Investigación e Innovación en Matemática Educativa

https://doi.org/10.46618/iime.70 ISSN: 2594-1046

ANÁLISIS DE ACTIVIDADES DIDÁCTICAS PARA EL ESTUDIO DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN POR MEDIO DE LA TEORÍA APOE

ANALYSIS OF DIDACTIC ACTIVITIES FOR THE STUDY OF THE LIMIT OF A FUNCTION THROUGH APOS THEORY

José Javier Guerrero Maldonado
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. México
jjguerrerom@gmail.com

Lidia Aurora Hernández Rebollar
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. México
lhernan@fcfm.buap.mx

Resumen

En este trabajo se presenta el análisis de un conjunto de actividades relacionadas con el concepto de límite de una función desde la perspectiva de la Teoría APOE. La idea ha sido contribuir a la formación, mejoramiento y promoción de las estructuras mentales de docentes de matemáticas, respecto a un concepto fundamental del cálculo diferencial como lo es el del límite de una función y, en particular, en lo referente a las concepciones dinámica y métrica. Como parte de los integrantes del triángulo didáctio y ante la insuficiente información de las estructuras mentales de los profesores, surge el objetivo de usar la Teoría APOE para la selección y rediseño de un conjunto de actividades didácticas que contribuyan a que un grupo de profesores de nivel medio superior reconstruyan sus estructuras mentales relacionadas con este concepto.

Palabras claves: Actividades didácticas, Límite de una función, Pensamiento Matemático Avanzado.

Abstract

This paper presents an analysis of a set of activities about the limit of a function from the perspective of the APOS Theory. The objective has been to contribute to the formation, improvement and promotion of the mental structures of mathematics teachers about a fundamental concept of differential calculus such as the limit and in particular regarding its dynamic and metric conceptions. As members of the didactic triangle, the idea of using the APOS Theory in teachers of the upper middle level arises through the redesign of a set of didactic activities that contribute to face problematic situations where this concept is involved.

Key words: Didactic activities, Limit of a function, Mathematical Advanced Thinking.

Investigación e Innovación en Matemática Educativa (2020) Volumen 5
Recibido: Noviembre 15, 2019. Aceptado: Abril 8, 2020. Publicado: Abril 20, 2020.

1. INTRODUCCIÓN

El Cálculo contiene varios conceptos matemáticos importantes relacionados con procesos infinitos, dentro de los cuales se encuentra el límite de una función como uno de los primeros encontrados por el estudiante en el camino de su aprendizaje pre y universitario. En tal sentido, múltiples han sido las investigaciones que reportan dificultades para su comprensión. Por ejemplo, Hitt (2003) señala la presencia de diversos problemas de aprendizaje relacionados con el tratamiento del infinito, tanto en estudiantes como en profesores, no solo en el concepto de límite, sino también en la continuidad, la derivada y la integral.

La complejidad del análisis del límite de una función es tal que muchos de quienes lo estudian no logran superar el concepto de infinito potencial el cual marca la posibilidad de continuar indefinidamente; cabe suponer, de igual forma, que algunos docentes podrían tener dificultad tanto en su aprendizaje inicial como para su posterior enseñanza. La comprensión del límite de una función requiere de superar una concepción dinámica, la cual está relacionada con el infinito potencial, para alcanzar una concepción estática ligada fuertemente a la idea de infinito actual (Swinyard y Larsen, 2012).

En la presente investigación se plantea como objetivo analizar un conjunto de actividades didácticas sobre límites rediseñadas a partir de las propuestas por Tomàs (2014). Se busca estudiar la construcción del concepto de límite funcional para contribuir en la formación, mejoramiento y promoción del nivel estructural de profesores de matemáticas del nivel medio superior desde la perspectiva de la teoría APOE.

2. MARCO TEÓRICO

Para dar respuesta al objetivo de investigación elegimos APOE, la cual es una Teoría constructivista desarrollada por Dubinsky (1991) basada en el concepto de abstracción reflexiva, planteado por Piaget, para describir la construcción de conceptos matemáticos específicos en la educación superior.

Dicha teoría sienta su base en las estructuras mentales llamadas Acción, Proceso, Objeto y Esquema a las cuales obedece el acrónimo de la teoría con sus respectivas abstracciones o mecanismos de interiorización, coordinación, encapsulación, desencapsulación y generalización, los cuales conducen a la construcción de dichas estructuras. Para entender sus bases con detalle se remite al lector a Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktaç, Fuentes, Trigueros y Weller (2014); aquí se presenta un breve resumen.

En cuanto a las estructuras o concepciones, se tiene que la Acción es una transformación del objeto percibida por el individuo como algo externo a él. Es decir, la persona cuya comprensión se limita a una concepción de acción puede realizar dicha transformación solamente reaccionando a causas externas que le den detalles precisos sobre los pasos por dar.

Cuando una Acción es repetida y el individuo reflexiona sobre ella esta puede ser interiorizada en un Proceso. En este caso, se produce una construcción interna que realiza la misma Acción, pero ahora no está dirigida necesariamente por un estímulo externo. Quien ha construido un Proceso puede reflexionar sobre él, describirlo o reinvertir los pasos sin necesidad de volver a realizarlos.

Por ejemplo, se dice que un individuo ha alcanzado una concepción Proceso del límite de una función, si desarrolla la habilidad de ir más allá del cálculo de un número finito de valores aproximándose a un valor fijo; es decir, si es capaz de realizar cálculos e imaginar lo que sucede con un número infinito de pasos.

Cuando el sujetos reflexiona sobre operaciones que se aplican a un Proceso particular, toma conciencia del Proceso como una totalidad, realiza transformaciones (Acciones o Procesos) que puedan actuar sobre él y puede construir esas transformaciones, entonces piensa en el Proceso como un Objeto. Aquí decimos que el Proceso ha sido encapsulado (mecanismo) en un Objeto. De acuerdo con Cottrill et al (1996) esta concepción se da cuando el individuo piensa en el límite de la suma de dos funciones como Objetos, forma la suma coordinando los Procesos de las dos funciones y encapsula el proceso resultante para obtener el límite de la función suma.

Finalmente, una colección de Acciones, Procesos y Objetos pueden ser organizados de forma estructurada en un Esquema, de tal manera que el individuo contará con una forma de decidir qué estructura mental utilizar al tratar con situaciones matemáticas problemáticas referentes al concepto en cuestión.

El mecanismo mental llamado interiorización se puede considerar como la transferencia de una actividad específica del mundo externo al mundo interno del individuo, en otras palabras, el individuo pasa de tener ayudas externas a tener un control interno del concepto. El individuo posee la capacidad de imaginar la realización de los pasos sin realizarlos de manera explícita, puede saltar los pasos e incluso revertirlos.

El segundo mecanismo de coordinación es indispensable en la construcción de algunos Objetos. Dos Objetos pueden ser desencapsulados en los procesos que le dieron origen, sus Procesos coordinados y el Proceso, que resulta de esta coordinación, encapsulado para formar un nuevo Objeto.

El mecanismo de encapsulación ocurre cuando un individuo aplica una acción a un proceso; consiste en la conversión de un proceso (estructura dinámica) en un objeto (estructura estática). En otras palabras, es la transformación mental de un proceso en un objeto cognitivo. Este objeto cognitivo puede ser considerado como un objeto (físico o mental) y a su vez ser transformado por acciones y procesos.

La desencapsulación se puede dar una vez que un individuo ha encapsulado un proceso en un objeto y este puede invertir el mecanismo para regresar al proceso que lo generó. Así, el individuo puede regresar al proceso siempre que lo desee.

Finalmente, la generalización se relaciona con la capacidad del individuo para aplicar un determinado esquema en un contexto distinto y se caracteriza por determinar los alcances de sus construcciones. En este mecanismo los esquemas no cambian, pero los objetos pueden ser asimilados por un esquema para ser contextualizados en otros contextos. Por ejemplo, cuando un estudiante utiliza el esquema de la factorización, puede generalizar dicho esquema para factorizar polinomios.

2.1 Descomposición genética

Al estudiar cómo un individuo puede aprender un concepto matemático en particular, un ingrediente esencial que debe ser provisto por el investigador en el campo de la Teoría APOE, es el análisis de las *estructuras mentales específicas* que necesita construir. La descripción resultante de dicho análisis es la llamada descomposición genética (DG) del concepto en cuestión, la cual no necesariamente es única; puede ser refinada o mejorada, a partir de su puesta a prueba con diferentes individuos.

Una DG del concepto de límite de una función es la planteada por Cottrill et al. (1996), quienes presentan su análisis con la idea de que los estudiantes construyan una definición formal de este concepto. A continuación se describe la DG planteada por los autores quienes plantearon seis pasos en una versión preliminar y siete luego de un refinamiento:

- 1R: La Acción de evaluar la función f en un solo punto x considerado cercano o incluso igual a un valor a.
- 2R: la Acción de evaluar la función f en unos pocos puntos, donde cada punto sucesivo está más cercano al valor de a.
- 3R: la construcción de un Proceso coordinado de Esquema:
    - Interiorización de la Acción del paso 2R para construir un Proceso en el dominio donde x se aproxima al valor a.
    - Construcción de un Proceso en el rango en el cual y se aproxima a L.
    - Coordinación de los pasos a y b por medio de la función.
- 4R: encapsulación del Proceso del paso 3R(c) de tal forma que el límite se convierte en un Objeto al cual se le puede aplicar una Acción.
- 5R: reconstrucción del Proceso del paso 3R(c) en términos de los intervalos y desigualdades. Esto es hecho al introducir estimados numéricos del enfoque de proximidad de la forma $0 < |x - a| < \delta$ y $0 < |f(x) - L| < \varepsilon$
- 6R: aplicación de una cuantificación de dos niveles de Esquema para conectar el Proceso descrito en el Paso 5R a la definición formal.

https://doi.org/10.46618/iime.70

- 7P: aplicación de una concepción finalizada de ε-δ para situaciones específicas.

2.2 Aproximación dinámica de límite

En este caso se hace referencia a la concepción dinámica del límite de una función como una *aproximación óptima* definida por Blázquez y del Rincón (2002) como: "Sea *f* una función y *a* un número real, el número *L* es el límite de la función *f* en un punto *a* y se debiera escribir $\text{Lím}_{x \to a} f(x)$, si cuando *x* se acerca al número *a* más que cualquier aproximación, sus imágenes *f(x)* se acercan a *L* más que cualquier otra aproximación fijada" (Pág. 67).

Es decir, la concepción dinámica de límite de una función en un punto implica construir un proceso en el dominio donde la variable *x* se aproxima a un valor *a* y otro en el rango donde *f(x)* se aproxima al valor del límite *L*, y utilizar la función para coordinar ambos procesos. Cabe señalar aquí la definición de concepción métrica del límite de una función en términos de desigualdades proporcionada por Weierstrass: "sea *f* una función y el valor *a* un número real, el número *L* es el límite de la función *f* en el punto *a* y se debiera escribir $Lím_{x \to a} f(x)$, si cuando |*x*-*a*| se aproxima a cero se tiene que |*f(x)*-*L*| se aproxima igualmente a cero".

2.3 Metodología de la Teoría APOE

Una de las ventajas de la Teoría APOE es que cuenta con su propio paradigma de investigación, esquematizado en la figura 1, el cual ha sido aplicado a investigaciones sobre conceptos de pre-cálculo, cálculo, matemáticas discretas y álgebra abstracta. Cuenta con tres componentes claramente definidos: el análisis teórico, el diseño e implementación de instrumentos de enseñanza y la recolección y análisis de datos.

De acuerdo con este paradigma, el trabajo comienza con un análisis teórico, el cual constituye lo que hemos definido como DG y, en general, se basa inicialmente en el conocimiento de los investigadores del concepto en cuestión y de la Teoría APOE. Los estados del ciclo son recorridos o aplicados de acuerdo al estudio y, al repetirse, dicho análisis teórico hace uso de los datos obtenidos del ciclo anterior.

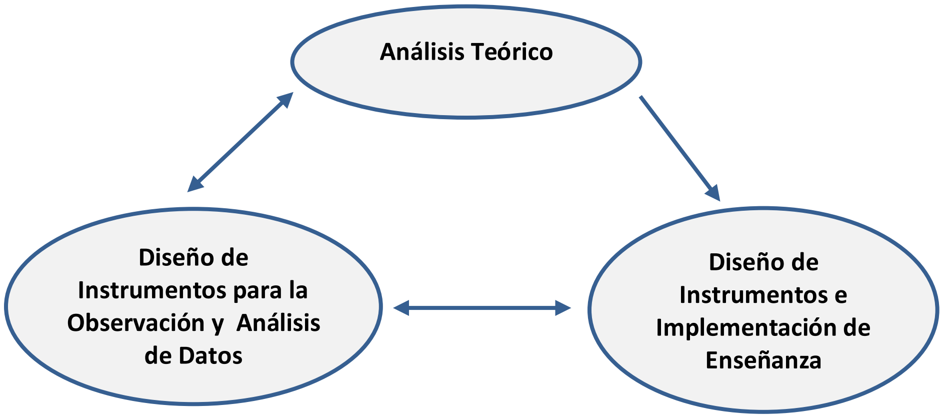

Figura 1. El Ciclo de Investigación (Adaptado de Asiala et al., 1996)

La aplicación de este ciclo de investigación permite obtener una descripción más detallada de la forma como un individuo puede construir un determinado concepto matemático; esto porque tanto el análisis teórico como los instrumentos se van refinando y por ende mejorando como resultado del análisis cíclico de los datos, producto del desarrollo de la tercera componente.

Una vez establecido el modelo hipotético que describe las estructuras y los mecanismos mentales que un individuo podría necesitar para construir un concepto matemático especifico, es decir, la DG preliminar explicada anteriormente, el Ciclo propone el *diseño de un modelo de enseñanza* con la idea de seguir la ruta o camino cognitivo descrito por la misma, de tal forma que se pueda construir el concepto basado en los principales elementos descritos en el análisis teórico.

En particular, en este escrito se reporta el análisis de contenido de un conjunto de actividades didácticas que originalmente propuso Tomàs (2014) para observar las estructuras y mecanismos mentales de estudiantes de bachillerato. Dichas actividades se rediseñaron para observar lo mismo, pero en docentes del nivel medio superior y luego para buscar una reconstrucción del concepto en los mismos docentes. Por esta razón, se proponen dos bloques de actividades, el primero para observar las estructuras y mecanismos mentales que han construido los profesores hasta ese momento y el segundo bloque para promover una reconstrucción de dichas estructuras.

3. ANÁLISIS DE CONTENIDO DE LAS ACTIVIDADES DIDÁCTICAS

3.1 Descripción general de las actividades

En las actividades se utiliza la representación analítica, tabular y gráfica del concepto de función, las cuales sirven como recurso para que los profesores construyan o re-construyan las concepciones de aproximación dinámica y métrica del límite de una variedad de funciones dadas. En algunos casos se espera que los docentes observen la aproximación de las imágenes de una función mientras los valores del dominio se aproximan a un número, representando esta información en una tabla y, en otros casos, se presenta este proceso en una representación gráfica.

Las actividades de ambos bloques se pueden clasificar en tres grupos conforme a su intención. El primer grupo de actividades (de la uno a la cuatro) tiene el objetivo de evaluar la concepción del límite de una función pero como aproximación dinámica. Las producciones de los docentes nos permitirán saber si ellos se ubican en la concepción Acción o Proceso del concepto en cuestión pero en el sentido de aproximación dinámica.

El segundo grupo lo constituye la actividad 5 del segundo bloque que hace referencia a los elementos de la aproximación métrica del límite de una función. Aquí se pretende obtener información sobre la capacidad de coordinar (o no) las aproximaciones en términos de desigualdades al ser presentadas como estimaciones numéricas de la proximidad (vecindad) en el punto de interés.

El tercer grupo lo constituye la actividad 6 de ambos bloques, pensada para identificar si quienes han encapsulado la noción dinámica de límite son capaces de desencapsular dicho proceso revirtiéndolo. Es decir, se pretende analizar si los maestros que comprendan el límite de una función como proceso (Dubinsky y Tall, 2002), son capaces de resolverla partiendo de unos límites conocidos. Para tal efecto, ellos deben encontrar la gráfica de una función que cumpla las condiciones dadas, esto al poner en funcionamiento el mecanismo cognitivo de "inversión" en el sentido de desempaquetar la información dada por la representación analítica del límite para obtener información del comportamiento de la gráfica de la función.

3.2 Análisis de contenido del primer bloque de actividades

1. Definir el concepto de límite de una función en un punto y ¿qué se entiende al señalar que un límite no existe?

Su planteamiento busca tener una percepción inicial del dominio o recuerdo del concepto o la no existencia de límite. En las respuestas de los profesores se clasifica como natural que a su vez puedan utilizar el concepto de aproximación y la simbólica en términos de vecindades o de épsilon y delta.

De las posibles conceptualizaciones de límite funcional, la informal ha sido más perdurable en la memoria de los estudiantes, luego se tienen la métrica y de aproximación como posible respuesta más esperada (Blázquez, Gatica y Ortega, 2008).

Resulta evidente que los procesos de enseñanza-aprendizaje tienen que ver con el registro y almacenamiento de la información cuyo uso será posible si se accede en el momento y forma apropiada, guardando relación con las estructuras mentales presentadas en cada caso de resolución o definición del concepto en cuestión.

La segunda actividad utiliza una representación numérica:

2. Dada la Tabla 1 para f(x)=-1, analizarla, rellenarla y responder.

x	3.9	3.99	3.999	4	4.0001	4.001	4.01
$f(x)$							

Tabla 1: para rellenar y responder la actividad 2

Por ser la función una constante, esta actividad busca determinar si se presenta dificultad para determinar la imagen de los valores dados. Para completar la tabla se lleva a cabo una Acción conforme a la DG. Además, contiene un inciso:

i. ¿Cómo es el comportamiento de la función f(x) con relación al de la variable, al ésta crecer o decrecer?

La idea es evaluar la coordinación del proceso de aproximación en el dominio cuando *x* tiende a *4* con el proceso de aproximación en el rango cuando *f(x)* tiende a *-1* con el detalle de su comportamiento homogéneo por ser constante.

La tercera actividad se presenta en una representación algebraico-numérica:

3. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x<0 \\ 2 & x \geq 0 \end{cases}$ *completar la tabla 2:*

x	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	0	0.0001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$									

Tabla 2: para rellenar y responder la actividad 3

Luego se pide:

i) *Calcular el* $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

Para responder y explicar si:

ii) ¿Es igual el comportamiento de la imagen a medida que la variable x se aproxima a cero por la izquierda que por la derecha?

Al igual que en la actividad anterior se debe realizar la Acción de evaluar una función en algunos valores del dominio que se aproximan a cero; posteriormente, reflexionar sobre el límite le permite reflexionar sobre su existencia o no. Después, con el inciso ii) se observa si el profesor coordina o no el proceso de aproximación en el dominio cuando *x* tiende a cero por la izquierda con su respectiva aproximación en el rango cuando *f(x)* tiende a uno o cuando tiende por la derecha con el proceso de aproximación en el rango cuando *f(x)* tiende a dos.

La cuarta actividad se plantea en la representación gráfica con la figura 2.

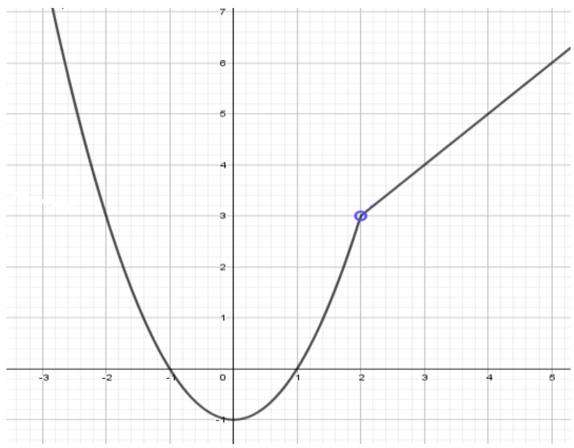

Figura 2. Gráfica de actividad cuatro para ser analizada

Para responder tres ítems:

i y ii. ¿Cuando x tome sucesivamente los valores establecidos de 0.5, 1, 1.3, 1.5, 1.7, 1.9,… en el primer caso y de 3.5, 3, 2.7, 2.5, 2.3, 2.1,…? en el segundo, ¿a qué número se aproximan los valores de la función f(x) correspondiente?

Éstos son planteados para establecer la coordinación o no del proceso de aproximación en el dominio cuando *x* tiende a 2 tanto por la izquierda como por la derecha, al igual que el tercer inciso.

iii. ¿Cómo es el comportamiento de la imagen con relación a la variación de x?

Éste se plantea con el mismo objetivo de las dos actividades anteriores pero de forma gráfica, pudiendo concluir si existe o no el límite al analizar el proceso de acercamiento hacia un punto de discontinuidad.

La quinta actividad es en representación algebraica.

5. Calcular el $\lim_{x \to \infty} \frac{4+7x-5x^2}{-1-10x^2}$

Se pide explicar el procedimiento aplicado para determinar si ha interiorizado el caso del límite de una función racional con iguales exponentes en el numerador y denominador, pudiendo aplicar teoría de límites o Regla de L´Hôpital si fuera el caso para su resolución.

La sexta actividad fue presentada en una representación algebraico-numérica.

6. Dada una función $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x<0 \\ -2x-3 & x \geq 0 \end{cases}$, *calcular los valores de la misma cuando x toma los valores señalados en la Tabla 3 y completar el resto de valores calculando los valores absolutos indicados.*

x	$f(x)$	$\lvert x-0 \rvert$	$\lvert f(x)+3 \rvert$
0,1			
0,01			
0,001			
0,0001			
…		…	
-0,0001			
-0,001			
-0,01			
-0,1			

Tabla 3: para ser rellenada y analizar actividad 6.

Luego se plantean dos preguntas:

i. ¿Qué tan próximos a cero deben de estar los valores de x, *para que la diferencias de* $f(x)-(-3)$, *en valor absoluto, sean menores que 0.002?*

ii. Con la información obtenida hasta ahora, ¿podrías indicar cuál es el límite de la función f en el punto $x = 0$?

Con estas preguntas se busca determinar la coordinación o no de las aproximaciones en el dominio con las del rango en términos de desigualdades. Los valores de *x* deberían estar a 0.0002 de 3 por la izquierda y deben ser mayores a 3.9998 por la derecha, además por la derecha la diferencia no es menor a 0.0002 en ningún caso.

Al responder el último inciso de esta actividad se espera que manifiesten formalmente la existencia del límite, al tener en cuenta que cuando los valores de la diferencia en valor absoluto entre los valores de *x* y *3* se aproximan a 0, los valores de la diferencia en valor absoluto entre los valores de *f(x)* y -3 también se aproximan a 0 por la izquierda, pero no por la derecha. Entonces cuando *x* tiende a 3, el límite de la función *f(x)* no existe o pueden manifiestar la existencia del límite solo por la izquierda.

3.3 Análisis de contenido del segundo bloque de actividades

Las actividades 1 y 4 son planteadas en modo algebraico por la forma en que se presenta la función, y numérico por el manejo de la información requerida por el maestro para rellenar la tabla mostrada. Su propósito es promover las estructuras y mecanismos mentales de los tres primeros pasos de la DG. Además de que la primera actividad cuenta con cuatro incisos y la cuarta con cinco y de que son funciones diferentes, la diferencia entre ambas actividades radica en los límites laterales en cuanto a su coincidencia en el primer caso y la no coincidencia en el segundo.

La primera suministra una función:

1. *Si* $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ *completar la Tabla 4*:

x tiende a… $\longrightarrow$ $\longleftarrow$ *x* tiende a…

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	2.0001	2.001	2.01	2.1
f(x)								

f(x) tiende a… $\longrightarrow$ $\longleftarrow$ *f(x)* tiende a…

Tabla 4: para ser rellenada y analizar actividad 1.

De igual forma la cuarta actividad:

4. Siendo $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x<0 \\ -2x-3 & x \geq 0 \end{cases}$ *completar la Tabla 5*:

x	-0.1	-0.01	0.001	-0.0001…	0.0001	0.001	0.01	0.1
f(x)								

Tabla 5: para ser rellenada y realizar la actividad 4.

Las actividades 1 y 4 tienen la misma pregunta en el primer inciso:

i. ¿A cuál valor se aproxima x?

Tiene por objetivo que los maestros realicen las acciones de evaluar las funciones dadas en los valores de *x* de la tabla y que reflexionen sobre el comportamiento de estas sucesiones en el dominio. Luego se tiene el segundo inciso:

ii. ¿A qué número se aproxima la función f(x)?

Busca que observen la aproximación en el rango de una secuencia numérica a un valor L, que es dos en el caso de la actividad 1 y cero en el de la cuarta. Luego se pide:

iii. Describir el comportamiento de la función con relación al de la variable x.

Esto para determinar si pueden asociar o no el proceso de aproximación en el rango a partir del cual los valores de *f(x)* se aproximan cada vez más a 0.25 en la primera actividad; en cuanto a la cuarta la aproximación por la izquierda es hacia uno y por la derecha a -3.

iv. Decir si es posible, ¿cuál es el límite de la función en x=0?

El cuarto inciso, incluido solo en la cuarta actividad, promueve la reflexión sobre la no existencia del límite cuando *x* tiende a cero o la existencia de los límites laterales no coincidentes para concluir que el límite no existe. Para responder esta pregunta los profesores deberán construir una estructura mental de proceso del límite en su concepción dinámica.

La segunda actividad está planteada en la representación numérica, donde se suministra la Tabla 6, la cual debe ser analizada para responder sus cuatro incisos.

2. A partir de la tabla 6, responder con claridad en cada caso

x	3.99	3.999	3.9999	3.99999	…	4.00001	4.0001	4.001	4.01
f(x)	15.530	15.5254	15.5015	15.50001	…	14.00003	14.0003	14.003	14.03

Tabla 6: para analizar y responder actividad 2.

i. ¿A cuál valor se aproxima x?

Tiene por objetivo promover la observación de la aproximación de una secuencia numérica dada en el dominio, a un número, que en este caso es a cuatro.

ii. ¿A qué número se aproxima la función de f(x)?

Con esta pregunta se busca promover la observación de la aproximación de una secuencia numérica en el rango tal que por la izquierda se aproxima a 15.5 y por la derecha a 14.

iii. Describir el comportamiento de la función f(x) con relación al comportamiento de la variable x.

En tal sentido se promueve la coordinación del proceso de aproximación en el dominio cuando *x* tiende a 4 por la izquierda, con el proceso en el rango cuando *f(x)* tiende a 15.5, así como en el dominio cuando *x* tiende a 4 por la derecha con el proceso de aproximación en el rango cuando *f(x)* tiende a 14.

iv. De ser posible decir cuál es el $\lim_{x \to 4} f(x)$

Es planteada para que manifiesten la no existencia del límite cuando *x* tiende a 4, pues las aproximaciones laterales no coinciden.

La actividad 3 utiliza el registro gráfico al presentar una función *f(x)* como la mostrada en la figura 3 para responder y explicar cuatro incisos. Los dos primeros coinciden con análisis anteriores:

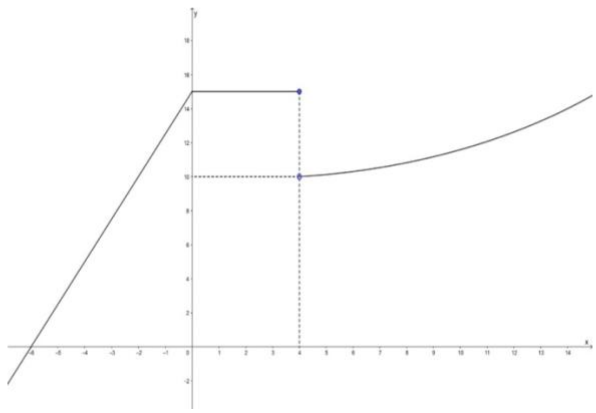

Figura 3. Gráfica de la actividad tres para ser analizada

iii. Describir el comportamiento de la función f(x) en relación con el comportamiento de la variable x.

Es planteada para promover la coordinación del proceso de aproximación en el dominio cuando *x* tiende a 4 por la izquierda con el proceso en el rango cuando *f(x)* tiende a 15, así como en el dominio cuando *x* tiende a 4 por la derecha cuando *f(x)* tiende a 10. Al tratarse de funciones por partes, los procesos encapsulados en los incisos i y ii permiten realizar acciones sobre el concepto de límite.

iv. De ser posible mencione ¿cuál es el límite de la función en x=4?

En este último inciso se busca promover la manifestación formal de la no existencia del límite cuando *x* tiende a 4, el proceso de aproximación de funciones por partes y la no coincidencia de los límites laterales permite determinar si el maestro se encuentra en la estructura Objeto.

Se presenta la quinta actividad en el registro numérico con una tabla para ser completada y dos incisos, haciendo referencia a la coordinación métrica en términos de desigualdades del límite de una función en un punto:

x	*f(x)*	*|2.5-x|*	*|3.5-f(x)|*
2.45	3.35		
2.49	3.47		
2.499	3.497		
2.4999	3.4997		
2.49999	3.49997		
2.499999	3.499997		
…	…		
2.500001	2.000002		
2.50001	2.00002		
2.5001	2.0002		
2.501	2.002		
2.51	2.020		
2.55	2.1		

Tabla 7: para analizar y responder actividad 5.

Al completar la tabla se fomenta la evaluación de sucesiones de valores que resultan de las diferencias en valor absoluto, tanto respecto a *x* como a *f(x)*. El primer inciso pregunta:

i. ¿Cuán próximos han de estar los valores de x a 2.5 para que la diferencia de 3.5 - f(x) en valor absoluto sea menor a 0.001?

La intención de este inciso es promover la coordinación del proceso de reconstrucción de aproximación en el dominio con el del rango en términos de desigualdades, realizado con la introducción de estimaciones numéricas en la cercanía de dichas aproximaciones al valor en estudio, en este caso 2.5. Aquí los valores de *x* han de estar a 0.0001 de 2.5 por la izquierda o ser mayores a 2.4999 por la derecha pero la diferencia *3.5* - *f(x)* en valor absoluto no siempre será menor a 0.001.

ii. Con la información del anterior inciso, ¿cuál es el límite de la función f(x) en el punto donde x=2.5?

Es decir, calcular el $\lim_{x\to 2.5} f(x)$. Su objetivo es fomentar la reflexión sobre la existencia del límite, con el atenuante de que cuando los valores de las diferencias en valor absoluto entre los valores de *x* y 2.5 se aproximan a cero, los valores de las diferencias en valor absoluto entre *f(x)* y 3.5 también se aproximan a cero, pero solo cuando *x* se aproxima a 2.5 por la izquierda más no por la derecha. Esto indica que *x* tiende a 2.5 y que el límite de la función no existe.

La última actividad se presenta en el registro gráfico.

6. Representar una función que cumpla con las tres condiciones siguientes: i) f(2)=2, ii) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 3$ *y iii)* $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$

Esta tiene como principal objetivo evaluar la capacidad de realizar el mecanismo de inversión del concepto del límite de una función en un punto dado en forma analítica al coordinar los procesos de aproximación en el dominio con la aproximación en el rango con sus respectivas inversiones. Lo anterior es al llevar a cabo la acción de plantear la gráfica que representa el valor de la función en un punto y que coordina los procesos de aproximación cuando *x* tiende a 2 en el dominio con el de *f(x)* cuando tiende a 3 por la derecha o a 1 por la izquierda.

4. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado el análisis de contenido de un conjunto de actividades relacionadas con el límite de una función que demuestra cómo se corresponden con una descomposición genética que describe la construcción de este concepto. Se detalla la intención de cada una de ellas y las estructuras y mecanismos mentales que se pretende observar y promover cuando sean implementadas.

El diseño de las actividades parte de Tomàs (2014) quien aplicó unas similares a un grupo de estudiantes del nivel medio superior. Así, las modificaciones hechas para esta investigación se corresponden con el interés de evaluar los mecanismos y estructuras mentales de un grupo de docentes de nivel medio superior, así como de lograr un desarrollo respecto de las estructuras mentales iniciales a través de un segundo bloque de actividades.

Consideramos valioso presentar esta propuesta y su debida justificación para que otros investigadores o formadores de profesores la apliquen y cuenten con un marco de análisis de su efecto. Una propuesta de actividades fundamentadas en una teoría cognitiva como lo es APOE permite un análisis profundo de los efectos que estas producirán en quienes las resuelvan. El diseño es guiado por la teoría y esto contribuye fuertemente al éxito, ya que se basa en un modelo teórico previamente validado cuyo objetivo es la construcción del concepto en estudio.

Coincidimos con Trigueros y Oktac (2019) cuando afirman que el diseño de actividades juega un papel fundamental en la teoría APOE y con Sierpinska (2004) quien lo considera como una las responsabilidades más importantes de la educación matemática.

Creemos firmemente que la actividad de enseñanza del concepto de límite de una función, en el nivel medio superior, puede ser modificada al promover el desarrollo de estructuras mentales más elaboradas en los profesores de este nivel educativo, a través de la aplicación de este tipo de actividades fundamentadas en la Teoría APOE.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education.* Springer Science & Business Media.

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., & Schwingendorf, K. E. (1996). The development of students' graphical u Asiala nderstanding of the derivative. *The Journal of Mathematical Behavior*, 16(4), 399-431.

Blázquez, S., y del Rincón, T. (2002). *Nueva definición del límite funcional. UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, (30), 67-84.

Blázquez, S., Gatica, S. N., & Ortega, T. (2008). Concepto de límite funcional: aprendizaje y memoria. *Contextos Educativos. Revista de Educación*, (11), 7-22.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *The Journal of Mathematical Behavior*, 15(2), 167-192.

Dubinsky, E. (1991). Constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics. In *Epistemological foundations of mathematical experience* (pp. 160-202). Springer, New York, NY.

Dubinsky, E., & Tall, D. (2002). *Advanced Mathematical Thinking and the Computer in Advanced Mathematical Thinking* (pp. 231-248). Springer, Dordrecht.

Hitt, F. (2003). El concepto de infinito: obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones. *Matemática Educativa. Aspectos de la investigación actual* (pp. 91-111). México: Fondo de Cultura Económica.

Sierpinska, A. (2004). Research in mathematics education through a keyhole: Task problematization. *For the Learning of Mathematics*, *24*(2), 7-15.

Swinyard, C., & Larsen, S. (2012). Coming to understand the formal definition of limit: Insights gained from engaging students in reinvention. *Journal for Research in Mathematics Education, 43(4)*, 465-493.

Tomàs, J. P. (2014). *Análisis de la comprensión en estudiantes de bachillerato del concepto de límite de una función en un punto*. Tesis Doctoral, Universitat d'Alacant-Universidad de Alicante. España.

Trigueros, M. & Oktaç, A. (2019). Task Design in APOS Theory. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *15*, 43-55.