Investigación e Innovación en Matemática Educativa

ISSN: 2594-1046

ENSEÑANZA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER GRADO MEDIANTE MAPAS CONCEPTUALES HÍBRIDOS

TEACHING ORDINARY DIFERENTIAL EQUATIONS OF FIRST GRADE THROUGH HYBRID CONCEPTUAL MAPS

Nehemías Moreno Martínez
Universidad Autónoma de San Luis Potosí,
Facultad de Ciencias. nehemias_moreno@live.com

Rosangel De Guadalupe Torres Moreno
Benemérita Bicentenaria Escuela Normal del Estado de San Luis Potosí.
rtorres@beceneslp.edu.mx

Soraida Cristina Zúñiga Martínez
Departamento de Físico-Matemáticas y Facultad de Ingeniería,
Universidad Autónoma de San Luis Potosí. soraida_zuniga@hotmail.com

RESUMEN

Se describe una interpretación ontosemiótica del Mapa Conceptual Híbrido que podría ayudar en la comprensión de la resolución de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer grado. La interpretación permite representar esquemáticamente el sistema de prácticas, los objetos matemáticos primarios y algunos procesos cognitivos que participan en la resolución de las ecuaciones diferenciales. Se propone reconstruir y representar, mediante la técnica del Mapa Conceptual Híbrido, el sistema de prácticas epistémico implicado en la resolución de la ecuación diferencial a ser abordada en clase. Para ejemplificar, en este trabajo se presenta el caso de tres problemas resueltos que se estudian en algunos libros de texto, aunque también se puede emplear la producción de un docente experto. Los esquemas resultantes podrían ser utilizados por los estudiantes universitarios como guías para la resolución de otros problemas, o por los docentes, como ayuda en la enseñanza.

Palabras clave: Ecuaciones Diferenciales, Mapa Conceptual Híbrido, Objetos Matemáticos, Práctica Matemática Representación Gráfica.

Recibido: Mayo 28, 2019. Aceptado: Junio 25, 2019

ABSTRACT

An ontosemiotic interpretation of the Hybrid Conceptual Map that could help in understanding the resolution of First Degree Ordinary Differential Equations is described. The interpretation allows to represent schematically the system of practices, the primary mathematical objects and some cognitive processes that participate in the resolution of differential equations. It is proposed to reconstruct and represent, through the technique of the Hybrid Conceptual Map, the system of epistemic practices involved in the resolution of the differential equation so it can be used in class. To exemplify, in this work is presented the case of three solved problems that are studied in some textbooks, although the production of an expert teacher can also be used. The resulting schemes could be used by university students as guides for solving other problems, or by teachers, as teaching aids.

Keywords: Differential Equations, Hybrid Conceptual Maps, Mathematical Objects, Mathematical Practice, Graphical Representation.

1. INTRODUCCIÓN

Las Ecuaciones Diferenciales (ED) tienen un rol importante en la formación de los estudiantes de ingeniería, matemáticas aplicadas, biología, entre otros. La importancia de su estudio en estas disciplinas radica en el uso que se les da en el contexto de la modelación de problemas del entorno (por ejemplo, fenómenos sociales, económicos, naturales, entre otros); se entiende por modelación matemática, el proceso de *llevar* un problema del mundo real al contexto matemático, resolver dicho problema matemático y luego interpretar la solución obtenida en términos del lenguaje del mundo real (Morales y Salas, 2010).

En relación con la enseñanza y el aprendizaje de las ED en el nivel educativo universitario, la literatura reporta que los estudiantes presentan ciertas dificultades en el aprendizaje de éstas, por ejemplo, se tiene el efecto de las creencias de los profesores sobre el aprendizaje de las ED mediante la imitación de los procedimientos (Moreno y Azcárate, 2003); los estudiantes reducen el estudio de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) a la búsqueda de un algoritmo que resuelva tipos particulares de ecuaciones, limitando así sus posibilidades para abordar problemas contextualizados (Perdomo, 2011); los alumnos tienen deficiencias de los conocimientos previos de Cálculo para comprender e interpretar las soluciones de las ED (Guerrero, Camacho y Mejía, 2010; Morales y Salas, 2010); también se ha señalado que la enseñanza tradicional se presenta como una traducción directa del formalismo matemático, lo cual podría explicar el fracaso escolar de los estudiantes universitarios (Moreno y Azcárate, 1997).

En respuesta a la problemática que plantea el aprendizaje de las ED en el contexto de ingeniería (Rodríguez y Quiroz, 2016) se ha sugerido a la modelación como estrategia para la enseñanza de las ED en el contexto del funcionamiento de circuitos eléctricos mediante el apoyo de las tecnologías (como el software Maple, Mathematica, simuladores Phet, entre otros).

También se han reportado actitudes favorables por parte de los estudiantes hacia el aprendizaje de las aplicaciones de las ED mediante la utilización de la calculadora, ya que dicha herramienta permite a los alumnos el planteamiento de hipótesis, relacionar el nuevo aprendizaje con sus conocimientos previos y permite utilizar el tiempo de manera más eficiente para promover en el alumno habilidades de análisis e interpretación (Rincón-Leal, 2011; De las Fuentes, Arcos y Navarro, 2010). En otro trabajo se plantea introducir en clase el concepto de EDO mediante el diseño e implementación de un conjunto de problemas (cuyos enunciados resultan de adaptar situaciones que se plantean tradicionalmente en clase) los cuales mantienen en común la relación entre el concepto de EDO y el concepto de la derivada de una función (Perdomo, 2011).

En los estudios anteriores se han realizado señalamientos respecto a las dificultades de los estudiantes al aprender las ED, al efecto de la enseñanza tradicional, a la manera en que la modelación matemática y los ambientes tecnológicos favorecen el aprendizaje. En este trabajo, se presenta al Mapa Conceptual Híbrido (MCH) como una herramienta que puede ser empleada con una doble función: como una herramienta que permite al docente reflexionar sobre su práctica docente y como una técnica que le permite mostrar explícitamente a los estudiantes las componentes implicadas en el proceso de construcción del conocimiento a través de la resolución de una EDO. En este sentido, se describe una propuesta para apoyar tanto la reflexión del docente sobre los objetos que enseña, como para ayudar al aprendizaje de los estudiantes universitarios en la resolución de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer grado (EDO1).

La propuesta considera una interpretación desde el Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007) de la técnica del MCH que describe gráficamente el sistema de prácticas, a los objetos matemáticos, los significados y algunos procesos cognitivos que participan en la resolución de una EDO1. Esta interpretación permite elaborar un MCH para cada tipo de EDO1 (separable, exacta, entre otras) los cuales pueden ser particularizados para la resolución de problemas específicos.

2. MARCO TEÓRICO

El MCH resulta de combinar las características particulares del mapa conceptual y el diagrama de flujo. En este sentido, se trata de una representación gráfica que integra la representación ostensiva u observable de una red jerárquica de conceptos y de elementos que conforman distintos procesos. El presente avance de investigación se apoya en los resultados de dos trabajos, por un lado, el trabajo de Moreno, Zúñiga y Tovar (2018) que plantea una *interpretación sistémica del MCH* desde la perspectiva del EOS, y por otro lado, el trabajo de Moreno, Angulo y Reducindo (2018) acerca de la *técnica de reconstrucción del MCH* a partir de la producción institucional o personal.

Según el EOS, el MCH puede ser visto o interpretado desde la perspectiva dual *unitario/sistémico*. Desde la perspectiva sistémica, cuando un sujeto (experto o novato) resuelve un problema, éste desmenuza el problema en subproblemas que son resueltos mediante la realización de prácticas específicas en donde participa y organiza un conjunto de objetos matemáticos primarios: lenguaje, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos. Cabe señalar que se entiende por práctica matemática a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos (Godino y Batanero, 1994, p. 334).

Las prácticas específicas son organizadas por el sujeto en un sistema de prácticas. Las prácticas específicas tienen un sentido o significado parcial, sin embargo, al ser organizadas e interconectadas con las otras prácticas que integran el sistema de prácticas dan lugar a un significado global implicado en la resolución del problema inicial o mayor. En contraste, la *perspectiva unitaria del MCH*, que se plantea en el trabajo de Moreno (2017) y Moreno, Reducindo, Aguilar y Angulo (2018), el MCH permite representar de manera esquemática y a través de una sola práctica global, el proceso de resolución de un problema (matemático o físico).

También se consideran otras perspectivas duales señaladas por el EOS tales como la perspectiva *cognitiva/epistémica* o la dualidad *ostensiva/no-ostensiva*. Mediante la perspectiva cognitiva/epistémica, el MCH elaborado o reconstruido a partir de la producción de un experto (un docente o a partir del conocimiento institucional que presenta un libro de texto) puede ser catalogado de tipo epistémico (o MCH institucional), mientras que un MCH puede llamarse de tipo cognitivo o personal cuando éste se encuentra asociado a la producción de un novato o estudiante inexperto. Por otra parte, desde la perspectiva ostensiva/no ostensiva puede decirse que el MCH es una representación ostensiva, que puede ser observable públicamente, de la configuración de objetos matemáticos no ostensivos o no observables (por ejemplo, los conceptos o las propiedades matemáticas, entre otros) que participan en la resolución del problema que involucra a la ED.

En el presente trabajo se tiene la hipótesis de que cuando el docente reconstruye el sistema de prácticas involucrado en la resolución de una ED y luego lo representa de forma esquemática mediante el MCH, el docente lleva a cabo un proceso de reflexión sobre el objeto a ser enseñado. El MCH, empleado de esta manera, se convierte en una herramienta que permite al docente representar de forma sistemática los objetos matemáticos primarios que se ponen en juego en la resolución de la ED y también le permite analizar qué objetos resultan difíciles de comprender para los alumnos.

En los libros de texto de ecuaciones diferenciales se presentan algunos ejemplos de cómo resolver los diferentes tipos de ED. Sin embargo, desde la perspectiva del EOS, en dichos ejemplos se presentan mediante símbolos, palabras, expresiones algebraicas o gráficos (objeto primario lenguaje) algunos objetos matemáticos primarios, a saber, el objeto matemático procedimiento en mayor medida y, en menor medida, algunas propiedades y argumentos.

En este avance se representan de manera esquemática, mediante la técnica del MCH, tres sistemas de prácticas correspondientes a la resolución de tres tipos de EDO1. El primer MCH aborda el caso de una EDO1 resuelta mediante factor integrante (Aguirregabiria, 2000); los MCH restantes están relacionados con la resolución de una segunda EDO1 de tipo exacta y la tercera mediante sustitución (Zill, 1997). Se trata de problemas resueltos que se presentan como ejemplos en dichos libros de texto.

La reconstrucción de cada sistema de prácticas se apoyó en la discusión y en la resolución de cada una de las tres EDO1 por parte de dos docentes expertos. La experiencia con estos docentes permitió complementar con otros objetos matemáticos primarios lo que se presenta en estos libros. También se consideró la técnica de reconstrucción y representación del sistema de prácticas implicado en la resolución de un problema matemático mediante el MCH (Moreno, Angulo y Reducindo, 2018) para abordar el caso de la actividad matemática implicada en la resolución de las EDO1. La descripción de la técnica antes mencionada queda fuera del alcance del presente documento y puede ser consultada en el trabajo antes citado.

3. RESULTADOS

En la figura 1 se ilustra el MCH que representa gráficamente el sistema de prácticas reconstruido a partir del ejemplo que ilustra la resolución de la ecuación diferencial $(2x^2 + y)dx + (x^2y - x)dy = 0$ (Aguirregabiria, 2000, p. 22). En la figura se han enumerado (**1**,**2**,**3**, … ,**16**) algunos elementos del MCH con objeto de facilitar su descripción, por ejemplo, las soluciones de la ecuación diferencial se presentan mediante **(10)** y **(16)**.

En la resolución del problema en el libro de texto es posible advertir la realización de cuatro prácticas diferenciadas (ver la figura 1): (i) Identificar el tipo de EDO (**2**), (ii) Hallar el factor integrante (**3**), (iii) verificar si la nueva ecuación es exacta y qué soluciones se perdieron con el factor (**4**) y (iv) Obtener solución implícita de nueva EDO (**5**).

En la primera práctica se lleva a cabo un proceso de argumentación con el que se busca identificar el tipo de ecuación **(1)** a resolver. Se identifica que la ecuación no es lineal **(7)**, que no es exacta **(6)** y que no es separable **(8)**, por lo que se propone la posibilidad de que exista algún factor integrante **(9)**. Mediante la segunda práctica **(3)** se lleva a cabo un proceso de tratamiento matemático en el que se busca caracterizar si el factor integrante es función de “x” o de “y”, luego, se encuentra que dicho factor es solo función de “x” y se determina su expresión **(10)**. Lo

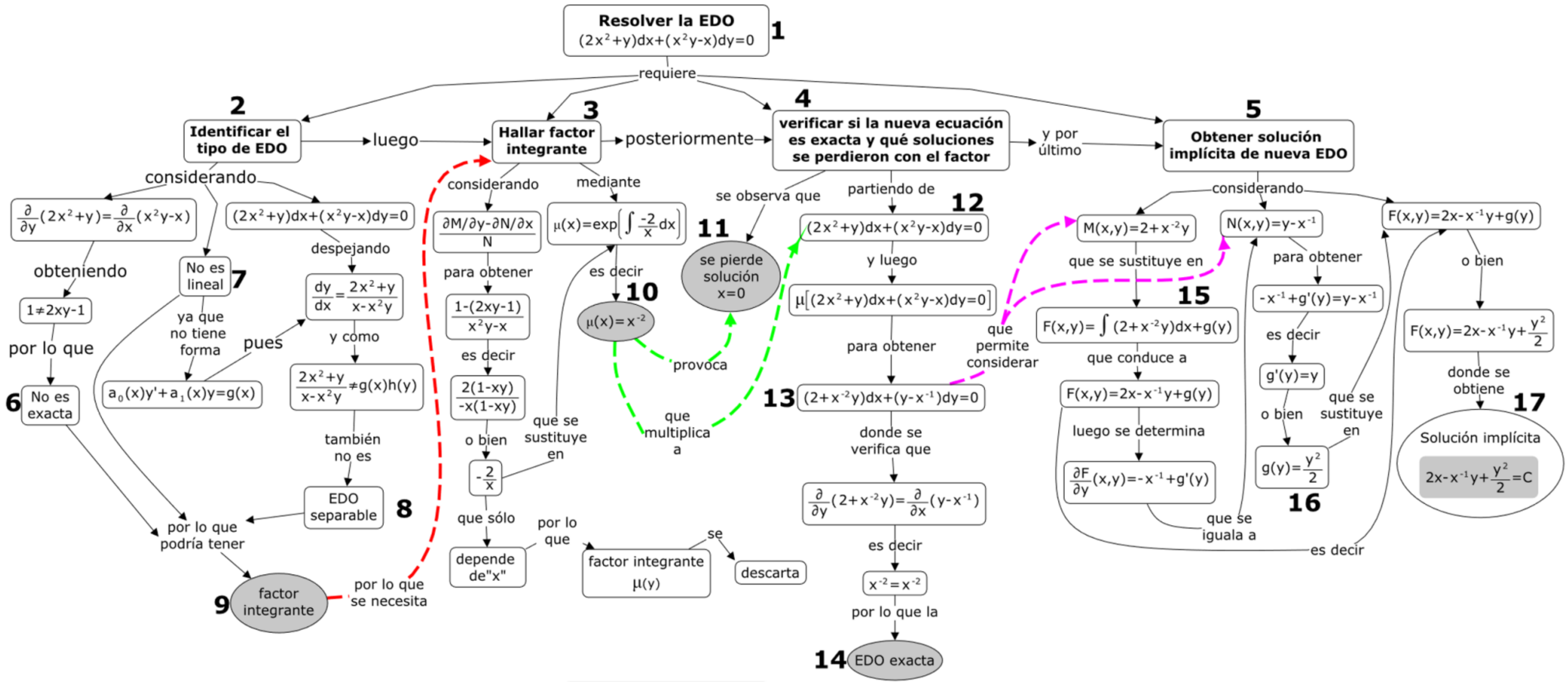

Figura 1. MCH que representa gráficamente el sistema de prácticas que participa en la resolución de una EDO1 mediante factor integrante. Elaboración propia.

anterior desencadena la ejecución de la tercera práctica **(4)** que consiste en identificar la o las soluciones **(11)** que se perdieron mediante el factor integrante y la verificación de que la ecuación resultante sea realmente exacta **(14)**. Por último, mediante la cuarta práctica **(5)**, se resuelve la ecuación transformada **(13)**, se obtiene la solución de la ecuación **(15)** con factor integrante $g(y)$ **(16)**, y esto lleva a obtener la solución de la ecuación mediante **(17)**.

En cada práctica se observan diferentes conceptos, por ejemplo, en la tercera práctica **(4)** se emplea el concepto de *EDO exacta* (**13**) y en la cuarta práctica **(5)** el concepto de *solución implícita* (**16**); se trata de conceptos que emergieron a partir de la realización de prácticas previas y que resultan clave para la resolución del problema. En la producción se observó el empleo del registro algebraico (objeto lenguaje) y la realización de ciertos argumentos para justificar el procedimiento empleado; por ejemplo, la ruta de lectura **9-10-4** en la figura 1 muestra que el factor integrante causa perdida de una solución de la EDO1. También se observa la realización de distintos procedimientos, tal es el caso de la práctica **3** donde se determina el factor integrante.

Otro aspecto relevante que se representa en el MCH es la conexión entre las prácticas; por ejemplo, en la figura 2, se ilustra el esquema del sistema de prácticas implicado en la resolución de una ecuación diferencial exacta **(1)**. Las conexiones se ilustran mediante líneas continuas, conexiones dentro de una misma práctica, o mediante líneas segmentadas (ver las figuras 1, 2 y 3), conexiones entre prácticas. La conexión entre las prácticas es importante, pues permite dar un significado global a la resolución del problema. Mientras que cada práctica específica (ver **(2)**, **(3)**, **(4)** y **(5)** en la figura 2), tiene un sentido o significado parcial, la conexión entre ellas muestra el significado global. Esta noción de los significados parcial y global, proveniente de la teoría del EOS y esquematizada a través del MCH, podría ser útil para el docente, pues le permitiría conocer de manera puntual en qué práctica se encuentra la dificultad de aprendizaje del estudiante. Por ejemplo, podría identificar si el estudiante conoce el criterio que permite identificar a las EDO1 exactas, ver **(8)**; si conoce por qué es necesario llevar a cabo la práctica **(4)** para determinar la "constante de integración" $h(x)$ en **(14)**, o bien, si es capaz de expresar la solución de la ecuación diferencial tomando en cuenta **(10)**, **(18)** y la realización de la práctica **(5)** tomando en cuenta las condiciones iniciales **(20)**, **(21)** y **(22)**.

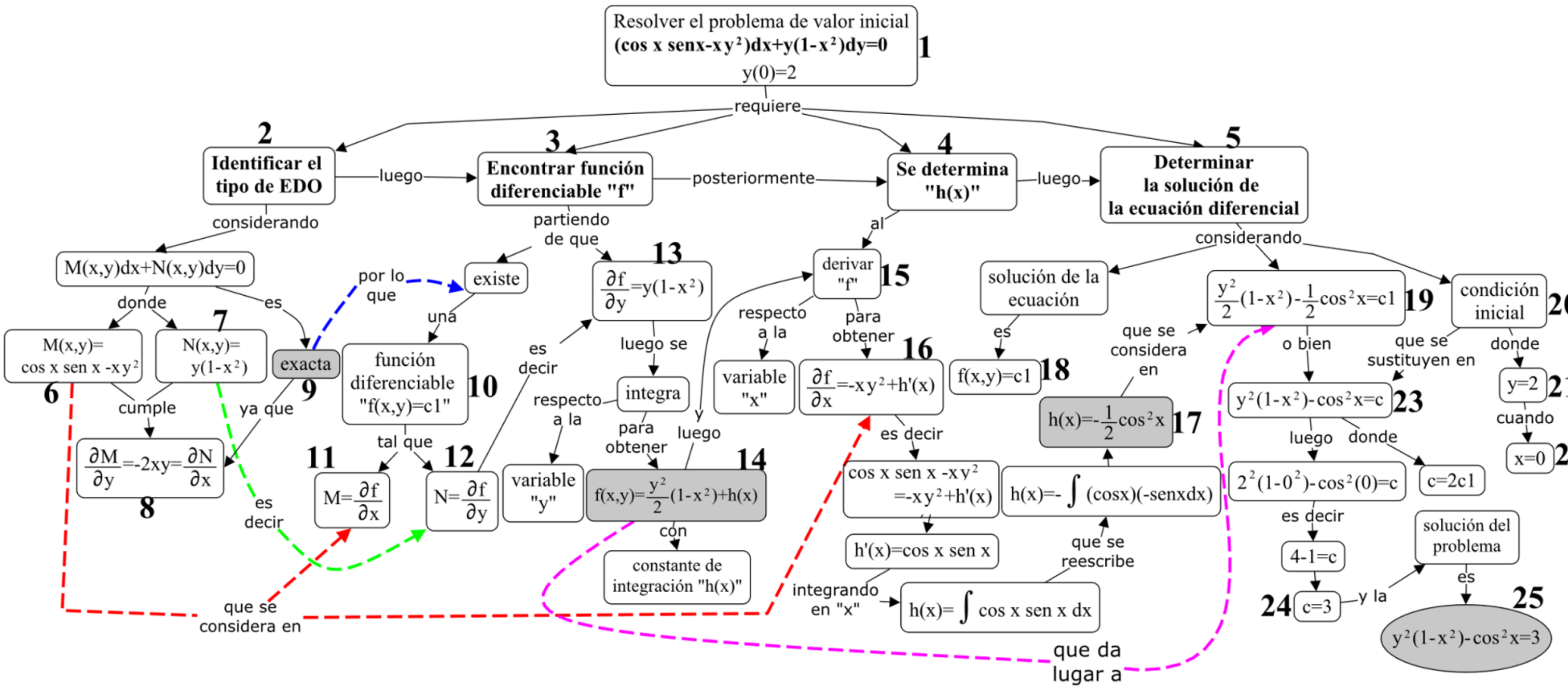

Figura 2. MCH que representa de manera esquemática el sistema de prácticas implicado en la resolución de una EDO1 exacta. Elaboración propia

Por otro lado, cabe señalar que, en el MCH, en la realización de una práctica específica se tiene la emergencia de objetos primarios. Dichos objetos emergentes se han marcado en la figura 1 mediante **(9)**, **(10)**, **(11)**, **(14)** y **(17)**, en la figura 2 mediante **(9)**, **(14)**, **(17)** y **(25)**, y en la figura 3 mediante **(7)**, **(13)** y **(27)**. Se trata de objetos que pueden ser pensados como los productos obtenidos de la realización de dichas prácticas específicas y que de algún modo dejan ver el sentido o significado parcial de dichas prácticas.

El MCH de la figura 2 parte del problema **(1)** "Resolver el problema de valor inicial $(\cos x\, sen\, x - xy^2)dx + y(1 - x^2)dy = 0$ donde $y(0) = 0$" (Zill, 1997, p.49) y muestra que para su resolución es necesario llevar a cabo cuatro prácticas: **(2)**, **(3)**, **(4)** y **(5)**.

Mediante la primera práctica se lleva a cabo la lectura del problema y posteriormente se busca identificar qué tipo de ecuación se plantea en el problema, por lo que se propone identificar las componentes de la ecuación mediante **(6)** y **(7)** y posteriormente se aplica el criterio **(8)** para saber si dicha ecuación es exacta o no.

Una vez que se sabe que dicha ecuación es exacta, se lleva a cabo la segunda práctica **(3)** que tiene como propósito encontrar la solución **(10)** cuyas derivadas están expresadas mediante **(11)** y **(12)**. Para encontrar $f(x, y)$ se considera **(12)** y se integra respecto a la variable y (aunque también se pudo haber tomado **(11)** y luego integrar respecto a x) para obtener como solución general a **(14)**, y es solución general puesto que aún necesario determinar la función $h(x)$ que resultó de la integración de **(13)**.

Posteriormente se lleva a cabo una tercera práctica **(4)** para determinar la función $h(x)$, la cual parte considerando **(6)** y **(11)** de la primera práctica **(2)** y mediante integración es posible llegar a **(17)**. La determinación de $h(x)$ hace posible encontrar la solución de la ecuación diferencial **(1)** en la forma **(18)** hasta una constante c indeterminada, la cual puede ser calculada tomando en cuenta las condiciones iniciales **(20)**, **(21)** y **(22)** del problema. Lo anterior conduce la solución del problema representado mediante **(25)**.

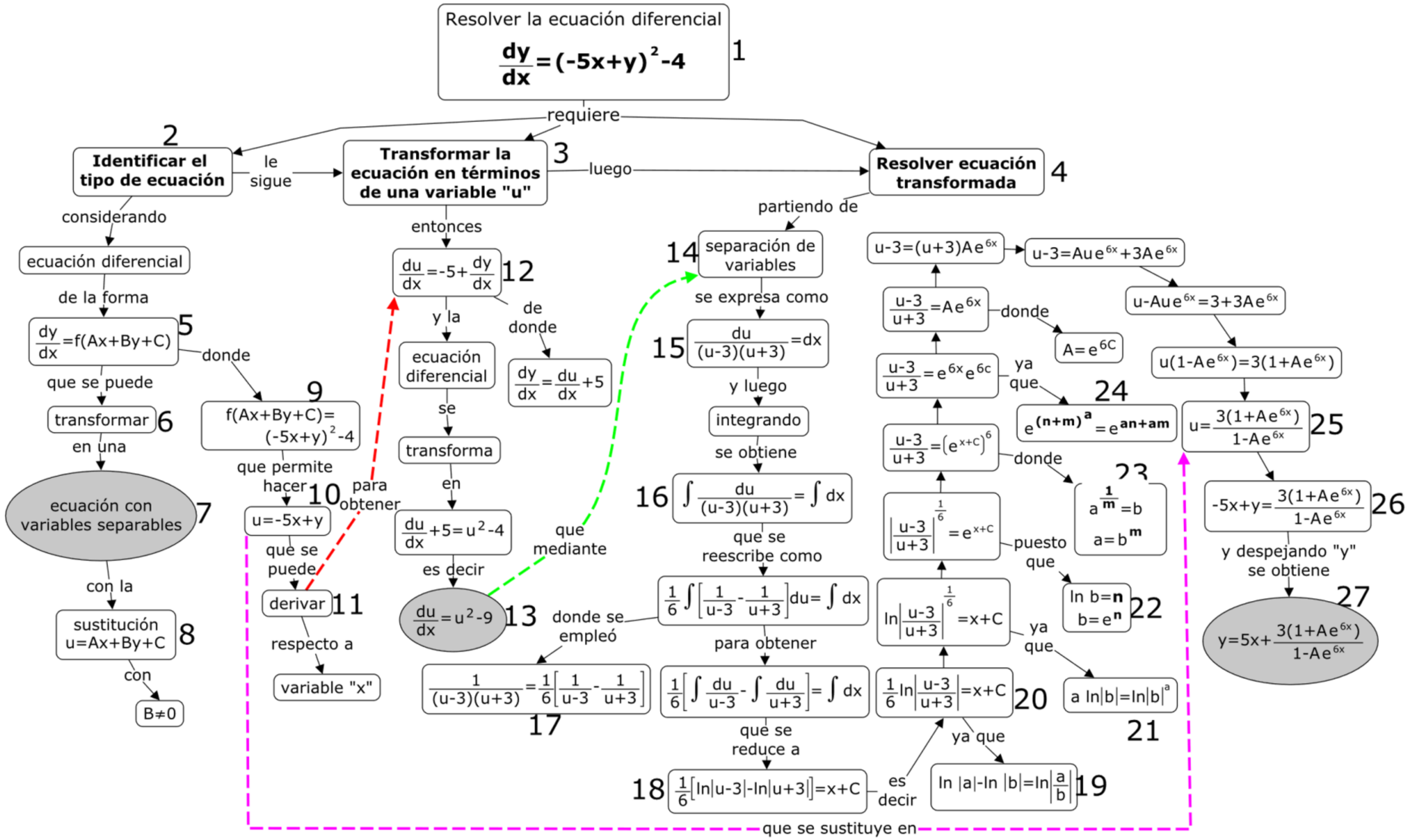

Figura 3. MCH que representa de manera esquemática el sistema de prácticas implicado en la resolución de una EDO1 mediante sustitución. Elaboración propia.

Un aspecto para destacar del MCH que describe esquemáticamente el sistema de prácticas implicado en la resolución de una ecuación diferencial es la presentación de los conocimientos previos en cada una de las prácticas, los cuales son requeridos para resolver el problema. Por ejemplo, el conocimiento previo aparece en la primera práctica de las figuras 1, 2 y 3, y permite identificar el tipo de ecuación a resolver. Por ejemplo, en la figura 1 se realizan las derivadas parciales cruzadas para indagar si se trata de una ecuación diferencial exacta, o no **(6)**, también se analiza si la ecuación es lineal, o no **(7)**, o si es separable, o no **(8)**, con objeto de definir la ruta hacia la solución del problema y, finalmente, en esa misma práctica, se plantea considerar la existencia de un "factor integrante" **(9)** y en la segunda práctica **(3)** se investiga la dependencia de dicho factor respecto a la variable "x" (10) o a "y" teniendo en mente en el proceso la posible pérdida de alguna solución **(10)** de la ecuación diferencial original.

También en relación con el conocimiento previo, el MCH de la figura 3 muestra que para resolver el problema **(1)** "Resolver la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = (-5x + y)^2 - 4$" (Zill, 1997, p.67), primero se lleva a cabo la práctica **(2)** que permite argumentar que **(1)** es de la forma **(5)** y que se trata de una ecuación que puede ser transformada (ver **(6)**-**(7)**-**(8)** en figura 3) a una ecuación separable mediante la sustitución **(10)** que es derivable **(11)**.

También, en la ejecución de la segunda práctica **(3)**, se requiere conocimiento previo acerca de la derivación implícita de **(10)** para obtener **(12)** y finalmente llegar a nueva ecuación diferencial en la variable "u" puede ser resuelta **(13)**. En la tercera práctica **(4)**, se requiere conocimiento previo sobre cómo obtener fracciones parciales **(17)** y poder resolver **(15)** para obtener **(18)**. En esta misma práctica es de gran importancia tener otros conocimientos previos relacionados con las propiedades de los logaritmos **(19)** y **(21)**, así como de las propiedades de los exponentes **(23)** y **(24)** para poder llegar finalmente a la solución **(25)** y consecuentemente a la **(27)**.

En las figuras 1, 2 y 3 se han representado mediante el MCH-EOS los sistemas de prácticas implicados en la resolución de tres EDO1. Sin embargo, el MCH-EOS puede ser empleado para representar esquemáticamente el sistema de prácticas relacionado con cualquier ED; de hecho, el alcance del MCH-EOS es tal que permite representar de manera ostensiva la actividad matemática en contextos extramatemáticos como la física o la química escolar, esta última aplicación actualmente es objeto de investigación.

3.1 El MCH-EOS como técnica de estudio de las ecuaciones diferenciales

En trabajos previos se ha dado sustento teórico al MCH desde el EOS (MCH-EOS) con objeto de emplearlo como una herramienta de investigación que permite conocer las conexiones entre los objetos matemáticos primarios que establece el estudiante a lo largo del proceso de resolución de un problema matemático. Sin embargo, es posible elaborar o reconstruir de manera intuitiva un MCH-EOS para representar esquemáticamente la resolución de una ecuación diferencial con el desconocimiento de los elementos teóricos del EOS.

De esta manera, el MCH puede ser empleado por el estudiante como técnica de estudio al tratar de reconstruir la resolución de un problema que haya registrado en sus notas de clase o bien a partir de algún problema resuelto por el propio estudiante.

Por otra parte, como se ha mencionado anteriormente, el MCH también podría ser empleado por el docente ya sea como ayuda para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales al presentar el MCH en plenaria o al presentarlo mediante actividades similares a las planteadas por Moreno, Zúñiga y Tovar (2018) en donde se fomente el trabajo colaborativo, o bien, puede ser empleado como objeto de reflexión de la práctica docente al permitirle considerar los conocimientos previos con los que debe contar el alumno para resolver el problema y las conexiones que se tienen que establecer entre los elementos del MCH.

En relación con el problema reportado por Perdomo (2011) acerca de que los estudiantes reducen el estudio de las EDO a la búsqueda de un algoritmo, mediante el MCH es posible observar que la resolución de una EDO es más que un simple algoritmo. Más bien se trata de la realización de un sistema de prácticas que se coordinan de manera adecuada y en donde se ponen en juego otros objetos matemáticos primarios, tales como conceptos, propiedades y argumentos, además del objeto procedimiento (algoritmo). De manera que trabajar en clase con el MCH podría ser una buena opción para erradicar dicha práctica memorística de algoritmos.

4. REFLEXIONES FINALES

El MCH epistémico permite representar esquemáticamente el sistema de prácticas implicado en la resolución de una EDO1. Cada práctica específica, que integra el sistema de prácticas, representa de manera ostensiva una configuración de objetos matemáticos (lenguaje, conceptos, propiedades, procedimiento y argumentos) que es llevada a cabo con una finalidad específica. La representación sistémica del MCH, figuras 1, 2 y 3, muestra de manera esquemática la manera en que distintas prácticas más específicas se organizan y se conectan para dar lugar a la emergencia de un significado global o de tipo sistémico.

Por otra parte, el MCH podría servir al docente como objeto de reflexión de su práctica docente, permitiéndole tener conocimiento de los objetos que se ponen en juego en la resolución de una EDO1 y así identificar las dificultades de aprendizaje de sus estudiantes.

Las figuras 1, 2 y 3 podrían ser empleados en clase para el trabajo colaborativo. Por ejemplo, se podrían borrar algunos conceptos o expresiones algebraicas del MCH para ser completadas por los alumnos, o bien, se podrían separar las prácticas (también con algunas expresiones algebraicas eliminadas) constituyentes, las cuales tendrían que ser organizadas por los alumnos para obtener la solución.

También es posible elaborar un MCH que represente esquemáticamente el sistema de prácticas implicado en la resolución de un problema representativo de cierto tipo de ecuación diferencial, para ser empleado como guía por los alumnos con objeto de resolver otros problemas más específicos. Cabe señalar que lo anterior no es alimentar la problemática señalada por Moreno y Azcárate (1997) sobre la creencia que tienen algunos profesores acerca del aprendizaje de las EDO mediante la imitación de procedimientos. Más bien, la propuesta plantea considerar al MCH como una guía para poder resolver otros problemas motivando el proceso de reflexión de la actividad matemática realizada al señalarle las prácticas que debe realizar, al sugerirle el establecimiento de ciertas conexiones entre las prácticas, la consideración de conocimiento previos que aluden a conceptos y propiedades, la realización de procedimientos en algunas prácticas y al sugerir la emergencia de objetos matemáticos cada vez que se ejecuta una práctica.

5. REFERENCIAS

Aguirregabiria, M. (2000). *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias para Estudiantes de Física*, Vizcaya, España: Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco.

De las Fuentes, M., Arcos, L., y Navarro, R. (2010). Impacto en las competencias matemáticas de los estudiantes de ecuaciones diferenciales a partir de una estrategia didáctica que incorpora la calculadora. *Formación Universitaria*, 3(3), 33-44.

Godino, J., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.

Godino, J., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39, 127-135.

Guerrero, C., Camacho, M., y Mejía, R. (2010). Dificultades de los estudiantes en la interpretación de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias que modelan un problema. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(3), 341-352.

Morales, Y., y Salas, O. (2010). Incorporación de la tecnología para la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 5(6), 155-172.

Moreno, M., y Azcárate, C. (1997). Concepciones de los profesores sobre la enseñanza de las ecuaciones diferenciales a estudiantes de química y biología. Estudio de casos. *Enseñanza de las Ciencias*, 15(1), 21-34.

Moreno, M., y Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las ciencias*, 21(2), 265-280.

Moreno, N. (2017). Una representación gráfica de la práctica de resolución de problemas en cálculo diferencial. *Investigación en la Escuela*, 92, 60-75.

Moreno, N., Zúñiga, S., y Tovar, A. (2018). Una herramienta gráfica para la enseñanza de la cinemática mediante la resolución de problemas. *Latin American Journal of Physics Education*, 12(4), 4307.

Moreno, N., Reducindo, I., Aguilar, R., y Angulo, R. (2018). Enseñanza de la física mediante Fislets que incorporan Mapas Conceptuales. *Apertura*, 10(2), 20-35.

Moreno, N., Angulo, R., y Reducindo, I. (2018). Mapas Conceptuales Híbridos para la enseñanza de la física y matemática en el aula. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, 3(1), 113-130.

Perdomo, J. (2011). Módulo de enseñanza para la introducción de las ecuaciones diferenciales ordinarias en un ambiente de resolución de problemas con tecnología. *NÚMEROS. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 78, 113-134.

Rincón-Leal, L. (2011). Evaluación de actitudes hacia la incorporación de la Calculadora Voyage 200 en las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden. *Revista Eco Matemático*, 2(1), 21-26.

Rodríguez, R., y Quiroz, S. (2016). El papel de la tecnología en el proceso de modelación matemática para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 19(1), 99-124.

Zill, D. (1997). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*, sexta edición. México: International Thompson Editores, S. A. de C. V.