe la necesidad de conocer qué tanto se ha avanzado en relación con la alfabetización estadística, y más aún el desarrollo de investigación que permita tanto avanzar en la instrumentación como en el análisis de la realidad de los aprendizajes adquiridos por los estudiantes en educación superior. Es notorio que en diversas partes del mundo se han realizado diferentes tipos de estudios orientados hacia este tema, sin embargo, en México la investigación es incipiente.

La investigación permitirá a corto o largo plazo también explorar y analizar el currículo escolar en torno a tópicos de estadística, diferenciados por campos profesionales de universidades mexicanas con alguna universidad extranjera para encontrar similitudes y diferencias en los contenidos básicos de estadística que se ofrecen en universidades.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G., & Contreras, M. (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 76, 55-67.

Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, M., & Cañadas, G. (2016). Evaluación de errores en la construcción de gráficos estadísticos elementales por futuros profesores. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 19 (1), 15-40.

Batanero, C. (2004). Los retos de la cultura estadística. *Yupana*, 1(1), 27-37.

Branco, J., & Martins, M. E. (2002). Literacia estatística. *Educação e Matemática*, 69, 9-13.

Brown, J., David, I., Moltchanova, E., Seddon, H., & Harlow, J. (2014). Improving statistical literacy at university. In I.K. Makar, B. de Sousa, & R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics* (ICOTS9). Flagstaff, Arizona, US.

Chick, H., & Pierce, R. (2013). The Statistical Literacy Needed to Interpret School Assessment Data. *Mathematics Teacher Education and Development*, 15(2).

Eudave, D. (2009). Niveles de comprensión de información y gráficas estadísticas en estudiantes de centros de educación básica para jóvenes y adultos de México. *Educación matemática,* 21(2), 5-37.

Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. International *Statistical Review*, 70(1), 1-25.

Hernández, B., Pinto, J., Huerta, J., & González, S. (2013). Retos para la enseñanza y la formación de profesores de estadística en México. *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones*, 20 (2), 257-273.

Inzunsa, S. (2015). Niveles de interpretación que muestran estudiantes sobre gráficas para comunicar información de contextos económicos y sociodemográficos*. Revista mexicana de investigación educativa,* 20(65), 529-555.

Masaútis, A., Curti, C., Marangunich, L., Bello, R., Rosa, E., & Ponce, M. (2012). Capacitación en estadística a grupos específicos de profesionales. *Hipótesis alternativa. Boletín de IASE para América Latina,* 13 (1).

Morales, R., & Ruíz, K. (2013). Comparación entre los contenidos del currículo chileno y español en el área de estadística y probabilidad. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 137-142). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Rodríguez, N. (2011). Actitudes de los estudiantes universitarios hacia la estadística. *Interdisciplinaria*, 28(2), 199-205.

Schield, M. (2010). Assessing statistical literacy: take care. En P. Bidgood, N. Hunt y F. Jolliffe. *Assessment methods in statistical education: An international perspective*, 133-152. Wiley.

Tauber, L. (2010). Análisis de elementos básicos de alfabetización estadística en tareas de interpretación de gráficos y tablas descriptivas*.* *Ciencias Económicas,* 1(12), 53-74.

Tauber, L., Cravero, M., & Redondo, Y. (2013). Evaluación de errores de profesores de matemática en tareas de Alfabetización Estadística y de Razonamiento Estadístico. Probabilidad Condicionada. Revista de Didáctica de la Estadística, *Probabilidad y Combinatoria*, (1).

Trafimow, D. (2016). The attenuation of correlation coefficients: a statistical literacy issue. *Test,* 38, 25–28.

Wade, B. (2009). *Statistical literacy in adult college students.* (3374560 D.Ed.), The Pennsylvania State University, Ann Arbor. Recuperado de http://search.proquest.com/docview/304982245?accountid=30047 ProQuest Dissertations & Theses Global database.

Walker, H. (1951). *Statistical literacy in the social sciences.* The American Statistician, 5(1), 6-12.

Wallman, K. (1993). Enhancing statistical literacy: Enriching our society. *Journal of the American Statistical Association*, 88(421), 1-8.

Watson, J. (1997). *Assessing statistical thinking using the media. The assessment challenge in statistics education,* 107-121.

Watson, J. (2011). Foundations for improving statistical literacy. *Statistical Journal of the IAOS*, 27, 197-204.

Ziegler, L. A. (2014). *Reconceptualizing statistical literacy: Developing an assessment for the modern introductory statistics course*. University of Minnesota, Ann Arbor. Recuperado de http://search.proquest.com/docview/1562784265?accountid=30047 ProQuest Dissertations & Theses Global database.

Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

LA ILUSIÓN DE LA LINEALIDAD EN PROBLEMAS DE ÁREA, VOLUMEN Y CON FALTA DE AUTENTICIDAD EN ALUMNOS DE SECUNDARIA

Roberto Sánchez Sánchez
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. rtgr1904@gmail.com

José Antonio Juárez López
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. jajul@fcfm.buap.mx

Resumen

El presente avance de investigación muestra una visión general de las tendencias de los alumnos al resolver problemas de área, volumen y falta de autenticidad en donde se hace presente la ilusión de la linealidad. Uno de los ejemplos más comunes de un comportamiento corrompido en la resolución de problemas matemáticos es la fuerte tendencia de los alumnos a aplicar métodos proporcionales a los problemas de valor faltante, incluso en problemas en los que es cuestionable o claramente inadecuado. En muchas ocasiones los alumnos resuelven problemas matemáticos ignorando su conocimiento realista o tienden a generalizar en problemas de área y volumen debido a la excesiva dependencia de la linealidad. Es importante el análisis de este tipo de razonamiento de los estudiantes pues ello puede tener implicaciones educativas futuras.

Palabras clave: ilusión de la linealidad, falta de autenticidad, problemas de valor faltante, área, volumen.

1. LAS MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN Y SUS DIFICULTADES

1.1. Las matemáticas en la educación

Existen diversas cuestiones que interconectan a las matemáticas con los programas escolares para construir fundamentos en el aprendizaje de las matemáticas y desarrollar el razonamiento lógico-matemático.

En las reformas y programas de estudio de diversos países se considera que uno de los principales objetivos de la educación matemática es propiciar la capacidad de desarrollar y utilizar modelos para dar sentido a las diversas situaciones que rodean la vida diaria y de los sistemas complejos derivados de nuestra sociedad moderna (Blum, 2002; Consejo Nacional de profesores de Matemáticas [NCTM], 1989, 2000, citados en Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens y Verschaffel, 2005, p. 58).

Regularmente, la forma tradicional de la enseñanza de modelos matemáticos y la solución de problemas en la escuela primaria y secundaria es por medio del uso de problemas de aplicación,

ISSN: 2594-1046

es decir, problemas en los cuales la respuesta se puede encontrar mediante la realización de una o más operaciones aritméticas (+, -, x, :) con las cantidades del problema (Verschaffel, Greer y de Corte, 2000, citado en Van Dooren *et al*., 2005, p. 58).

1.2. Dificultades en la resolución de problemas

Frecuentemente, en los libros de texto los estudiantes pueden encontrar señales muy superficiales, tales como palabras o frases clave, en la sección donde aparece el problema o el contexto del problema. Estas señales superficiales le permiten al alumno decidir qué operación se requiere para resolver el problema de manera exitosa (Van Dooren et al., 2005).

Los alumnos codifican en su memoria las correlaciones entre las características superficiales y el método utilizado para la solución del problema y proceden a ejecutar dicho método en otros problemas debido a la detección de estas características superficiales (Ben-Zeev, 1998; Ben-Zeev y Estrella, 2001; Chi y Bassok, 1989; Schoenfeld, 1988, citados en Van Dooren *et al*., 2005, p. 58).

Con el paso del tiempo, los estudiantes comienzan a perder la capacidad para distinguir cuándo determinada operación aritmética es apropiada para solucionar un problema y cuándo no lo es. En otras palabras, resuelven los problemas mediante conductas estereotipadas (Van Dooren *et al*., 2005).

Debido al "contrato didáctico" (Brousseau, 1997, citado en Van Dooren *et al*., 2005, p. 62) los estudiantes saben que pueden resolver los problemas asumiendo que estos tienen una respuesta exacta, numérica y deben proporcionar esa respuesta. Existe una amplia evidencia empírica de la presencia de este contrato didáctico en la solución de problemas y por su impacto en la aparición de respuestas inapropiadas (Reusser y Stebler, 1997; Verschaffel, 2000, citado en Van Dooren *et al*., 2005, p. 62).

2. PROPORCIONALIDAD Y SUS DIFICULTADES

Se han realizado amplias investigaciones en educación matemática sobre la enseñanza y aprendizaje del razonamiento proporcional y cómo puede ser mejorado este proceso. Se presta una particular atención a los problemas de tipo proporcional debido a su diversa utilidad en situaciones de la vida cotidiana y en muchos problemas de matemáticas.

ISSN: 2594-1046

2.1. Proporcionalidad en la educación

En la infancia, los niños se encuentran con las relaciones proporcionales en su forma más simple (Van den Brink y Streefland, 1979, citado en Van Dooren *et al*., 2005, p. 59) en situaciones como: “si un coche de juguete tiene cuatro ruedas entonces en dos coches de juguete hay ocho ruedas”. A partir de los primeros años de educación primaria los niños aprenden a multiplicar y dividir y aprenden a reconocer cuándo se deben de aplicar estas operaciones aritméticas de manera simple, es decir, de un solo paso, en problemas como: “1 kg de naranjas cuesta 5 pesos. ¿Cuánto costarán 3 kilogramos de naranja?”. Posteriormente, los estudiantes son introducidos en el razonamiento proporcional.

El concepto de proporcionalidad aparece como un "hilo conductor" de los problemas de proporcionalidad típica en la escuela primaria y secundaria en la idea de los modelos lineales, aproximaciones de cálculo y estadística en el nivel bachillerato y para la noción abstracta de mapas lineales entre espacios vectoriales en el nivel universitario (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, 2002, citado en Van Dooren *et al*., 2005, p. 60).

2.2. Problemas de valor faltante

A largo de la educación primaria y secundaria, la mayoría de las tareas de razonamiento proporcional que los estudiantes encuentran se formulan en un formato de valor faltante (Cramer & Post, 1993, citado en Van Dooren, De Bock, Evers y Verschaffel, 2009, p. 187), es decir, problemas de aplicación en el que se conocen tres números (dos formando una relación y el tercero es uno de los dos valores de otra relación), y el cuarto número tiene que ser encontrado (Kaput & West, 1994, citado en Van Dooren *et al*., 2009, p. 187) o como Vergnaud (1983, 1988, citado en Van Dooren *et al*., 2009, p. 187) los denominó "problemas de regla de tres".

Es por este tipo de ejercicios y soluciones que se espera que los estudiantes adquieran una comprensión de las relaciones multiplicativas que existen en situaciones de proporción, o como ha señalado Vergnaud (1983, citado en Van Dooren *et al*., 2005, p. 60) una comprensión de la relación de multiplicación entre las cantidades en dos espacios de medida: las cantidades de dos espacios de medida se relacionan entre sí mediante la multiplicación. Por ejemplo: “5 naranjas pesan 1000 gramos ¿Cuál es el peso de 20 naranjas?” por lo que una naranja pesa 200 gramos, por lo tanto 20 naranjas pesarán 4000 gramos. La relación entre los espacios de medida se da entre número de naranjas y peso pues si se multiplican 200 gramos por la cantidad de naranjas, se obtiene el peso correspondiente y también existe una relación multiplicativa entre los elementos dentro de cada espacio de medida pues si se triplica el número de naranjas, el peso se triplica.

2.3. Complicaciones de la proporcionalidad

Muchos estudios han puesto al descubierto las dificultades y los errores sistemáticos que se producen en los estudiantes cuando el concepto no está todavía completamente desarrollado (Behr, Harel, Post y Lesh, 1992; Kieren, 1988, citado en Van Dooren *et al*., 2005, p. 59).

Uno de los ejemplos más comunes de un comportamiento corrompido en la resolución de problemas es la tendencia de los alumnos a generalizar en exceso la aplicabilidad del modelo proporcional (De Bock, Van Dooren, Janssens y Verschaffel, 2002; Van Dooren *et al*., 2009).

Incluso la historia ha proporcionado muchos casos de mala especificación del razonamiento proporcional, como la afirmación de Aristóteles de que si un objeto es 10 veces más pesado que otro objeto, llegará a la tierra 10 veces más rápido que otro objeto (Galilei, 1638/1954, citado en Van Dooren *et al*., 2005, p. 59).

3. LINEALIDAD

Freudenthal (1983, citado en Van Dooren *et al*., 2005, p. 59) advirtió que “La linealidad es una propiedad tan sugestiva de las relaciones que uno se rinde fácilmente a la seducción para hacer frente a cada relación numérica como si fuese lineal”.

A partir del contexto de esta cita, queda claro que Freudenthal utilizó el término lineal como sinónimo de proporcional, en referencia a las relaciones representadas gráficamente por una línea recta a través del origen (Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens, & Verschaffel, 2004, citado en Van Dooren *et al*., 2005, p. 59).

El mal uso de la linealidad en situaciones no lineales (a veces referido como la "ilusión de la linealidad o de proporcionalidad”) es un error “clásico”, probablemente uno de los más antiguos de la literatura del pensamiento matemático (De Bock *et al*., 2002).

El concepto de linealidad (o proporcionalidad) es un concepto clave en las matemáticas y en la educación, desde la escuela primaria hasta la universidad (De Bock *et al*., 2002). Como ya se ha mencionado, aparece en muchas formas: desde el uso de la "regla de tres" en la escuela primaria, la idea de los modelos lineales en el nivel secundaria, aproximaciones de cálculo y estadística en el nivel bachillerato, y para la abstracción en un vector en el espacio en los cursos universitarios

(Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, 2002, citado en Van Dooren *et al*., 2005, p. 60).

Sin embargo, el refuerzo de la linealidad que se trabaja en la matemática escolar, junto con su sencillez intrínseca, puede dar lugar a una tendencia en los estudiantes e incluso en adultos para ver y aplicar el modelo lineal "en todas partes" (De Bock *et al*., 2002). Debido a su simplicidad, las funciones lineales aparecen inmediatamente en la mente del ser humano porque, sin duda, no hay funciones que sean más simples que las lineales (Rouche, 1989, citado en De Bock *et al*., 2002, p. 311).

Un estudio realizado por Van Dooren *et al*. (2005) demostró que los estudiantes de secundaria distinguieron con mayor frecuencia las situaciones en las que la proporcionalidad es aplicable y cuando no lo era, pero incluso en el último grado, se realizaron un número considerable de errores proporcionales.

4. AUTENTICIDAD DE PROBLEMAS

Verschaffel, De Corte y Lasure (1994, citado en Van Dooren *et al*., 2009, p. 187) encontraron que más del 90% de los estudiantes de entre 10 y 12 años de edad respondió 170 segundos para el problema: "*El mejor tiempo de John para correr 100 metros es de 17 segundos. ¿Cuánto tiempo le llevará correr 1 kilometro?"*. La situación del mundo real que evoca el problema permite una respuesta única y precisa, pero casi todos los estudiantes buscaron la operación matemática escondida en el planteamiento del problema en vez de concebir y abordar estos problemas como problemas legítimos en matemática realista (Nesher, 1996; Reusser y Stebler, 1997; Wyndhamn & Säljö, 1997, citado en Van Dooren *et al*., 2009, p. 188).

La teoría propuesta por Torulf Palm marca aspectos importantes que deberían tener los problemas para ser considerados auténticos. Uno de estos aspectos se refiere al realismo de los datos y la información, pues para considerar auténticos a los problemas debe de haber un grado razonable de fidelidad, los números y valores indicados deben ser realistas o muy cercanos a los correspondientes (Verschaffel, Greer, Van Dooren y Mukhopadhyay, 2009).

De Bock et al. (2002) demostraron que, debido a la amplia atención que prestan los estudiantes de primaria y secundaria en matemáticas al razonamiento proporcional, tienden a confiar demasiado en métodos proporcionales en diversos dominios de las matemáticas tales como la probabilidad (Van Dooren, De Bock, Depaepe, Janssens y Verschaffel, 2003) y la geometría, la cual es motivo de investigación en el presente anteproyecto.

4.1. Problemas de área y volumen

Los estándares del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas [NCTM] (1989, citado en Van Dooren *et al*., 2005, p. 59) sugieren que “la mayoría de los estudiantes en los últimos grados de primaria y alumnos de secundaria creen que si los lados de una figura se duplican para producir una cifra similar, el área y el volumen también se duplicará”.

Una investigación realizada por De Bock, Van Dooren, Janssens y Verschaffel (2007) demostró lo anterior con el problema siguiente:

> Bart es un pintor publicitario. En los últimos días, tuvo que pintar las decoraciones de navidad en varias ventanas de una tienda. Ayer hizo un dibujo de 56 cm de altura de un Santa Claus en la puerta de una panadería. Necesitó 6 ml de pintura. Ahora se le pide hacer una versión ampliada del mismo dibujo en una ventana de supermercado. Esta copia debe ser de 168 cm de alto. ¿Qué cantidad de pintura necesitará aproximadamente Bart para hacer esto?

La mayoría de los alumnos solo aplicó regla de tres, obteniendo como resultado que se necesitan 18 ml de pintura. Incluso, al responder a las preguntas sobre el efecto de la reducción a la mitad o duplicar los lados de una figura para producir una figura similar, futuros profesores o profesores en formación, afirman que el área y el volumen se reduce a la mitad o se duplica también (Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas, 1989; Outhred y Mitchelmore, 2000; Simon y Blume, 1994; Tierney *et al*., 1990 citado en De Bock et al., 2002, p. 313).

En general, hay una tendencia casi irresistible en los estudiantes en diferentes niveles educativos, a creer que si una figura se agranda $k\ veces$, el área y el volumen es ampliada $k\ veces$ también (De Bock et al., 2002).

Por ejemplo, al aplicarles el problema siguiente: "El granjero Carlos necesita aproximadamente 8 horas para abonar un terreno cuadrado de 200 m de lado ¿Cuántas horas necesitará para abonar un terreno cuadrado con 600 m de lado?" La mayoría de los estudiantes en estos estudios fracasó en los problemas no proporcionales a causa de su fuerte tendencia para aplicar el razonamiento proporcional "en todas partes". Incluso, muy pocos estudiantes hicieron el cambio al razonamiento correcto no proporcional cuando se les proporcionaban considerables apoyos tales como estímulos metacognitivos o dibujos (De Bock, et al., 2002).

ISSN: 2594-1046

5. MODELO SITUACIONAL

Como ya se ha mencionado, en algunos casos los alumnos tienden a cambiar su razonamiento debido a los efectos de la ilusión de la linealidad. Este cambio se realiza gracias a la representación esquemática que realizan los alumnos en el momento en que resuelven el problema.

Se han realizado diversas investigaciones que intentan explicar las razones por las cuales los estudiantes tienen dificultades al elaborar representaciones esquemáticas de problemas, señalando que una inadecuada representación puede limitar las capacidades de los niños en la resolución de problemas (Diezmann, 2000b; Mejía, 2014, citado en Juárez, Mejía, González y Slisko, 2014).

En este sentido, hacer un dibujo o diagrama de la situación planteada en el problema puede resultar crucial para el que intenta resolver un problema verbal (Diezmann, 2000, citado en Juárez *et al*., 2014). También se encontró que las representaciones esquemáticas fueron más positivas con respecto del éxito en la resolución de problemas matemáticos (van Garderen y Montague, 2003, citado en Juárez *et al*., 2014).

6. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Con base en los antecedentes, las problemáticas y tendencias de los estudiantes e incluso los adultos para aplicar modelos lineales "en todas partes" y caer en la seducción de la linealidad, se tienen las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son las tendencias que presentan los alumnos de tercer grado de secundaria al resolver problemas de área, volumen y con falta de autenticidad en los que se hace presente la no linealidad?
- ¿Qué efecto tiene una intervención didáctica diseñada para disminuir la linealidad en problemas de área, volumen y con falta de autenticidad?

7. OBJETIVOS

Para el presente anteproyecto de tesis se han fijado los siguientes objetivos:

7.1 General:

Debido a que la mayoría de los estudiantes inciden en la ilusión de la linealidad entonces se tiene como objetivo aplicar una secuencia didáctica enfocada en la investigación-acción y determinar el efecto de dicha secuencia.

7.1. Específicos:

- Analizar las tendencias que presentan al resolver problemas de área, volumen y con falta de autenticidad en los que se hace presente la no linealidad.
- Examinar las manifestaciones esquemáticas de los alumnos cuando resuelven problemas de área, volumen y con falta de autenticidad en los que se hace presente la no linealidad.
- Observar el desarrollo de los alumnos durante la aplicación de la intervención didáctica para confrontar la linealidad en problemas de área, volumen y con falta de autenticidad para tratar de disminuirla.
- Analizar el efecto de la intervención didáctica para confrontar la linealidad en problemas de área, volumen y con falta de autenticidad para tratar de disminuirla.

8. JUSTIFICACIÓN

En la educación básica en México se proponen formalmente problemas de proporcionalidad a partir del cuarto grado. A partir de este grado y durante la formación académica se resuelven problemas sobre proporcionalidad, incluso se tienen textos que abordan este tema pero dirigido a profesores (Block, Mendoza y Ramírez, 2010). La mayoría de los problemas que se resuelven son de tipo valor faltante y se resuelven usualmente con lo que se conoce como "regla de tres".

Desafortunadamente, en el país se abordan problemas "ideales" que se resuelven directamente de esta manera, debido a esto, poco a poco los alumnos van perdiendo la capacidad de discernir cuándo es posible aplicar este método para resolver los problemas.

Una rama de las matemáticas en las que usualmente se presenta este tipo de problemas es cuando se les pide a los alumnos determinar el área o volumen, pues ellos piensan que si aumentamos al doble o disminuimos a la mitad determinada longitud de una arista en determinado cuerpo geométrico entonces el área o volumen aumentará al doble o disminuirá a la mitad respectivamente, situación que no es cierta (De Bock et al., 2002). Debido a este tipo de pensamiento, los alumnos llevan este tipo de razonamiento hasta altos niveles educativos, lo cual representa un serio problema para el aprovechamiento del alumno.

Los alumnos están acostumbrados a obtener un resultado numérico cuando resuelven problemas matemáticos sin importar lo alejados de la realidad en que se encuentren. Lo anterior representa un serio problema, pues lo que se pretende hoy en día en la educación en el país es que los problemas resueltos por los alumnos pertenezcan a algún contexto de la vida diaria.

9. MÉTODO

La investigación propuesta en el presente avance de investigación tiene una naturaleza cualitativa. Dicho estudio se realizará con 18 alumnos de tercer grado de secundaria de la escuela Unidades Básicas UPAEP de la Ciudad de Santa Ana Chiautempan, Tlaxcala. Se aplicará un cuestionario que consistirá en algunos problemas no lineales y relacionados con área, volumen y falta de autenticidad.

Posteriormente se aplicará una secuencia didáctica bajo el enfoque de la investigación-acción con el propósito de disminuir el fenómeno ya descrito en problemas de área, volumen y falta de autenticidad, además de dar seguimiento puntual a los alumnos. Por último, se aplicará un cuestionario final y se realizarán entrevistas para determinar si la intervención realizada tuvo un efecto favorable para la erradicación o disminución de la linealidad en los alumnos.

10. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Andonegui, M. (2006). *Desarrollo del pensamiento matematico.* Cuaderno núm. 12 Geometría: conceptos y construcciones elementales. Caracas, Venezuela.

Ausubel, D. (1983). *Teoría del aprendizaje significativo.*

Block, D., Mendoza, T. y Ramírez, M. (2010). *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica.* México: SM.

Cabrera, L. (2009). *El pensamiento y lenguaje variacional en el desarrollo de competencias.* México: CINVESTAV, Tesis de Maestría .

Cantoral, R. (2001). Sobre la construcción social del conocimiento matemático avanzado. En J. Domínguez, & M. Sierra, *Tendencias actuales de las matemáticas, su história y su enseñanza* (págs. 97-110). Salamanca: Univerisdad de Salamanca.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2002). Improper Use of Linear Reasoning: An In-Depth Study of the Nature and the Irresistibility of Secondary School Students' Errors. *Educational Studies in Mathematics , 50* (3), 311-334.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2007). *The illusion of linearity: From analysis to improvement.* New York: Springer.

Flores, Á. (2007). Esquemas de Argumentación en Profesores de Matemáticas de Bachillerato. *Educación Matemática* , 63-98.

Ford, J. (1986). Chaos: Solving the Unsolvable, Predicting the Unpredictable. En M. Barnsley, & S. Demko, *Chaotic Dynamics and Fractals.* Orlando Florida: Academic Press.

Godino, J. (2002). *Geometría y su didáctica para maestros.*

Goncalves, R. (2006). *Por qué los estudiantes no logran un nivel de razonamiento en geometria. Revista de Ciencias de la Educación.*

Hernández, J., Borjón , E., & Torres, M. (2015). La presencia de la Tecnología en la formación inicial de los profesores de matemáticas del nivel medio superior. *AMIUTEM*, (pág. 11). Zacatecas.

IEESA. (2012). *¿De dónde vienen y a dónde van los Maestros mexicanos? La formación docente en México 1822-2012.* Obtenido de Sindicato Nacional de Trabajadores de la Educación: http://www.snte.org.mx

Juárez, J. A., Mejía, A., González A. & Slisko, J. (2014). La construcción del modelo situacional de un problema matemático: El análisis basado en el Marco del Experimentador Inmerso. *Revista de Didáctica de las Matemáticas , 87*, 81-99.

Larios, V., & Díaz-Barriga, A. (2013). *Las prácticas docentes en Matemáticas en el estado de Querétaro.* Querétaro: UAQ.

Lyapunov, A. M. (1892). *The general problem of the stability of motion.* Kharkov: Kharkov Mathematica Society.

Marambio, V. (2010). *Construcción del concepto de semejanza de triángulos desde el punto de vista de la teoría de APOE.* Tesis de Maestría no publicada. Pontificia Universidad Católica de Valparaiso, Chile.

Mathematics, N. C. (2000). *Principios y estandares para la educación matemática. Traducción de Manuel Fernández Reyes. España.*

May, R. (1976). Simple Mathematica Models with very complicated Dynamics. *Nature* , 459-467.

Parks, P. C. (1992). A. M. Lyapunov's stability theory—100 years on*. *IMA Journal of Mathematical Control & Informat* , 275-303.

Pochulu, M., & Font, V. (2011). Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. *Revista Lationoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Relime* , 361-394.

Rodríguez, S. (02 de Octubre de 2014). *Mephistofeles01*. Recuperado el 12 de Marzo de 2016, de https://mephistofeles01.wordpress.com/author/mephistofeles01/

Rotaeche, R. (2008). *La construccón del concepto de ángulo en estudiantes de secundaria* . Tesis de Maestría no publicada. Cicata-IPN. México .

SEP. (1999). *Planes de Estudio*. Recuperado el 18 de mayo de 2016, de Dirección General de Educación Superior para Profesionales de la Educación: http://www.dgespe.sep.gob.mx/planes/les

SEP. (2011). *Planes de Estudios 2011.* México D.F.: SEP.

SEP. (2011). *Programa de estudios 2011. Guía para le maestro. Educación Básica Secundaria. Matemáticas.* México.

Van Dooren, W., De Bock, D., Depaepe, F., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2003). The Illusion of Linearity: Expanding the Evidence towards Probabilistic Reasoning. *Educational Studies in Mathematics , 53* (2), 113-138.

Van Dooren, W., De Bock, D., Evers, M. & Verschaffel, L. (2009). Students' Overuse of Proportionality on Missing-Value Problems: How Numbers May Change Solutions. *Journal for Research in Mathematics Education , 40* (2), 187-211.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2005). Not Everything Is Proportional: Effects of Age and Problem Type on Propensities for Overgeneralization. *Cognition and Instruction , 23* (1), 57-86.

ISSN: 2594-1046

Van Dooren, W., De Bock, D., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2008). The Linear Imperative: An Inventory and Conceptual Analysis of Students' Overuse of Linearity. *Journal for Research in Mathematics Education , 39* (3), 311-342.

Verschaffel, L., Greer, B., Van Dooren, W., & Mukhopadhyay, S. (2009). *Words and Worls: Modelling Verbal Descriptions of Situations.* Rotterdan, The Netherlands: Sense Publisher.

Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE ÁNGULO EN SEGUNDO GRADO DE SECUNDARIA DESDE LA TEORÍA APOE

Linda Xitlali Díaz Nava
Universidad Autónoma de Zacatecas.malibux_135@hotmail.com
Darly Alina Kú Euán
Universidad Autónoma de Zacatecas.ku.darly@gmail.com

Resumen

La presente investigación pretende desarrollar una propuesta didáctica para segundo grado de secundaria que permita a los alumnos construir el concepto de ángulo de una manera dinámica visto desde la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema). La propuesta didáctica permitirá analizar los mecanismos y construcciones mentales que los alumnos realizan para poder definir un concepto matemático, en este caso, en el área de geometría, entendiendo que en esta disciplina los conceptos se definen a partir de sus propiedades. Asimismo, de acuerdo con la metodología del marco teórico se realizará una descomposición genética para llevar a cabo las actividades que permitirán que los alumnos construyan el concepto de ángulo de forma dinámica para su posterior uso en la resolución de problemas.

Palabras clave: geometría, ángulo, descomposición genética, teoría APOE.

1. INTRODUCCIÓN

Las matemáticas son fundamentales para el desarrollo intelectual de cualquier individuo, les ayuda a ser lógicos, a razonar ordenadamente y a tener una mente preparada para el pensamiento, la crítica y la abstracción (Rodríguez, 2014). Dentro de la matemática existen ramas que ayudan de una manera más específica a desarrollar estos tipos de pensamiento, cada una abona por su parte. Por ejemplo, el álgebra ayuda a potenciar las destrezas lógicas y el pensamiento abstracto; la aritmética les proporciona las bases del álgebra, la comprobación de lo que se puede hacer, propiedades de orden y de campo, entre otros; por otro lado, la geometría, así como las demás ramas de la matemática, ayuda al alumno a desarrollar destrezas mentales de diversos tipos, como la intuición espacial, la visualización, la manipulación, la deducción y la experimentación. Andonegui (2006, pág. 35) afirma que "el estudio de la geometría ayuda a potenciar habilidades de procedimiento de la información recibida a través de los sentidos y permite al estudiante desarrollar, a la vez, muchas otras destrezas de tipo espacial".

La geometría es la encargada de estudiar las formas y propiedades de las figuras y cuerpos geométricos (Godino y Ruíz, 2002), mismos que podemos encontrar en la vida cotidiana y de las que podemos encontrar varias aplicaciones inmediatas. Por ejemplo, en la misma naturaleza podemos localizar el estudio de la geometría, como en la formación de los panales de abeja, cómo es que se forman hexágonos regulares que a su vez forman teselados regulares de manera precisa. En el contexto inmediato, con la medición de áreas y perímetros de terrenos, en el arte podemos encontrar la geometría con la construcción de obras como son las pirámides de Egipto, la razón aurea para la construcción en la arquitectura. La geometría ha estado y está presente en la vida diaria, no sólo de los matemáticos y arquitectos, sino de todas las personas.

Lamentablemente, el estudio de la geometría presenta algunas dificultades en su desarrollo formal, “la enseñanza de la geometría ha estado limitada al hecho de conceptualizar figuras y plasmarlas sobre papel” (Goncalves, 2006, pág. 84). Los docentes, encargados de guiar el aprendizaje, dejan de lado la geometría por considerarla una disciplina que no muestra mayor rigor a comparación con el álgebra. En la educación formal se le da más peso al álgebra que a otras ramas de las matemáticas ya que aún se tiene la concepción de que las matemáticas son números, letras y operaciones, no se ve más allá las propiedades de la geometría.

Es en geometría donde los alumnos para poder construir un objeto matemático, además de su conceptualización, deben hacer uso de las propiedades que posee cada uno, ya que es esto lo que define al objeto en sí. El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000) menciona a la geometría como “la materia mediante la cual el estudiante estudia las formas y estructuras geométricas, y aprende a utilizar sus características y relaciones”. La comprensión de la geometría es un campo extenso, es por eso que se han propuesto algunas teorías, para evaluar el nivel de adquisición de esta rama de las matemáticas.

Sin embargo, la falta de un currículum que se adecue a las características de los alumnos es otro factor que impide que los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la geometría se lleven a cabo de manera satisfactoria o explotando al máximo la disciplina.

Pero qué hacer si los encargados de guiar a los alumnos en el proceso de aprendizaje no consideran todo lo anterior, reconociendo la importancia de la geometría en sí, entendiendo que ésta ayuda a desarrollar muchas habilidades de proceso de la información recibida por medio de los sentidos, que también contribuye al desarrollo de muchas destrezas de tipo espacial que le permiten al estudiante comprender el espacio e interactuar con él, que además contribuye al desarrollo de habilidades mentales, como la intuición espacial e integración de la visualización con la conceptualización.

Existe un factor al cual se le puede atribuir el hecho de que los docentes no le den prioridad a la geometría, como la no superación de experiencias vividas por el docente en su etapa de formación y por eso termina planeando y utilizando los mismos recursos que ya experimentó, sin antes haber revisado el éxito o fracaso de los mismos al interior del aula. Otro factor que ha sido importante es el hecho de que en la década de los setenta se presentó el auge de las Matemáticas Modernas, lo que propició que la Geometría pasara a un segundo renglón dentro del ambiente escolar, relegándose al final de los contenidos anuales de estudio y, en consecuencia, que no alcanzara el tiempo para abordar los contenidos propios de esta ciencia.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Al revisar algunos trabajos de investigación, observé que estos se centran en los problemas que hay al aprender geometría, pero se deja de lado el aspecto cognitivo, es decir qué requieren los estudiantes para aprender o comprender los conceptos, y cómo entre ellos existe una transversalidad durante el ciclo escolar. En específico, el concepto de ángulo, el cual en ocasiones se ve como un concepto aislado y sin conexión con otros contenidos. Entender el concepto como un objeto aislado y de forma estática no le permite al alumno comprender el concepto de estudio. Es decir, siempre lo va querer ver de la misma forma, posición y orientación, si éste cambia, para el alumno deja de ser un ángulo, y no se fijan en que cumplan las propiedades.

> En el discurso escolar la noción de ángulo ha jugado un papel ambiguo en la escuela, sus definiciones, caracterizaciones y aplicaciones pueden encontrarse en asignaturas como matemáticas, física y dibujo técnico. La tradición escolar asume que cuando se define, se caracteriza, se expone su tipología y se manipula el concepto en la clase de matemáticas, su uso, aplicación o interpretación en otras asignaturas no debiera representar una dificultad para los estudiantes. Contrario a esto, es en las otras asignaturas donde se pueden localizar los conflictos más comunes en el manejo de esta noción. (Rotaeche, 2008, pág. 9).

De acuerdo a lo mencionado por Rotaeche (2008), la mayoría de las veces los maestros damos por sentado que con el simple hecho de enseñarle al alumno el concepto de ángulo de forma estática lo va a comprender. Desde mi experiencia, en mi práctica docente he caído en este error, pensar en que los alumnos aprenden el concepto de ángulo por el simple hecho de que es un objeto muy visual y que cualquiera tiene una idea de lo que es un ángulo, pero el verdadero problema no es que identifiquen visualmente el ángulo, sino que puedan utilizarlo posteriormente en la resolución de problemas.

En sí, la verdadera problemática en la enseñanza de Geometría es que enseñamos conceptos para memorizar, de manera estática, y no para comprender. Esto debido a que algunos profesores no se hacen responsables de las dificultades y por tanto no surgen verdaderos proyectos de investigación, que si bien no es el único trabajo del profesor y no es en sí su responsabilidad completamente, sí podemos ser generadores de proyectos que orienten la enseñanza este campo de las Matemáticas, no se le da la relevancia que ésta tiene y a lo que contribuye en el desarrollo del pensamiento matemático.

De acuerdo a la problemática planteada en el apartado anterior, surge la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo los alumnos de segundo grado comprenden el concepto de ángulo en el nivel secundaria?

Para llevar a cabo esta investigación se ha planteado el siguiente objetivo general:

Elaborar una secuencia didáctica que le permita al alumno aprender y comprender el concepto de ángulo de una manera dinámica visto desde la teoría APOE.

Para llevar a cabo el objetivo general, se llevaron a cabo los siguientes objetivos particulares:

- Diseñar una Descomposición Genética del concepto de ángulo en Secundaria.
- Diseñar actividades basadas en la DG del concepto de ángulo.
- Aplicar las actividades que abordan el concepto de ángulo.
- Analizar los resultados obtenidos del instrumento de investigación.

3. JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

El concepto de ángulo es uno de los objetos matemáticos que vemos más tangiblemente en la vida cotidiana, como es el ángulo de inclinación de una pendiente, los giros que da una persona al caminar, la abertura de una puerta o de unas tijeras o la rotación de una figura. La geometría es muy utilizada en lo cotidiano, y es necesaria para comprender y analizar la información que se tiene a nuestro alrededor, por lo tanto su uso va más allá del contexto áulico. Sin embargo, como antes se mencionó, algunos autores encuentran que el problema de este concepto en nivel secundaria es que no tiene una transversalidad ni entre los contenidos de la matemática misma y ni una transpolación a la vida diaria para resolver problemas que impliquen el uso del ángulo.

La definición de ángulo que se ha aprendido desde la educación inicial ha estado limitada la mayor parte del tiempo a una sola representación, que es la forma en que se ve un ángulo, como una abertura entre dos semirrectas. Sin embargo, los alumnos no han conceptualizado todo lo que está detrás de esta definición, lo ven como un ente estático sin relación con otro contenido, sin embargo no es así, hay más materias en las cuales este objeto matemático incide, como la Física, cuando miden el ángulo de incidencia, el ángulo de reflexión, en el lanzamiento de proyectiles. En la misma matemática, no se limita a un solo grado o a un solo contenido, sino que este concepto es utilizado de manera indirecta para la resolución de muchos problemas, como en trigonometría, en semejanza, teorema de Pitágoras, construcción de polígonos dados ciertos datos, entre otros (SEP, 2011).

Por estas razones es importante el estudio del concepto ángulo como un objeto matemático con transversalidad en los contenidos de la educación básica, cómo es que los alumnos pueden abstraer el concepto para posteriormente generalizarlo y utilizarlo en otra aplicación dentro y fuera de la matemática misma. Es por esto que la presente investigación está dirigida a proponer una secuencia didáctica que permita a los alumnos comprender las propiedades del concepto de ángulo para la transversalidad en la aplicación del mismo.

4. FUNDAMENTO TEÓRICO

Se ha elegido una teoría de corte psicogenético ya que ayudará a ir entendiendo los procesos por los cuales se va ir creando el concepto para poder conceptualizarlo, entenderlo en todas sus representaciones. La teoría APOE (por sus siglas Acción, Proceso, Objeto y Esquema) servirá como eje rector, ya que existen trabajos basados en teorías metodológicas como las Situaciones Didácticas de Brosseau y la Teoría de abstracción de Mitchelmore, pero no existen trabajos desde la teoría APOE a nivel secundaria, es por esto que se ha elegido ahora una teoría que ayude a entender los procesos cognitivos que los alumnos hacen al aprender un concepto.

Esta teoría fue propuesta por Dubinsky en 1985, nace a partir de preguntarse cómo es que el estudiante aprende conceptos matemáticos. La teoría apuesta por que todos los conceptos matemáticos se pueden aprender construyendo acciones, procesos y objetos que se organizan en esquemas. (Marambio, 2010).

ISSN: 2594-1046

La abstracción reflexiva se refiere a la reflexión sobre las acciones que se hacen sobre un objeto de conocimiento, un proceso de construcción del conocimiento matemático, esto debido a la reflexión que se hace sobre las acciones y la interiorización que se da por medio de ésta.

Este proceso de construcción del conocimiento matemático pasa por tres etapas principales: acción, proceso y objeto (Asiala, 1996), que no necesariamente tiene que ser un proceso lineal. Pero tal y como lo describe:

El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo o reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizando en esquemas con el fin de manejar las situaciones. (Dubinsky,1996)

Por ello, a continuación se describen cada una de estas etapas de construcción de conocimiento:

Acción: Es una transformación de un objeto que es percibida por un sujeto como algo externo, se realiza por medio de una reacción a sugerencias que proporcionan detalles a seguir. Para poder realizar una acción es importante que el individuo realice una profunda comprensión sobre el cambio dado.

Si dentro de la comprensión de un concepto por parte del sujeto se limita a realizar acciones, se dice que posee una concepción acción de tal idea. Siendo esta parte inicial del proceso crucial para la comprensión del concepto.

Proceso: Esto sucede cuando una acción se va repitiendo y el individuo va reflexionando sobre la misma, se interioriza en un proceso. Esto quiere decir que se realiza una construcción interna que ejecuta la misma acción, la diferencia ahora será que no necesariamente trasmitida por un estímulo externo, puesto que ahora ese individuo tiene una concepción de proceso de una transformación y reflexionando sobre y describiendo, pudiendo revertir los pasos de transformación sin realizarlos.

Objeto: Se refleja cuando el individuo es capaz de reflexionar sobre las operaciones realizadas a un proceso, toma conciencia del todo, realiza transformaciones que actúan sobre él, y puede construir esas transformaciones. Cuando esto se realiza se está pensando en dicho proceso como un objeto. Finalmente, este proceso puede ser encapsulado en un objeto.

*Esquema***:** Este proceso termina en una colección coherente de acciones, procesos y objetos en relación con otros esquemas que tienen un concepto en particular. Esta coherencia tiene para su uso lo que está dentro del alcance del esquema y lo que no es también.

Al llevar a cabo este proceso se realizan 7 pasos para el proceso mental y son: Interiorización, coordinación, encapsulación, desencapsulación, generalización, reversión y tematización.

Interiorización de una acción: Es el mecanismo mental que da lugar a un proceso después de realizar una reflexión sobre la acción involucrada. Cuando una serie de acciones sobre objetos cognitivos pueden ser realizadas o imaginadas para ser ejecutadas en la mente del estudiante sin necesariamente llevar a cabo todos los pasos específicos, decimos que la acción se ha interiorizado en un proceso (Dubinsky, 1991).

Coordinación: Piaget se refiere a este mecanismo como coordinación general de acciones, la cual se refería a que en la construcción de una nueva acción o de un proceso intervenían dos o más acciones que se relacionan entre sí (Dubinsky, 1991). Es decir, el proceso de coordinación de acciones o de procesos conduce a la construcción de un nuevo proceso unificador y más concreto.

Encapsulación: Se refiere al cambio que hay de una concepción proceso a una concepción objeto. Este objeto puede considerarse como una idea total y puede actuarse mentalmente sobre él por medio de acciones y procesos. En este caso decimos que un proceso ha sido encapsulado en un objeto. Entonces, la encapsulación es el proceso de conversión de un proceso dinámico en un objeto estático (Glosario RUMEC).

Desencapsulación: Es el proceso mental de volverse desde un objeto al proceso desde el cual fue encapsulado el objeto o tuvo su origen (Dubinsky, 1991).

Generalización: Cuando un estudiante aprende a aplicar un esquema existente a una colección más amplia de fenómenos, entonces decimos que el esquema ha sido generalizado. Esto ocurre porque el estudiante se vuelve consciente de la aplicabilidad más amplia del esquema o de un proceso o cuando un proceso se hace un objeto. Por tanto, el esquema queda igual y lo único que cambia está en el objeto que puede ser asimilado por el esquema ahora ampliado.

Reversión: Cuando un proceso existe interiormente es posible pensar en la reversión, como un medio de construir un nuevo proceso que consiste en revertir el proceso que le dio origen.

Tematización: Cuando un estudiante reflexiona sobre un esquema, viéndolo como "un todo", y es capaz de realizar acciones sobre el esquema, entonces se dice que el esquema ha sido tematizado en un objeto (Asiala *et al*., 1996). En relación con este mecanismo, Piaget y García (2004, p. 103) definen la tematización como: "el paso del uso o aplicación implícita, a la utilización consciente, a la conceptualización".

Para llevar a cabo la construcción de un concepto matemático también es importante que se realice una descomposición genética del mismo. Una *descomposición genética* es una descripción idealizada de las representaciones, vínculos, objetos, procesos y acciones esperadas matemáticamente relacionadas con el concepto.

Ésta proporciona un trayecto para la adquisición de información del concepto por parte del estudiante, pero esto no significa que realmente la trayectoria seguida por los estudiantes sea la planteada. Existiendo de esa manera la posibilidad de que distintas descomposiciones puedan coexistir para un mismo concepto.

Lo importante es que cualquier descomposición genética sea un instrumento que realmente describa las observaciones de los trabajos de los alumnos.

Es por esto que el estudio del concepto ángulo visto desde la teoría APOE es un problema que se debe atender y comprender el proceso que se sigue para que éste se conceptualice. Realizando, de acuerdo a la teoría propuesta, una descomposición genética del concepto, todo lo que implica aprender y comprender el concepto, para posteriormente elaborar una propuesta didáctica que permita a los alumnos aprender significativamente el concepto de ángulo, entendiendo el aprendizaje significativo como "cuando los contenidos: Son relacionados de modo no arbitrario y sustancial con lo que el alumno ya sabe." (Ausubel, 1983). Entonces si los alumnos relacionan sus experiencias con el conocimiento, lograrán construir su propia definición de ángulo y posteriormente utilizarla como un elemento en su repertorio de esquemas conceptuales.

5. METODOLOGÍA Y PROSPECTIVAS DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación a realizar se llevará a cabo en el municipio de Juan Aldama en la entidad de Zacatecas donde se ubica la Esc. Sec. Gral. "Juan Aldama", la cual tiene 19 años de creación, es relativamente la escuela más joven que hay en el municipio y esto hace que el prestigio que tiene sea bajo, ya que es considerada como la escuela a donde van todos los que no quedan en las otras

ISSN: 2594-1046

secundarias. Se tomará un grupo de segundo grado con una matrícula de 20 alumnos (aproximadamente).

La forma de realizar la investigación es a partir de la elaboración de una descomposición genética, de acuerdo a la teoría APOE, del concepto de ángulo para posteriormente realizar una secuencia didáctica que les permita a los alumnos comprender todas las propiedades que aborda este concepto de manera dinámica.

Se llevará a cabo la implementación de la secuencia didáctica y se analizarán los resultados obtenidos para poder establecer las conclusiones del trabajo realizado y ver en qué medida se cumplieron los objetivos planteados y qué tan verdadera era la hipótesis planteada.

Para finalmente hacer el análisis de los resultados y realizar el reporte final de la investigación. A partir de ello, se pretende mejorar la propuesta y poderla llevar a cabo en un trabajo posterior.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Andonegui, M. (2006). Desarrollo del pensamiento matematico. Cuaderno núm. 12 Geometría: conceptos y construcciones elementales. Caracas, Venezuela.

Ausubel, D. (1983). Teoría del aprendizaje significativo.

Block, D., Mendoza, T. y Ramírez, M. (2010). ¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica. México: SM.

Cabrera, L. (2009). El pensamiento y lenguaje variacional en el desarrollo de competencias. México: CINVESTAV, Tesis de Maestría .

Cantoral, R. (2001). Sobre la construcción social del conocimiento matemático avanzado. En J. Domínguez, & M. Sierra, Tendencias actuales de las matemáticas, su história y su enseñanza (págs. 97-110). Salamanca: Univerisdad de Salamanca.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2002). Improper Use of Linear Reasoning: An In-Depth Study of the Nature and the Irresistibility of Secondary School Students' Errors. Educational Studies in Mathematics , 50 (3), 311-334.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2007). The illusion of linearity: From analysis to improvement. New York: Springer.

Flores, Á. (2007). Esquemas de Argumentación en Profesores de Matemáticas de Bachillerato. Educación Matemática , 63-98.

Ford, J. (1986). Chaos: Solving the Unsolvable, Predicting the Unpredictable. En M. Barnsley, & S. Demko, Chaotic Dynamics and Fractals. Orlando Florida: Academic Press.

Godino, J. (2002). Geometría y su didáctica para maestros.

Goncalves, R. (2006). Por qué los estudiantes no logran un nivel de razonamiento en geometria. Revista de Ciencias de la Educación.

ISSN: 2594-1046

Hernández, J., Borjón , E., & Torres, M. (2015). La presencia de la Tecnología en la formación inicial de los profesores de matemáticas del nivel medio superior. AMIUTEM, (pág. 11). Zacatecas.

IEESA. (2012). ¿De dónde vienen y a dónde van los Maestros mexicanos? La formación docente en México 1822-2012. Obtenido de Sindicato Nacional de Trabajadores de la Educación: http://www.snte.org.mx

Juárez, J. A., Mejía, A., González A. & Slisko, J. (2014). La construcción del modelo situacional de un problema matemático: El análisis basado en el Marco del Experimentador Inmerso. Revista de Didáctica de las Matemáticas , 87, 81-99.

Larios, V., & Díaz-Barriga, A. (2013). Las prácticas docentes en Matemáticas en el estado de Querétaro. Querétaro: UAQ.

Lyapunov, A. M. (1892). The general problem of the stability of motion. Kharkov: Kharkov Mathematica Society.

Marambio, V. (2010). Construcción del concepto de semejanza de tríangulos desde el punto de vista de la Teoría APOE. Valparaiso.

Mathematics, N. C. (2000). Principios y estandares para la educación matemática. Traducción de Manuel Fernández Reyes. España.

May, R. (1976). Simple Mathematica Models with very complicated Dynamics. Nature , 459-467.

Parks, P. C. (1992). A. M. Lyapunov's stability theory—100 years on*. IMA Journal of Mathematical Control & Informat , 275-303.

Pochulu, M., & Font, V. (2011). Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. Revista Lationoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Relime , 361-394.

Rodríguez, S. (02 de Octubre de 2014). Mephistofeles01. Recuperado el 12 de Marzo de 2016, de https://mephistofeles01.wordpress.com/author/mephistofeles01/

Rotaeche, R. (2008). La construccón del concepto de ángulo en estudiantes de secundaria . México .

SEP. (1999). Planes de Estudio. Recuperado el 18 de mayo de 2016, de Dirección General de Educación Superior para Profesionales de la Educación: http://www.dgespe.sep.gob.mx/planes/les

SEP. (2011). Planes de Estudios 2011. México D.F.: SEP.

SEP. (2011). Programa de estudios 2011. Guía para le maestro. Educación Básica Secundaria. Matemáticas. México.

Van Dooren, W., De Bock, D., Depaepe, F., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2003). The Illusion of Linearity: Expanding the Evidence towards Probabilistic Reasoning. Educational Studies in Mathematics , 53 (2), 113-138.

Van Dooren, W., De Bock, D., Evers, M. & Verschaffel, L. (2009). Students' Overuse of Proportionality on Missing-Value Problems: How Numbers May Change Solutions. Journal for Research in Mathematics Education , 40 (2), 187-211.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2005). Not Everything Is Proportional: Effects of Age and Problem Type on Propensities for Overgeneralization. Cognition and Instruction , 23 (1), 57-86.

Van Dooren, W., De Bock, D., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2008). The Linear Imperative: An Inventory and Conceptual Analysis of Students' Overuse of Linearity. Journal for Research in Mathematics Education , 39 (3), 311-342.

Verschaffel, L., Greer, B., Van Dooren, W., & Mukhopadhyay, S. (2009). Words and Worls: Modelling Verbal Descriptions of Situations. Rotterdan, The Netherlands: Sense Publisher.

Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

Los Objetos para Aprender como Recurso para la Construcción y Lectura en la Representación de Relaciones de Variación Cuadrática

Amini Muñoz Marcos
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. aminiun@gmail.com

José Dionisio Zacarías Flores
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. jzacarias@fcfm.buap.mx

Hugo Adán Cruz Suárez
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. hcs@fcfm.buap.mx

Resumen

El presente trabajo muestra los avances obtenidos de una investigación de corte cualitativo, la cual tiene el objetivo de diseñar actividades que permitan el fortalecimiento del tema de variación cuadrática en alumnos de tercer año de secundaria a través de objetos para aprender (OPA). Para ello el trabajo se desarrolla en tres fases principales, iniciando por la indagación de los saberes previos referentes al tema, la búsqueda de actividades propias para poder ser transformadas en objetos para aprender y el diseño y aplicación de las actividades, así como su análisis y conclusiones. De lo cual se evidencia que los alumnos necesitan reforzar sus saberes previos para poder abordar el tema.

Palabras clave: Objetos para aprender, Construcción y lectura de gráficas, Variación Cuadrática.

1. INTRODUCCIÓN

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas han sido un área en los últimos tiempos donde los investigadores han realizado un esfuerzo por desarrollar y comprender esta disciplina. Ejemplo de ello es la implementación de herramientas que sean de utilidad para potenciar el pensamiento matemático de los estudiantes. Es por ello que diferentes organizaciones a nivel mundial y nacional alientan al desarrollo de estas herramientas a través de la tecnología.

Según la primera evaluación PISA de la OCDE (2015) sobre las habilidades digitales en las escuelas, aún no han aprovechado el potencial de la tecnología en el salón de clases para abordar la brecha digital y preparar a todos los estudiantes con las habilidades que necesitan en el mundo conectado de hoy.

Por otra parte, la UNESCO (2011) menciona que las tecnologías, tales como las computadoras, los programas de radio y televisión, los CD-Rom, los teléfonos celulares, los portales y los libros en formato electrónico o en línea, pueden aportar a las aulas y a los docentes un contenido curricular preparado y planificación de las clases de maneras más flexibles y a veces más económicas que los libros de texto tradicionales.

Asimismo, la SEP (2011) en su Plan de Estudios de Educación Básica propone el uso de materiales educativos para favorecer el aprendizaje, dentro de los que destaca materiales audiovisuales, plataformas tecnológicas, software educativo, multimedia e Internet.

Es por todo ello que la tecnología en la enseñanza de las matemáticas ha cobrado suma importancia y relevancia tanto de manera nacional como internacional.

2. DIFICULTADES EXISTENTES EN EL APRENDIZAJE DE LA VARIABILIDAD CUADRÁTICA

Diversas investigaciones realizadas al tema denotan los principales problemas que tienen los alumnos cuando se trata del tema de variabilidad cuadrática, ejemplo de ello son los siguientes:

- Los alumnos no establecen relaciones covariacionales, no calculan cuánto cambian las variables ni se nota que usen las razones de cambio. (Dolores y Cuevas, 2007).
- Comprensión y apropiación de conceptos matemáticos relacionados con la función cuadrática. (Hernández, Márquez y Quiñones, 2008).
- No se profundiza en el análisis e interpretación de la gráfica, ni se hace referencia a otras formas de trabajo con funciones cuadráticas. (Ávila, 2011).
- El análisis gráfico se limita a la construcción de una tabla de valores asignando valores a la variable independiente y obteniendo valores para la variable dependiente. (Villarraga y Moreno, 2012).

3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La presentación contextual y virtual de los problemas relacionados con situaciones y diferentes fenómenos está asociada con la comprensión de la variabilidad cuadrática.

3.1. Objetivo

Diseñar actividades que permitan el fortalecimiento del tema variación cuadrática, en los alumnos del tercer año de la Escuela Secundaria Técnico Industrial “Justo Sierra”.

3.2. Objetivos Específicos

- Investigar las dificultades existentes en nuestra población referentes al tema previo que es la variación lineal.
- Identificar los contextos idóneos para el diseño de actividades de la comunidad específica.
- Diseñar actividades basadas en diversas situaciones y fenómenos de otras disciplinas.
- Desarrollar las actividades basadas en el uso de OPAs.
- Analizar e interpretar las acciones ocurridas antes, durante y después de la implementación de la propuesta.
- Presentar resultados y conclusiones pertinentes al trabajo.

4. MARCO TEÓRICO

4.1. Los objetos para aprender

La tecnología en los últimos años es un agente de cambio que puede generar innovaciones de paradigma, en donde, internet es el centro de tales innovaciones. Los Objetos Para Aprender (OPAs) encabezan la lista de posibles elecciones de tecnología para los años siguientes en cuanto a diseño, desarrollo y distribución de instrucción, debido al potencial que tienen para su reúso, adaptabilidad y escalabilidad. (Ulloa, 2015).

Polsani (2003) define el termino de OPAs: "Una unidad de contenido para aprender, independiente y completa, diseñada para ser usada en múltiples contextos instrucciones" (An independent and self-standing unit of learning content that is predisposed to reuse in multiple instructional contexts). Otra alternativa que proponen Morales, García, Moreira, Rego y Berlanga (2005) es una unidad mínima de aprendizaje con sentido pedagógico.

Una sencilla definición de OPA: es un recurso para aprendizaje electrónico, que implica la concurrencia de internet y diversos métodos de aprendizaje que son mejorados o facilitados por la tecnología. Además de textos, los OPAs pueden incluir ligas a otros documentos, animaciones, videos, música, narraciones, efectos visuales y elementos interactivos.

ISSN: 2594-1046

5. LA IMPORTANCIA DE LA TECNOLOGÍA EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

De acuerdo con Duval, en enseñanza de las matemáticas se utilizan diversos registros de representación semiótica como lo son tablas, gráficas, diagramas, listas, etc., y que aunado con los objetos matemáticos son las características esenciales en la actividad cognitiva relativas a la actividad matemática, en donde, para que se dé el aprendizaje, es importante aprender a pasar de un registro a otro y a no confundir al objeto matemático con la representación que se hace de él, además de utilizar los que sean adecuados, de acuerdo a la actividad que se esté realizando. En este sentido, la tecnología cobra importancia al permitir al alumno representar de diversas formas el conocimiento matemático, para adquirir una apropiación que le permite manipular a través de una computadora.

5.1. Lectura e interpretación

Al igual que muchos procesos matemáticos utilizados en la escuela, la graficación comprende la interpretación y la construcción. La interpretación se refiere a las habilidades de los estudiantes para leer una gráfica tanto local como globalmente, y darle sentido o significado (Leinhardt, Zaslavsky y Stein, 1990).

La diferencia a la cual el autor hace referencia es que el trazo de una gráfica consiste en generar algo nuevo a partir del trazo de puntos o a partir de una tabla, la interpretación ayuda y exige respuestas a partir de datos, la construcción requiere generar partes nuevas que no están dadas.

Ello nos hace reflexionar sobre la importancia que tiene la interpretación de gráficas además de su construcción, puesto que es cierto que los alumnos al visualizar una gráfica no hacen el esfuerzo por hacer un análisis de la información que ésta proporciona.

6. MÉTODO

6.1. Participantes

Los participantes con los que se está trabajando pertenecen a la comunidad de Ixtololoya del municipio de Pantepec, del estado de Puebla, que cursan el tercer año de secundaria. El grupo de estudio está conformado por 19 alumnos, de los cuales 7 son mujeres y 12 son hombres

ISSN: 2594-1046

6.2. Procedimiento

Las fases que se tienen para el trabajo consisten básicamente en tres, la primera es la indagación de los saberes previos referentes con el tema, es decir, la elaboración de un instrumento que nos permita visualizar esto. En una segunda instancia la búsqueda de actividades propias para poder ser transformadas en OPAs de acuerdo al contexto de la población con la que se trabajó y su implementación, finalmente la tercer etapa eta relacionada con el análisis de la propuesta una vez aplicada para obtener conclusiones.

6.3. Elaboración de OPA

Para el proceso de construcción y validación de los OPAs se emplea un proceso de evaluación formativa (Ulloa, Pantoja y Nesterova, 2013), inspirado en la propuesta de Dick, Carey y Carey (2009), que implica diseño, desarrollo, implementación, evaluación y rediseño, en cuatro fases:

- Con colegas, profesores y expertos en el tema del OPA.
- Entrevista clínica con dos o tres estudiantes.
- Con grupo pequeño de nueve estudiantes.
- Con grupo normal, alrededor de 30 alumnos.

Esta metodología se lleva a cabo sistemáticamente en 25 pasos.

1. Escritura del proyecto de Investigación Bibliográfica. Definición del sustento teórico, tanto de la estructura, como respecto a los contenidos disciplinares.

2. Diseño Instruccional referido a los contenidos disciplinares. Se define cómo se presentará el material, dosificación, efectos a emplear, sonidos, música, animaciones, etc.

3. Diseño, escritura e implementación del material en formato digital, a ser incluido en el OPA. Definición de programas, plataformas y en general, medios que serán empleados. Se obtiene la primera versión.

4. Evaluación por el autor o autores del OPA, para constatar que cumple con las características atribuibles a un OPA.

5. Elaboración de instrumentos para recabar la opinión de profesores y colegas investigadores.

6. Validación de los instrumentos de recolección de información por colegas e investigadores.

7. Análisis del OPA por parte de profesores del tema y colegas.

8. Aplicación de encuesta y entrevistas a los profesores y colegas que experimentaron el uso del OPA, para obtener la información pertinente que se usará para mejorarlo.

9. Procesamiento y análisis de la información obtenida en la fase anterior.

10. Revisión del OPA e incorporación de los resultados pertinentes de la etapa previa, lo que incluye además, comprobar de nuevo que la propuesta cumple con las características atribuidas a un OPA. Se obtiene la segunda versión.

11. Empleo del OPA por dos o tres estudiantes, mediante la estrategia de entrevista clínica.

12. Procesamiento y análisis de la información obtenida en la fase anterior.

13. Revisión del OPA en consideración de los productos pertinentes de la etapa previa. Se obtiene la tercera versión.

14. Empleo del OPA por un grupo de nueve estudiantes, bajo supervisión del investigador, con el empleo de una lista de observación semi-estructurada para recabar información sobre lo que sucede con los alumnos al emplear el OPA. Se eligen nueve para experimentar su uso por parte de tres pares de alumnos, así se obtienen datos de tres binas y tres que usan el OPA individualmente.

15. Aplicación de encuesta a los involucrados en la etapa anterior, para complementar la información sobre las cualidades del OPA.

16. Procesamiento y análisis de la información obtenida en la etapa anterior.

17. Revisión del OPA en consideración de los productos pertinentes de la etapa previa. Se obtiene la cuarta versión.

18. Empleo del OPA por un grupo de 30 estudiantes, bajo supervisión del investigador, con el empleo de una lista de observación semi-estructurada para recabar información sobre lo que sucede con los alumnos al emplear el OPA.

19. Aplicación de encuesta a los 30 estudiantes, para complementar la información sobre las cualidades del OPA.

20. Procesamiento y análisis de la información obtenida en la fase anterior.

21. Revisión del OPA en consideración de los resultados de la etapa previa. Se obtiene la quinta y última versión.

ISSN: 2594-1046

22. Sistematización de la información obtenida.

23. Elaboración de conclusiones.

24. Escritura del reporte.

25. Difusión de resultados y publicación de OPAs en internet.

6.4. Instrumento

Para la primera recolección de datos se presentó a los alumnos un cuestionario de catorce preguntas de tipo abierto, para analizar sus conocimientos previos respecto al tema de variabilidad en funciones, las cuales proponían definir una recta, dibujar una recta, graficar algunas funciones, y contestar preguntas relacionadas con sus gráficas.

Un segundo instrumento fue el análisis de 32 libros de texto autorizados por la Secretaría de Educación Pública con el objetivo de conocer la relación que existe entre la comunidad de estudio y el contexto que se presenta en el tema de lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas.

7. ANÁLISIS DE RESULTADOS DEL PRIMER INSTRUMENTO

Existe una variedad en las respuestas y gráficas que presentan los alumnos de acuerdo a cada pregunta, las cuales se clasifican a continuación:

PREGUNTA UNO. ¿Qué entiendes por recta?

Es como un asterisco	Líneas rectas y derechas
Recta numérica	La que parte una figura o recta
La que traza una figura	Una recta
No contestó	Quién sabe

Tabla 1: Resultados pregunta uno

PREGUNTA DOS. Ejemplifica y dibuja una recta

Plano cartesiano	Recta numérica
Gráfica de barras sin valores	Rectas

Tabla 2: Resultados pregunta dos

ISSN: 2594-1046

PREGUNTA TRES. Elabora una gráfica para la función y = x, donde x sea un número real menor a 0

Ningún alumno logró graficar los datos correctamente, en su lugar, nueve alumnos no contestaron, ocho realizaron la gráfica, pero con números mayores a 0, de los cuales cinco trazaron una gráfica de barras.

PREGUNTA CUATRO. Elabora una gráfica para la función y=x, donde x sea un número real mayor a 0

Ningún alumno logró graficar los datos correctamente, en su lugar, diez alumnos no contestaron, y 7 realizaron una gráfica de barras, pero con datos erróneos, que no corresponden.

PREGUNTAS CINCO A LA OCHO. Elaboración de gráficas con diferentes datos para cada una de ellas

Al igual que en las gráficas anteriores los alumnos no realizaron correctamente lo que se solicitaba, en lugar de eso algunos que contestaban solamente realizaban la misma gráfica, para cada diferente caso.

PREGUNTAS DE LA NUEVE A LA CATORCE. De acuerdo a las gráficas que se realizaron se preguntan las diferencias y similitudes de acuerdo a cada caso, así como la función de a y b

Las respuestas que brindan los alumnos se basan en las instrucciones que se dan, es decir cuando se trata de comparar dicen que una debe ser mayor y otra menor a cierto número, porque así se indica, pero aún no logran identificar lo que se solicita.

8. ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO

El análisis de los 35 libros de textos que ofrece la CONALITEG para desarrollar el tema de lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas muestran la temática que se resume en la tabla 3.

9. CONCLUSIONES

Los resultados que nos muestra este primer instrumento de indagación es que los alumnos no cuentan con los conocimientos básicos que se requieren para abordar el tema, por lo cual se tiene la intención de trabajar primero con la variabilidad lineal, antes de comenzar la cuadrática.

ISSN: 2594-1046

De acuerdo a la revisión de los libros de texto, se concluye que las temáticas con las que se abordan para enseñar el tema de lectura y construcción de gráficas de funciones cuadráticas no toma en cuenta el contexto de las diferentes regiones del país, en este caso hablando particularmente de la cultura otomí. Asimismo, se refieren algunos términos desconocidos por los alumnos por el mismo contexto en donde se desenvuelven.

Interpretación		Construcción	
Gráficas de funciones dadas	1	Gráficas de funciones dadas	26
Relación área y perímetro de cuadriláteros	5	Lanzamiento de pelota	15
Utilidades de una empresa	2	Relación área y perímetro de cuadriláteros	11
Lanzamiento de proyectil		Utilidades de una empresa	9
Lanzamiento de pelota		Lanzamiento de objetos	7
Lanzamiento de objetos		Caída de un objeto	6
Otros	7	Otros	38

Tabla 3: resultados del análisis de los libros

10. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Ávila, P. (2011). *Razonamiento covariacional a través de software dinámico. El caso de la variación lineal y cuadrática*. (Tesis de magister no publicada). Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia. Medellín, Colombia.

Dick, W., Carey, L., & Carey, J.O. (2009). *The systematic design of instruction*. Upper Saddle River, N.J.: Pearson.

Dolores, C., & Cuevas, I. (2007). Lectura e interpretación de gráficas socialmente compartidas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10*(1), 69-96.

Hernández, W., Márquez, Z., & Quiñones, G. (2008). *La función cuadrática como marco referencial para el desarrollo del pensamiento variacional. Una experiencia con estudiantes de 9° de la Institución Educativa Técnica Agropecuaria de Escobar Arriba-Sampues*. (Tesis de licenciatura no publicada). Facultad de Educación y Ciencias. Universidad de Sucre. Colombia.

ISSN: 2594-1046

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of educational research*, *60*(1), 1-64.

OECD (2015). *Students, Computers and Learning: Making the Connection.* PISA, OECD Publishing, Paris, https://doi.org/10.1787/9789264239555-en.

Polsani, P. R. (2003). Use and Abuse of Reusable Learning Objects*. Journal of Digital Information*, *3*(4), Learning Technology Center, University of Arizona, USA.

SEP (2011). *Plan de estudios de la educación básica*. México: Autor.

Ulloa, R. (2015). Objetos para aprender: Diseño, construcción, evaluación formativa y rediseño. *Revista iberoamericana de educación matemática*, 43, 10-29.

Ulloa, R., Pantoja, R., & Nesterova, E. (2013). Modelo para construcción, análisis y rediseño de objetos para aprendizaje. En Memorias *VII Seminario Nacional de Tecnología Computacional en la Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática "Edgar Gilberto Añorve Solano"*. Cd. Guzmán, Jalisco. México.

UNESCO. (2011). *Guía para la Planificación de la Educación en Situaciones de Emergencia y Reconstrucción*. Disponible en: http://unesdoc.unesco.org/images/0019/001902/190223s.pdf

Villarraga, S., & Moreno, M. (2012). *La función cuadrática y la modelación de fenómenos físicos o situaciones de la vida real utilizando herramientas tecnológicas como instrumentos de mediación*. (Tesis maestría no publicada). Facultad de Ciencias, Matemáticas. Universidad Nacional de Colombia. Colombia.

Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

RAZONAMIENTO COMBINATORIO EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO DE UNA COMUNIDAD CON ALTA MARGINACIÓN

Viridiana Galicia Hernández
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. viri1785@hotmail.com
María Araceli Juárez Ramírez
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. jilecara@hotmail.com
Lidia Aurora Hernández Rebollar
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.lidiahr06@hotmail.com

Resumen

En este trabajo se presentarán los resultados de dos cuestionarios: el Test of Logical Thinking (TOLT) (Tolbin y Capie, 1984) y el Cuestionario para la Evaluación del Razonamiento Combinatorio (Navarro-Pelayo, 1996), los cuales se aplicaron a estudiantes de un Bachillerato General de la localidad de Tecpantzacoalco, Puebla. Se presenta también el análisis de las respuestas dadas a estos cuestionarios con la finalidad de diseñar, posteriormente, una secuencia de actividades que contribuya a superar las deficiencias de los estudiantes en el tema de combinatoria. Una de las dificultades que se esperaban detectar con estos cuestionarios es la capacidad de diferenciar entre combinación y permutación, así como la falta de habilidades para la resolución de problemas de este tema, como lo han reportado varios investigadores. Los resultados de este trabajo coinciden con los de la literatura revisada, pero se presentan más graves debidos, quizá, a la marginación y el rezago de la escuela en la que se aplicó este diagnóstico.

Palabras clave: razonamiento combinatorio, permutaciones.

1. INTRODUCCIÓN

En la práctica docente se ha observado que los alumnos tienen dificultades con los conceptos de combinatoria. En particular los estudiantes confunden permutaciones con combinaciones, es decir, si se parten de problemas con enunciado, comúnmente no saben distinguir si es importante el orden o no al momento de calcular todas las opciones que pide el problema. Como lo mencionan Roa, Batanero-Bernabe & Díaz-Godino (2000) los estudiantes con preparación matemática avanzada también presentan dificultades para resolver problemas combinatorios.

Por ello, se considera importante evaluar el nivel de razonamiento combinatorio inicial y final a un grupo de alumnos de bachillerato mediante el Cuestionario para La Evaluación del Razonamiento Combinatorio (Navarro-Pelayo, Batanero y Godino, 1996), así como el Test of Logical Thinking (TOLT) (Tobin y Capie, 1984). ¿Qué puede aportar el Test of Logical Thinking (TOLT)? Es un instrumento de diagnóstico útil y sencillo para obtener información sobre la situación de partida de los estudiantes, lo que hace que el profesor se sensibilice para poder conocer el tipo de conocimiento de sus alumnos. Este instrumento permite valorar las capacidades de los estudiantes en el uso de esquemas formales que resulten básicos para el aprendizaje de las ciencias experimentales y las matemáticas.

La finalidad de este diagnóstico es el diseño de actividades, diferentes a lo tradicional, que desarrollen el razonamiento combinatorio y no se centren en los cálculos algorítmicos. Además, para el desarrollo de las actividades se planea utilizar el aprendizaje autorregulado, de acuerdo a los planteamientos de Birembaun (2002). Uno de los aspectos que se pretende alcanzar con este trabajo es que los alumnos sean capaces de diferenciar entre combinación y permutación y resolver problemas de ambos temas.

2. MARCO TEÓRICO

La combinatoria no es simplemente una herramienta de cálculo para la probabilidad. Según Piaget & Inhelder (1941) si el sujeto no posee capacidad combinatoria, no es capaz de usar la idea de probabilidad salvo en casos de experimentos aleatorios muy elementales. Más aún, estos autores relacionan la aparición del concepto de azar con la idea de permutación y la estimación correcta de probabilidades con el desarrollo del concepto de combinación. Si analizamos el uso del diagrama del árbol en probabilidad y combinatoria, podemos también observar que hay una relación entre el espacio muestral de un experimento compuesto y las operaciones combinatorias. El inventario de todos los posibles sucesos en dicho espacio muestral requiere un proceso de construcción combinatorio, a partir de los sucesos elementales en los experimentos simples.

Además de su importancia en el desarrollo de la idea de probabilidad, la capacidad combinatoria es un componente fundamental del pensamiento formal. De acuerdo con Piaget & Inhelder (1941) el razonamiento hipotético-deductivo opera con las posibilidades que el sujeto descubre y evalúa, por medio de operaciones combinatorias. Esta capacidad puede relacionarse con los estadios descritos en la teoría de Piaget: después del período de las operaciones formales, el adolescente descubre procedimientos sistemáticos de construcción combinatoria, aunque para las permutaciones es necesario esperar hasta la edad de 15 años. Para estos autores, la combinación supone la coordinación de la seriación y la correspondencia, la permutación implica una reordenación respecto a un sistema de referencia móvil y reversible; por tanto, las operaciones combinatorias son operaciones sobre operaciones, características del nivel del pensamiento formal.

ISSN: 2594-1046

3. MÉTODO

El trabajo se realizó con estudiantes del Bachillerato General Estatal Joaquín Paredes Colín, ubicado en la localidad de Tecpantzacoalco, perteneciente al municipio de Ajalpan, Puebla. Dicho municipio es considerado de alta marginación y tiene un rezago educativo de 84.3% de su población. Específicamente, se aplicó a siete participantes que cursaban el sexto semestre de bachillerato en noviembre de 2015 con edades que oscilan entre diecisiete y dieciocho años.

Tipo de estudio: Cualitativo.

3.1. Instrumentos y materiales

TOLT es un cuestionario de diez tareas, dos por cada uno de los siguientes esquemas de razonamiento: proporcionalidad (PP), control de variable (CV), Probabilidad (PB), correlación (CR) y operaciones combinatorias (CB). Las ocho primeras constituyen cuestiones de dos niveles, respuesta y explicación diseñadas con un formato de opción múltiple tanto en lo que se refiere a las respuestas como una correspondiente justificación. Ello minimiza las posibilidades de acierto por azar, a la vez que facilita su correlación y posterior tratamiento estadístico. Tanto las respuestas como las explicaciones sugeridas como posibles alternativas, corresponde a algunos de los errores sistemáticas más frecuentes en los que se suele incurrirse en la resolución de este tipo de problemas. Por el contrario, las dos últimas preguntas, referentes a combinaciones y permutaciones, son de respuesta abierta semiestructurada. Con este cuestionario se pretende clasificar a los estudiantes como pensadores concretos o formales, de acuerdo a la teoría de Piaget.

La valoración se ha llevado a cabo considerando cada pregunta como correcta sólo si se respondía según la opción adecuada a la respuesta y a la explicación simultánea. De esta forma, la máxima puntuación posible que se puede alcanzar es diez. Se aplica la prueba en un periodo de tiempo determinado.

El Cuestionario para la Evaluación del Razonamiento Combinatorio consta de once problemas combinatorios simples y dos compuestos. Los problemas combinatorios simples (problemas 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12 y 13) fueron tomados del cuestionario de Navarro-Pelayo, Batanero, & Godino (1996). Debido a que este cuestionario está dirigido a alumnos universitarios, para esta investigación se seleccionaron cinco problemas que se consideraron apropiados para el nivel Bachillerato. Los alumnos tuvieron un periodo de tiempo de una hora como máximo para la solución del cuestionario.

4. RESULTADOS

4.1. Resultados del primer instrumento

En cuanto a los resultados que se obtuvieron fueron los siguientes: 44.4% contestaron de manera correcta las preguntas de proporcionalidad, mientras que las preguntas de control de variable la contestaron de manera correcta 44.4%, el 11.1% contestó correctamente las preguntas de probabilidad, las preguntas de correlación fueron contestadas de manera correcta por 22.2% y por último las preguntas de combinatoria no fueron contestadas por ningún alumno de forma correcta.

Con estos resultados podemos observar que la mayoría de los estudiantes tienen nivel de razonamiento bajo. En la pregunta uno referente a proporcionalidad sólo 3 estudiantes tuvieron una respuesta correcta, en la pregunta dos sólo un estudiante la tuvo correctamente, esta pregunta también pertenece a la parte de proporcionalidad, en la parte referente a control de variable tenemos las preguntas tres y cuatro respectivamente, de las cuales en la pregunta tres sólo dos estudiantes respondieron de manera correcta, también para pregunta cuatro dos estudiantes contestaron correctamente; para la siguiente parte que se refiere a probabilidad tenemos las preguntas cinco y seis, de las cuales sólo un estudiante logró contestar correctamente la pregunta cinco; en la parte de correlación tenemos la pregunta siete y la pregunta ocho, donde solo la pregunta siete fuere resuelta de manera correcta por dos alumnos; y por último, tenemos la parte de combinatoria que en este trabajo es fundamental para verificar los conocimientos previos que deben tener los alumnos referente a combinatoria y los resultados fueron que ninguno de los alumnos fue capaz de realizar de forma correcta estos dos problemas.

Es por ello que es de vital importancia conocer el razonamiento de los estudiantes ya que después del periodo de las operaciones formales, el adolescente descubre procedimientos sistemáticos de construcción combinatoria.

4.2. Resultados del segundo instrumento

Pregunta 1

Disponemos de tres cartas iguales. Deseamos colocar en cuatro sobres de diferentes colores: amarillo, blanco, negro y dorado. Si cada sobre sólo puede contener, a lo más, una carta. ¿De cuántas formas podemos colocar las tres cartas en los cuatro sobres diferentes? Ejemplo: podemos colocar una carta en el sobre amarillo, otra en el blanco y otra en el negro.

ISSN: 2594-1046

Se trata de la colocación de tres objetos no distinguibles en cuatro casillas distinguibles. Se obtienen la solución mediante la combinación C_3^4. Es un problema fácil de traducir a un esquema de selección, ya que colocar tres cartas en los sobres es equivalente a elegir tres de los cuatro sobres para poner dentro las cartas. Puesto que las cartas son iguales, el orden no interviene y se trata de una selección no ordenada.

Tipos de errores más comunes en esta pregunta

Confundir el tipo de objetos: Considerar objetos idénticos cuando son distinguibles o que objetos diferentes son indistinguibles. Por ejemplo, en este problema (introducir cartas en sobres) algunos alumnos creen que es posible distinguir entre las tres cartas iguales.

Interpretación errónea del diagrama en árbol: A pesar de su importancia como herramienta para producir la solución, muy pocos alumnos usaron el diagrama en árbol. Más aún, algunos de los alumnos que intentaron construir un diagrama en árbol para resolver el problema, construyeron un diagrama inadecuado, o interpretaron el diagrama producido incorrectamente.

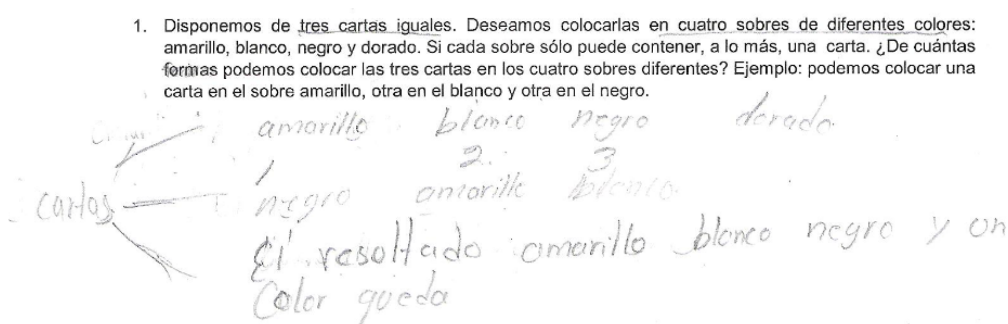
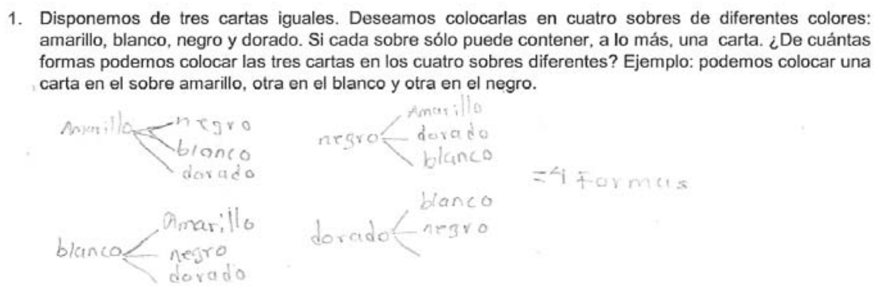

1. Disponemos de tres cartas iguales. Deseamos colocarlas en cuatro sobres de diferentes colores: amarillo, blanco, negro y dorado. Si cada sobre sólo puede contener, a lo más, una carta. ¿De cuántas formas podemos colocar las tres cartas en los cuatro sobres diferentes? Ejemplo: podemos colocar una carta en el sobre amarillo, otra en el blanco y otra en el negro.

Imagen 1. Respuesta a pregunta 1

En cuanto a los resultados de esta pregunta se detectó que 2 estudiantes (28.5%) dieron la respuesta correcta, 5 (71.42%) no contestaron correctamente el ejercicio.

Los alumnos que respondieron correctamente el problema hicieron uso del diagrama de árbol, se infiere que tienen algún conocimiento previo a lo que se refiere a las combinaciones que existen en el problema.

ISSN: 2594-1046


1. Disponemos de tres cartas iguales. Deseamos colocarlas en cuatro sobres de diferentes colores: amarillo, blanco, negro y dorado. Si cada sobre sólo puede contener, a lo más, una carta. ¿De cuántas formas podemos colocar las tres cartas en los cuatro sobres diferentes? Ejemplo: podemos colocar una carta en el sobre amarillo, otra en el blanco y otra en el negro.

Amarillo – negro, blanco, dorado
negro – Amarillo, dorado, blanco
=4 formas
blanco – Amarillo, negro, dorado
dorado – blanco, negro

Imagen 2. Respuesta a pregunta 1

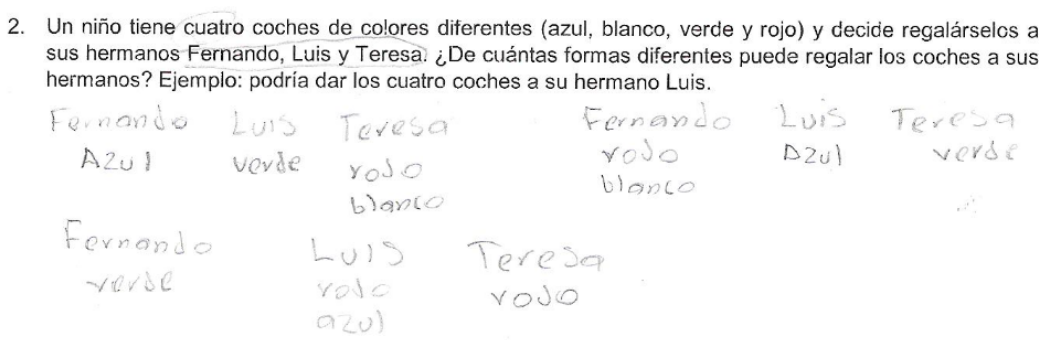
Preunta 2

Un niño tiene cuatro coches de colores diferentes (azul, blanco, verde y rojo) y decide regalárselos a sus hermanos Fernando, Luis y Teresa. ¿De cuantas formas diferentes puede regalar los coches a sus hermanos? Ejemplo: Podría dar los cuatro coches a su hermano Luis.

Es un problema de partición de un conjunto de objetos diferentes (los coches) en tres subconjuntos distinguibles (los hermanos). No hay restricciones respecto al número de objetos en cada subconjunto. La solución viene dada por las variaciones con repetición $VR_{4,3}$.

Se convierte en un problema de selección si pensamos que para cada coche elegimos uno de los tres niños (al que le demos el coche). Se puede repetir el niño e influye el orden; es por lo tanto una muestra ordenada con remplazamiento.

Error en las particiones formadas. Esto puede ocurrir en los dos siguientes casos. a) La unión de todos los subconjuntos en una partición no contiene a todos los elementos del conjunto total. Por ejemplo, en este ejercicio (distribución de cuatro coches entre tres chicos).


2. Un niño tiene cuatro coches de colores diferentes (azul, blanco, verde y rojo) y decide regalárselos a sus hermanos Fernando, Luis y Teresa. ¿De cuántas formas diferentes puede regalar los coches a sus hermanos? Ejemplo: podría dar los cuatro coches a su hermano Luis.

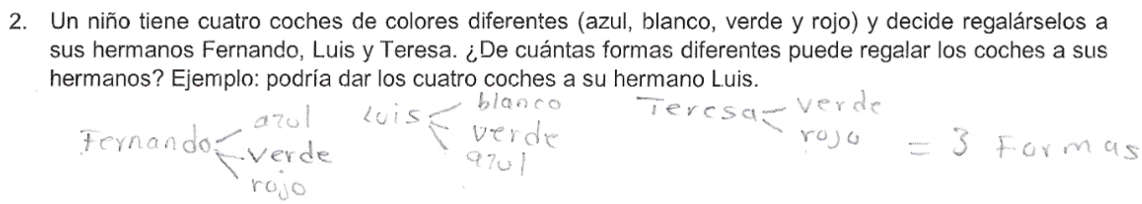
Fernando: Azul | Luis: verde | Teresa: rojo, blanco
Fernando: rojo, blanco | Luis: Azul | Teresa: verde
Fernando: verde | Luis: rojo, azul | Teresa: rojo

Imagen 3. Respuesta a pregunta 2

De acuerdo a las respuestas obtenidas en esta pregunta, se detectó que 7 (100%) dieron una respuesta incorrecta.

ISSN: 2594-1046

Fue un problema que implica un grado de dificultad alto ya que ningún alumno pudo llegar a la solución, algunos de ellos tenían la idea pero no se dieron cuenta que eran varios casos los que tenían que analizar.


2. Un niño tiene cuatro coches de colores diferentes (azul, blanco, verde y rojo) y decide regalárselos a sus hermanos Fernando, Luis y Teresa. ¿De cuántas formas diferentes puede regalar los coches a sus hermanos? Ejemplo: podría dar los cuatro coches a su hermano Luis.

Fernando azul verde rojo Luis blanco verde azul Teresa verde rojo = 3 Formas

Imagen 4. Respuesta a pregunta 2

Pregunta 3

Una maestra tienen que elegir tres estudiantes para borrar el pizarrón. Para ello dispone de cinco voluntarios: Elisa, Fernando, German, Jorge y María. ¿De cuantas formas puede elegir tres de estos alumnos? Ejemplo: Elisa, Fernando y María.

Se trata de un enunciado de selección de tres personas entre las cuatro disponibles y el orden no interviene (selección no ordenada sin reemplazo). Por lo tanto, la solución del problema viene dada por las combinaciones ordinarias de cinco elementos tomados de tres en tres. C_3^5

Uno de los tipos de errores que podemos encontrar en este ejercicio es el error de orden: Este tipo de error descrito por Fischbein y Gazit (1988) consiste en confundir los criterios de combinaciones y variaciones; es decir, considerar el orden de los elementos cuando es irrelevante o, al contrario, no considerar el orden cuando es esencial.

En cuanto a la respuesta a esta pregunta, 7 (100%) contestaron incorrectamente.

En este ejercicio no obtuvimos ningún resultado correcto, sólo dos estudiantes se acercaron a la respuesta pero no lograron concluirla. Podemos observar que el alumno 1 hace algunas combinaciones de manera correcta pero no logra calcular todas.

ISSN: 2594-1046

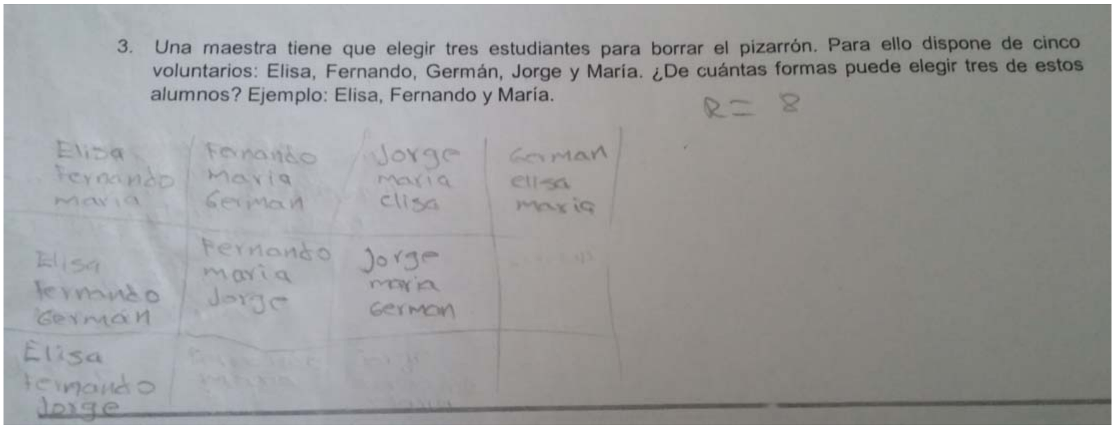


Imagen 5. Respuesta a pregunta 3

Pregunta 4

María y Carmen tienen cuatro muñecos numerados del 1 a 4. Deciden repartírselos entre las dos (dos muñecos para cada una). ¿De cuántas formas se pueden repartir los muñecos? Ejemplo: María puede quedarse con los muñecos 1 y 2, y Carmen con los muñecos 3 y 4.

El esquema combinatorio del enunciado es el de partición. Se trata de formar dos subconjuntos distinguibles de dos elementos a partir de un conjunto de cuatro elementos distinguibles. Puesto que una vez formados los subconjuntos, el orden de los elementos no es importante, la solución viene dada por la C_2^4. Se puede también interpretar como la selección, por parte de una de las niñas de dos muñecas disponible (selección no ordenada sin reemplazo).

Respecto a las respuestas de esta pregunta, los alumnos que contestaron correctamente fueron 5 (71.42%), 2 (28.57%) contestaron incorrectamente.

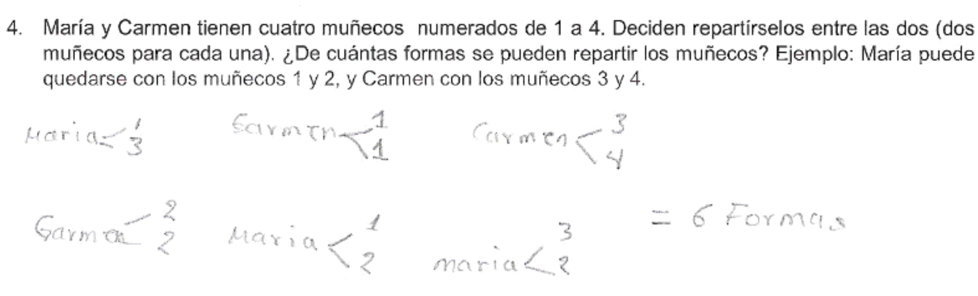


Imagen 6. Respuesta a pregunta 4

La mayoría de los alumnos dieron la respuesta correcta a esta pregunta, pero su justificación no es la adecuada, lo cual hace que la solución no sea correcta.

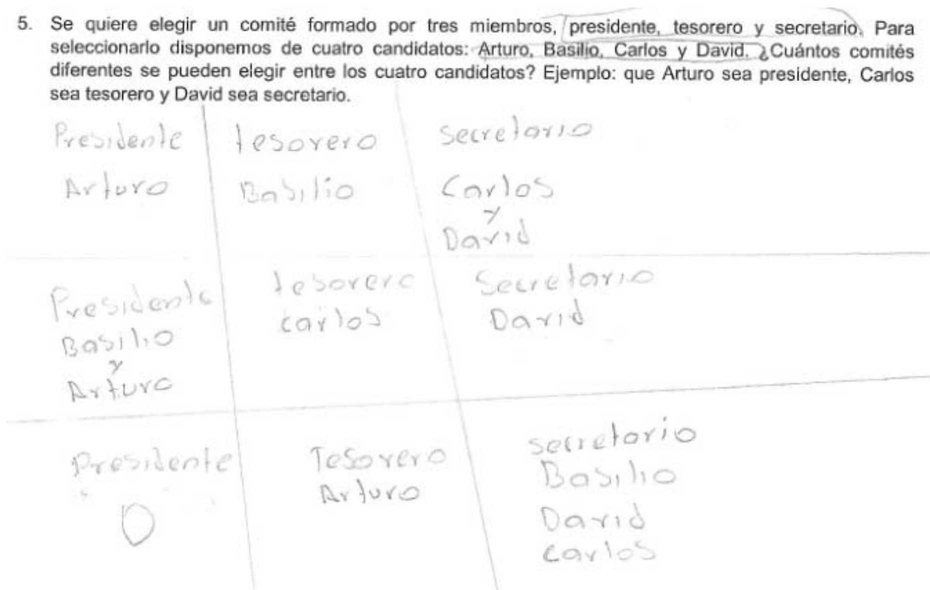
Pregunta 5

ISSN: 2594-1046

Se quiere elegir un comité formado por tres miembros, presidente, tesorero y secretario. Para seleccionarlo disponemos de cuatro candidatos: Arturo, Basilio, Carlos y David. ¿Cuántos comités diferentes se pueden elegir entre los cuatro candidatos? Ejemplo: que Arturo sea presidente, Carlos sea tesorero y David sea secretario.

Es un enunciado de selección ordenada sin reemplazamiento y la solución viene dada por las variaciones $V_{4,3}$. También puede interpretarse como un problema de colocación de objetos distinguibles en casillas distinguibles (colocar cada cargo en una de las personas disponibles). En la última pregunta 7 de los alumnos (100%) tuvieron una respuesta incorrecta.

En esta pregunta ninguno de los alumnos tuvo una respuesta correcta, se puede observar que tienen una idea de las posibles combinaciones que existen pero no llegan a concluir de manera concreta todas las combinaciones posibles.



5. Se quiere elegir un comité formado por tres miembros, presidente, tesorero y secretario. Para seleccionarlo disponemos de cuatro candidatos: Arturo, Basilio, Carlos y David. ¿Cuántos comités diferentes se pueden elegir entre los cuatro candidatos? Ejemplo: que Arturo sea presidente, Carlos sea tesorero y David sea secretario.

Presidente Arturo	tesorero Basilio	secretario Carlos y David
Presidente Basilio y Arturo	tesorero carlos	Secretario David
presidente 0	Tesorero Arturo	secretorio Basilio David carlos

Imagen 7. Respuesta a pregunta 5

5. CONCLUSIONES

Se pudo observar los progresos obtenidos durante la formación académica de los estudiantes alcanzados en los cinco esquemas de razonamiento involucrado. Esto es importante para que el docente pueda conocer las debilidades y fortalezas que poseen sus alumnos, y de esta manera pueda proponer las actividades partiendo de lo básico a lo formal y ayudar a que el alumno pueda reconocer entre una permutación y una combinación.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Birembaum, M. (2002). Assesing self-directed active learning in primary schools. *Assessment in Education:, 9*(1), 119-138.

Navarro-Pelayo, V., Batanero, C., Godino, & J.D. (1996). Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. *Educación Matematica*, 26-39.

Piaget, J., Inhelder, B. (1941). *Le développement des quantités chez l'enfant. Conservation et atomisme*. Neuchâtel et Paris: Delachaux & Niestlé.

Roa, R., Batanero-Bernabe, C., & Díaz-Godino, J. (2000). *Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación matematica avanzada*. Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Tobin, K., & Capie, W. (1984). The Test of Logical Thinking. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia*, *7*(1), 5-9.

Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

LA TRANSVERSALIDAD DE LA MATEMÁTICA. EL CASO DEL DIAGNÓSTICO EN CARDIOLOGÍA

Gloria Angélica Moreno Durazo
Cinvestav- IPN, México. gamoreno@cinvestav.mx
Ricardo Cantoral Uriza
Cinvestav- IPN, México. rcantor@cinvestav.mx

Resumen

Presentamos el avance de la investigación que tiene por objetivo localizar, analizar y clasificar aquellas prácticas predictivas del médico. Prácticas relativas al uso de órdenes de variación en el diagnóstico de fenómenos cardiacos donde se reconoce que existe una dinámica no determinista. La investigación busca ampliar los escenarios en los que se ha analizado el estudio del cambio y la variación, bajo la línea de investigación de Pensamiento y Lenguaje Variacional. Mostramos a continuación cómo el médico usa diferentes órdenes de variación para diagnosticar mediante la interpretación del electrocardiograma y bosquejamos con ello algunos elementos relativos a la transversalidad de la matemática y la organización de prácticas predictivas.

Palabras clave: Cardiología, Órdenes de variación, Predicción.

1. INTRODUCCIÓN

Desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa se caracteriza el discurso matemático escolar en relación a aquellos consensos sobre los aspectos que deben ser enseñados y cómo enseñarlos, reduciendo el saber a unidades temáticas dentro del currículo escolar y produciendo una exclusión de otras formas de saber. Este discurso prioriza la repetición de algoritmos y la memorización de conceptos matemáticos, de tal suerte que su estrategia didáctica consiste en que los estudiantes transiten por una evolución de esos conceptos; esto incluye también a las matemáticas del cambio, abordadas en los cursos de Cálculo Diferencial e Integral y Ecuaciones Diferenciales. En una gran cantidad de investigaciones se ha reportado que esta organización, centrada en conceptos, es un impedimento para el desarrollo del pensamiento matemático.

Por nuestra parte, entendemos al aprendizaje desde un desarrollo de prácticas, donde se pongan en uso los conceptos matemáticos, otorgándoles así una resignificación progresiva. Considerado esto como una descentración del objeto matemático, es decir, poner con un papel principal aquellas prácticas asociadas al objeto en tanto son a través de ellas que se les dan significado. En particular, investigaciones relativas a las formas culturales en las que el cambio es

ISSN: 2594-1046

concebido y analizado son de interés para la línea de investigación de Pensamiento y Lenguaje Variacional; estas investigaciones se centran en reconocer aquellas organizaciones, expresiones y argumentaciones para tratar con el cambio y la variación en diversos escenarios que den cuenta de saberes matemáticos, sean estos populares, técnicos o cultos.

De tal manera que, el análisis de la organización de las prácticas que intervienen en el tratamiento del cambio con fines predictivos permite determinar la transversalidad de la matemática no sólo en relación a conceptos matemáticos (como la derivada de una función), sino que mediante la idea del conocimiento en uso podemos identificar a lo variacional como algo transversal a la sabiduría humana. En esto último, se entrelazan la transversalidad y la funcionalidad de la matemática, aspectos relacionados con el aula extendida, vista como la posibilidad de incorporar la vida real de las personas en el rediseño del discurso matemático escolar.

Preguntas naturales que surgen de los comentarios hasta aquí planteados son: si se plantea un rediseño del discurso con base en prácticas ¿Cómo se organizan/jerarquizan las prácticas?, ¿Q elementos se asocian a los conceptos de transversalidad y funcionalidad de la matemática? Nuestro objetivo en este documento es mostrar el avance de una investigación donde estas preguntas son parte esencial, interesándonos por las formas en las que es llevada a cabo la predicción de fenómenos en una disciplina científica aún no considerada por la Matemática Educativa, la Medicina.

La mayoría de las investigaciones dentro de la línea de Pensamiento y Lenguaje variacional (PyLVar) han estudiado las prácticas predictivas en fenómenos deterministas, donde la predicción es plena y está dada mediante modelos matemáticos que dependen de la convergencia de la serie de Taylor. Por lo que, este escenario de investigación pretende extender los resultados de esta línea, que se ha desarrollado en tópicos de Análisis Matemático clásico, hacia el estudio de sistemas complejos como las dinámicas propias de los sistemas fisiológicos de los seres humanos.

Es así como constructos teóricos como aula extendida, transversalidad de la matemática, están inmersos en la investigación. Nos preguntamos pues ¿Cuál es la organización de prácticas presente en la predicción cuando no hay una función algebraica o trascendental que analizar? En concreto, ¿Cómo predecir usando la siguiente gráfica?

ISSN: 2594-1046

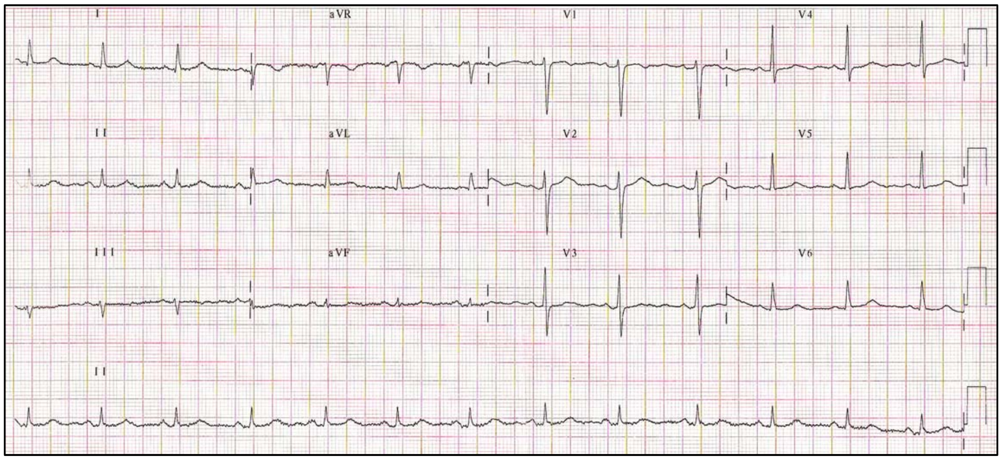


Figura 1. Electrocardiograma

2. PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL EN CARDIOLOGÍA

La investigación se enmarca en las perspectivas de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, la cual se interesa por reconocer aquellas formas de construcción de conocimiento matemático que sean fruto de las necesidades del desarrollo de la vida en sociedad, mediante redes de prácticas intencionadas (acción – actividad y práctica) y prácticas normativas (práctica social, práctica de referencia y práctica socialmente compartida); dicho proceso es referido como construcción social del conocimiento matemático. Específicamente, nos interesan aquellos saberes matemáticos relativos al ambiente profesional del médico, donde las prácticas de predicción se reflejan en el diagnóstico de un paciente; en las que el estudio del cambio y la variación son fundamentales.

En la malla curricular del sistema educativo, es en las asignaturas de Cálculo Diferencial e Integral donde se organizan las temáticas del cambio y su cuantificación. Habitualmente se hace, principalmente, mediante los conceptos matemáticos de sucesión, función, límite, derivada e integral. En estas asignaturas, aunque podrían incluirse otras, reconocemos un sesgo de la matemática escolar al tratar exclusivamente fenómenos de cambio de naturaleza determinista (cinemática, dinámica etc.); lo que pone en evidencia la caracterización que suele hacerse desde la Socioepistemología, en la que se señala que el discurso Matemático Escolar es un sistema de razón, hegemónico que excluye al docente y al aprendiz de otros saberes matemáticos. Específicamente en el Cálculo, los conceptos que se promueven carecen de significación para los procesos variacionales (Cantoral y Farfán, 1998; Cantoral, 2013). De tal manera que, para subsanar estas deficiencias, se realizan investigaciones sobre la anidación de prácticas que dan sustento a las prácticas predictivas, tanto desde la perspectiva determinística como no determinística.

Asumimos que el cambio y la variación se estructuran en un primer momento, en las vivencias y experiencias cotidianas de los individuos y de los grupos sociales, a partir de las cuales la *predicción* se construye socialmente mediante el desarrollo de prácticas en las que interviene el cambio y la variación (Cantoral, Farfán, Lezama, Martínez, 2006). Estas prácticas pueden ser encontradas en áreas del conocimiento humano tan diversas como Física, Química, Biología, Ecología, Medicina o Ingeniería, entre muchas otras.

En lenguaje cotidiano podemos decir que toda persona se enfrenta a una gran diversidad de cambios, tanto en su cuerpo como en la naturaleza; por ejemplo, las veces que palpita o late el corazón por cada minuto en situación de reposo, o la temperatura corporal sentado bajo el sol, o bien la producción de glóbulos blancos a lo largo de la vida, la producción de cortisol asociada a niveles de estrés y así una gran cantidad de ejemplos como estos. Lo que nos interesa, en este proyecto de investigación, es saber cómo se cuantifican y analizan esos cambios, sobre qué respaldan sus juicios los profesionales de la medicina al realizar todo tipo de prácticas predictivas al momento de la diagnosis.

Al momento, los estudios sobre el PyLVar en ámbitos multidisciplinarios se han ocupado del examen del cambio y la variación bajo sistemas determinísticos propios de las ciencias físicas: estudios sobre el movimiento de caída libre o en el plano inclinado, la dinámica y la cinemática de cuerpos o las distintas modalidades de las dinámicas poblacionales con crecimiento exponencial. En todos ellos, el estado futuro del sistema dinámico depende sólo de las condiciones de partida (estado inicial y condiciones de frontera determinados por una única ley de movimiento). En este escenario, la predicción es alcanzada mediante modelos matemáticos cuya resolución precisa de la convergencia de la serie de Taylor en un dominio dado. Pues el estado futuro, digamos $f(x+h)$, depende los valores de partida: $h, f(x), f'(x)$, etc., mediante la expresión:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)h}{1!} + \frac{f''(x)h^2}{2!} + \frac{f'''(x)h^3}{3!} + \cdots$$

El problema que ahora abordamos es el de ampliar los escenarios de significación de la predicción en situaciones de cambio y variación hacia escenarios no determinísticos, eventualmente escenarios relativos al caos. Para ello elegimos un caso de la Medicina donde mostramos el papel que juega la lectura y la interpretación del electrocardiograma (ECG) como recurso válido para la

ISSN: 2594-1046

toma de decisiones con cambios de variación acotada. El médico debe reconocer las variaciones normales debidas a los cambios de polaridad en las células cardiacas y diferenciarlas de aquellas que pueden presentar patología. De esta manera, decimos que el profesional de la medicina realiza un análisis que involucra al cambio y su cuantificación.

Hemos presentado en la emisión anterior de la Escuela de Invierno el uso de las estrategias variacionales de comparación y de seriación en la interpretación que hace el médico de un electrocardiograma. Nos interesamos ahora por mostrar cómo es que el médico al momento de identificar una anomalía en el funcionamiento del corazón, mediante la interpretación del electrocardiograma, usa diferentes órdenes de variación; donde por ejemplo, si nos ubicamos en el contexto físico de movimiento, el primer orden de variación se refiere a la velocidad y el segundo orden de variación a la aceleración, o para el caso geométrico la pendiente de la recta tangente en un punto de la función corresponde al primer orden de variación y la concavidad al segundo orden.

Ahora bien, ¿cómo aparecen estos órdenes de variación en el diagnóstico médico? Para explicar esto, recurrimos a la obra de Nicolás Oresme (1323 - 1382), Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum, donde presenta una forma de analizar la cuantificación del cambio desde las figuras geométricas. Esto ya que el uso de diferentes esquemas y gráficas es de gran relevancia para la práctica médica, pues intervienen en una gran cantidad de estudios sobre los cambios que suceden en el funcionamiento de los órganos del cuerpo humano.

El análisis sobre la obra de Oresme es base para el desarrollo de diversas investigaciones, por ejemplo, en trabajos de corte socioepistemológico se usa para el diseño de secuencias didácticas que buscan la significación del cambio y la variación a través del estudio de movimiento de un móvil (Alanís, 1996; Arrieta, 2003; Suárez, 2008). En nuestro caso, recurrimos a esta forma de tratar con el cambio como una base para las explicaciones del tratamiento que hace el médico ante el cambio y la variación; específicamente, durante el proceso de diagnosis mediante la interpretación del electrocardiograma; donde hemos identificado el uso de los órdenes de variación.

Oresme logra conjuntar las figuras geométricas y las proporciones para explicar la variación de fenómenos. Para ello, referencian a cualquier cualidad o característica que admita variación a la vez que la noción de intensidad. Éstas incluyen la temperatura, la velocidad, luminosidad, tristeza, caridad, etc. Al grado con el cual la cualidad es poseída por un objeto o sujeto se refiere la latitud. (Riestra, 2004).

ISSN: 2594-1046

> Toda cualidad que puede adquirir sucesivamente diferentes intensidades puede ser representada mediante una línea recta levantada verticalmente sobre cada punto del sujeto afectado por dicha cualidad. Sobre una línea horizontal se representa la extensión del cuerpo en la que se estudia la cualidad, llamada longitud, y en cada punto de esa línea se levanta una recta vertical cuya altura sea proporcional a la intensidad de la cualidad, llamada latitud. De ahí resulta una figura geométrica que ayuda a comprender visualmente las características del fenómeno que se estudia (Suárez, 2008, p. 70).

El análisis de cómo cambia la cualidad caracteriza las formas de representación. La variación cero en la cualidad corresponde a la figura cuyos segmentos no varían (rectángulo), la variación uniforme corresponde a la figura cuyos segmentos cambian siempre lo mismo (triángulo) y la variación no uniforme es representada por la figura cuyos segmentos forman un contorno distinto.

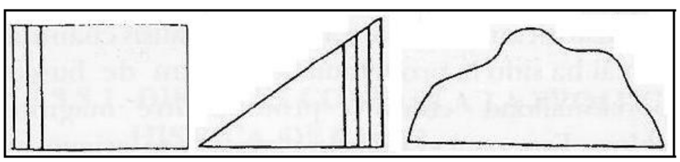


Figura 2. Figuración de cualidades (Ruiz, 1998 citado por Suárez, 2008)

3. ELEMENTOS METODOLÓGICOS

Como es sabido, el análisis de documentos es un procedimiento sistemático para revisar o evaluar documentos. Según Bowen (2009), al igual que otros métodos analíticos en la investigación cualitativa, el análisis de documentos requiere que los datos sean examinados e interpretados a fin de obtener significado, ganar la comprensión y desarrollar conocimiento empírico. Para López (2002) una forma particular de análisis de documentos es el análisis de contenido y "con esta técnica no es el estilo del texto lo que se pretende analizar, sino las ideas expresadas en él, siendo el significado de las palabras, temas o frases lo que intenta cuantificarse" (p. 173).

El análisis de documentos puede implementarse para el desarrollo de una variedad de propósitos al momento de emprender una investigación, por ejemplo, los documentos proporcionan antecedentes y el contexto para entender las raíces históricas de los problemas específicos, las preguntas adicionales que se deben formular, datos suplementarios o adicionales a la información con la que se cuente, un medio de seguimiento de cambios y el desarrollo para comparar los estadios de cierta evolución, y, por último, la verificación de los resultados de otras fuentes de datos

(Bowen, 2009). En particular, el análisis de documentos que llevamos a cabo, nos llevó a la formulación de algunas preguntas que necesitan ser hechas y situaciones que necesitan ser observadas como parte de esta investigación; el cual como se ve, corresponde al segundo propósito descrito por los autores.

Los documentos que revisamos son artículos, manuales y libros especializados con el interés explícito de tener un mapa completo sobre el funcionamiento cardiaco, las formas con las que cuentan para representar dicho funcionamiento, la interpretación de las representaciones y los elementos presentes en éstas que sean signo de anomalías en el funcionamiento; sea producido por crecimiento en el músculo cardíaco, bloqueos en la conducción del estímulo eléctrico, arritmias o infartos. Nos centramos en la representación de los procesos llevados a cabo por el corazón desde el electrocardiograma (Harvey, 1994; Lobelo, Hernández, González y Moro, 2001; Castellano, Pérez y Attie, 2004; Foster, 2007; Cabrera, 2008; Portillo, 2009; Mann, 2011; Pérez-Lescure, 2011). Esta revisión se acompañó de entrevistas a médicos generales para comprobar y corregir nuestra interpretación del análisis de los documentos.

El análisis de documentos considera aspectos relacionados con los elementos que intervienen en la interpretación del electrocardiograma para su análisis sistemático, el cual consiste, grosso modo, del análisis del ritmo cardiaco, el cálculo de la frecuencia cardiaca y del análisis de las partes que componen el electrocardiograma; además, realizamos un análisis sobre las características gráficas de las anomalías en el funcionamiento cardiaco. Estos dos aspectos, vistos como parte del proceso de diagnosis, son los que permiten, en nuestra opinión, la interpretación del quehacer del médico como prácticas donde la guía es la predicción, en tanto identificamos en ellos la forma en la que tratan con el cambio y su cuantificación.

A partir de los elementos que intervienen en la interpretación del electrocardiograma, identificamos cómo el médico trata con el cambio mediante el uso de las llamadas estrategias variacionales y que fueron reportadas en las investigaciones sobre Pensamiento y Lenguaje Variacional (Caballero, 2012; Salinas, 2003). La cuantificación del cambio se expresa mediante frases como alargamiento progresivo del intervalo PR hasta que una onda P se bloquea (una característica de un tipo de bloqueo), de donde identificamos el uso de diferentes órdenes de variación para el diagnóstico de bloqueos de tipo AV.

3.1. El uso de órdenes de variación en el diagnóstico de bloqueos auriculo-ventriculares

Mostramos ahora el uso del segundo orden de variación en el diagnóstico médico sobre anormalidades en los procesos eléctricos llevados a cabo por el corazón. La anormalidad en el funcionamiento cardíaco, vista desde el ECG, se caracteriza sólo con base en las variables tiempo o voltaje. Para algunos casos, el referente es el tiempo que transcurre para realizar determinado proceso en el ciclo cardíaco; para otros será el voltaje empleado para realizarlo o la combinación de estas variables es la que caracteriza la enfermedad. Las anomalías que abordaremos en este momento son las referidas exclusivamente al tiempo.

Un bloqueo en la conducción eléctrica en el corazón puede presentarse en diferentes zonas y ser de dos tipos: completos e incompletos. En los primeros, el estímulo eléctrico no pasa por la zona bloqueada y en los de segundo tipo, el estímulo viaja de forma retrasada o enlentecida en el tiempo (Castellano, Pérez y Attie, 2004).

Para investigar el orden de variación referidos a la variable tiempo en el diagnóstico de bloqueos en la conducción eléctrica estudiamos los bloqueos ubicados en el nodo atrioventricular (bloqueos AV, BAV). En los cuales el médico para identificarlos analiza, en términos generales, los cambios en el intervalo PR y la relación entre las ondas P y el complejo QRS (ver Figura 3).

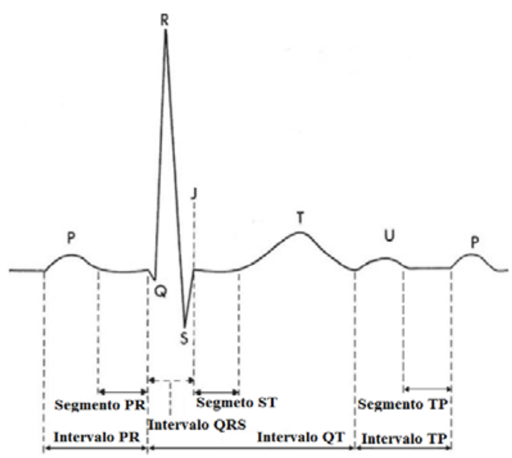


Figura 3. Segmentos, intervalos y ondas en un ciclo cardiaco

Basándose en las características electrocardiográficas, el BAV se clasifica en tres categorías: a) BAV de primer grado que es la prolongación del intervalo PR más allá del límite superior de la normalidad, es decir mayor de 0,2 segundos; b) el BAV de segundo grado, en él, una o más ondas P, pero no todas, no son conducidas, esto es, no son seguidas de complejo QRS, y c) el bloqueo AV de tercer grado, en el cual ninguna de las ondas P se conduce a los ventrículos, es decir, hay un bloqueo total de la conducción a nivel AV (Lobelo, Hernández, González y Moro, 2001, p. 2125).

La característica principal en la descripción de los bloqueos de primer y segundo grado, como vimos en el párrafo anterior y que profundizaremos más adelante, corresponde a la prolongación del intervalo PR. Esta centración en la prolongación de un suceso alude al tiempo como variable principal de estudio y a un comportamiento específico sobre la variable (su crecimiento), por lo que nos interesamos por analizar las características electrográficas de este tipo de bloqueos. Longitudes mayores en ese sentido corresponden a lapsos mayores.

El bloqueo AV de segundo grado se describe de la siguiente manera:

> Es la interrupción intermitente de un estímulo supraventricular a su paso por el nodo atrioventricular. Esa interrupción tiene lugar de manera que un primer estímulo se conduce normalmente a través del nodo atrioventricular, el siguiente estímulo sufre un enlentecimiento de la conducción a través de dicho nodo, el tercer estímulo se enlentece aún más y así hasta que un determinado estímulo se bloque y no es capaz de atravesar el nodo atrioventricular. Este enlentecimiento progresivo de la conducción a través del nodo AV se llama fenómeno de Wenckebach (Castellano *et al*., 2004, p 85).

En esta primera descripción del bloqueo Wenckebach nos interesa resaltar la delineación que se hace del comportamiento de los estímulos eléctricos que parten del nodo sinusal al atrioventricular. Esto es, los estímulos tienen cada vez un mayor retraso, lo que habla de una cuantificación del cambio que sufre el tiempo que tarda en conducir un estímulo en determinada zona del corazón. Este cambio se representa con un crecimiento de algún tipo, es decir, involucra un primer orden de variación en tanto sólo habla de crecimiento y no de qué tipo de crecimiento es (segundo orden de variación).

A continuación, explicamos cómo el segundo orden de variación está presente en las características del bloqueo AV tipo Wenckebach (Mobitz I) y además, cómo esto se visualiza en el ECG.

> Las características electrocardiográficas del BAV tipo Mobitz I son: a) prolongación progresiva del intervalo PR; b) disminución progresiva del incremento del intervalo PR de latido a latido; c) disminución del intervalo RR; d) la pausa producida por la onda P bloqueada es menor a la suma de dos intervalos PP y es igual a la suma de dos intervalos PP menos la suma total de los incrementos de conducción, y e) el intervalo RR producido después de la pausa es mayor que el último intervalo RR

> producido antes de la onda P bloqueada (Lobelo, Hernández, González y Moro, 2001, p. 2126).

A partir de las particularidades de Lobelo et al. (2001) en las características de este tipo de bloqueos, reconocemos que entre los elementos que permiten identificar el enlentecimiento en los estímulos eléctricos del corazón, es el estudio del intervalo PR. El apartado a) indica una prolongación progresiva de este intervalo, lo que entendemos como un comportamiento creciente en el tiempo que dura en realizarse para cada ciclo cardíaco; además, especifica en el apartado b) que este crecimiento del intervalo sufre una disminución progresiva. Es decir, el intervalo PR durante un bloqueo AV de tipo Wenckebach tiene un crecimiento cada vez menor.

Por otro lado, recurrimos a Castellano et al. (2004) para analizar las características que presentan sobre el bloqueo AV tipo Wenckebach, donde se presentan otros apartados.

> Desde el punto de vista electrocardiográfico, el bloqueo AV de segundo grado Mobitz I o tipo Wenckebach se caracteriza por:
>
> Alargamiento progresivo del intervalo PR hasta que una onda P se bloquea, es decir, no se sigue de un complejo QRS.
>
> Acortamiento progresivo de los intervalos RR hasta que la onda P se bloquea.
>
> El complejo QRS es por lo general de características normales.
>
> El intervalo RR que contiene la onda P bloqueada es más corto que la suma de dos intervalos PP. (Castellano *et al*., 2004, p. 85).

Donde aparentemente sólo reconoce el comportamiento creciente del intervalo PR. Sin embargo, los autores más adelante comentan que el apartado 2 es una consecuencia de la disminución en el incremento del intervalo PR; donde justamente aparece la medición del cambio del cambio (segundo orden de variación).

> El bloqueo AV tipo Wenckebach puede ser típico o atípico. En el bloqueo AV tipo Wenckebach típico el mayor incremento del intervalo PR tiene lugar en el segundo impulso conducido después de la pausa. En los impulsos sucesivos, el intervalo PR sigue incrementándose, pero el grado de incremento disminuye. El acortamiento progresivo del intervalo RR hasta que la onda P se bloquea es el resultado de la diminución en el incremento del intervalo PR (Castellano *et al*., 2004, p. 85).

De lo mencionado anteriormente, decimos que el médico en la interpretación del electrocardiograma (Figura 4) requiere para diagnosticar la presencia de un bloqueo tipo Wenckebach típico del estudio del segundo orden variación sobre la variable tiempo.

ISSN: 2594-1046

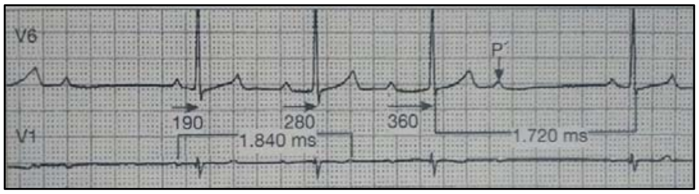


Figura 4. Bloqueo AV de tipo Wenckebach.

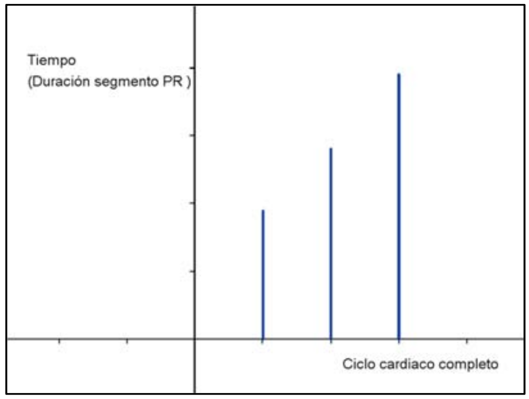


Figura 5. Función entre la duración del segmento PR en cada ciclo cardíaco para el bloqueo AV tipo Wenckebach.

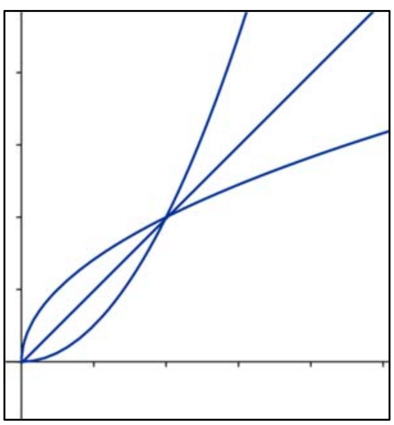


Figura 6a. Tipos de funciones crecientes

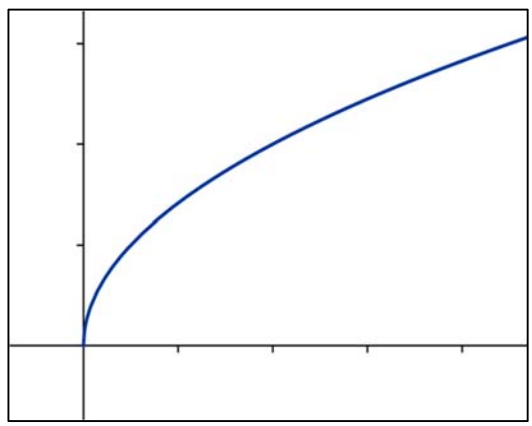


Figura 6b. Función creciente, con crecimiento cada vez menor

Para ilustrar esto, construimos en similitud a la obra de Oresme una función auxiliar que nos permita asociar el tiempo que tarda el intervalo PR en realizarse en cada ciclo cardíaco completo (Figura 5). Esta función es creciente debido a las características que mencionamos tiene el bloqueo tipo Wenckebach, alargamiento progresivo de segmento PR. Sin embargo, no es suficiente hablar de la primera variación para identificar este bloqueo, pues existen tres formas de crecimiento

(Figura 6 a.); de tal manera que la disminución en el incremento del intervalo PR es la que nos permite identificar la forma en la que cambia el cambio (Figura 6 b.).

4. CONCLUSIONES

Otorgamos evidencia de cómo aparece la cuantificación del cambio en el diagnóstico de anomalías en el funcionamiento cardíaco, esto es, centramos la atención en los órdenes de variación que son usados para el diagnóstico de bloqueos en la conducción del impulso eléctrico en la zona aurículo – ventricular del corazón. Previamente identificamos también que la base de la cuantificación del cambio se refiere al uso de las estrategias variacionales de comparación y de seriación. Con esto, planteamos una estructura de pensamiento predictivo común para fenómenos deterministas y no deterministas.

Hasta este momento de la investigación, hemos articulado la práctica médica relativa al diagnóstico de bloqueos AV con las investigaciones del PyLVar mediante la identificación en estas prácticas del uso de las estrategias variacionales y de los órdenes de variación. Ahora bien, nuestro objetivo de investigación no radica en la identificación del uso del orden de variación, sino que el objetivo es cómo se constituyen los niveles de constantificación para los fenómenos relativos al funcionamiento del corazón. Es decir, determinar qué es lo que conduce al médico a determinar el origen de la condición de su paciente y a determinar el orden de variación suficiente para diagnosticar a su paciente. Esto último, se refiere a los niveles de constantificación descritos por Cantoral (2000), donde un primer nivel de constantificación alude a la selección de las variables que describen con suficiente precisión al sistema y el segundo nivel de constantificación alude a la selección del orden de variación que afecta significativamente al sistema.

Con este objetivo lo que nos interesa abordar es nuestra hipótesis de investigación sobre el estudio de aquella variación mínima que permita la predicción, sea ésta en fenómenos deterministas o indeterministas, y que en el grupo de investigación hemos denominado como “principio estrella” (Moreno y Cantoral, 2015). Creemos que este principio estaría asociado a las formas de organizar/jerarquizar las prácticas predictivas, mediante la anidación de prácticas, y además nos brindaría elementos sobre cómo la racionalidad humana sobre la variación está presente en diversos escenarios socioculturales, es decir, hablaría de la transversalidad de la matemática.

ISSN: 2594-1046

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alanís, J. (1996). *La predicción: un hilo conductor para el rediseño del discurso escolar del Cálculo*. (Tesis de doctorado no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. DF: México.

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. (Tesis de doctorado no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. DF: México.

Bowen, G. (2009). Document Analysis as a Qualitative Research Method. *Qualitative Research Journal*, *9*(2), 27-40.

Caballero, M. (2012). *Un estudio de las dificultades en el desarrollo del lenguaje y pensamiento variacional en profesores de bachillerato*. (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. DF: México.

Cabrera, R. (2008). *Semiología del electrocardiograma. Guía de interpretación práctica.* Disponible en: http://www.chospab.es/libros/ecg/guia_ECG.pdf

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*. Barcelona: Gedisa.

Cantoral, R., & Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilón 42*(14), 353-369.

Cantoral, R., Farfán, R., Lezama, J., & Martínez, G. (2006). Socioepistemología y representación: Algunos Ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educati*va, Número Especial, 83-102.

Castellano, C., Pérez, M., & Attie, F. (2004). *Electrocardiografía clínica.* Madrid: Elsevier.

López, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *Revista de Educación, 4*, 167-179.

Lobelo, R., Hernández, A., González, J., & Moro, C. (2001). Bloqueo Aurículo – Ventricular. *Medicine,* 8(40), 2125-2131.

Mann, D. (2011). *Heart failure: a companion to braunwald's heart disease*. USA: Elsevier.

Moreno, G., & Cantoral, R. (2015). Socioepistemología: Medicina y Matemáticas. Elementos para el estudio de principio estrella. En F. Rodríguez y R. Rodríguez (Eds.). *Memoria de la XVII Escuela de Invierno en Matemática Educativa. La Profesionalización Docente desde los Posgrados de Calidad en Matemática Educativa 17*, 59-66. Oaxaca: CIMATES

Pérez-Lescure, J. (2011). Taller de lectura sistemática del electrocardiograma pediátrico o cómo interpretar un electrocardiograma y no perecer en el intento. *Revista Pediatría Atención Primaria Suplemento 20,* 225-233.

Portillo, M. (2009). Electrocardiografía: Técnica de interpretación básica. *Foro de pedriatría de atención primaria de Extremadura,* 6(1), 57-63.

Riestra, J. (2004). El estudio de la variación en la edad media y su relación con el concepto de límite. *Miscelánea Matemática, 39*, 49–60.

Salinas, S. (2003). *Un estudio sobre la evolución de ideas variacionales en los cursos introductorios al cálculo*. (Tesis de maestría no publicada), Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. DF: México.

Suárez, L. (2008). *Modelación – Graficación. Una Categoría para la Matemática Escolar. Resultados de un Estudio Socioepistemológico.* (Tesis de doctorado no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. DF: México.

Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

ESTRATEGIAS VARIACIONALES EN EL ESTUDIO DE LAS DINÁMICAS CAÓTICAS

Jesús Enrique Hernández Zavaleta
Cinvestav del IPN. jesus.hernandez@cinvestav.mx

Ricardo Cantoral Uriza
Cinvestav del IPN. rcantor@cinvestav.mx

Resumen

Este escrito es parte de una investigación en curso que pretende dar cuenta del carácter estable del cambio ligado a sistemas con dinámicas erráticas o caóticas, en donde las interacciones de científicos ante la predicción darán indicios de una forma de construir conocimiento matemático. El problema de los tres cuerpos tratado estudiado por Poincaré, las formas de predicción climática de Lorenz y el crecimiento poblacional de May son ejemplos en donde se encuentran presentes este tipo de dinámicas. Las singularidades en las actuaciones de estos investigadores ante este tipo de sistemas serán caracterizadas por estrategias variacionales globales.

Palabras clave: estrategias-variacionales, predicción, dinámicas-caóticas, socioepistemología.

1. OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

En diversas investigaciones de la Socioepistemología se ha encontrado que la enseñanza y el aprendizaje de *situaciones* variacionales (Cabrera, 2009), en el cálculo, plantean una problemática no trivial, así que enfocarse en los actos de entendimiento ante situaciones que precisan del pensamiento y lenguaje variacional se ha tornado fundamental para el desarrollo teórico (Cantoral & Ferrari, 2004; Chimal, 2005; Montiel, 2005; Caballero, 2012; Farfán, 2012; Cantoral, 2013a; Cordero & Morales, 2014). Esta investigación se enfocará en la búsqueda de regularidades en las acciones que emanan de situaciones variacionales particularmente no lineales, en otras palabras, se dispone identificar el carácter estable del cambio en situaciones de variación no lineales.

Sostenemos la existencia de principios que guían el desarrollo del pensamiento variacional y las interacciones que lo transforman. Desde un punto de vista complejo las interacciones de estos principios, propios de la construcción social del conocimiento, generan estructuras cada vez más intrincadas de saberes matemáticos. El caso que nos ocupa es la búsqueda y caracterización de uno de esos principios, el principio estrella (*P**), que asumimos se encuentra presente en la articulación entre la predicción y las adaptaciones de los individuos que hacen posible algún tipo de predicción en sistemas con dinámicas no lineales caracterizadas como caóticas, comúnmente, vinculadas a otras disciplinas. Así, la pregunta que guía está investigación es:

¿Cuáles son los argumentos, códigos y estrategias variacionales que se encuentran presentes al intervenir sistemas no lineales caracterizados como caóticos?

2. RUMBO A LA CONFIGURACIÓN DE UN NUEVO CURRÍCULO

Tratando de configurar la constitución de un nuevo currículo que oriente el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas, el enfoque socioepistemológico propone su organización mediante prácticas, éstas aparecen a partir de las interacciones sociales y culturales de una forma desorganizada, así que es crucial el desarrollo de investigaciones que construyan propuestas adecuadas para su inserción en el ámbito escolar.

Cantoral (2013b) propone un diagrama de anidación de prácticas en el que se muestran diferentes niveles de organización promotores de la emergencia de la Práctica Social. En el primer nivel se encuentra una red de acciones cuyas aristas se conforman de interacciones, a través de estas emergen actividades que posteriormente conformaran las prácticas, es en este nivel donde el proceso de institucionalización cobra sentido como parte de la dinámica social y cultural, en la que la iteración intencional construye el camino hacia las experiencias compartidas logrando la constitución de Prácticas de Referencia (PR). Finalmente, debido a las características intrínsecas de cada PR y sus interacciones emerge la Práctica Social (PS), no se debe obviar la interacción biunívoca entre cada nivel de anidación, es decir, la PS norma a las PR, éstas a su vez a las prácticas y así sucesivamente.

La organización de las prácticas se propone a partir de principios propios de la construcción social del conocimiento matemático que mediante sus interacciones generan estructuras de saberes cada vez más complejas reflejadas en el diagrama de anidación de prácticas. Por su parte, la investigación socioepistemológica ha documentado con profundidad las acciones detrás de la práctica de predicción mostrando una diversidad de actividades en el día a día; por ejemplo, cruzar la calle o llevar una sombrilla en caso de lluvia, es decir, se encuentra presente y se institucionaliza de muchas formas. La imposibilidad humana de manipular el tiempo propone a la predicción como una estrategia emergente para la adaptación a su entorno y debemos considerar que proviene de la evolución en las interacciones del colectivo social (Cantoral, 2001).

Las actividades y las prácticas de las personas son llevadas a cabo en un mundo en esencia no lineal y aunque las estrategias que se utilizan para lidiar con él son de índole diversificada, en todas se encuentran procesos intrínsecos de constantificación que actúan sobre las variables del entorno. Estos muchas veces quedan, a suficiencia de los sentidos, en el cálculo instantáneo de dos órdenes de variación, es decir, considerando la posición, la velocidad y la aceleración. Sin embargo, la predicción en dinámicas no lineales requiere de estrategias globales sobre las variables, que permitan obtener más información sobre el entorno, así las prácticas y las formas de vislumbrar los fenómenos requieren del uso de nuevas direcciones para pensar y tratar las variables.

3. DEL DETERMINISMO AL CAOS DETERMINISTA

Los eventos determinísticos como la salida y puesta del sol, los experimentos de causa efecto (si lo empujas, se mueve en la misma proporción); por ejemplo, al lanzar un objeto desde la azotea de un edificio sabemos que caerá hasta tocar el suelo, etcétera, han sido ideales para realizar predicciones apegadas a la mecánica newtoniana, en caso opuesto se presentan los procesos aleatorios para los cuales dada por la probabilidad de suceso sabremos lo que sucederá, con cierto porcentaje, en tiempos posteriores.

Ford (1986) menciona que las nociones de determinismo, existencia y unicidad y soluciones analíticas exactas han dominado el pensamiento científico por décadas y que el significado de una solución exacta en símbolos es $S(t) = F(S_0, t)$, donde S es el estado exacto del sistema al tiempo t que evoluciona desde una condición inicial S_0 de acuerdo con la regla F implícitamente determinada por la existencia y unicidad. En otras palabras, el determinismo significa que el pasado y el futuro provienen del estado presente y eso es la esencia de la existencia y unicidad. Para Pierre Simon de Laplace este pensamiento era llevado al extremo al proponer una inteligencia que pudiera conocer todas las fuerzas de la naturaleza en un cierto momento y todas las posiciones de su composición podría poner en una fórmula el movimiento de todo el universo.

Básicamente, desde el determinismo se proponen dos tipos de sistemas dinámicos: las ecuaciones en diferencias y las ecuaciones diferenciales, las primeras en ámbito discreto y las segundas en el continuo. Estas ecuaciones funcionan para la predicción de estados futuros mediante la información obtenida en el presente. Es decir, dada una ecuación diferencial y cualquier condición inicial, podemos decir localmente cómo se comportan las soluciones y decirlo para cualquier condición inicial dada, no importando que el sistema sea un sistema de características no lineales; por ejemplo, mediante técnicas y análisis cualitativos y cuantitativos, en el sistema del péndulo simple se pueden obtener condiciones para las cuales hay periodicidad o trayectorias cerradas, oscilantes, puntos de equilibrio estables e inestables, es decir, podemos describir toda su dinámica.

Es importante mencionar que las variaciones entre las soluciones de ecuaciones diferenciales existen, pero no muestran gran diferencia entre una solución y otra, es decir, soluciones que pertenecen a Condiciones Iniciales (CI) cercanas, permanecerán cercanas para todo tiempo. En años recientes se ha retomado la Teoría de la Estabilidad propuesta por Lyapunov (1892) para caracterizar las dinámicas caóticas, de acuerdo a la distancia entre soluciones con CI muy parecidas, su distancia crece al poco tiempo de haber comenzado la dinámica, de acuerdo al exponente característico del sistema (Parks, 1992). En este sentido las acciones de búsqueda y selección de CI y de variación de parámetros son esenciales para la predicción en sistemas que presentan dinámicas de comportamiento errático o caóticas.

4. LA PREDICCIÓN EN SISTEMAS DINÁMICOS NO LINEALES

Los sistemas dinámicos no lineales han dado paso a un cambio de paradigma en el análisis de sistemas deterministas. Su foco no se centra en la búsqueda de soluciones precisas de las ecuaciones que definen el sistema dinámico, así que las preguntas que surgen de su estudio tienen sentido en la búsqueda de los estados estables o periódicos a largo plazo de todo el sistema, las posibles cuencas de atracción o atractores o de la dependencia de las condiciones iniciales y haciendo que el análisis cualitativo tome un papel central. De esta forma las dinámicas no lineales han mostrado dinámicas estables, inestables, periódicas y caóticas.

Las dinámicas caóticas han sido de gran importancia para creación de nuevas formas de acercarse a la predicción, ya que, en presencia de éstas, se requiere de un conocimiento exponencial del presente para dar significado al pasado y al futuro. Dicho sea de paso, no solamente aparecen en sistemas complejos, ya que se ha encontrado en sistemas aparentemente triviales, como el mapeo logístico (May, 1976). El cambio del paradigma comienza cuando la primera ley de newton no se cumple a cabalidad, es decir, a toda acción corresponde una reacción, pero no necesariamente de la misma magnitud, éste es el sentido de la metáfora propuesta por Lorenz (1995), “El efecto Mariposa”.

En principio, el uso de análisis locales mediante cantidades infinitamente pequeñas es necesario y de esta forma se pueden hacer análisis de variación de diversos órdenes, de funciones analíticas, mediante expansiones en series de Taylor, sin embargo, la predicción ante el caos debe estar relacionada con la búsqueda y selección de condiciones iniciales adecuadas, además de la construcción de sistemas de referencia que consideren la comparación entre todas las soluciones del sistema y su comportamiento respecto a un amplio marco en la variación de los parámetros asociados. Se propone que además de las estrategias variacionales ya estudiadas, la predicción en sistemas no lineales caóticos se requiere de estrategias como "la variación de parámetros y la selección y estudio de condiciones iniciales", esto brinda un espectro amplio de dinámicas que permite hacer distinciones entre comportamientos deterministas, aleatorios o caóticos.

5. CONCLUSIONES

Recordemos que P* se encuentra ligado a la búsqueda de la estabilidad del cambio y a dos momentos de constantificación, el primero se debe a la selección adecuada de las variables y el segundo a la selección del orden de variación para hacer predicciones, estos a su vez están orientados por estrategias variacionales como la comparación, seriación y estimación.

Sin embargo, la complejidad de los fenómenos que nos rodean es de orden superior así que debido a la PS Preadicere se han buscado estrategias para hacer predicciones sobre fenómenos donde intervienen gran cantidad de variables. En presencia de sistemas dinámicos no lineales, caóticos, se actúa sobre la variación de las variables seleccionadas en el primer momento, pero el orden de variación en el segundo puede ser tan grande como se desee, entonces hablaremos de un proceso de constantificación diferenciado en que se deben considerar estrategias para elegir los parámetros adecuados y seleccionar las CI.

En el transcurso de esta investigación se han generado nuevas preguntas que apuntan a responder la pregunta de investigación, a continuación, se presentan las últimas que se han hecho:

¿Cuáles son las formas de razonamiento que coordinan las acciones necesarias para realizar una predicción en un sistema no lineal?

¿Cómo se da la coordinación entre las acciones y actividades vinculadas con la predicción en sistemas no lineales?

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Caballero, M. (2012). *Un estudio de las dificultades en el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en profesores de bachillerato*. (Tesis de Maestría no publicada). Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Cabrera, L. (2009). *El pensamiento y lenguaje variacional en el desarrollo de competencias*. (Tesis de Maestría no publicada). Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Cantoral, R. (2001). Sobre la construcción social del conocimiento matemático avanzado. En J. Domínguez, & M. Sierra (Eds.). *Tendencias actuales de las matemáticas, su historia y su enseñanza* (págs. 97-110). Salamanca: Univerisdad de Salamanca.

Cantoral, R. (2013a). Socioepistemología de la variación y el cambio. En C. Cuevas, & F. Pluvinage (Eds.), *La enseñanza del cálculo diferencial e integral* (págs. 195-216). México: Pearson.

Cantoral, R. (2013b). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento matemático*. México: Gedisa.

Cantoral, R., & Ferrari, M. (2004). Uno studio socioepistemologico sulla predizione. *La matematica e la sua didattica*, 2, 33-70.

Chimal, R. (2005). *Una mirada socioepistemológica a la covariación*. (Tesis de Maestría no publicada). Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Cordero, F., & Morales, A. (2014). La Graficación-Modelación y la Serie de Taylor. Una Socioepistemología del Cálculo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(3), 319-345.

Farfán, R. M. (2012). *Sociepistemología y ciencia. El caso del estado estacionario y su matematización*. Barcelona: Gedisa.

Ford, J. (1986). Chaos: Solving the Unsolvable, Predicting the Unpredictable. En M. Barnsley, & S. Demko (Eds.), *Chaotic Dynamics and Fractals*. Orlando Florida: Academic Press.

Lorenz, E. N. (1995). *The essence of chaos*. United States of America: University of Washington Press.

Lyapunov, A. M. (1892). *The general problem of the stability of motion*. Kharkov: Kharkov Mathematica Society.

May, R. (1976). Simple Mathematica Models with very complicated Dynamics. *Nature*, 459-467.

Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la función trigonométrica*. (Tesis de doctorado no publicada). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. México.

Parks, P. C. (1992). A. M. Lyapunov's stability theory—100 years on. *IMA Journal of Mathematical Control & Informat*, 275-303.